P. FATOU

Sur les équations fonctionnelles

Bulletin de la S. M. F., tome 48 (1920), p. 208-314
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1920__48__208_1>

SUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES;

PAR M. P. FATOU.

(TROISIÈME MÉMOIRE.)

CHAPITRE VI.

38. Considérons un domaine invariant par une substitution rationnelle et contenant à son intérieur un point double attractif α; si ce domaine D ne contient pas tous les points du plan, il coïncide alors avec le domaine immédiat du point α, tel que nous l'avons défini dans les Chapitres précédents. Si D est simplement connexe (c'est-à-dire, comme on l'a vu précédemment, si les branches de la fonction $R_{-1}(z)$ restreinte au domaine D se permutent circulairement entre elles le long d'un chemin simple intérieur à D et infiniment voisin de sa frontière), on peut en effectuer la représentation conforme et biunivoque sur un cercle du plan de la variable t, ayant pour centre l'origine et l'unité pour rayon, de manière que le point double $z = \alpha$ corresponde à $t = 0$, et que deux directions

de droites arbitraires issues de ces deux points homologues se correspondent également. L'étude approfondie de cette représentation conforme conduit à des propriétés remarquables de la frontière de D qui feront l'objet de ce Chapitre. Nous supposerons, pour plus de commodité, que D ne renferme pas le point à l'infini à son intérieur. Soient $t = g(z)$ et $z = h(t)$ les fonctions, holomorphes respectivement dans D et dans $\Delta(|t| < 1)$, qui effectuent la représentation conforme de D sur Δ et réciproquement. A la substitution $z_1 = R(z)$, qui transforme D en lui-même, correspond la substitution $t_1 = \varphi(t)$ qui transforme Δ en lui-même. La fonction $\varphi(t) = g(z_1) = g\{R[h(t)]\}$ est holomorphe dans Δ, puisque $R(z)$ est holomorphe dans D; on a, en outre, $\varphi(0) = 0$, puisque $R(\alpha) = \alpha$. A un point z_1 intérieur à D, l'équation $z_1 = R(z)$ fait correspondre ν points z intérieurs à $D(\nu > 1)$; corrélativement, l'équation $t_1 = \varphi(t)$, le point t_1 étant donné et intérieur à Δ, admet ν points racines intérieurs à Δ; ces ν points représentent les ν branches d'une même fontion $\varphi_{-1}(t_1)$ qui se permutent entre elles dans D; elles se permutent circulairement le long d'une circonférence infiniment voisine de la frontière de Δ. Les points critiques de la fonction $\varphi_{-1}(t)$ dans Δ sont les homologues des points critiques de la fonction $R_{-1}(z)$ restreinte à D; ils sont donc en nombre fini. Remarquons que $|t|$ et $|\varphi(t)|$ tendent en même temps vers l'unité, et enfin que le multiplicateur de la substitution $t_1 = \varphi(t)$ au point double $t = 0$ est égal au multiplicateur de la substitution $z_1 = R(z)$ au point double α.

Ces remarques faites, qui sont à peu près évidentes ou facilement vérifiables, nous allons démontrer une proposition plus cachée, à savoir que $\varphi(t)$ est rationnelle. Considérons une circonférence c de rayon $r < 1$, concentrique à Δ et contenant à son intérieur les points critiques de $\varphi_{-1}(t)$; les ν branches de cette fonction sont donc holomorphes en chaque point intérieur à la couronne

$$\Gamma(r < |t| < 1),$$

et d'ailleurs bornées dans cette couronne; donc, en tout point de la circonférence $C(|t| = 1)$, sauf au plus aux points d'un ensemble de mesure nulle, ces fonctions prennent une valeur déterminée suivant les chemins faisant des angles finis avec C; il y a donc dans tout intervalle de C des points pour lesquels cette propriété existe [1]; il y en a même pour lesquels les valeurs limites obtenues diffèrent de valeurs données à l'avance en nombre fini [2]. Soit a un tel point sur C, et traçons dans la couronne Γ la coupure radiale ab qui la transforme en un domaine simplement connexe $\overline{\Gamma}$; les ν branches de $\varphi_{-1}(t)$ donnent comme images de $\overline{\Gamma}$ ν domaines distincts juxtaposés dans la couronne comprise entre la circonférence C et la courbe c_{-1} transformée de la circonférence c; l'un de ces domaines aura une frontière constituée par un arc pq de C, un arc rs de c_{-1} et deux courbes rp et sq analytiques, sauf peut-être en p et q, mais aboutissant en ces deux points de manière que tous les points de cette frontière sont des points simples et *accessibles*. Appelons $\overline{\Gamma}_{-1}$ ce domaine; soit m un point de l'arc pq et λ un chemin continu, formé par exemple de segments de droites, aboutissant au point unique m en restant à l'intérieur de $\overline{\Gamma}_{-1}$; le point t décrivant λ, le point $t_1 = \varphi(t)$ décrit un chemin λ_1 intérieur à $\overline{\Gamma}$ et tendant vers la circonférence C; si λ_1 avait au moins deux points limites distincts m_1 et m'_1 sur C_1 en décrivant des points m_1 et m'_1 comme centres, deux petites circonférences extérieures l'une à l'autre, on voit que λ_1 comprendrait une infinité d'arcs joignant un point de la première à un point de la seconde et tendant vers C; ces arcs auraient pour limite tout un arc σ de C et tout rayon aboutissant en un point de σ couperait λ_1 en une infinité de points tendant vers C. Or, on peut toujours choisir un tel rayon ρ_1 de manière que la fonction $\varphi_{-1}(t_1)$, quand t_1 décrit ρ_1, tende vers une valeur déterminée et même distincte d'une valeur donnée à l'avance; le point t décrira alors dans $\overline{\Gamma}_{-1}$ un chemin ρ aboutissant en un point unique n de C et distinct si l'on veut de m; or ceci est impossible, car ρ_1 rencontre une infinité de fois λ_1 en des points infiniment voisins de C; donc ρ rencontrerait λ en des points infiniment voisins de C, ce qui est incompatible avec le fait que λ et ρ intérieurs à Δ aboutissent respectivement en deux points m et n distincts. Il en résulte que $\varphi(t)$ prend une valeur unique et bien déterminée en tout

---

[1] P. Fatou, *Séries trigonométriques et séries de Taylor* (*Acta mathematica*, t. XXX, 1906, p. 371).

[2] *Ibid.*, p. 394. Voir également : F. et M. Riesz, *Ueber die Randwerte einer Analytischen Funktion* (4e congrès des mathématiciens scandinaves, Stockholm, 1916).

point m de l'arc pq distinct de p et q; le même raisonnement s'applique d'ailleurs aux ν arcs analogues à pq; quant aux extrémités de ces arcs, on peut toujours disposer de la coupure ab de manière à les remplacer par d'autres qui soient toutes distinctes des premières, en vertu de la remarque faite plus haut et extraite de notre Mémoire déjà cité. On voit donc que $\varphi(t)$ prend une suite continue de valeurs sur C, dont les points représentatifs appartiennent eux-mêmes à C. Le mode de démonstration précédent est dû à M. Carathéodory [1].

Ce point étant acquis, le principe de *prolongement par symétrie* donne immédiatement le résultat annoncé. Au point t intérieur à Δ, faisons correspondre le point $t' = \frac{1}{\bar{t}}$, $\bar{t}$ étant l'imaginaire conjuguée de t; ces deux points sont l'image l'un de l'autre par rapport au cercle, c'est-à-dire deux points homologues dans l'inversion de centre o et de puissance égale à 1. Considérons alors la fonction de t' définie par $\Phi(t') = \frac{1}{\bar{\varphi}(t)}$, $\bar{\varphi}(t)$ étant la quantité imaginaire conjuguée de $\varphi(t)$. La fonction $\Phi(t')$ ainsi définie à l'extérieur du cercle est une fonction analytique uniforme n'ayant comme singularités à distance finie ou à l'infini que des pôles qui sont les images des zéros de $\varphi(t)$. D'autre part, elle prend sur la circonférence unité une suite continue de valeurs qui sont les mêmes que celles de la fonction $\varphi(t)$ aux mêmes points. Il s'ensuit que cette fonction est le prolongement analytique de $\varphi(t)$ à l'extérieur du cercle; on sait, en effet, qu'une fonction continue dans un domaine et analytique en tout point de ce domaine, sauf peut-être sur une droite, est encore analytique aux points de cette droite (Painlevé).

Il résulte de cette analyse que la substitution $t_1 = \varphi(t)$ est une substitution rationnelle à cercle fondamental de première espèce. En effet, elle est rationnelle puisque $\varphi(t)$ n'a d'autres singularités que des pôles dans tout le plan; elle laisse, d'autre part, invariants l'intérieur, l'extérieur et la circonférence du cercle Δ. Enfin, elle admet un point invariant intérieur qui est l'origine et par

---

(1) CARATHÉODORY, *Untersuchungen über die Konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten* (*Math. Annalen*, t. LXXII, 1912, p. 107-144).

suite également un point invariant extérieur qui est le point à l'infini.

La démonstration précédente peut être rendue plus élémentaire dans le cas particulier qui est d'ailleurs le plus important au point de vue des applications qui suivent, où l'on suppose *a priori* que le domaine D est limité par un contour formé d'un nombre fini d'arcs réguliers de courbes analytiques. Dans ce cas, on sait démontrer d'une manière élémentaire que les points frontières se correspondent un à un dans la représentation conforme de D sur un cercle ([1]). Si l'on fait décrire à t un chemin aboutissant en un point de C, $z = h(t)$ décrit un chemin aboutissant en un point déterminé de la frontière de D; il en est de même pour $z_1 = R(z)$, puisque R est rationnelle; donc $t_1 = g(z_1)$ décrit aussi un chemin aboutissant en un point bien déterminé de la circonférence; $\varphi(t)$ est donc continue sur C et l'on achève la démonstration comme plus haut.

39. Nous allons maintenant considérer le cas où le domaine invariant D est le domaine immédiat d'un point double α de multiplicateur égal à $+1$. Dans ce cas, α appartient à la frontière de D qui n'a pas de point invariant intérieur (on suppose toujours D simplement connexe). On fera donc correspondre le centre du cercle Δ à un point quelconque intérieur à D. La démonstration précédente est toujours valable, et l'on a encore en posant $z = h(t)$ l'équation fonctionnelle

$$R[h(t)] = h[\varphi(t)],$$

la substitution $t_1 = \varphi(t)$ étant cette fois une substitution rationnelle qui admet le cercle fondamental Δ, mais sans point invariant intérieur. Le point α est un point accessible de D auquel aboutissent des chemins intérieurs à D et de plus invariants par la substitution $z_1 = R(z)$. Soit un chemin de cette espèce L qui contient les conséquents $z_1, z_2, \ldots, z_n \ldots$ d'un quelconque z de ses points, lesquels tendent vers α; à ce chemin L va correspondre dans le plan des t un chemin l intérieur à Δ et aboutissant en un point déterminé θ de C, de sorte que l contenant t contient aussi

([1]) Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 276-77.

$t_1 = \varphi(t), \ldots, t_n = \varphi(t_{n-1}), \ldots, t, t_1, \ldots, t_n$ ayant pour limite θ. Il s'ensuit que θ est un point double de la substitution $t_1 = \varphi(t)$; de plus, c'est un point limite de conséquents de points intérieurs à Δ; c'est donc le point double unique de multiplicateur inférieur ou égal à 1. (On peut disposer des constantes arbitraires de la représentation conforme de manière que $\theta = +1$.) Je dis que θ ne peut pas être un point double attractif; en effet, on peut aussi tracer dans D un chemin simple L' aboutissant en α et contenant les antécédents de tous ses points obtenus par la branche de fonction inverse $R_{-1}(z)$ égale à α pour $z = \alpha$. Pour le voir nettement, reportons-nous à ce qui a été dit au Chapitre II, en nous plaçant d'abord dans l'hypothèse $R''(\alpha) \neq 0$. Si l'on rejette le point double à l'infini par une transformation homographique, comme nous l'avons fait maintes fois, de manière à ramener la substitution à la forme

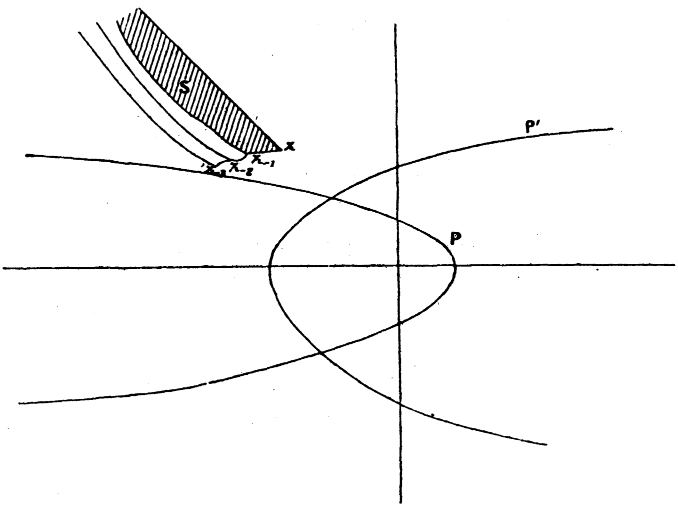
$$R(z) = z + a + \frac{b}{z} + \ldots \qquad (a, \text{ réel, } > 0),$$

et la substitution inverse à la forme

$$R_{-1}(z) = z - a - \frac{b}{z} - \ldots,$$

on sait que les $R_n(z)$ et les $R_{-n}(z)$ convergent vers l'infini simultanément dans la région du plan extérieure à deux courbes de forme parabolique P et P' dont les directions asymptotiques sont celles de Ox et de Ox'. Prenons un point z dans la partie de cette région située au-dessus de l'axe réel, par exemple, avec un argument voisin de $\frac{3\pi}{4}$ pour fixer les idées; si $|z|$ est suffisamment grand, le point z_{-1} qui se déduit de z par une transformation asymptotiquement équivalente à la translation $-a$ sera encore dans la même région et par conséquent dans le domaine immédiat du point à l'infini. Il en sera de même pour le segment de droite zz_{-1}, ainsi que pour la demi-droite allant de z à l'infini dans le prolongement de Oz; la transformée de cette demi-droite sera la ligne $z_{-1}\infty$ qui ne coupe pas Oz, puisque l'argument de z_{-1} est plus grand que celui de z. Cette ligne sera d'ailleurs encore dans le domaine D et voisine d'une parallèle à $z\infty$. On limite ainsi un domaine $z_{-1}z\infty$ ou S qui appartient à D et dans lequel les $R_{-n}(z)$ convergent, nous le savons, uniformément vers zéro. Soit S_{-1} l'antécédent immédiat de ce domaine; on voit de suite que S_{-1} et S qui sont contigus suivant la ligne $z_{-1}\infty$ ne se recouvrent pas; en prenant les antécédents successifs de ce domaine, on obtient des domaines contigus deux à deux qui forment par leur réunion un domaine simplement connexe limité d'une part par le rayon $z\infty$, d'autre part par la courbe $zz_{-1}z_{-2}\ldots$, s'étendant à l'infini; tous les points de ce domaine appartiennent à D. Il est utile de remarquer qu'en prenant le point z au contraire dans le demi-plan inférieur, dans la position symétrique de celle de tout à l'heure, on obtiendra un domaine analogue n'ayant aucun point intérieur commun avec le premier, et pas d'autre point frontière commun que le point à l'infini. Les mêmes considérations s'appliquent aux conséquents d'un point z qu'on pourra prendre, par exemple, dans la même région avec un argument voisin de $\frac{\pi}{4}$ et à partir duquel on pourra tracer une ligne simple $zz_1z_2\ldots z_n\ldots$ aboutissant au point à

Fig. 1.



l'infini de manière que cette ligne et le rayon $z\infty$ limitent un domaine intérieur à D, sauf au point frontière à l'infini (¹). Le cas

(¹) On doit supposer pour cela que les $R_n(z)$ ne prennent qu'une fois chaque valeur dans le domaine élémentaire de convergence qu'on a choisi : un tel choix est toujours possible.

de $R''(\alpha) = 0$ se ramène au premier par la transformation conforme $(|z|z^p)$, comme au Chapitre II.

En ramenant le point α à distance finie, on a l'énoncé suivant qui va nous être très utile pour l'objet que nous avons en vue : Étant donné un point double α de multiplicateur égal à $+1$, d'une substitution rationnelle, on peut tracer deux lignes L et L' intérieures au domaine immédiat D de α, sauf en leur extrémité commune α, telles que L + L' limite un domaine simplement connexe E intérieur à D avec le seul point frontière commun α, L contenant, en outre, les conséquents d'un de ses arcs, et L' une infinité d'antécédents d'un de ses arcs terminés en α. De plus, on peut choisir ces courbes de deux manières différentes et de telle sorte que les deux domaines E et $E^{(1)}$ ainsi obtenus n'aient aucun point intérieur commun.

Ceci posé, revenons à la représentation conforme de D. Au chemin L va correspondre dans Δ un chemin aboutissant au point double θ, au chemin L' un chemin aboutissant au même point θ; en effet, M. Montel a montré, dans son Mémoire déjà cité sur la représentation conforme, que : « Pour que deux chemins aboutissant à un même point accessible α fassent correspondre à α un même point de la circonférence, il faut et il suffit que le domaine limité extérieurement par ces courbes ne contienne que le point frontière α (¹). » C'est bien ce qui a lieu ici. Mais L' contenant une infinité de points $R_{-n}(z_0)$, la ligne correspondante dans Δ contiendra une infinité de points $\varphi_{-n}(t_0)$, t_0 étant un point de Δ; θ étant limite d'antécédents d'un point de Δ ne peut donc pas être un point attractif.

Je dis que la substitution $t_1 = \varphi(t)$ ne peut être non plus une substitution singulière de seconde espèce. S'il en était ainsi, on aurait $\varphi''(\theta) \neq 0$ et les conséquents $t_n = \varphi_n(t)$ convergeraient vers θ sur tout un arc $\theta\xi$ de la circonférence. Soient alors l et l' les lignes correspondant à L et L' et aboutissant en θ; un élément de l, contenant les conséquents de tous ses points, sera tangent en θ à la circonférence dans le sens de θ vers ξ; un élément de l', contenant les antécédents de tous ses points [obtenus au moyen de

(¹) Cette proposition est d'ailleurs implicitement contenue dans le Mémoire antérieur de M. Lindelof (*Sur un principe général de l'analyse*, *Acta Societatis scientiarum Fennicæ*, Helsingfors, 1915).

la fonction $\varphi_{-1}(t)$ égale à θ pour $t = \theta$], sera également tangent à la circonférence, mais avec une direction de tangente opposée à $\theta\xi$ [1]. Le domaine E, limité par L + L′, aura donc pour image un domaine e tangent en θ à la circonférence. Mais on peut remplacer L, L′, E par $L^{(1)}$, $L'^{(1)}$, $E^{(1)}$ jouissant des mêmes propriétés, E et $E^{(1)}$ n'ayant aucun point intérieur commun; l'image de $E^{(1)}$ sera alors le domaine $e^{(1)}$; les deux domaines simplement connexes e et $e^{(1)}$ limités par des courbes de Jordan formées d'arcs analytiques et tangentes à la circonférence au même point et *dans les deux sens* ont nécessairement des points intérieurs communs, par exemple sur le rayon. Or, ceci contredit l'hypothèse que E et $E^{(1)}$ n'en ont pas.

Il est clair que cette démonstration deviendrait parfaitement inutile si l'on supposait $h(t)$ continue; mais il nous a paru intéressant de la faire dans le cas général pour être complet, la représentation conforme d'une aire sur un cercle paraissant être l'un des moyens les plus puissants que l'on possède pour obtenir des propriétés des domaines étudiés dans ce Mémoire.

En résumé, si l'on fait la représentation conforme sur un cercle du domaine immédiat d'un point double de multiplicateur inférieur en module à l'unité ou égal à +1, ce domaine étant supposé simplement connexe, la fonction $h(t)$, inverse de celle qui effectue cette représentation, vérifie l'équation fonctionnelle

$$R[h(t)] = h[\varphi(t)],$$

$[z \mid R(z)]$ étant la substitution donnée dans le plan des z, et $\varphi(t)$ une fonction rationnelle telle que la substitution correspondante dans le plan t possède un cercle fondamental; cette substitution est toujours de première espèce; elle est singulière dans le cas du multiplicateur égal à +1.

40. Supposons maintenant que $h(t)$ soit méromorphe sur la circonférence C. Nous allons démontrer qu'elle est rationnelle. Plaçons-nous d'abord dans le cas où (φt) correspond à une substitution non singulière admettant le point invariant $t = 0$. Comme

---

(1) On a vu, en effet, au Chapitre II qu'au voisinage d'un point double de cette espèce, placé à l'origine, les conséquents d'un point ne peuvent tendre vers zéro qu'avec une valeur limite déterminée ω de l'argument, et les antécédents avec la valeur limite $\omega + \pi$ de l'argument.

nous l'avons déjà remarqué, $\frac{\varphi(t)}{t}$ n'ayant pas de pôles dans Δ et étant égale à 1 en module pour $|t| = 1$, et plus petite que 1 pour $t = 0$, on aura, pour $|t| \leqq t < r$, l'inégalité

$$|\varphi(t)| < k|t| \qquad (k < 1).$$

De même, à l'extérieur de Δ, l'inégalité $|t| \geqq \rho > 1$ entraîne

$$|\varphi(t)| > \varkappa |t| \qquad (\varkappa > 1).$$

Ceci posé, $h(t)$ est par hypothèse méromorphe pour $|t| \leqq \rho$ $(\rho > 1)$. Je dis qu'il en sera de même pour $|t| \leqq \varkappa\rho$, $\varkappa$ étant le nombre que nous venons de définir. Considérons la fonction

$$F(t) = R[h(t)],$$

qui est également méromorphe dans le cercle Γ $(|t| \geqq \rho)$. On a d'ailleurs, dans Δ (circonférence comprise),

$$F(t) = h[\varphi(t)].$$

Il s'ensuit que $F[\varphi_{-1}(t)]$, où $\varphi_{-1}(t)$ désigne l'une quelconque des ν détermination de la fonction inverse de $\varphi(t)$, est égale à $h(t)$ et par suite uniforme dans Δ et sur C.

Je considère dans le domaine Γ_1 $(|t| \leqq \varkappa\rho)$ la fonction

$$H(t) = F[\varphi_{-1}(t)],$$

en choisissant une valeur bien déterminée mais quelconque de $\varphi_{-1}(t)$ en un point de C. Tant que t reste dans Γ_1, $\varphi_{-1}(t)$ reste dans Γ, car si l'on avait $|\varphi_{-1}(t)| \geqq \rho$, on en déduirait $|t| > \varkappa\rho$. On aura donc en chaque point une valeur bien définie pour $H|t|$ puisque $F(t)$ est bien définie et uniforme dans Γ; $H(t)$ ne pourra avoir comme singularité dans Γ_1 que des pôles ou des points critiques algébriques, ces derniers ne pouvant être que ceux de $\varphi_{-1}(t)$. Mais si t partant d'un point t_0 de C et demeurant dans la couronne $(\Gamma_1 - \Delta)$ décrit un lacet tournant autour d'un point critique de $\varphi_{-1}(t)$ pour revenir à son point de départ, $\varphi_{-1}(t)$ reste dans la couronne $(\Gamma - \Delta)$ et part d'un point t_{-1} de C pour revenir à un autre point t'_{-1} de C, en sorte que $H(t)$ part de la valeur $F(t_{-1})$ pour arriver à la valeur finale $F(t'_{-1})$. Mais on a pour tout point t_0 de C

$$F(t_{-1}) = F(t'_{-1}) = h(t_0).$$

Il s'ensuit que $H(t)$ revient à sa valeur initiale. D'ailleurs, $H(t) = h(t)$ dans Δ. $H(t)$ est donc uniforme et méromorphe dans Γ_1 et est le prolongement analytique de $h(t)$ dans ce domaine. On voit de proche en proche que $h(t)$ est méromorphe pour $|t| \leqq x^n \rho$, quel que soit l'entier n. Donc $h(t)$ est méromorphe dans tout le plan et y vérifie toujours l'équation fonctionnelle

$$R[h(t)] = h[\varphi(t)],$$

puisque les fonctions analytiques des deux membres sont bien définies et de plus égales entre elles dans Δ. Si $\varphi(t)$ admet un pôle à distance finie, $h(t)$ sera rationnelle, en vertu de cette équation fonctionnelle; en effet, à l'extérieur d'un cercle de rayon infiniment grand, une branche de la fonction $\varphi_{-1}(t)$ (ramifiée ou non à l'infini) fera correspondre un domaine infiniment petit entourant le pôle $t = \varpi$, où la fonction $R\{h[\varphi_{-1}(t)]\}$ prendra des valeurs infiniment voisines de la valeur bien déterminée (finie ou infinie) $R[h(\varpi)]$. Donc $h(t)$ n'aura pas de point singulier essentiel à l'infini. Pour que $\varphi(t)$ possède un pôle à distance finie, il suffit qu'elle ne soit pas de la forme

$$\varphi(t) = A t^q,$$

où A est une constante.

41. Nous devons maintenant examiner à part ce cas particulier. Mais auparavant nous remarquerons que la démonstration que nous venons de faire ne suppose nullement que la fonction $h(t)$ fait la représentation conforme de Δ sur une aire simple et simplement connexe, mais seulement que cette fonction est méromorphe dans un cercle de rayon plus grand que l'unité. Nous allons de même démontrer que l'équation fonctionnelle

$$h(A t^q) = R[h(t)]$$

ne peut être vérifiée par aucune fonction méromorphe ou entière non rationnelle. La démonstration supposera toutefois que $R(z)$ n'est pas du premier degré, ce qui n'était pas nécessaire tout à l'heure.

Nous écrirons notre équation sous la forme

$$h(t^q) = R[h(t)] \qquad (q > 1).$$

puisque $|A|$ doit être égal à 1, et qu'on peut orienter les axes de manière que son argument devienne nul. On peut supposer que l'origine n'est pas un pôle de $h(t)$, sinon on remplacera $h(t)$ par $\frac{1}{h(t)}$ qui vérifie une équation de même forme. Posons

$$h(0) = \alpha.$$

On a $R(\alpha) = \alpha$, et un calcul immédiat montre que le développement de $R(z)$ autour de $z = \alpha$ commence par un terme en $(z - \alpha)^q$; α est donc un point double de multiplicateur nul de la substitution correspondante. Si l'on pose $z = h(t)$, on a

$$R_n(z) = h(tq^n)$$

et

$$\lim_{n=\infty} R_n(z) = \alpha \qquad \text{pour } |t| < 1,$$

c'est-à-dire que les points correspondant à ceux de Δ sont intérieurs au domaine immédiat D de α, ce que nous n'avions pas supposé *a priori*.

Ceci posé, deux cas sont à distinguer :

1° L'équation $h(t) = \alpha$ admet une racine t_0 autre que zéro. On a évidemment, quel que soit n,

$$h(t_0^{q^n}) = R_n[h(t_0)] = R_n(\alpha) = \alpha,$$

et si ω désigne une racine quelconque de l'équation $\omega^{q^n} = 1$,

$$h[(\omega t_0)^{q^n}] = R_n[h(\omega t_0)] = \alpha.$$

Donc $h(\omega t_0)$ est un antécédent de α. Les points ωt_0, où $\omega = e^{\frac{2i\pi N}{q^n}}$, forment un ensemble dense sur la circonférence $|t| = |t_0|$. A un arc de cette circonférence contenant t_0, la fonction $z = h(t)$ fera correspondre un arc de courbe contenant α et une infinité d'antécédents ayant α pour point limite, ce qui est impossible puisque α, point double attractif, n'est pas limite de ses propres antécédents autres que lui-même.

Remarquons que l'équation $h(t) = \alpha$ aura toujours des racines non nulles, si dans le plan des z le point α a des antécédents distincts de lui-même. En effet, on pourra en trouver un pour lequel l'équation

$$h(t) = \alpha_{-p}$$

aura une solution t' (théorème de Picard); or, $h(t') = \alpha_{-p}$ entraîne

$$h(t'^{q^p}) = R_p[h(t')] = R_p(\alpha_{-p}) = \alpha,$$

et t' étant différent de zéro, il en est de même de t'^{q^p}.

2° Supposons que $h(t) = \alpha$ n'ait pas de racine autre que zéro et que par conséquent, dans le plan des z, le point double α n'ait pas d'autre antécédent que lui-même : c'est dire que la substitution $z_1 = R(z)$ se ramène à la forme polynomiale par une transformation homographique qui rejette α à l'infini.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble parfait caractéristique qui se confond ici avec la frontière du domaine immédiat D de α dans le plan des z. Nous appellerons points ζ les points de $\mathcal{F}$. L'équation $h(t) = \zeta$ a toujours des racines, car les points ζ ont toujours une infinité d'antécédents distincts et l'on en déduira (en vertu du raisonnement fait précédemment pour α) l'existence de ces racines. Nous appellerons $\mathcal{G}$ l'ensemble des points θ du plan des t qui correspondent aux points ζ de $\mathcal{F}$. $\mathcal{G}$ est un ensemble parfait constitué par un ensemble de cercles concentriques à Δ. En effet :

a. Si θ appartient à $\mathcal{G}$, il en est de même des points $\theta e^{\frac{2i\pi N}{q^n}}$, n, N entiers quelconques et ces points sont denses sur la circonférence $|t| = |\theta|$.

b. Si θ' correspond à ζ, il y a une infinité de points ζ autour de ζ', donc une infinité de points θ autour de θ', puisqu'il y a correspondance continue entre un élément d'aire du plan des z entourant ζ' et un élément de surface de Riemann à un nombre fini de feuillets du plan des t autour de θ'.

c. Si des points θ tendent vers le point limite θ', $h(\theta)$ tend vers $h(\theta')$; ζ tend vers ζ' qui est de $\mathcal{F}$; donc θ' est de $\mathcal{G}$.

La section de $\mathcal{G}$ par un rayon issu de l'origine est un ensemble fermé. Soit alors z_0 un point intérieur au domaine D de α tel que l'équation $h(t) = z_0$ ait une infinité de racines; il y en aura une t_0 extérieure à Δ. Je mène le rayon Ot_0 et soient $\mathcal{C}$ la section de $\mathcal{G}$ par ce rayon, mn l'intervalle contigu à $\mathcal{C}$ qui contient t_0, Γ la couronne engendrée par la rotation de mn autour de l'origine. Quant t décrit Γ, le point $z = h(t)$ décrit un domaine d'un seul tenant dont tous les points frontières proviennent de la frontière de Γ et par suite appartiennent à $\mathfrak{J}$; ce domaine contient z_0 puisque Γ contient t_0. Il doit donc coïncider avec le domaine D du point α, et par suite contenir α. Or Γ ne contenant par hypothèse aucun point racine de l'équation $h(t) = \alpha$, la contradiction est manifeste.

On peut donc énoncer le théorème suivant : « L'équation

$$h(t^q) = R[h(t)],$$

où R est une fraction rationnelle de degré plus grand que 1 et $h(t)$ la fonction inconnue, n'admet aucune solution méromorphe ou entière qui ne soit pas rationnelle. » Une discussion élémentaire que nous omettons montre que les seules solutions rationnelles s'obtiennent par l'identité

$$(t^q)^m = (t^m)^q.$$

12. Nous avons enfin à examiner le cas du point double de multiplicateur égal à $+1$, c'est-à-dire de l'équation fonctionnelle

$$R[h(t)] = h[\varphi(t)],$$

où $\varphi(t)$ correspond à une substitution singulière de première espèce.

Il est commode de supposer que la représentation conforme de D a été faite non sur le cercle unité, mais sur le demi-plan $\mathfrak{I}(t) > 0$, et de manière que le point double α corresponde au point à l'infini du plan des t. $\varphi(t)$ est alors de la forme

$$\varphi(t) = t - \sum \frac{A}{t-a},$$

les a étant réels et les A positifs. En posant $t = x + iy$, $t_1 = \varphi(t) = x_1 + iy_1$, on obtient

$$x_1 = x - \sum \frac{A(x-a)}{(x-a)^2 + y^2},$$

$$y_1 = y + \sum \frac{Ay}{(x-a)^2 + y^2}.$$

On a toujours $\frac{y_1}{y} > 1$. Pour x infiniment grand, x_1 est infiniment voisin de x et plus petit que x en valeur absolue ; y_1 est infiniment voisin de y. Considérons alors dans le demi-plan supérieur le contour (*fig.* 7) formé par deux droites $x = \pm \xi$ et la droite $y = \eta$. Si ξ est suffisamment grand on constate aisément que le domaine E extérieur à ce contour est contenu dans son conséquent $\varphi(E)$.

On a ensuite

$$y_1 = y + \frac{M}{y}, \qquad M = \sum \frac{A y^2}{(x-a)^2 + y^2} = \sum A \sin^2 \omega,$$

les ω étant les arguments des quantités $z - a$. Quand t est intérieur à la bande PQRS, M a un minimum non nul. J'appelle μ un nombre positif au plus égal à ce minimum et au plus égal d'autre part à η^2. Je définis ensuite les nombres $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, par récurrence, comme il suit :

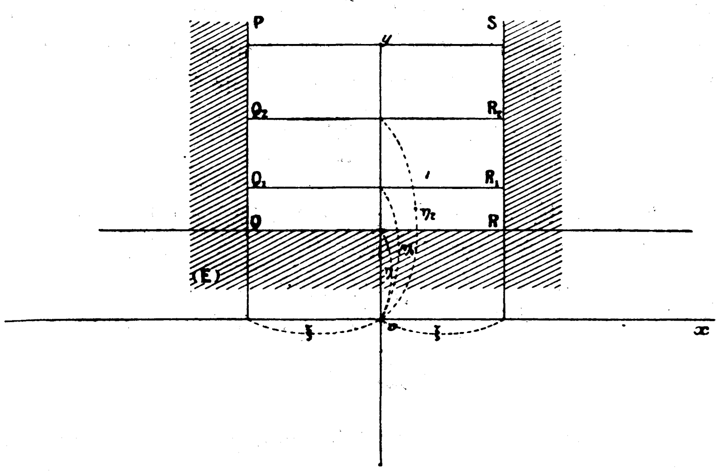
$$\eta_1 = \eta + \frac{\mu}{\eta},$$
$$\eta_2 = \eta_1 + \frac{\mu}{\eta_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

J'appelle $E, E^{(1)}, \ldots, E^{(n)}, \ldots$, les domaines limités toujours par les deux droites $x = \pm \xi$ et, successivement, par les droites

$$y = \eta_1, \qquad y = \eta_2, \qquad \ldots, \qquad y = \eta_n.$$

Je dis que si t est dans $E^{(1)}$, $\varphi_{-1}(t)$ sera dans E (quelle que soit la

Fig. 2.



branche de cette fonction que l'on considère). Sinon $\varphi_{-1}(t)$ serait dans la bande PQRS, et y_{-1} serait supérieur à η. On aurait donc, en remarquant que $y + \frac{\mu}{y}$ est une fonction croissante de y pour $y > \eta_1$ (à cause de $\mu = \eta_1^2$),

$$y_0 = y_{-1} + \frac{M}{y_{-1}} > y_{-1} + \frac{\mu}{y_{-1}} > \eta_1 + \frac{\mu}{\eta_1} = \eta_1.$$

De même les antécédents des points de $E^{(2)}$ sont dans $E^{(1)}$, ..., et ainsi de suite. Ces domaines finissent par comprendre un point quelconque du plan à distance finie, car les η_n tendent vers l'infini (comme $\sqrt{n}$). Or, si $h(t)$ est méromorphe dans le demi-plan inférieur et sur l'axe réel, elle sera méromorphe dans un domaine tel que E. Le raisonnement fait dans le cas d'une substitution non singulière est alors applicable : $h(t)$ est rationnelle, car, par hypothèse, le point à l'infini est un point ordinaire ou un pôle.

On peut donc maintenant énoncer le théorème général qui suit : *Si $t_1 = \varphi(t)$ désigne une substitution rationnelle admettant le cercle fondamental Δ et de première espèce, et* R(z) *une fraction rationnelle quelconque, l'équation fonctionnelle*

$$h[\varphi(t)] = R[h(t)]$$

n'admet aucune solution méromorphe dans le cercle Δ et sur sa circonférence qui ne soit une fonction rationnelle.

On vérifiera aisément que cet énoncé est encore exact quand R(z) est du premier degré.

13. Supposons, maintenant, que $h(t)$ soit régulière sur un arc σ de C; la fonction $\varphi_{-1}(t)$ n'ayant pas de point critique sur C, la relation

$$h(t) = R\{h[\varphi_{-1}(t)]\}$$

montre que $h(t)$, méromorphe dans Δ et régulière sur l'arc σ, sera méromorphe sur l'arc $\sigma_1 = \varphi(\sigma)$ et de même sur σ_2, σ_3, ... Or σ_p recouvre toute la circonférence pour une valeur finie de p. On peut donc encore dire que *toute solution de l'équation fonctionnelle précédente, méromorphe à l'intérieur de Δ et qui n'est pas une fonction rationnelle, admet* C *comme ligne singulière essentielle.*

Nous allons maintenant rechercher quelles peuvent être les fractions rationnelles vérifiant cette équation, en nous bornant au cas le plus intéressant où $h(t)$ fait la représentation conforme de Δ sur le domaine simplement connexe D du point double α de la substitution $z_1 = R(z)$.

$h(t)$ étant rationnelle, quand t décrit C, $z = h(t)$ décrit une courbe algébrique unicursale dont certains arcs peuvent être parcourus plusieurs fois et admettre des points de rebroussement; si δ est un domaine aussi petit qu'on le veut, entourant un point t_0 de C, les domaines conséquents $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ couvrent, à partir d'une valeur finie de n, tout le plan de la variable t, sauf peut-être l'entourage d'un ou de deux points doubles exceptionnels; par conséquent si $z_0 = h(t_0)$, un domaine arbitrairement petit entourant z_0 aura pour conséquents des domaines du plan des z qui, à partir d'un certain rang, le recouvriront tout entier, sauf peut-être l'entourage d'un ou de deux points exceptionnels; il y a, en effet, correspondance continue entre le plan simple des t et une surface de Riemann à p feuillets couvrant le plan des z, en appelant p le degré de $h(t)$; z_0 sera donc bien, comme il fallait s'y attendre, un point de l'ensemble parfait $\mathcal{F}$ relatif à la substitution $z_1 = R(z)$. Si maintenant t décrit l'intérieur du cercle Δ, z décrit un domaine D qui est bien un domaine immédiat du point α, car, autour d'un point de Δ, la suite des $\varphi_n(t)$ converge uniformément vers a (a étant le centre de Δ ou un point de la circonférence suivant qu'il s'agit d'une substitution ordinaire ou singulière); donc autour de chaque point de D les $R_n(z)$ convergent uniformément vers α. Si enfin t décrit l'extérieur Δ' de Δ, z décrit un domaine D'; dans Δ' les $\varphi_n(t)$ convergent vers b ($b = \infty$ ou $b = a = 1$ suivant les cas); donc dans D' les $R_n(z)$ convergent vers $\beta = h(b)$; l'ensemble des domaines D, D' et de la courbe $h(C)$ couvre tout le plan des z et l'on voit bien ainsi que la courbe transformée de C est identique à l'ensemble $\mathcal{F}$.

Ceci posé, si $h(t)$ n'est pas du premier degré, les domaines D et D', contigus à $\mathcal{F}$, ont des parties communes, sinon un point de D aurait plus d'un homologue dans Δ. Donc ces deux domaines D et D' coïncident; par suite, le domaine fermé $D + \mathcal{F}$ comprend tout le plan. Il y a donc deux cas à distinguer :

1° Le domaine D avec ses points frontières ne couvre pas tout le plan ; $h(t)$ est alors une fonction homographique, et $z_1 = \mathrm{R}(z)$ est elle-même une substitution à cercle fondamental de première espèce.

2° Le domaine D avec sa frontière $\mathcal{F}$ couvre tout le plan ; $h(t)$ ne peut pas être du premier degré ; je dis qu'elle sera du second degré. Soit z_0 un point de $\mathcal{F}$ distinct des points critiques de la fonction $t(z)$; les p points correspondants $t_0, t'_0, \ldots$ sont distincts et situés sur C ; si à partir de z_0 on déplace le point z infiniment peu sur la normale à $\mathcal{F}$, les p points t correspondants vont subir des déplacements normaux à C à partir de $t_0, t'_0, t''_0, \ldots$, les uns vers l'extérieur, les autres vers l'intérieur. Mais à deux déplacements élémentaires, de sens contraire de z, correspondent des déplacements de sens contraire pour chacun des t ; donc si l'on avait $p > 2$, à un point z de D situé dans le voisinage de z_0 d'un certain côté de $\mathcal{F}$ correspondrait plus d'un point t intérieur à Δ. On a donc $p = 2$ et les deux points critiques de $h_{-1}(t)$ sont les deux extrémités de $\mathcal{F}$ correspondant aux deux zéros de $h'(t)$ situés sur C.

Pour achever la détermination de $h(t)$, on peut supposer qu'on a transformé la relation $z_1 = \mathrm{R}(z)$ par une transformation homographique préalable, de manière que les deux extrémités de la courbe $\mathcal{F}$ deviennent les deux points $z = 0$, $z = \infty$. En outre, on peut faire la représentation conforme, non pas sur le cercle unité, mais sur le demi-plan supérieur, de manière que les points $t = 0$, $t = \infty$ correspondent aux points $z = 0$, $z = \infty$. La relation $z = h(t)$ devient alors $z = \mathrm{A}t^2$. On pourra même prendre $\mathrm{A} = 1$. La substitution $z_1 = \mathrm{R}(z)$ est donc l'une de celles étudiées au Chapitre III (n° 25) qui laissent invariants un arc de cercle et le domaine extérieur à à cet arc.

Soit maintenant D le domaine d'un point double α de multiplicateur < 1 en module ou égal à $+1$. Si D est simplement connexe et si sa frontière possède un arc analytique isolé, la fonction $t = g(z)$ qui fait la représentation de D sur Δ est analytique sur cet arc ; réciproquement, $z = h(t)$ sera analytique sur un arc de G. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Soit α un point double de la substitution rationnelle $z_1 = \mathrm{R}(z)$ *avec la condition* $|\mathrm{R}'(\alpha)| < 1$ *ou* $\mathrm{R}'(\alpha) = +1$. *Si le domaine* *immédiat* D *de* α *est simplement connexe, et si sa frontière présente un arc analytique isolé* [1], *cette frontière est tout entière constituée par une circonférence ou une droite; ou bien par un arc de circonférence ou un segment de droite.*

La substitution est alors ou bien une substitution à cercle fondamental, ou bien l'une de celles qui s'en déduisent par une transformation du second degré.

44. Revenons maintenant au cas général, où l'on ne suppose pas que $h(t)$ soit analytique en quelque point de C. Faisons d'abord quelques remarques au sujet de la détermination effective de cette fonction. Si nous nous plaçons dans le cas non singulier, en prenant $h(0) = \alpha$, l'équation fonctionnelle que vérifie $h(t)$ permettra d'obtenir par identification tous les coefficients de son développement en série de Mac-Laurin quand on se donne le coefficient de t $[h'(0) \neq 0]$, mais à condition que les coefficients de la fonction rationnelle $\varphi(t)$ soient connus, et que $R'(\alpha)$ ne soit pas nul. Dans le cas général, on n'aperçoit aucune méthode simple pour déterminer cette fonction $\varphi(t)$; mais il y a un cas particulier où la solution est immédiate; c'est celui où α est un point double de multiplicateur nul n'ayant pas d'autre antécédent que lui-même dans D, ce qui implique que la fonction $R_{-1}(z)$ restreinte à D n'a pas d'autre point critique que α. Le domaine D est alors simplement connexe et $\varphi(t)$ est égal à t^q; l'équation fonctionnelle

$$h(t^q) = R[h(t)]$$

permet alors de déterminer les coefficients de $h(t)$. Si l'on pose

$$\begin{aligned} h(t) &= \alpha + u_1 t + u_2 t^2 + \dots \qquad (u_1 \neq 0), \\ R(z) &= \alpha + a(z-\alpha)^q + \dots, \end{aligned}$$

on verra que u_1 est déterminé par l'équation $u_1^{q-1} = \frac{a}{1}$ et que $u_2, u_3, \dots$ s'obtiennent ensuite par des équations du premier

---

[1] D'une manière plus précise, nous devons supposer qu'on peut tracer à l'intérieur de D une coupure L aboutissant en deux points frontières accessibles distincts et divisant D en deux domaines partiels D' et D'', dont l'un D' est limité par L et par un arc analytique faisant partie de la frontière de D.

degré. Il est inutile de s'étendre sur ces formules d'identification dont il n'y a pas grand'chose à tirer; mais il est intéressant de noter qu'on peut déterminer les coefficients de $h(t)$ par des opérations élémentaires. On peut prendre comme exemple la fonction $R(z) = 3z^2 - z^3$; le domaine immédiat du point double $z = 0$ est ici simplement connexe, car parmi les trois points critiques $z = 0$, $z = \infty$, $z = 4$, de la fonction $R_{-1}(z)$, le premier seul appartient au domaine D_0 (le point $z = 4$ appartient à D_∞ qui est d'ordre de connexion infini); on a ici $\varphi(t) = t^2$ et

$$h(t) = \frac{1}{3}t + \frac{1}{2.3^3}t^2 + \frac{23}{2^3.3^5}t^3 + \ldots.$$

Dans l'exemple actuel, analogue à d'autres étudiés au Chapitre V, la frontière de D_0 est une courbe de Jordan simple. Il s'ensuit que $h(t)$ est continue sur son cercle de convergence; elle y est donc uniformément convergente, le domaine D_0 étant borné, comme il résulte d'un théorème de M. Fejér ([1]). On pourra donc représenter la frontière en question par les séries uniformément convergentes :

$$\begin{aligned} x &= A_0 + A_1 \cos\varphi + B_1 \sin\varphi + \ldots + A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi + \ldots, \\ y &= B_0 + A_1 \sin\varphi - B_1 \cos\varphi + \ldots + A_n \sin n\varphi - B_n \cos n\varphi + \ldots. \end{aligned}$$

les coefficients A et B étant calculés exactement par des opérations élémentaires. Dans le cas général, nous ne savons pas si une telle représentation est possible, $h(t)$ pouvant n'être pas continue sur son cercle de convergence, par exemple si la frontière étudiée a des points inaccessibles. Enfin, si l'on sait d'avance qu'une telle représentation est possible, il manque un moyen de calculer simplement les coefficients, tant qu'on ne sait pas déterminer effectivement la fonction rationnelle $\varphi(t)$ ([2]). Il se pose donc un certain nombre de questions qu'on devra résoudre pour qu'on puisse considérer ces courbes frontières comme effectivement connues.

([1]) L. Fejér, *La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissances effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 156, 1913, p. 46-49).

([2]) Dans le cas où $R'(\alpha)$ n'est pas nul, il faudrait aussi calculer préalablement $|h'(0)|$.

45. Laissant de côté ces difficultés, nous allons essayer d'obtenir quelques propriétés de la frontière f de D. Je considère sur la circonférence C un point double t' de la substitution $t_1 = \varphi(t)$: c'est un point double répulsif à multiplicateur réel et positif (en laissant de côté, dans le cas d'une substitution singulière, l'unique point double de multiplicateur $+1$). Par un point intérieur à Δ et voisin de t', on peut faire passer une courbe invariante et même analytique aboutissant en t' ; il lui correspondra dans le plan des z une courbe continue intérieure à D, formée d'une chaîne d'arcs antécédents $(z_0 z_{-1}, z_{-1} z_{-2}, \ldots)$, l'arc $z_{-(n-1)} z_{-n}$ se déduisant de l'arc $z_{-n} z_{-(n+1)}$ par la substitution $[z \mid R(z)]$. On a démontré (Chap. V, n° 33) qu'une telle courbe aboutit en un point frontière unique qui est un point double de la substitution. A tout point double t' correspondra ainsi un point double z', mais à deux points t' distincts peuvent correspondre deux points z' confondus en un seul, les deux chemins qui aboutissent en z' étant séparés par la frontière (¹). Voici un exemple où cette circonstance se produit ; posons

$$R(z) = z + z^5,$$

et faisons la représentation conforme du domaine du point à l'infini qui, on le verra facilement, est simplement connexe ; pour z réel ou purement imaginaire mais non nul, $z, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ croissent en valeur absolue et tendent vers l'infini ; le domaine D_∞ comprend donc les axes de coordonnées sauf l'origine. D'autre part, le point $z = 0$ est un point double de multiplicateur $+1$, mais qui compte pour quatre points de cette espèce réunis en un seul et donne lieu à une étoile à quatre branche, c'est-à-dire à quatre domaines immédiats distincts assemblés autour de l'origine et d'ailleurs symétriques chacun par rapport à l'une des bissectrices des axes de coordonnées. L'ensemble $\mathcal{F}$, qui est continu et se confond avec f, aura donc des points au voisinage de l'origine dans chacun des quatre angles des axes ; donc les quatre chemins xO, yO, x'O, y'O, qui aboutissent au point double origine, sont séparés deux à deux par des branches de la courbe f. La fonction $\varphi(t)$ sera ici égale à t^5 et l'équation $t^5 = t$ donnera les quatre points doubles répulsifs

(¹) *Voir*, par exemple, MONTEL, *Sur la représentation conforme*, p. 43.

sur C, $t = \pm 1$, $t = \pm i$, auxquels correspond le seul point $z = 0$ qui peut être regardé comme la réunion de quatre points frontières.

De même aux points périodiques d'ordre p sur C correspondront sur f des points périodiques d'ordre p ou diviseur de p. Il est probable que parmi les points périodiques en nombre infini qu'on obtient ainsi sur f il y en a une infinité qui sont distincts, mais je ne sais pas le démontrer dans le cas général.

46. Supposons maintenant que $h(t)$ soit continue sur un arc σ de C et de manière qu'à deux valeurs de t distinctes correspondent deux valeurs de z distinctes; on aura alors un arc f' de f constitué par une courbe simple de Jordan et qui renfermera une infinité dense de points périodiques; tous ces points, sauf un nombre fini d'entre eux, seront répulsifs (Chap. IV, n° 30). Il s'ensuit, comme nous allons le voir, que, sauf dans les deux cas simples examinés au n° 43, la courbe f aura une infinité partout dense de points sans tangente. Démontrons pour cela le lemme suivant :

Si o est un point double répulsif de la substitution rationnelle $z_1 = R(z)$ et si ol est un arc de courbe de Jordan simple invariant par cette substitution, cette courbe n'a pas de tangente en o sauf dans le cas où le multiplicateur étant réel et positif, ol est analytique en o.

Traçons un cercle de centre C dans lequel la fonction $R_{-1}(z)$, nulle à l'origine, soit holomorphe et vérifie la condition

$$|R_{-1}(z)| < k|z| \qquad (k < 1).$$

Il existe une fonction holomorphe dans ce cercle qui vérifie l'équation fonctionnelle de Schröder :

$$F[R_{-1}(z)] = \frac{1}{S}F(z) \qquad [|S| = |R'(0)| > 1,\ F'(0) = +1].$$

La fonction $Z = F(z)$ fait la représentation conforme de ce cercle sur un domaine du plan des Z entourant l'origine. A la courbe ol, qu'on peut supposer tout entière intérieure au cercle, correspondra dans le plan des Z une courbe OL invariante par la substitution $Z_{-1} = \frac{Z}{S}$, et par suite formée d'une chaîne d'arcs

$Z_0 Z_{-1}$, $Z_{-1} Z_{-2}$, $Z_{-2} Z_{-3}$, ... déduits de l'arc initial par les puissances de cette substitution. Soit ω l'argument de $\frac{1}{S}$ compris entre o et 2π. Quand Z décrit l'arc initial, son argument varie de β à $\beta + \omega$; quand Z décrit le deuxième arc, son argument varie de $\beta + \omega$ à $\beta + 2\omega$; quand Z décrit le $n^{\text{ième}}$ arc, son argument varie de $\beta + (n-1)\omega$ à $\beta + n\omega$; si donc ω n'est pas nul, la courbe OL s'enroule en spirale autour de l'origine et toute droite, passant par O la rencontre en une infinité de points tendant vers O. Si ω est nul, c'est-à-dire S réel et positif, Z_0 et Z_{-1} ont même argument; mais si l'arc $Z_0 Z_{-1}$ ne se confond pas avec un segment de droite passant par l'origine, Z a sur cet arc une oscillation θ non nulle, et tous les arcs homothétiques $Z_{-(n-1)} Z_{-n}$ qui tendent vers l'origine sont vus de ce point sous le même angle θ. Il n'y a donc de tangente en O que si OL est un segment de droite aboutissant en O. En revenant au plan des z, on voit qu'il n'y aura de tangente en o à la courbe ol que si ol est un arc de courbe analytique invariante passant par o.

Ce lemme démontré, la proposition annoncée est immédiate; car l'arc de courbe f' considéré est invariant par la substitution $z_p = R_p(z)$ et passe par un point double répulsif ξ de cette substitution, correspondant à un point double répulsif θ de la substitution $t_p = \varphi_p(t)$. A un élément d'arc $\theta\lambda$ de C correspond un élément d'arc ξl de f' auquel s'applique la démonstration précédente. Or, les points tels que ξ sont denses sur f', qui a ainsi une infinité dense de points sans tangente à droite ni à gauche. Le fait est encore exact pour la courbe f tout entière, qui résulte de f' par itération jusqu'à un ordre fini, comme il résulte de l'équation fonctionnelle

$$R_n[h(t)] = h[\varphi_n(t)],$$

et du fait que $\varphi_n(t)$ décrit toute la circonférence quand t décrit τ dès que n est suffisamment grand. La proposition ne serait en défaut que si $h(t)$ était analytique sur un arc, ce qui ne peut arriver, comme nous le savons, que dans les deux cas simples déjà examinés.

Supposons, par exemple, que l'on puisse tracer dans le domaine D une coupure aboutissant en deux points distincts et divisant ce domaine en deux domaines partiels, dont l'un soit un domaine convexe D'. Cette coupure a pour image, dans le plan des t, une coupure aboutissant en deux points distincts de C et divisant Δ en deux domaines, dont l'un Δ' correspond à D'. Les contours de D' et Δ' se correspondent point par point d'une manière continue (Painlevé, Carathéodory); $h(t)$ est donc continue sur un arc σ de C auquel correspond point par point un arc f' de f; on peut appliquer le théorème précédent; mais, sauf dans les deux cas simples déjà mentionnés, f' est coupé en une infinité de points infiniment voisins de A par les droites qui passent par certains de ses points A; f ne peut donc pas limiter un domaine convexe. On a donc le théorème suivant :

Si la substitution rationnelle $z_1 = R(z)$ *admet le point double* α ($|R'(\alpha)| < 1$ *ou* $R'(\alpha) = +1$) *ayant un domaine immédiat* D *simplement connexe, aucune coupure tracée dans* D *ne peut le diviser en deux domaines, dont l'un soit convexe, à moins que la substitution n'admette un cercle fondamental ou un domaine invariant dont la frontière est un arc de cercle, ce cercle fondamental ou ce domaine illimité coïncidant alors avec* D.

47. Revenons au cas général, et soit PQ une coupure quelconque de D aboutissant en deux points frontières accessibles distincts; il lui correspond une coupure pq de Δ (p, q distincts) qui divise Δ en deux domaines partiels Δ' et Δ'' correspondant à D' et D''. Un conséquent de rang n de Δ' (ou de Δ'') couvre Δ entièrement (sauf peut-être l'entourage de l'origine). Donc, dans le plan des z, un conséquent de rang fini de D' ou de D'' couvre D entièrement, sauf peut-être l'entourage de α. Ce résultat n'est pas, en général, équivalent à celui du n° 26 (Chap. IV). D'ailleurs, on n'est pas certain que PQ étant, par exemple, un arc de cercle de rayon infiniment petit, l'un des domaines D' ou D'' soit lui-même intérieur à un cercle de rayon infiniment petit, f pouvant avoir des points inaccessibles. Nous ne pouvons donc pas affirmer que tout point de f soit limite d'antécédents d'un point quelconque de f si l'on ne considère que les antécédents appartenant eux-mêmes à f. Tant que l'on n'aura pas résolu la question de savoir si ces points

inaccessibles existent ou non, il y a peu de chances pour que la représentation conforme conduise à des propriétés précises de f, à part celles que nous venons de démontrer et qui ont d'ailleurs un caractère purement négatif.

48. Nous allons obtenir au contraire d'autres propriétés de f par une autre méthode reposant sur l'emploi des suites normales, mais à la condition de faire des hypothèses particulières sur la distribution des points critiques des fonctions $R_{-n}(z)$. Nous allons pour cela exposer tout d'abord quelques propriétés des suites normales dont nous allons avoir besoin, et qui sont faciles à déduire des propositions de M. Montel, extraites de son Mémoire « Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine » (*A. E. N. S.*, 3ᵉ série, t. XXIX, 1912, p. 506-507).

Considérons dans un domaine D simplement ou multiplement comme l'ensemble des fonctions $f(z)$ qui satisfont aux conditions suivantes :

a. Elles sont holomorphes en chaque point intérieur à D;

b. Elles sont uniformes;

c. Elles prennent des valeurs distinctes pour des valeurs distinctes de z;

d. Elles ne prennent jamais la valeur finie a.

Si l'on désigne par M et m le maximum et le minimum de $|f(z) - a|$ dans un domaine fermé complètement intérieur à D on a

$$m > Mq,$$

q étant un nombre positif, qui ne dépend pas de la fonction f, mais seulement de la figure.

En effet, M. Montel a démontré dans le Mémoire cité que les fonctions qui sont holomorphes et uniformes dans un domaine où elles ne prennent jamais la valeur zéro et pas plus de p fois la valeur 1 y forment une famille normale. Il suffit alors d'employer le mode de raisonnement suivant dû au même auteur.

M étant le module maximum de $|f(z) - a|$ dans D', les fonctions $\varphi(z) = \frac{f(z) - a}{M}$ sont holomorphes et uniformes dans D où elles ne prennent jamais la valeur zéro et une fois au plus la valeur 1. Elles y forment donc une famille normale. Elles sont d'ailleurs bornées dans leur ensemble (au plus égales à 1 en module) dans D′ et de toute suite infinie de ces fonctions on peut en extraire une autre qui converge uniformément dans un domaine renfermant D′ et intérieur à D vers une fonction limite holomorphe et bornée. Si la proposition annoncée n'était pas exacte, on pourrait trouver une suite de points $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ de D′ tendant vers le point limite z_0 et une suite de fonctions $\varphi_n(z)$ telle que les nombres $\varphi_n(z_n)$ tendent vers zéro. Extrayons de cette suite une nouvelle suite qui converge uniformément vers $\varphi(z)$ dans D′ et pour laquelle nous conservons les mêmes notations. Les quantités $\varphi_n(z_n)$ tendent vers zéro par hypothèse et les différences $\varphi(z_n) - \varphi_n(z_n)$ à cause de la convergence uniforme ; il s'ensuit que $\varphi(z_n)$ tend vers zéro et par suite que $\varphi(z_0) = 0$, z_0 étant le point limite des z_n. Mais $\varphi(z)$ ne peut prendre la valeur zéro en z_0 que si les fonctions $\varphi_n(z)$ prennent toutes la valeur zéro dans le voisinage de z_0, ou si $\varphi(z)$ est identiquement nulle (MONTEL, *loc. cit.*, p. 490). Ces deux hypothèses sont impossibles, car $\varphi_n(z)$ n'est jamais nulle dans D et prend d'autre part au moins une fois une valeur égale à 1 en module sur le contour de D′. La proposition est donc démontrée. On peut aussi l'énoncer en disant que si z_1 et z_2 sont deux points quelconques intérieurs à D′, on a

$$q < \frac{f(z_1) - a}{f(z_2) - a} < \frac{1}{q}.$$

49. La méthode employée permet de démontrer très simplement un théorème important et tout à fait analogue à celui-ci, dû à M. Kœbe.

Le théorème de Kœbe s'énonce ainsi [1] :

« Considérons les fonctions $f(z)$ qui ne prennent jamais deux fois la même valeur à l'intérieur du cercle $(|z| < R)$, où elles sont holomorphes. Soit $0 < \theta < 1$. Il existe une fonction positive de θ,

---

[1] J'emprunte cet énoncé à l'ouvrage de M. Landau : *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie* (Berlin, Springer, 1906, p. 102).

$\Omega(\theta)$ telle que si z_1 et z_2 désignent deux points du cercle ($|z| \leqq \theta R$), on ait

$$\frac{1}{\Omega(\theta)} < \frac{f'(z_1)}{f'(z_2)} < \Omega(\theta).$$

Posons

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

$$F(z) = \frac{f(Rz) - a_0}{a_1 R} = z + \ldots \qquad (a_1 \neq 0).$$

$F(z)$ ne prend jamais deux fois la même valeur dans le cercle $C(|z| < 1)$; $f'(z)$ et $F'(z)$ ne sont jamais nulles pour $|z| < R$ et $|z| < 1$ respectivement. On a d'ailleurs

$$F'(z) = \frac{f'(Rz)}{a_1}. \text{ »}$$

Appliquons le théorème que nous venons de démontrer à la fonction $F(z)$, le domaine D étant par exemple le cercle ($|z| < 1$). On aura, pour $|z| = \theta$,

$$\min |F(z)| > q(\theta) \max |F(z)|$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\min \left|\frac{F(z)}{z}\right| > q(\theta) \max \left|\frac{F(z)}{z}\right|,$$

$\frac{F(z)}{z}$, qui est holomorphe et non nulle pour $|z| \leqq \theta$ atteignant son minimum sur le contour $|z| = \theta$, on aura

$$\left|\frac{F(o)}{o}\right| = 1 > \min \left|\frac{F(z)}{z}\right|_{|z|=\theta}.$$

En combinant les deux dernières inégalités, il vient

$$\max \left|\frac{F(z)}{z}\right|_{|z|=\theta} < \frac{1}{q(\theta)}$$

ou

$$\max |F(z)|_{|z|=\theta} < \frac{\theta}{q(\theta)} = A(\theta).$$

Il s'ensuit que les $F(z)$ sont bornées dans leur ensemble dans tout cercle de rayon inférieur à 1. Il en sera de même pour les fonctions dérivées, en vertu de la formule de Cauchy :

$$F'(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{(z-u)^2}{F(u)}\,du,$$

qui donnera, pour $\theta' > \theta$,

$$|F'(z)|_{|z|=\theta} < \max |F(z)|_{|z|=\theta'} \times \frac{\theta'}{(\theta'-\theta)^2}.$$

Par exemple, en prenant $\theta' = \frac{1+\theta}{2}$, il vient

$$|F'(z)|_{|z|=\theta} < A\left(\frac{1+\theta}{2}\right) \times \frac{\frac{1+\theta}{2}}{\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^2} = B(\theta).$$

Les $F'(z)$ forment donc dans C une famille normale dont les fonctions limites ne sont pas infinies. Elles ne peuvent non plus être nulles en aucun point, car $F'(z)$ étant différent de zéro dans C, une fonction limite ne peut être nulle en un point que si elle est identiquement nulle, ce qui est impossible puisque $F'(o) = 1$. On en conclura, en vertu d'un raisonnement employé plus haut,

$$\min |F'(z)|_{|z|\leq\theta} > C(\theta) > o.$$

On a donc pour $|z| \leqq \theta$ la double inégalité

$$C(\theta) < |F'(z)| = \left|\frac{f'(Rz)}{a_1}\right| < B(\theta),$$

c'est-à-dire, pour $|z| \leqq R\theta$,

$$C(\theta) < \left|\frac{f'(z_1)}{a_1}\right| < B(\theta),$$

$$C(\theta) < \left|\frac{f'(z_2)}{a_1}\right| < B(\theta);$$

d'où

$$\frac{C(\theta)}{B(\theta)} < \frac{f'(z_1)}{f'(z_2)} < \frac{B(\theta)}{C(\theta)}.$$

La proposition est donc démontrée pour un domaine de forme circulaire et s'étend facilement par la méthode des chaînes de cercles à un domaine de forme quelconque.

50. Considérons maintenant une suite infinie de fonctions

$f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., holomorphes dans le domaine D que nous supposerons simplement connexe, tendant uniformément vers la constante a et satisfaisant encore à la condition c, mais pas nécessairement à la condition d.

De toute suite des fonctions f_n, on peut en extraire une autre pour laquelle on a

$$f_n(z) = a + \mu_n[f(z) + \varepsilon_n(z)],$$

les μ_n étant des constantes qui tendent vers zéro, $f(z)$ une fonction holomorphe dans D, jamais identiquement nulle, et les $\varepsilon_n(z)$ des fonctions qui tendent uniformément vers zéro. $f(z)$ peut être une constante non nulle; hormis ce cas, elle ne prend jamais deux fois la même valeur dans D.

En effet, si $f_n(z)$ n'est jamais nulle dans D, posons

$$\mu_n = f(z_0) - a,$$

z_0 étant intérieur à D; les fonctions $\dfrac{f_n(z)-a}{\mu_n}$ ont dans tout domaine D′ intérieur à D leurs modules compris entre q et $\frac{1}{q}$ $(q > 0)$; elles forment donc une famille normale dans D, et de toute suite de ces fonctions on peut en extraire une autre qui converge uniformément dans le domaine D′ (qui contient z_0) vers une fonction holomorphe et bornée $\varphi(z)$; $\varphi(z)$ n'est pas identiquement nulle, puisque les fonctions considérées ont toutes la valeur 1 au point z_0. Elle n'est donc jamais nulle puisque les fonctions dont elle est la limite ne sont jamais nulles dans D. Elle peut se réduire à une constante non nulle; sinon elle ne prend jamais deux fois la même valeur dans D, étant limite uniformément atteinte de fonctions qui jouissent de cette propriété. La proposition annoncée est donc exacte dans ce cas.

Supposons maintenant que les $f_n(z)$ s'annulent dans D.

Comme elles prennent chacune une fois au plus la valeur zéro, on peut de toute suite de ces fonctions en extraire une autre telle que les zéros z_1, z_2, ..., z_n, ... des fonctions $f_n(z) - a$ aient un point limite unique ξ. Si ξ n'est pas intérieur à D, on est ramené au cas précédent. Si ξ est intérieur à D, on peut décrire de ξ comme centre un petit cercle c renfermant tous les points z_n, au moins à partir d'un certain rang, et de plus intérieur à D. Soient D un domaine limité par un contour simple, intérieur à D et contenant c, et z_0 un point de la couronne $(D' - c)$. Dans cette couronne les fonctions $\dfrac{f_n(z) - a}{f_n(z_0) - a}$ satisfont aux conditions du lemme de tout à l'heure et restent comprises en module entre q et $\dfrac{1}{q}$ $(q < 1)$. Elles sont donc encore inférieures à $\dfrac{1}{q}$ à l'intérieur du cercle c puisqu'elles y sont holomorphes et atteignent leur maximum sur la circonférence. Elles forment donc une famille normale, et de toute suite de ces fonctions, on peut en extraire une autre qui converge uniformément dans D' vers la fonction limite holomorphe $\varphi(z)$; $\varphi(z)$ n'étant pas identiquement nulle dans la couronne $(D' - c)$ n'est pas non plus identiquement nulle dans c; mais elle est nulle au point ξ. D'ailleurs cette fonction, n'étant pas une constante, prend une seule fois chaque valeur pour la raison indiquée plus haut et l'on a la même égalité asymptotique que tout à l'heure, $\varphi(z)$ étant certainement une véritable fonction.

On pourrait prendre pour les nombres μ_n au lieu de $[f_n(z_0) - a]$ les maxima des fonctions $[f_n(z) - a]$ sur certains contours convenablement choisis, ou encore les valeurs des dérivées $f'_n(z_0)$ en un point intérieur à D.

51. Dans les applications, le théorème précédent fournit, à défaut d'une expression asymptotique des f_n souvent difficile à obtenir, des indications sur les valeurs asymptotiques pouvant conduire à des résultats importants. Nous en donnerons deux exemples relatifs aux problèmes qui nous occupent actuellement.

Considérons un point double attractif α d'une substitution rationnelle et son domaine immédiat D supposé simplement connexe et limité par une courbe f. Nous allons démontrer que, du moins dans des cas très étendus, f n'a de tangente en aucun point ou seulement en une infinité dénombrable de points.

Nous savons que f, qui est la courbe limite des courbes antécédentes intérieures à D d'une circonférence entourant α, peut aussi être regardée comme l'ensemble dérivé des antécédents intérieurs à D d'un point quelconque de D autre que α; e est même l'ensemble des points limites des domaines antécédents d'un domaine Δ aux conditions suivantes : Δ doit renfermer des points intérieurs à D et ne contenir aucun point critique ou limite de points critiques des fonctions $R_{-n}(z)$; enfin les domaines antécédents de Δ doivent être choisis parmi ceux qui renferment des points intérieurs à D. S'il en est ainsi, les branches de fonctions $\overline{R}_{-n}(z)$, restreintes au domaine D, forment dans Δ une famille normale à fonctions limites constantes, ces constantes ayant pour affixes tous les points de f. Nous supposerons qu'on peut choisir Δ de manière qu'il renferme à la fois des points de D et des points de f. Soit alors une suite de fonctions $\overline{R}_{-\alpha_1}(z)$, $\overline{R}_{-\alpha_2}(z)$, ..., tendant uniformément dans Δ vers la constante a. Il est possible d'extraire de la suite de ces fonctions une nouvelle suite que nous désignerons par $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_n(z)$, ..., pour laquelle on aura

$$f_n(z) - a = \mu_n[\varphi(z) + \varepsilon_n(z)],$$

μ_n, $\varphi(z)$, $\varepsilon_n(z)$ ayant les significations indiquées plus haut. En effet, on suppose que les fonctions $\overline{R}_{-n}(z)$ sont uniformes dans Δ ; on voit facilement qu'il est permis de supposer qu'elles n'y ont pas de pôle. Elles satisfont donc aux conditions d'application du théorème précédent. Pour que $\varphi(z)$ ne soit pas une constante, il suffit qu'elle ait un zéro dans Δ ; c'est-à-dire que les $f_n(z) - a$ aient des zéros ayant un point limite intérieur à Δ. Pour qu'il en soit ainsi, il suffit que le domaine Δ renferme un point limite des conséquents de a. Soient donc E'_a l'ensemble dérivé de ces conséquents, b un point de cet ensemble qui naturellement appartient à f ; si, en outre, b n'appartient pas à l'ensemble $E_c + E'_c$ formé par les points critiques de la fonction $R_{-1}(z)$, leurs conséquents et leurs points limites, un cercle de centre b et de rayon convenable pourra être choisi comme domaine Δ dans lequel toutes les conclusions qui précèdent sont valables, la fonction $z' = \varphi(z)$ prenant la valeur zéro pour $z = b$ et faisant la représentation conforme de Δ sur un domaine Δ' du plan des z' entourant l'origine. Soit γ la section de f par Δ. Si z est un point de γ, le point $f_n(z)$ appartient à la courbe f en raison du caractère invariant de cette frontière et de la signification de $f_n(z)$.

Appelons ω l'une des limites d'indétermination de l'argument de μ_n pour n infini et ψ l'argument de $z' = \varphi(z)$, z étant un point de γ distinct de b ; en vertu de l'équation

$$f_n(z) - a = \mu_n[\varphi(z) + \varepsilon_n(z)],$$

il en résultera pour l'argument de $f_n(z) - a$ une valeur limite égale à $\omega + \psi$; comme ω est indépendant de z, pour que l'argument limite de $f_n(z) - a$ n'ait qu'un nombre fini de valeurs distinctes, il faut que ψ n'ait qu'un nombre fini de valeurs distinctes quand z varie sur γ. S'il en est ainsi, l'image γ' de γ dans le domaine Δ' est formée de points situés sur un nombre limité de droites issues de l'origine ; si γ' était partout discontinu, il en serait de même de γ et de f ; or, f est continu ; γ' contient donc un segment de droite et, de plus, puisque γ' est sur un nombre fini de droites, un segment isolé (dont les points intérieurs ne sont pas limites d'autres points de γ' extérieurs à ce segment). Comme z est une fonction analytique de z' dans Δ', il en résulte que γ contient un arc isolé de courbe analytique. Ceci n'est possible (n° 13) que si la courbe f tout entière est une courbe analytique qui ne peut être qu'une circonférence ou une droite (cas des substitutions à cercle fondamental), ou encore un arc de circonférence ou un segment de droite (substitutions qui possèdent un domaine invariant illimité ayant pour frontière un arc de courbe de cette nature).

Écartons ces deux cas particuliers simples. On voit qu'il existe alors sur f des points ξ infiniment voisins de a tels que l'argument de $\xi - a$ ait une infinité de valeurs limites distinctes (mod 2π). La courbe f, quelle que soit sa nature, n'a donc pas une tangente unique au point a et ne peut pas non plus être formée d'un nombre fini de courbes ayant chacune une tangente en a.

52. Nous allons voir que, dans les cas les plus simples, les points a constituent tous les points de f, sauf peut-être une infinité dénombrable d'entre eux. Considérons les points de f qui sont des points critiques ou limites de points critiques des fonctions $R_{-n}(z)$, c'est-à-dire qui appartiennent à l'ensemble $E_c + E'_c$. Nous supposerons que ces points ξ de f sont en nombre fini ; comme le conséquent d'un point ξ est encore un point ξ, ces points sont donc des points périodiques ou antécédents de points périodiques. Soit maintenant a un point de f ; si l'ensemble dérivé E'_a des conséquents de a renferme une infinité de points, il y en a qui sont distincts des points ξ. Le résultat qui précède est applicable à a. Si E'_a, qui est un ensemble invariant, ne renferme qu'un nombre limité de points, ces points appartiennent tous à des cycles. Supposons que les points de E'_a soient tous des points ξ. Si un tel point périodique n'a pas un multiplicateur de la forme $e^{i\theta}$, θ étant incommensurable à 2π, la chose n'est possible que si a est un antécédent de ξ. En effet, d'une part un point double répulsif ne peut être point limite unique des conséquents d'un point que si ce point est l'un de ses antécédents ; la même propriété a lieu pour les points doubles dont le multiplicateur est de la forme $e^{\frac{i\pi p}{q}}$, sauf pour les points z qui appartiennent aux domaines de convergence vers ces points doubles et qui, par conséquent, n'appartiennent pas à f; d'autre part; nous avons démontré (Chap. II, n° 15) que si un point double non attractif est limite des conséquents d'un point z, mais n'est pas leur seul point limite, ces points limites sont en nombre infini. Ces propriétés s'étendent d'elles-mêmes aux points périodiques. Par conséquent, si les points ξ de f sont en nombre fini et ne sont pas des points périodiques dont le multiplicateur soit de la forme $e^{i\theta}$, où θ est incommensurable à 2π, tous les points de f sont des points sans tangente sauf peut-être une infinité dénombrable d'entre eux, à savoir les antécédents des points ξ. En particulier, s'il n'y a aucun point ξ sur f, cette courbe n'a de tangente en aucun point.

On peut donc énoncer le résultat suivant :

Soient α *un point double attractif de la substitution* $z_1 = R(z)$ *et* D *son domaine immédiat supposé simplement connexe; si la frontière* f *de* D *ne contient aucun point qui soit un conséquent ou limite de conséquents de points critiques de la fonction* $R_{-1}(z)$, *cette frontière n'a de tangente en aucun point sauf dans les deux cas simples mentionnés au n°* 43.

53. En général, dans ce cas, f est une courbe simple de Jordan; du moins il en est toujours ainsi quand le domaine complémentaire de D est celui d'un autre point double attractif. Cette courbe non seulement n'a pas de tangente unique en un point, mais n'a pas non plus une tangente à droite et une tangente à gauche; on peut même démontrer qu'elle n'a de tangente ni à droite ni à gauche. Comme exemple, nous pouvons prendre la courbe de séparation des domaines des deux points o et ∞ pour la substitution $z_1 = \frac{z+z^m}{2}$ $(m \geqq 2)$.

Supposons maintenant qu'il y ait des points ξ sur la courbe f. Elle pourra avoir alors des tangentes en certains points. Supposons, par exemple, que f contienne un point double β pour lequel $R'(\beta) = +1$ et $R''(\beta) \neq 0$. Au point β il y aura une tangente de rebroussement. En effet, nous avons appris à tracer une courbe c passant par ce point β, y possédant une tangente de rebroussement et limitant un domaine avec une pointe rentrante qui fait partie du domaine du point β; par conséquent, les points de f voisins de β sont extérieurs à cette courbe c et toute branche de f passant par β sera tangente à c, avec un rebroussement en ce point. Il en sera de même en tous les points antécédents de β. D'ailleurs, si, prenant β pour origine, nous considérons les branches des fonctions $R_{-n}(z)$ nulles en ce point, nous savons qu'elles ont pour expression asymptotique, dans un certain secteur qui renferme des points de f,

$$R_{-n}(z) = \frac{1}{An + B\mathfrak{L}n + F(z) + \varepsilon_n(z)},$$

$\varepsilon_n(z)$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Cette expression est de la forme

$$\mu_n[C + \eta_n(z)],$$

en prenant, par exemple, $\mu_n = \frac{1}{A_n + B\mathfrak{L}_n}$ et $C = 1$. La fonction $\varphi(z)$, qui nous a servi dans la démonstration précédente, est ici une constante et l'on voit bien ainsi pourquoi cette démonstration ne s'applique pas dans le cas actuel. On peut prendre comme exemple la courbe de séparation des deux points doubles $z = 0$, $z = \infty$ de la substitution $z_1 = z - z^2$. On peut démontrer que c'est une courbe de Jordan sans points doubles. Elle a une infinité de points de rebroussement qui sont les points antécédents de l'origine. Partout ailleurs elle n'a pas de tangente.

Nous devons remarquer que l'analyse qui nous a conduit à ces propriétés plutôt négatives de la courbe f nous fournit en même temps une propriété positive, à savoir qu'autour d'un point a il existe une infinité d'arcs appartenant à la courbe, tendant vers ce point et représentables par la formule

$$Z = a + \mu_n[\varphi(z) + \varepsilon_n(z)],$$

les μ_n étant des constantes qui tendent vers zéro, $\varphi(z)$ une fonction analytique à dérivée non nulle, les $\varepsilon_n(z)$ des fonctions qui tendent vers zéro et z décrivant un arc de cette même courbe. On constate facilement que c'est une propriété banale (facile à traduire en langage géométrique) qui appartient, par exemple, à toutes les courbes analytiques et à beaucoup d'autres; mais c'est grâce à elle que nous avons pu étudier la « condensation des singularités » qui se produit en chaque point de la courbe, et conclure de la non-analyticité de certains arcs, la non-existence des tangentes en chaque point. La démonstration employée n'est d'ailleurs qu'une généralisation de celle du n° 46. On peut aussi remarquer qu'en chaque point a pour lequel cette démonstration est valable, il existe des domaines infiniment petits intérieurs à D et tendant vers a et qui, de plus, sont asymptotiquement semblables entre eux avec un centre de similitude commun en a, de sorte qu'ils sont vus de a sous un angle qui tend vers une limite non nulle. Il est clair qu'une telle propriété, quoique assez banale, n'appartient pas à tous les points frontières, notamment aux points de rebroussement, avec une pointe dirigée vers l'extérieur du domaine; c'est précisément ce qui se produit pour les points doubles de multiplicateur $+1$, pour lesquels la démonstration est en défaut.

Voici enfin une dernière remarque : plaçons-nous dans le cas où f est une courbe de Jordan sans points doubles. Comme elle n'a de tangente en aucun point (ou seulement en une infinité dénombrable de points), il résulte des recherches de M. Lebesgue qu'elle n'est pas rectifiable, et que les fonctions d'un paramètre réel qui la représentent sont à variation non bornée dans tout intervalle. Ces courbes ont d'ailleurs les plus grandes analogies avec celles de M. Helge von Koch; mais les courbes étudiées par cet auteur sont définies par une méthode constructive de manière à leur donner certaines propriétés assignées à l'avance. Il nous a fallu, au contraire, pour analyser le mécanisme de construction de nos courbes, de longues et patientes recherches comportant notamment l'étude analytique approfondie de certaines équations fonctionnelles (nos 40-42).

54. Nous allons donner maintenant une autre application des mêmes principes concernant les points doubles dont le multipli-

cateur est de la forme $e^{i\theta}$, θ incommensurable à 2π, et démontrer qu'*il ne peut exister de domaine invariant à l'intérieur duquel les conséquents d'un point tendent régulièrement vers ce point double*. Soit, le point double étant à l'origine,

$$z_1 = R(z) = z\,e^{i\theta} + A\,z^2 + \ldots.$$

Il existe un cercle C de centre O dans lequel $R(z)$ est holomorphe et ne prend qu'une fois chaque valeur; si $|z|$ est infiniment petit, on a

$$\arg z_1 = \arg z + \theta + o(|z^2|),$$
$$\operatorname{mod} z_1 = \operatorname{mod} z + o(|z^2|),$$

$o(|z^2|)$ désignant une quantité qui est au plus de l'ordre de $|z^2|$; la transformation est donc équivalente, au second ordre près, à une rotation de l'angle θ autour de l'origine. On aura de même

$$\arg z_n = \arg z + n\theta + o(|z^2|),$$
$$\operatorname{mod} z_n = \operatorname{mod} z + o(|z^2|),$$

les diverses quantités $o(|z^2|)$ qui figurent dans ces égalités étant plus petites que $k|z^2|$, où k peut être supposé fixe tant que n reste inférieur à un nombre fixe p et $|z|$ inférieur à r.

Supposons que les z_n tendent régulièrement et uniformément vers zéro dans un domaine fermé D faisant partie d'un domaine invariant $\mathfrak{D}$. Les domaines D et $D_1 = R(D)$ étant tous deux intérieurs à $\mathfrak{D}$, il existe un domaine qui les contient tous les deux et qui jouit de la même propriété que D. Il est donc permis de supposer que D et D_1, et en général D_n et D_{n+1} ont des points intérieurs communs. Ces domaines sont tous, à partir d'un certain rang, intérieurs au cercle C; on peut supposer qu'il en est ainsi à partir du premier. Les fonctions $R_n(z)$ ne prennent alors qu'une fois chaque valeur dans D. D peut d'ailleurs être supposé simplement connexe et limité par une courbe formée d'arcs analytiques. Nous savons, en outre, que les $R_n(z)$ ne peuvent pas converger uniformément vers zéro dans un domaine contenant l'origine; les $R_n(z)$ n'ont donc pas de zéros dans D.

Soit ξ un point intérieur à D. Les fonctions $\dfrac{R_n(z)}{R_n(\xi)} = f_n(z)$ sont telles que de toute suite de ces fonctions, on peut en extraire une autre qui converge uniformément vers une fonction limite $f(z)$

holomorphe et non nulle dans D, en vertu des lemmes que nous avons établis. Aucune des fonctions limites n'est une constante, car si l'on avait, pour certaines valeurs infiniment grandes de n,

$$z_n = R_n(z) = \xi_n[C + \varepsilon_n(z)]$$

[C constante non nulle, $\xi_n = R_n(\xi)$], on en déduirait

$$\arg z_n = \arg \xi_n + \arg C + \text{inf. pet.}$$

Le domaine D_n serait donc vu de l'origine sous un angle infiniment petit. Or, le domaine D_{n+1} se déduisant de D_n par une substitution qui équivaut asymptotiquement à une rotation de l'angle fini $\theta\,(0 < \theta < 2\pi)$ autour de l'origine, à partir d'un certain rang D_n et D_{n+1} n'auraient aucun point commun.

Les fonctions $f_n(z)$ n'ayant aucune fonction limite constante et prenant toutes la valeur 1 au point ξ, il en résulte que les domaines qu'elles représentent, quand z décrit D, ont en commun un cercle de rayon non nul ayant pour centre le point 1. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, et soient L un contour simple tracé dans D entourant ξ, l_n l'image de L par $f_n(z)$. Il existerait alors une suite de fonctions $f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \dots, f_{\alpha_n}, \dots$ telles que la plus courte distance du point 1 aux contours simples $l_{\alpha_1}, l_{\alpha_2}, \dots$ tende vers zéro. On peut supposer, puisque les f_n forment une famille normale, que les fonctions $f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \dots, f_{\alpha_n}, \dots$ convergent uniformément vers f dans D; l_{α_k} tend alors uniformément vers l image de L par $f(z)$. Le point 1 serait donc sur l. Or la fonction $f(z)$, limite non constante de fonctions qui ne prennent jamais deux fois la même valeur dans D, jouit de la même propriété et fait la représentation conforme de D sur une aire simple; le point 1 ne peut donc pas correspondre à la fois au point ξ et à un point de L. Le lemme énoncé est donc exact.

Les domaines représentatifs des fonctions $\frac{R_n(z)}{\xi_n}$ ayant ainsi un cercle intérieur commun de centre 1 et de rayon non nul, ont aussi en commun un secteur circulaire Σ compris entre deux cercles de rayons $1 + h$ et $1 - h$ ayant pour centre l'origine, et deux rayons qui font entre eux l'angle $\omega \neq 0$. Il correspond à ce secteur une partie du domaine D_n, qu'on peut appeler $\xi_n \Sigma$ et qui est un secteur circulaire semblable, de rayons $|\xi_n|(1 + h)$

et $|\xi_n|(1-h)$, d'ouverture ω et contenant le point ξ_n (qui est le milieu du rayon médian).

Transformons ce secteur successivement par $R(z)$, $R_2(z)$, ..., $R_{p-1}(z)$, p étant un nombre fixe (indépendant de n) que nous déterminerons tout à l'heure. Nous obtenons ainsi p domaines qui sont voisins chacun d'un secteur circulaire égal au premier, puisque le secteur initial étant voisin de l'origine, ces $p-1$ transformations sont approximativement des rotations de θ, 2θ, ..., $(p-1)\theta$ autour de l'origine. Je dis que la somme de ces p domaines comprendra toute une couronne circulaire de rayons $|\xi_n|\left(1+\frac{h}{2}\right)$ et $|\xi_n|\left(1-\frac{h}{2}\right)$, au moins dès que n dépasse une certaine limite.

Nous allons choisir p de manière qu'il en soit bien ainsi. Supposons d'abord que la substitution se réduise à

$$z_1 = z\, e^{i\theta},$$

c'est-à-dire à une simple rotation de l'angle θ. Le choix de p est alors une simple question d'approximation des incommensurables dont nous rappelons la solution pour plus de clarté. Cherchons à déterminer l'entier x de façon que le point $e^{xi\theta}$ soit aussi voisin que possible d'un point $e^{i\beta}$ de la circonférence, c'est-à-dire à résoudre approximativement en nombres entiers l'équation

$$x\theta - 2\pi y = \beta.$$

Soit $\frac{m}{p}$ une réduite du développement de $\frac{\theta}{2\pi}$ en fraction continue :

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{m}{p} + \frac{\varepsilon}{p^2} \qquad (|\varepsilon| < 1)$$

et

$$\frac{\beta}{2\pi} = \frac{q+\varepsilon'}{p} \qquad (|\varepsilon'| < 1,\ \varepsilon\varepsilon' \geqq 0).$$

L'équation à résoudre devient

$$\frac{mx+py-q}{p} = \frac{\varepsilon'}{p} - \frac{\varepsilon x}{p^2}.$$

m et p étant des premiers entre eux, on peut déterminer deux entiers x et p, x étant pris dans la suite $(0, 1, 2, \ldots, p-1)$, tels que

$$mx - py - q = 0.$$

On aura, pour ces valeurs de x et de y,

$$x\frac{\theta}{2\pi}-y-\frac{\beta}{2\pi}=\frac{\varepsilon x}{p^2}-\frac{\varepsilon'}{p}<\frac{1}{p} \qquad \text{(en valeur absolue)}.$$

Si nous prenons p de manière que $\frac{1}{p}<\frac{\omega}{2}$, les arcs d'amplitude ω ayant pour milieux les points $1, e^{i\theta}, \ldots, e^{(p-1)i\theta}$ couvriront toute la circonférence. Si nous prenons $\frac{1}{p}<\frac{\omega}{4}$, les arcs d'amplitude $\frac{\omega}{2}$ et ayant toujours pour milieux les points $1, e^{i\theta}, \ldots, e^{(p-1)i\theta}$ couvriront la circonférence; les arcs d'amplitude ω et de mêmes milieux couvriront la circonférence de manière que deux arcs consécutifs empiètent d'au moins $\frac{\omega}{4}$. Si nous revenons aux secteurs circulaires décrits plus haut, on voit qu'ils seront tranformés en secteurs égaux empiétant les uns sur les autres d'au moins $\frac{\omega}{4}$ angulairement, leur ensemble constituant une couronne unique de rayons $|\xi_n|(1+h)$ et $|\xi_n|(1-h)$.

Si maintenant nous ne supposons plus que la fonction $R(z)$ se réduise à $e^{i\theta}z$, les conclusions subsistent, l'entier p étant toujours déterminé de la même manière, c'est-à-dire en fonction de la seule constante ω et indépendamment de n. En effet, d'après la remarque faite au début de cette démonstration, nous obtiendrons, au lieu des p secteurs circulaires que nous venons de décrire, p domaines qui s'en déduisent par une transformation infiniment petite du second ordre (ξ_n étant regardé comme l'infiniment petit principal), les modules et les arguments variant de moins de $k|\xi_n|^2$. Donc, si $|\xi_n|$ est suffisamment petit, c'est-à-dire n supérieur à une certaine valeur N, les p domaines obtenus formeront encore un domaine coronal d'un seul tenant comprenant une couronne circulaire de rayons $|\xi_n|\left(1+\frac{h}{2}\right)$ et $|\xi_n|\left(1-\frac{h}{2}\right)$ qui appartient par conséquent au domaine $D_n+D_{n+1}+\ldots+D_{n+p-1}$. La somme des domaines $D_{n+p}+D_{n+p-1}+\ldots+D_{n+2p}$ renfermera de même une couronne circulaire dont les rayons auront pour valeur $|\xi_{n+p}|\left(1+\frac{h}{2}\right)$ et $|\xi_{n+p}|\left(1-\frac{h}{2}\right)$. Ces deux couronnes empiéteraient l'une sur l'autre au moins à partir d'une certaine valeur de n, car $|\xi_n|$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, il résulte immédiatement de l'expression de $R(z)$ et de $R_p(z)$ que $\left|\frac{\xi_{n+p}}{\xi_n}\right|$ tend vers l'unité et peut être supposé compris pour $n > N'$ entre les limites $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$ et $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ où $\varepsilon < \frac{h}{2}$, de sorte que ξ_{n+1} est intérieur à la couronne de rang précédent.

En continuant ainsi indéfiniment on obtient des couronnes successives empiétant les unes sur les autres et couvrant, puisqu'elles tendent vers l'origine, tout un cercle C' intérieur et concentrique à C, à l'exception de l'origine. Dans C', les fonctions $R_n(z)$ convergent vers zéro et uniformément dans toute partie de C' qui ne contient pas l'origine; mais ces fonctions sont bornées dans leur ensemble dans C' puisque les domaines D_n ne sortent pas de C. La convergence uniforme a donc lieu dans tout le cercle C'. Or, nous savons que les fonctions $R_n(z)$ ne peuvent converger uniformément dans un domaine comprenant l'origine que vers des fonctions limites non constantes. Le théorème est donc démontré.

D'autre part, la substitution $z_p = R_p(z)$ a pour multiplicateur à l'origine $e^{ip\theta}$ dont l'argument est toujours incommensurable à 2π. Par conséquent, deux domaines quelconques D_n et $D_{n+p}(p \geqq 1)$, conséquents d'un domaine D où les $R_n(z)$ tendent uniformément vers zéro, ne peuvent jamais faire partie d'un même domaine d'un seul tenant qui possède la même propriété. Si $R(z)$ est rationnelle et si $\mathcal{O}$ désigne une région, contiguë à l'ensemble parfait $\mathcal{F}$, où les $R_n(z)$ convergent uniformément vers le point double (à supposer que la chose soit possible), les régions conséquentes $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ seront donc toutes distinctes. Cette propriété n'a rien de surprenant. En effet, dans le cas où le multiplicateur est de la forme $e^{2i\pi\frac{p}{q}}$, p et q premiers entre eux, les régions de convergence vers le point double, contiguës à $\mathcal{F}$, forment un ou plusieurs cycles de q régions $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_{q-1}$ qui sont permutées circulairement entre elles par les puissances de la substitution donnée (on devra y ajouter éventuellement d'autres régions antécédentes de celles-ci). En faisant croître q indéfiniment, on est conduit à admettre que dans le cas où l'argument du multiplicateur est incommensurable à 2π, on obtient des régions $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1, \ldots$ toutes distinctes. Mais ce n'est là qu'une méthode heuristique et la démonstration précédente, d'ailleurs plus longue à exposer qu'à concevoir, ne paraît pas pouvoir être évitée.

55. Ce résultat va nous permettre de préciser certains résultats antérieurs. Nous avons démontré (n° 33) que sur la frontière du domaine immédiat D d'un point double attractif, il existe toujours un point double auquel aboutit un chemin intérieur à D et formé d'une chaîne d'arcs $(z_0 z_{-1}, z_{-1} z_{-2}, \ldots, z_{-n} z_{-(n+1)}, \ldots)$ tels que $z_{-(n-1)} z_{-n} = R(z_{-n} z_{-(n+1)})$. On peut d'ailleurs, au lieu d'une chaîne d'arcs de cette nature, obtenir une chaîne de domaines jouissant de la même propriété, comme il résulte de la démonstration que nous avons donnée. Ceci n'est pas possible, en vertu de ce qui précède, si le point double considéré sur la frontière a un multiplicateur de la forme $e^{i\theta}$, $\frac{\theta}{2\pi}$ étant incommensurable; car la démonstration ne suppose pas que $R(z)$ soit rationnelle dans un certain voisinage du point double. On voit facilement d'autre part que le multiplicateur ne peut pas être non plus une racine $q^{\text{ième}}$ de l'unité autre que $+1$. On peut donc énoncer le résultat suivant.

Sur la frontière du domaine immédiat d'un point double attractif α, il y a toujours au moins un point double β pour lequel on a $|R'(\beta)| > 1$ ou $R'(\beta) = +1$.

56. Précisons maintenant quelques notions relatives aux domaines invariants. Si un tel domaine a plus de deux points frontières, les fonctions $R_n(z)$ y forment une famille normale. Par conséquent, ce domaine ne renferme à son intérieur aucun point de l'ensemble parfait $\mathcal{F}$. C'est donc soit un domaine contigu à $\mathcal{F}$, soit une partie d'un tel domaine.

Supposons que ce domaine invariant $\mathcal{D}$ ne fasse pas partie d'un domaine singulier où les $R_n(z)$ auraient des fonctions limites non constantes. Soit D un domaine complètement intérieur à $\mathcal{D}$, D_1 son conséquent immédiat; D et D_1 étant tous deux intérieurs à $\mathcal{D}$, il existe un domaine Δ également intérieur à D, qui comprend D et D_1. La chaîne des domaines conséquents $\Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_n, \ldots$ forme alors un continu, Δ_n et Δ_{n+1} ayant des points intérieurs communs; les $R_n(z)$ n'ayant que des fonctions limites constantes, le diamètre de Δ_n tend vers zéro. Si les domaines Δ_{α_p} tendent vers le point a, les domaines $\Delta_{1+\alpha_p}$ tendent vers $R(a)$; comme ces deux domaines, qui empiètent l'un sur l'autre, ont des diamètres infiniment petits, $\Delta_{1+\alpha_p}$ tend aussi vers a; donc $a = R(a)$; a est un point double de la substitution. Supposons que les domaines $\Delta_{\alpha_p+\beta_p}$ tendent vers b distinct de a. La chaîne des domaines conséquents de Δ dont les indices sont compris entre α_p et $\alpha_p + \beta_p$ forme un continu C_p qui a deux points limites distincts a et b pour p infini; C'_p a donc un continu limite C; or tous les points de C sont comme a et b des points racines de l'équation $z = R(z)$, qui ne peuvent former un continu. Donc $a = b$. On voit que la démonstration est valable, pourvu que $R(z)$ soit holomorphe dans $\mathfrak{D}$ et continue sur la frontière.

Les fonctions $R_n(z)$ ont donc pour limite un point double unique a. D'après ce qui précède, a ne peut pas avoir pour multiplicateur un nombre de la forme $e^{i\theta}$ qui ne soit égal à $+1$. Par conséquent, dans tout domaine invariant ayant au moins trois points frontières les fonctions itérées $R_n(z)$, si elles n'ont pas de fonctions limites non constantes, tendent vers a, point double attractif ou de multiplicateur $+1$.

R étant rationnelle, supposons que $\mathfrak{F}$ divise le plan en un nombre fini de régions; nous savons que ce nombre ne peut être que 1 ou 2 et qu'il n'y a pas de fonctions limites non constantes (n° **27**). S'il n'y a qu'une seule région contiguë à $\mathfrak{F}$, elle constitue un domaine invariant qui est celui d'un point double attractif ou de multiplicateur $+1$. S'il y a deux régions, ces régions peuvent être permutées par la substitution et constituent alors les domaines attachés à un couple de points attractifs, ou à un point double unique de multiplicateur -1. Ou bien encore ces deux régions sont complètement invariantes et constituent les domaines respectifs de deux points doubles attractifs ou de multiplicateur $+1$, ou encore les deux domaines distincts attachés à un point double unique de multiplicateur $+1$, mais qui compte pour deux ($R''(\alpha) = 0$).

Ces prémisses posées, nous allons rechercher dans quels cas l'ensemble $\mathfrak{F}$ peut contenir un arc *isolé* de courbe analytique. La section de $\mathfrak{F}$ par un domaine convenablement choisi, par exemple un cercle ayant son centre en un point de cet arc et un rayon convenable se compose donc d'un seul arc régulier de courbe analytique; soit σ cet arc. $\mathfrak{F}$ tout entier résulte de σ par la transformation rationnelle $Z = R_p(z)$, p étant convenablement choisi.

$\mathcal{F}$ est donc une courbe analytique continue dont certains arcs peuvent avoir des points doubles ou des points de rebroussement ou être parcourus plusieurs fois; mais on peut considérer $\mathcal{F}$ comme une courbe simple sur une surface de Riemann à d^p feuillets au plus. Si Z_0 est distinct d'un point critique de la fonction $R_p(Z)$, deux arcs de $\mathcal{F}$ ne peuvent pas se traverser sur le plan simple au point Z_0. On a $Z_0 = R_p(z_0)$, z_0 étant un point de σ. Si l'on avait deux arcs distincts passant par Z_0, il leur correspondrait deux arcs distincts, antécédents de rang p des premiers et passant par le point z_0 de σ. Ces deux derniers arcs appartiennent encore à $\mathcal{F}$, ce qui est contraire à l'hypothèse que σ est un arc isolé. $\mathcal{F}$ n'a donc qu'un nombre fini de points doubles et divise le plan en un nombre fini de régions qui ne peut être que 1 ou 2. Donc [en remplaçant au besoin $R(z)$ par $R_2(z)$] σ appartient, d'après ce qui précède, à la frontière d'un point double attractif ou de multiplicateur $+1$. σ étant un arc isolé de courbe analytique, cette circonstance ne peut se présenter que dans les deux cas simples considérés au n° 43.

Appelons, pour abréger le langage, substitutions C celles qui donnent lieu à un ou deux domaines limités par un arc de circonférence ou une circonférence entière. Nous avons l'énoncé suivant :

Sauf dans le cas des substitutions C, l'ensemble $\mathcal{F}$ ne comprend aucun arc isolé de courbe analytique.

On verrait de même que $\mathcal{F}$ ne comprend aucun arc isolé de courbe de Jordan simple ayant une tangente en chaque point.

57. Il est remarquable que $\mathcal{F}$ peut comprendre néanmoins une infinité de courbes analytiques (algébriques), mais qui alors ne sont pas isolées.

Considérons la substitution

$$z_1 = cz - \frac{1}{z^3},$$

c étant réel et compris entre $+\frac{1}{2}$ et $+1$. Le point à l'infini est un point double répulsif de multiplicateur $\frac{1}{c} > 1$. Nous allons faire voir que tous les points de l'axe réel appartiennent à $\mathcal{F}$ et même d'une manière plus précise que les conséquents d'un segment quelconque de l'axe réel finissent par le recouvrir tout entier. C'est là une discussion élémentaire analogue à celles que nous avons faites au Chapitre III à propos des substitutions à cercle fondamental.

Étudions les variations de $R(z)$ pour z réel, en remarquant que $R(z)$ est une fonction impaire. $R(z)$ est infinie pour $z = 0$, nulle pour $z = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{c}}$. Sa dérivée

$$R'(z) = c + \frac{3}{z^4}$$

est toujours positive. On a alors le Tableau suivant :

z.......	$-\infty$.	$-\alpha$.	$-\sqrt[4]{\frac{1}{c}}$.	$-\sqrt[4]{\frac{1}{c+1}}$.	$-\beta$.	0.
$R(z)$.....	$-\infty$	$-\sqrt[4]{\frac{1}{c}}$	0	$+\sqrt[4]{\frac{1}{c+1}}$	$+\sqrt[4]{\frac{1}{c}}$	$+\infty \;\Vert$

z.......	0.	$+\beta$.	$+\sqrt[4]{\frac{1}{c+1}}$.	$+\sqrt[4]{\frac{1}{c}}$.	$+\alpha$.	$+\infty$.
$R(z)$.....	$\Vert\; -\infty$	$-\sqrt[4]{\frac{1}{c}}$	$-\sqrt[4]{\frac{1}{c+1}}$	0	$+\sqrt[4]{\frac{1}{c}}$	$+\infty$

Le point $z = 0$ est un pôle de $R(z)$, $z = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{c}}$ sont des pôles de $R_2(z)$; $z = \pm\alpha$ et $\pm\beta$ sont des pôles de $R_3(z)$.

On a ensuite

$$\frac{z_1}{z} = c - \frac{1}{z^4},$$

$$\left|\frac{z_1}{z}\right| < 1 \qquad \text{pour } |z| > \frac{1}{\sqrt[4]{c+1}},$$

$$\left|\frac{z_1}{z}\right| > 1 \qquad \text{pour } |z| < \frac{1}{\sqrt[4]{c+1}}.$$

Soient z un point réel distinct des antécédents du point à l'infini, et $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ la suite de ses conséquents. Cette suite a des limites d'oscillation finies et même au plus égales à $\frac{1}{\sqrt[4]{c+1}}$ en valeur absolue, car si $|z_n|$ est $> \frac{1}{\sqrt[4]{c+1}}$, $|z_{p+1}|$ est $< |z_n|$. On aura même certainement $|z^n| \leqq \frac{1}{\sqrt[4]{c+1}}$ pour une infinité de valeurs de n; en effet, les points $\pm\sqrt[4]{\frac{1}{c+1}}$ forment un couple répulsif, de multiplicateur $(4c+3)^2$; donc $|z_n|$ ne peut tendre vers $\sqrt[4]{\frac{1}{c+1}}$ que si l'on a constamment, à partir d'un certain rang, $z_n = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{c+1}}$.

Ceci posé, soient ab un segment de l'axe réel, $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ... ses conséquents. Je dis que $a_n b_n$ finira par comprendre le point à l'infini à son intérieur ou à l'une de ses extrémités. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; les points de $a_n b_n$ seront donc toujours distincts du point à l'infini et aussi des points o, $\pm\sqrt[4]{\frac{1}{c}}$, $\pm\alpha$, $\pm\beta$. Or on a une infinité de fois

$$|a_n| \leqq \frac{1}{\sqrt[4]{c+1}}.$$

Le segment $a_n b_n$ sera donc une infinité de fois intérieur à l'un des segments $\left(0, \sqrt[4]{\frac{1}{c}}\right)$ ou $\left(0, -\sqrt[4]{\frac{1}{c}}\right)$. Comme $\beta < \frac{1}{\sqrt[4]{c+1}}$, le segment $a_n b_n$ sera alors ou bien dans le segment $\left(\beta, \sqrt[4]{\frac{1}{c}}\right)$ ou dans son symétrique, ou bien dans le segment $(0, \beta)$ ou dans son symétrique. Dans ce second cas, le segment $a_{n-1} b_{n-1}$ sera intérieur à un segment ayant une extrémité au point $\pm\sqrt[4]{\frac{1}{c}}$ et ne pourra pas dépasser $\pm\alpha$ ou $\pm\beta$. Donc, dans tous les cas, $a_n b_n$ sera une infinité de fois intérieur à l'un des segments (α, β) ou $(-\alpha, -\beta)$ c'est-à-dire à un segment borné n'ayant pas d'extrémité à l'origine des coordonnées.

Ceci posé, on a

$$\frac{z R'(z)}{R(z)} = \frac{c + \frac{3}{z^4}}{c - \frac{1}{z^4}}.$$

Pour z réel, le second membre est toujours plus grand que 1 en valeur absolue; il tend vers 1 pour z infini, mais pour $|z| < \alpha$, on aura

$$\left|\frac{z R'(z)}{R(z)}\right| > k > 1$$

ou

$$\left|\frac{R'(z)}{R(z)}\right| > \left|\frac{k}{z}\right|.$$

En intégrant dans un intervalle où $R(z)$ reste fini, on a

$$\left|\log\frac{R(a)}{R(b)}\right| > k\left|\log\frac{a}{b}\right|.$$

Nous aurons donc pour nos intervalles $a_n b_n$

$$\left|\log\frac{a_n}{b_n}\right| > \left|\log\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\right|$$

constamment, et

$$\left|\log\frac{a_n}{b_n}\right| > k\left|\log\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\right| \qquad (k > 1)$$

une infinité de fois. Par suite,

$$\left|\log\frac{a_n}{b_n}\right| > k^{\varphi(n)}\left|\log\frac{a}{b}\right|,$$

$\varphi(n)$ tendant vers l'infini avec n. Donc $\frac{b_n}{a_n}$ a pour seules limites d'indétermination o et ∞. Ceci est incompatible avec le fait que $a_n b_n$ est une infinité de fois intérieur au segment $\alpha\beta$.

On doit donc admettre que $a_n b_n$ finira par comprendre le point à l'infini à son intérieur ou à l'une de ses extrémités, Mais si l'on a un segment tel que $(a_n + \infty)$, comme les points a_{n+1}, a_{n+2}, ... finissent par dépasser $\frac{1}{\sqrt[4]{c}}$ vers la droite, on aura des segments conséquents comprenant l'origine et finalement tout l'axe réel.

On voit donc bien que tout point de l'axe réel appartient à $\mathfrak{F}$, aucune suite des fonctions $R_n(z)$ ne peut converger sur un segment de cet axe. D'autre part, l'axe imaginaire appartient aussi à $\mathfrak{F}$, car la substitution ne change pas si l'on remplace z par iz et z_1 par iz_1. Il en sera de même pour toutes les courbes antécédentes des deux axes de coordonnées qui sont des courbes algébriques en infinité dénombrable. Cherchons, par exemple, les courbes antécédentes immédiates de l'axe réel. Posons

$$z = \rho\, e^{i\omega},$$

$$z_1 = c\rho\, e^{i\omega} - \frac{1}{\rho^3}e^{-3i\omega} = \left(c\rho\cos\omega - \frac{\cos 3\omega}{\rho^3}\right) + i\left(c\rho\sin\omega + \frac{\sin 3\omega}{\rho^3}\right)$$

En exprimant que z_1 est réel, il vient

$$c\rho^4 \sin\omega + 3\sin\omega - 4\sin^3\omega = 0.$$

En supprimant la solution $\sin\omega = 0$, qui donne l'axe réel, il vient

$$c\rho^4 + 3 - 4\sin^2\omega = 0$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$c(x^2+y^2)^6 + 3x^2 - y^2 = 0,$$

courbe du sixième degré ayant un point double à l'origine. Toutes ces courbes ont, du reste, des points doubles.

Ainsi $\mathcal{F}$ comprend ici des courbes algébriques. On pourra vérifier qu'il y a des points de $\mathcal{F}$ (notamment des points périodiques d'ordre 2 non situés sur les axes) qui n'appartiennent pas à ces courbes. On constate aisément qu'il y a quatre points doubles attractifs. Ce sont les points

$$z^4 = -\frac{1}{1-c},$$

placés sur les bissectrices des axes de coordonnées et dont les multiplicateurs sont la valeur $(4c-3)$. Les points critiques de la fonction $R_{-1}(z)$ sont le point à l'infini qui est en même temps un point double répulsif et les points $\frac{4c}{3}\sqrt[4]{-\frac{3}{c}}$; ces derniers, placés sur les bissectrices, appartiennent respectivement aux domaines immédiats des quatre points doubles attractifs. Il n'y a pas d'autres fonctions limites que les constantes qui correspondent à ces quatre points (¹). Les domaines immédiats de ces points sont simplement connexes et limités par des courbes qui n'ont de tangente en aucun point; la chose n'est douteuse que pour les antécédents du point à l'infini. Il n'est pas difficile de voir qu'il n'y a pas de tangentes en ces points. Ces quatre domaines ont des antécédents distincts d'eux-mêmes, en nombre infini et limités par des courbes

(¹) On pourrait déduire de là très rapidement que l'axe réel appartient à $\mathcal{F}$. Mais la méthode directe et élémentaire employée s'applique à des cas où l'on ne connaît pas l'ensemble dérivé des conséquents des points critiques de $R_{-1}(z)$. Pour les substitutions à coefficients réels, on peut former de diverses manières des exemples très généraux où la même circonstance se produit.

de même nature. L'ensemble de toutes ces courbes ne constitue pas tout l'ensemble $\mathfrak{F}$. En effet, elles n'ont en commun avec les courbes algébriques considérées plus haut qu'une infinité dénombrable de points. Je ne sais pas si $\mathfrak{F}$ a d'autres points que ceux de ces deux séries de courbes. Dans tous les cas, on voit bien que les arcs de ces courbes ne sont pas isolés dans $\mathfrak{F}$; car tout point de $\mathfrak{F}$ est limite d'antécédents des domaines immédiats des quatre points doubles, les dimensions de ces domaines tendant vers zéro.

Ce même exemple nous conduit encore à une propriété curieuse qui mérite d'être signalée. Faisons la transformation $z_1 = t^{\frac{1}{4}}$, $z = t^{\frac{1}{4}}$; on obtient encore une substitution rationnelle

$$t_1 = t\left(c - \frac{1}{t}\right)^4.$$

Les t_n n'ont pas d'autre fonction limite que la constante $\frac{1}{c-1}$, qui représente un point double attractif correspondant aux quatre points de l'exemple précédent; les t_n convergent vers cette constante dans une infinité de régions distinctes séparées par $\mathfrak{F}$. Ainsi il y a une infinité de régions de convergence des t_n, qui sont les antécédentes du domaine immédiat d'un point double attractif et ce sont là les seules régions de convergence.

Pour être complet, il nous resterait à étudier la frontière du domaine immédiat d'un point double, quand ce domaine est d'ordre de connexion infini et à étendre pour ce cas les propositions des nos 43 et 44. On y parviendrait probablement par la même méthode en ayant égard aux travaux récents relatifs à la représentation conforme des domaines à connexion multiple (Poincaré, Kœbe, etc.). Mais on doit remarquer que, dans ce cas, f, s'il n'est pas partout discontinu, comprend une infinité de continus distincts; dans tous les exemples que nous avons pu étudier, aucun de ces continus n'est isolé, tous les points de f étant limites de domaines extérieurs à D, dont les dimensions tendent vers zéro. Il en est probablement toujours ainsi; mais il faudrait élucider d'abord ce point avant de rechercher si f peut renfermer une ligne analytique isolée. Il est d'ailleurs évident que si le domaine D est complètement invariant, comme cela a lieu pour le point à l'infini dans une substitution polynomiale,

f coïncide avec $\mathfrak{F}$ et que les résultats qui précèdent lui sont alors applicables.

CHAPITRE VII.

58. Les développements des Chapitres précédents vont nous permettre d'étudier les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles exprimant une relation entre les valeurs d'une fonction de variable complexe et celle qu'on en déduit en effectuant sur la variable une substitution rationnelle donnée. Pour être traité d'une manière complète, ce sujet exigerait de longs développements concernant la convergence des séries ou des produits infinis qu'on peut former avec les itérées d'une fraction rationnelle. Cette étude qui est facile, tant qu'on reste à l'intérieur des domaines de convergence de ces fractions itérées $R_n(z)$, devient au contraire très difficile sur les frontières de ces domaines, et pour surmonter ces difficultés quand on ne fait aucune hypothèse particulière sur la nature des frontières, il faudrait compléter sur quelques points les résultats déjà acquis. Nous étudierons d'une manière assez complète les solutions des équations fonctionnelles de Schröder et d'Abel et nous donnerons quelques indications sur les solutions d'autres équations un peu plus compliquées.

Pour qu'une équation fonctionnelle telle que

$$A\{f[R(z)], f(z), z\} = 0,$$

où A est une fonction donnée, $f(z)$ une fonction analytique inconnue, ait un sens précis, il faut que si le point z appartient au domaine d'existence de la fonction, il en soit de même du point $z_1 = R(z)$; ce domaine doit donc contenir ses conséquents. Si l'on résout l'équation fonctionnelle par rapport à $f[R(z)]$ et qu'on y remplace ensuite z par $R_{-1}(z)$, en choisissant une détermination convenable de cette fonction inverse, on définira $f(z)$ dans un domaine D_{-1} antécédent du domaine initial D et contenant D. On définira de même $f(z)$ dans $D_{-2}, D_{-3}, \ldots, D_{-n}, \ldots$. Le domaine limite de D_{-n} est alors un domaine invariant. Si nous supposons que ce domaine invariant soit un domaine maximum, c'est-à-dire qu'il ne soit pas contenu dans un domaine invariant plus grand, il est alors contigu à $\mathcal{F}$, du moins lorsqu'il a plus de deux points frontières. Le cas où ce domaine comprend tout le plan, sauf peut-être un ou deux points, ne paraît conduire qu'à des fonctions uniformes banales quand $R(z)$ n'est pas du premier degré; il peut conduire à des fonctions multiformes intéressantes, qui peuvent être par exemple des fonctions inverses de fonctions méromorphes; nous en verrons des exemples. Si, au contraire, ce domaine invariant est contigu à $\mathcal{F}$, il ne peut être que ce que nous avons appelé le domaine immédiat d'un point double attractif ou de multiplicateur égal à $+1$, ce dernier cas étant, comme nous le savons, un cas limite du premier, mais dont l'étude est bien plus compliquée (1).

39. Nous ne nous étendrons pas davantage sur ces indications d'ordre général qui seront précisées par des exemples et nous allons étudier maintenant les solutions uniformes de l'équation fonctionnelle de Schröder dans le domaine d'un point double attractif α de multiplicateur non nul

$$F[R(z)] = s\,F(z) \qquad [s = R'(\alpha),\ 0 < |s| < 1].$$

M. Kœnigs a démontré que cette équation admet une solution holomorphe dans un cercle de centre α et de rayon r suffisamment petit pour qu'on ait en tout point de ce cercle

$$|R(z) - \alpha| < k|z - \alpha| \qquad (k < 1).$$

Cette solution qui est nulle et de dérivée égale à 1 en α est la limite pour n infini de l'expression $\dfrac{R_n(z) - \alpha}{s^n}$; la convergence uniforme de cette expression est d'ailleurs facile à démontrer, en l'écrivant sous la forme

$$(z - \alpha) \prod_{p=0}^{p=n-1} \frac{R(z_p) - \alpha}{s(z_p - \alpha)}.$$

C'est ce que fait M. Kœnigs dans son Mémoire bien connu.

Si $F(z)$ désigne cette solution fondamentale de l'équation de

(1) Nous laissons de côté le cas qui ne se présente probablement jamais, où il y aurait des domaines invariants singuliers dans lesquels les $R_n(z)$ auraient des fonctions limites non constantes.

Schröder, toutes les solutions holomorphes ou méromorphes en α de la même équation où l'on remplace s par une constante indéterminée sont de la forme $C[F(z)]^{\pm n}$, C constante arbitraire et n entier quelconque. On peut donc se borner à la solution fondamentale, si on laisse de côté celles qui ont en α un point critique ou un point singulier essentiel.

Si maintenant on suppose $R(z)$ rationnelle et qu'on fasse varier z dans tout le domaine immédiat D_α du point double, le produit infini qui définit $F(z)$ étant uniformément convergent dans tout domaine fermé complètement intérieur à D_α, $F(z)$ est holomorphe dans D_α et y vérifie en chaque point l'équation de Schröder.

Les zéros de cette fonction sont les antécédents de α intérieurs à D_α; cela résulte immédiatement de l'équation fonctionnelle elle-même ou de l'équation $F(z) = \lim \frac{R_n(z)-\alpha}{s^n}$. Ces zéros sont d'ailleurs en nombre infini; nous savons, en effet, que la fonction $R_{-1}(z)$ égale à α pour $z = \alpha$ et prolongée à l'intérieur de D_α y présente au moins un point critique c, lequel est distinct de α, puisque $s = R'(\alpha) \neq 0$; si z décrit un lacet partant de α et y revenant après avoir tourné autour de c en restant à l'intérieur de D_α, $R_{-1}(z)$ décrit un chemin qui part de α, reste dans D_α et aboutit en α_{-1}, antécédent immédiat de α distinct de α; on conclura de là à l'existence de $\alpha_{-2}, \alpha_{-3}, \ldots$, intérieurs à D_α, distincts entre eux et distincts de α. Ces points à partir d'un certain rang ne sont ni point critiques, ni limites de points critiques des fonctions $R_{-n}(z)$; on pourra décrire autour de l'un d'entre eux α' un petit cercle δ intérieur à D_α dans lequel les fonctions $\overline{R}_{-n}(z)$ restreinte au domaine D_α sont uniformes et forment une famille normale à fonctions limites constantes, ces constantes ayant pour affixes la totalité des points de la frontière f de D_α. Tout cela est bien connu par les Chapitres qui précèdent. Chaque point de f est donc limite de domaines intérieurs à E_α et antécédents de δ. En vertu de l'équation fonctionnelle

$$F[R_n(z)] = s^n F(z),$$

la fonction $F(z)$ prendra dans l'un quelconque δ_{-n} des domaines antécédents de rang n de δ, toutes les valeurs $\frac{1}{s^n} Z$, où Z désigne une valeur quelconque de $F(z)$ dans δ; les points Z couvrent un domaine e qui comprend l'origine puisque $F(\alpha') = 0$; les domaines semblables $\frac{1}{s^n} e$ renferment donc à leur intérieur un point quelconque du plan autre que le point à l'infini à partir d'une certaine valeur de n puisque $\frac{1}{|s|} > 1$. D'où cette conclusion :

La solution fondamentale de l'équation fonctionnelle de Schröder est une fonction holomorphe à l'intérieur de D_α.

Elle possède à l'intérieur de ce domaine une infinité de zéros ayant pour points limites tous les points frontières du domaine; au voisinage de chacun de ces points frontières la fonction est complètement indéterminée et prend toutes les valeurs excepté l'infini.

60. Il s'ensuit évidemment que tous ces points frontières qui forment un ensemble parfait, continu ou discontinu, sont des points singuliers essentiels de $F(z)$. Le domaine d'existence de cette fonction coïncide donc avec le domaine de convergence du produit infini qui permet de la définir, ou plus exactement avec la partie de ce domaine de convergence qui est d'un seul tenant avec α. Mais supposons que ce domaine de convergence ne soit pas d'un seul tenant. C'est dire que D_α possède une infinité de domaines antécédents distincts et dans chacun d'eux la fonction rationnelle $\frac{R_n(z)-\alpha}{s^n}$ converge uniformément vers une fonction holomorphe. Considérons par exemple un domaine D_{-1} antécédent immédiat de D_α et distinct de D_α. Nous définirons ainsi dans D_{-1} une fonction $F_1(z)$; z étant dans D_{-1}, $R(z)$ est dans D et l'on a

$$F[R(z)] = s\,F_1(z),$$

$$F_1(z) = \frac{1}{s} F[R(z)].$$

Mais on a aussi, lorsque z est intérieur au domaine immédiat,

$$F(z) = \frac{1}{s} F[R(z)].$$

De la comparaison de ces deux dernières équations il résulte évidemment que tout procédé de prolongement analytique généralisant celui de Weierstrass, et qui en aurait les propriétés essentielles, devrait donner $F_1(z)$ comme prolongement de $F(z)$ dans D_{-1}. Mais il faut remarquer que les domaines D_α et D_{-1} peuvent n'avoir aucun point frontière commun et que, tout au moins dans les cas simples, ils en ont un nombre fini. Il faudrait donc pour pouvoir appliquer un procédé analogue à celui de M. Borel, obtenir une expression donnant la même limite que $\frac{R_n(z)-\alpha}{s^n}$ dans D_α et ses antécédents, mais convergeant uniformément sur certaines lignes sortant de ces domaines. Je n'ai pas réussi à former une pareille expression (1).

Toujours est-il que si l'on se limite au point vue de Weierstrass la fonction $F_1(z)$ ne peut pas non plus être prolongée au delà de D_{-1}. L'expression de M. Kœnigs définit alors une infinité de fonctions analytiques à domaines d'existence limités et distincts.

61. Nous allons étudier maintenant la dérivée de $F(z)$ qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$F'[R(z)]\,R'(z) = s\,F'(z),$$

et plus généralement

$$F'[R_n(z)]\,R'_n(z) = s^n\,F'(z).$$

Comme F n'est jamais infinie dans D_α, il faut et il suffit, pour que cette dérivée s'annule, qu'on ait $R'_n(z) = 0$, ce qui équivaut à

$$R'(z)\,R'(z_1)\ldots R'(z_{n-1}) = 0.$$

Nous supposerons pour éviter une discussion sans grand intérêt que le point à l'infini n'est pas intérieur à D_α. Alors $R'(z) = 0$ a toujours au moins une racine dans ce domaine, puisque la fonction $\overline{R}_{-1}(z)$ restreinte à D y possède au moins un point critique c; l'équation $R(z) = c$ ayant ainsi une racine double β dans D'_α, on a $R'(\beta) = 0$. Les racines $R'_n(z) = 0$ sont les β et leurs antécédents jusqu'au rang $n - 1$: en faisant varier n et en ne pre-

(1) Un tel procédé devra satisfaire à la condition de définir $F(z)$ dans un domaine ou un ensemble de domaines invariant.

nant que les antécédents de β qui sont intérieurs à D_α, on obtient les zéros de $F'(z)$ qui sont en nombre infini et ont pour points limites tous les points de la frontière f; tout se passe comme pour les zéros de $F(z)$.

Considérons plus généralement l'équation fonctionnelle

$$F[R(z)] = \frac{1}{A(z)} F(z),$$

où $A(z)$ est une fonction rationnelle donnée et cherchons les conditions pour qu'elle admette une solution holomorphe ou méromorphe en α. Si $F(z)$ est de la forme $(z-\alpha)^{\pm m}.\varphi(z-\alpha)$, φ n'étant ni nul ni infini à l'origine, $F[R(z)]$ sera de la même forme avec le même entier $\pm m$ puisque $R'(\alpha)$ n'est pas nul; il s'ensuit que $A(\alpha)$ ne doit être ni nul ni infini. On obtient ensuite la condition

$$s^{\pm m} = \frac{1}{A(\alpha)},$$

$A(\alpha)$ doit donc avoir une valeur qui dépend de l'entier $\pm m$. Si nous prenons $m = 0$, c'est-à-dire une solution holomorphe et non nulle en α, il vient

$$A(\alpha) = 1.$$

Cette solution existe effectivement et est représentée (en faisant abstraction d'une constante multiplicative arbitraire) par le produit infini

$$A(z)A(z_1)\ldots A(z_n)\ldots.$$

Ce produit est absolument et uniformément convergent dans D_α puisque $A(z) = 1 + a(z-\alpha) + \ldots$ et que $z_n - \alpha$ tend vers zéro comme s^n. Il y représente une fonction méromorphe ou holomorphe. On sera certain que cette fonction admet effectivement comme points singuliers tous les points frontières de ce domaine quand $A(z)$ aura un zéro à l'intérieur de D_α [nous admettons pour éviter toute discussion que les zéros de $A(z)$ ne sont pas des antécédents des pôles de cette même fonction]. On verra en effet, comme précédemment, que tout point de f est alors limite de zéros de la fonction.

Supposons maintenant qne $F(z)$ soit de la forme

$$(z-\alpha)^{\pm m}\,\Phi(z) \qquad \left[\Phi(\alpha) \text{ et } \frac{1}{\Phi(\alpha)} \neq 0\right],$$

$\Phi(z)$ doit vérifier l'équation fonctionnelle

$$\Phi[R(z)] = \left[\frac{z-\alpha}{R(z)-\alpha}\right]^{\pm m} \frac{1}{A(z)}\Phi(z) = \frac{1}{B(z)}\Phi(z),$$

$B(z)$ n'étant ni nulle ni infinie en α; on est ramené au cas précédent.

Enfin, on pourra faire des remarques analogues au sujet de la série

$$B(z)A(z) + B(z_1)A(z)A(z_1) + \ldots + B(z_n)A(z)A(z_1)\ldots A(z_n) + \ldots$$

qui est uniformément convergente dans tout domaine intérieur à D_α pourvu que les fonctions rationnelles A et B vérifient les conditions $B(\alpha) = 0$ et $A(\alpha) = 1$. C'est alors une solution méromorphe dans D_α de l'équation

$$\Phi[R(z)] = \frac{1}{A(z)}\Phi(z) - B(z),$$

qui dans des cas étendus aura tous les points de f comme points singuliers.

62. Nous allons maintenant revenir à l'étude de la solution fondamentale de l'équation de Schröder, que nous appellerons plus brièvement la *fonction de Kœnigs* et préciser ses propriétés dans le cas où il s'agit d'une substitution à cercle fondamental de première espèce. Nous supposerons que le cercle fondamental est le cercle $|z| = 1$, le point double intérieur étant à l'origine. Il résulte de ce qu'on a déjà démontré que la fonction de Kœnigs tend vers l'infini, quand on s'approche de la circonférence, pourvu que les chemins décrits ne traversent pas certains domaines en infinité dénombrable, mais extérieurs les uns aux autres qui entourent les zéros de la fonction, c'est-à-dire les antécédents de l'origine. Nous allons nous efforcer de prendre ces domaines aussi petits que possible sans que la propriété cesse d'être exacte. Soit γ une circonférence intérieure et concentrique au cercle fondamental C et comprenant à son intérieur les points critiques de $R_{-1}(z)$ dans C; γ a pour antécédente immédiate γ_{-1}, courbe d'un seul tenant qui entoure γ, pour antécédente de rang n : γ_{-n} qui entoure $\gamma_{-(n-1)}$ et tend vers la circonférence frontière f; les zéros de $F(z)$ dans la

couronne (γ, f) sont ceux de la couronne (γ, γ_{-1}) et leurs antécédents. Supposons par exemple qu'il y ait un seul zéro simple de $F(z)$ dans (γ, γ_{-1}); nous allons l'entourer d'une série de circonférences ayant leurs centres en ce point et de longueurs respectives

$$\lambda, \quad q\lambda, \quad q^2\lambda, \quad \ldots, \quad q^n\lambda, \quad \ldots,$$

où q désigne un nombre < 1, mais $> |s|$ $[s = R'(o)]$; ces petites circonférences limitent les cercles (δ), $q(\delta)$, $q^2(\delta)$, $\ldots$, $q^n(\delta)$, $\ldots$ intérieurs à (γ, γ_{-1}). Dans la partie de (γ, γ_{-1}) extérieure à $q^n(\delta)$, on aura

$$|F(z)| > Aq^n.$$

Si j'enlève de (γ, γ_{-1}) le domaine (δ), de $(\gamma_{-1}, \gamma_{-2})$ les domaines antécédents de rang 1 de $q(\delta)$, en général de $(\gamma_{-n}, \gamma_{-(n+1)})$ les domaines antécédents de rang n de q^n (δ), en vertu de l'équation fonctionnelle

$$F[R_n(z)] = s^n F(z),$$

j'aurai dans la couronne de rang n ainsi perforée

$$|F(z)| > \frac{Aq^n}{|s|^n},$$

quantité qui tend vers l'infini puisque $q > |s|$.

Il s'agit maintenant de montrer que la somme des longueurs des contours des domaines supprimés forme une série convergente. Les fonctions $R_{-n}(z)$ n'ont pas de points critiques dans (γ, γ_{-1}), ni même dans une couronne plus étendue comprenant à son intérieur les circonférences γ et f; elles sont uniformes dans cette couronne transformée par une coupure radiale en un domaine simplement connexe Δ. On peut alors leur appliquer le théorème de M. Kœbe. Dans tout domaine intérieur à Δ, notamment dans la couronne (γ, f); on aura pour toutes les fonctions $\varphi(z) = R_{-n}(z)$

$$Q < \left|\frac{\varphi'(z)}{\varphi'(y)}\right| < \frac{1}{Q},$$

y et z étant deux points quelconques de (γ, f); $|\varphi'(z)|$ mesure le grandissement linéaire en un point quand on passe du domaine initial à l'un de ses antécédents; on peut dire que le rapport des grandissements linéaires en deux points quelconques est toujours compris entre Q et $\frac{1}{Q}$; il en sera de même pour le rapport des grandissements de deux lignes quelconques de longueurs finies l et l' :

$$Q < \frac{l'_{-n}}{l'} : \frac{l_{-n}}{l} < \frac{1}{Q}.$$

Considérons, en particulier, les deux lignes suivantes : la circonférence f de longueur 2π et la circonférence de longueur λq^n qui limite $q^n(\delta)$ et soient l_{-n} et γ_{-n} les longueurs des lignes correspondantes dans l'un quelconque des domaines antécédents de rang n de Δ (ces domaines sont en nombre d^n, Δ étant affecté d'une coupure).

On aura ainsi

$$Q\frac{l_{-n}}{2\pi} < \frac{\lambda_{-n}}{\lambda q^n} < \frac{1}{Q}\frac{l_{-n}}{2\pi}$$

et, par conséquent,

$$\sum_i \lambda_{-n}^{(i)} < \frac{\lambda q^n}{Q}\,\frac{\sum_i l_{-n}^{(i)}}{2\pi},$$

la sommation étant faite pour les lignes antécédentes (en nombre d^n) de rang déterminé n; mais les antécédents de rang n de la circonférence f sont des arcs de cette même circonférence et dont l'ensemble recouvre f sans omission ni double emploi, de sorte que

$$\sum_i l_{-n}^{(i)} = 2\pi.$$

On aura donc

$$\sum_i \lambda_{-n}^{(i)} < \frac{\lambda q^n}{Q}.$$

Si maintenant on fait varier n de zéro à l'infini, on obtient comme somme des longueurs des contours qui limitent les domaines qu'on a enlevés, une quantité inférieure à

$$\frac{\lambda}{Q}\sum_0^\infty q^n = \frac{\lambda}{Q(1-q)},$$

quantité finie et qui peut être rendue aussi petite qu'on le veut pour λ suffisamment petit, Q et q étant indépendants de λ.

Si au lieu d'un seul zéro de $F(z)$ on en a plusieurs dans la couronne (γ, γ_{-1}), on opérera pour chacun d'eux de la même manière; λ désignera alors la somme des longueurs des circonférences limitant les cercles (δ) en nombre fini. Si l'on a des zéros multiples on devra prendre $q^p > |s|$, puisqu'on aura $|F(z)| > A\,q^p$, dans la couronne (γ, γ_{-1}) d'où on a enlevé les (δ).

On voit donc que les domaines enlevés sont vus de l'origine sous des angles dont la somme peut être rendue aussi petite qu'on le veut, puisqu'on peut les supposer extérieurs à un cercle de centre o et de rayon $\frac{1}{2}$ par exemple. On peut donc dire que sur un ensemble de rayons issus de l'origine et dont la mesure diffère de 2π d'aussi peu qu'on le veut, $F(z)$ tend uniformément vers l'infini quand $|z|$ tend vers l'unité. En effet, on peut déterminer un tel ensemble de rayons qui ne traversent pas les domaines enlevés de C; pour $|z| > r$, rayon de γ, z est dans une couronne $[\gamma_{-n}, \gamma_{-(n-1)}]$ et l'on a $|F(z)| > AM^n$ $(M > 1)$. Or, il est à peu près évident que si $|z|$ tend uniformément vers 1, n tend uniformément vers l'infini, car les couronnes $[\gamma_{-(n-1)}, \gamma_{-n}]$ pour $n < n'$ forment un domaine complètement intérieur à C, et par conséquent à un cercle concentrique de rayon $r' < 1$.

Il est donc démontré que sur tous les rayons issus de l'origine, sauf peut-être ceux d'un ensemble de mesure nulle, $|F(z)|$ tend vers l'infini quand $|z|$ tend vers l'unité.

63. Il n'est pas sans intérêt de préciser l'ordre de grandeur relatif de l'entier n et de $\frac{1}{1-|z|}$. Nous poserons $|z| = \rho$. Nous remarquons ensuite que $R'(z)$ étant bornée dans C et par suite inférieure en module à un nombre $H > 1$, on a aussi dans C

$$|R'_n(z)| = |R'(z)\,R'(z_{-1})\,\ldots\,R'(z_{n-1})| < H^n.$$

Soit toujours $[\gamma_{-n}, \gamma_{-(n+1)}]$ la couronne antécédente de rang n de (γ, γ_{-1}); considérons sa plus courte distance à la circonférence f; c'est un segment σ qui a pour $n^{\text{ième}}$ conséquent un arc de courbe joignant un point de f à un point de γ_{-1} et par conséquent de longueur au moins égale à la plus courte distance b de γ_{-1} à f. Les éléments d'arc $d\sigma$ et $d\sigma_n$ étant liés par la relation

$$d\sigma_n = |R'_n(z)|\,d\sigma,$$

on aura

$$\tau > \frac{\sigma_n}{\max|R'_n(z)|} > \frac{b}{H^n}.$$

D'autre part, nous avons démontré qu'on a sur f et dans une couronne environnante d'une certaine épaisseur

$$|R'(z)| > K > 1,$$

inégalité qu'on peut supposer vérifiée entre γ et f. Il s'ensuit, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, que tout point de γ_{-n} peut être relié à un point de f par un arc de courbe de longueur inférieure à $\frac{b'}{K^n}$, b' étant la distance de γ à f. Donc pour tout point de la couronne $[\gamma_{-n}, (\gamma_{n+1})]$, on aura

$$\frac{b}{H^n} < 1 - \rho < \frac{b'}{K^n}.$$

On peut remplacer cette double inégalité par la suivante :

$$G^n < \frac{1}{1-\rho} < G'^n,$$

G et G' étant des constantes plus grandes que 1. Telle est la relation que nous voulions obtenir et qui va nous permettre d'évaluer le module maximum $\mathfrak{M}(\rho)$ de $|F(z)|$ pour $|z| = \rho$. Nous supposerons $\rho > r$; le point $z = \rho e^{i\theta}$ pour lequel $|F(\rho e^{i\theta})|$ atteint son maximum est situé dans une couronne $[\gamma_{-n}, \gamma_{-(n+1)}]$; écrivons la relation

$$F(z) = \frac{1}{s^n} F(z_{-n}).$$

Il s'ensuit que si B est le module maximum de $F(z)$ dans (γ, γ_{-1}), on a, en ce point,

$$|F(z)| = \mathfrak{M}(\rho) < B\left|\frac{1}{s}\right|^n.$$

Mais, d'après la double inégalité qui précède, on a

$$n < \frac{\log\frac{1}{1-\rho}}{\log G};$$

on a donc

$$\mathfrak{M}(\rho) < B\, e^{\frac{\log\left|\frac{1}{s}\right|}{\log G}\log\left(\frac{1}{1-\rho}\right)}$$

ou, en posant

$$\mu = \frac{\log\left|\frac{1}{s}\right|}{\log G},$$

$$\mathfrak{M}(\rho) < B\frac{1}{(1-\rho)^{\mu}}.$$

D'autre part, la circonférence $|z| = \rho$ a certainement des points extérieurs aux domaines que nous avons supprimés de C au cours de la démonstration précédente, ou même plus simplement des points extérieurs aux domaines antécédents des (δ). Car ces domaines sont extérieurs les uns aux autres et dans chacun d'eux l'argument de z a une oscillation inférieure à 2π. On aura, en un tel point,

$$|F(z)| > A\left|\frac{1}{s}\right|^{n};$$

on a donc

$$\mathfrak{M}(\rho) > A\left|\frac{1}{s}\right|^{n} > A\, e^{\frac{\log\left|\frac{1}{s}\right|}{\log G'}\log\left(\frac{1}{1-\rho}\right)}$$

ou

$$\mathfrak{M}(\rho) > \frac{A}{(1-\rho)^{\mu'}}, \qquad \mu' = \frac{\log\left|\frac{1}{s}\right|}{\log G'}.$$

On a finalement

$$\frac{A}{(1-\rho)^{\mu'}} < \mathfrak{M}(\rho) < \frac{B}{(1-\rho)^{\mu}},$$

μ et μ' étant positifs. Il s'ensuit que la série de Taylor qui représente $F(z)$ est d'ordre fini sur son cercle de convergence. Nous allons voir en effet que des intégrations successives en nombre fini la transforment en une fonction bornée. Il suffit d'observer qu'on a

$$\left|\int_0^z F(z)\,dz\right| = \left|\int_0^{\rho e^{i\theta}} F(\rho e^{i\theta})\,e^{i\theta}\,d\rho\right|$$
$$< \int_0^{\rho}\mathfrak{M}(\rho)\,d\rho < B\int_0^{\rho}\frac{d\rho}{(1-\rho)^{\mu}} < \frac{B'}{(1-\rho)^{\mu-1}}.$$

Nous obtiendrons donc ainsi après N quadratures ($N = [\mu] + 1$), une série de Taylor continue ainsi que sa dérivée sur le cercle de convergence et qui y sera absolument convergente. Les coefficients de la série de Taylor de $F(z)$ sont donc tels que

$$\frac{|a_n|}{n^\alpha} < k,$$

ce qui caractérise les séries de Taylor d'ordre fini. Nous ne chercherons pas à évaluer cet ordre plus exactement ([1]). On peut toutefois remarquer qu'en vertu de la formule

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(\rho e^{i\theta})|^2 \, d\theta = |a_0|^2 + |a_1|^2 \rho^2 + \ldots + |\alpha_n|^2 \rho^{2n} + \ldots,$$

le premier membre tendant vers l'infini avec $\frac{1}{1-\rho}$ d'après ce qui précède la série $\Sigma |a_n|^2$ est nécessairement divergente; donc $n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}|a_n|$ ne tend pas vers zéro si $\varepsilon > 0$.

Il ne résulte pas nécessairement des développements qui précèdent que la fonction $F(z)$ tende vers l'infini sur des circonférences concentriques tendant elles-mêmes vers f. Mais on voit facilement qu'elle tend vers l'infini sur des courbes qui tendent vers f en s'enveloppant mutuellement de manière que leurs longueurs restent bornées. C'est ce qui a lieu sur des courbes γ_{-n}.

En effet, en appliquant le théorème de M. Kœbe comme précédemment, mais cette fois aux points des deux courbes γ et f de longueurs l et 2π, on trouve de suite, en appelant l_{-n} la longueur totale de la courbe γ_{-n},

$$l_{-n} < \frac{l}{Q},$$

et sur ces courbes $F(z)$ tend vers l'infini puisqu'il n'y a pas de zéros de $F(z)$ sur γ.

64. Nous allons maintenant préciser quelque peu le mode de distribution des zéros de $F(z)$ autour d'un point déterminé a de f. Reprenons le raisonnement du n° 51 (Chap. VI); b étant un point de f, limite de conséquents de a, nous considérons un domaine Δ contenant b et les domaines antécédents de Δ qui tendent vers a;

([1]) En étudiant $F(z)$ au voisinage d'un point double répulsif, on verra que par un choix convenable des multiplicateurs on peut rendre cet ordre aussi grand qu'on le veut, $R(z)$ étant par exemple du second degré. Mais c'est l'ordre minimum qu'il faudrait trouver.

de la suite des fonctions $R_{-n}(z)$ correspondantes nous en extrayons une autre pour laquelle on a l'expression asymptotique

$$f_n(z) - a = \mu_n[\varphi(z) + \varepsilon_n(z)].$$

On a $\varphi(b) = 0$ et la fonction $z' = \varphi(z)$ fait la représentation de Δ sur un domaine Δ'; nous sommes ici dans le cas exceptionnel où f est analytique et l'arc λ de f contenu dans Δ est représenté dans Δ. par une droite λ' passant par l'origine. Soit p un zéro de la fonction $F(z)$ contenu dans Δ auquel correspond un point p' dans Δ'. Prenons maintenant les antécédents de Δ au moyen des fonctions f_n définies par la formule qui précède; à l'arc λ de f il va correspondre un autre arc de f passant par a; si z est un point de λ, l'argument de $f_n(z) - a$ tend donc pour n infini vers une valeur déterminée ω qui correspond à la direction de la tangente en a; dans les mêmes conditions, l'argument de $f_n(p) - a$ tendra vers la valeur $\omega + \psi$, ψ étant l'angle de $O'p'$ avec la droite λ' dans le plan des z'; ψ n'est pas un multiple de π; les points $f_n(p)$, c'est-à-dire les points antécédents de p qui tendent vers a sont donc sur une courbe qui fait un angle déterminé et non nul avec la circonférence; ces points sont encore des zéros de $F(z)$. Ainsi par chaque point a de f il passe une courbe faisant un angle fini avec f et qui contient une infinité de zéros de $F(z)$ ayant a pour point limite.

Sur un tel chemin, $F(z)$ ne tend pas vers une valeur déterminée; d'une part, elle a la valeur zéro comme limite d'indétermination; d'autre part, on voit de suite que l'infini est toujours une limite d'indétermination de $F(z)$ sur un continu quelconque tendant vers f. Ainsi la fonction n'a pas les mêmes valeurs limites sur deux chemins aboutissant au même point frontière, l'un normal, l'autre oblique sur f, contrairement à ce qui se passe pour les fonctions qui ne prennent qu'une fois chaque valeur dans un domaine. Ce qui se passe ici est au contraire à rapprocher des propriétés de la fonction modulaire au voisinage de sa coupure; la fonction a d'ailleurs quelque analogie avec les fonctions automorphes, puisqu'elle prend au facteur s^n près les mêmes valeurs dans des domaines équivalents par rapport à un groupe discontinu de substitutions algébriques, ces domaines devenant infiniment petits au voisinage de la coupure.

Je ne sais pas s'il existe effectivement un ensemble de mesure nulle de rayons sur lesquels $F(z)$ ne tend pas vers l'infini. Mais soit un chemin $\mathcal{L}$ aboutissant en un point a de f et coupant f sous un angle déterminé; pour fixer les idées, nous supposerons que $\mathcal{L}$ est une droite ou une circonférence. Nous allons démontrer qu'on peut remplacer $\mathcal{L}$ par un autre chemin $\mathcal{L}'$ terminé en a et faisant le même angle que $\mathcal{L}$ avec f sur lequel $f(z)$ tend vers l'infini. Nous considérons encore les domaines $[q^n(\delta)]_{-n}$ ayant exactement la même signification que précédemment et que nous désignerons plus brièvement par e_n; $\mathcal{L}$ rencontre le contour d'un e_n, qui est une courbe algébrique, en un nombre fini de points; un segment de $\mathcal{L}$ intérieur à e_n sera remplacé par l'un des deux arcs du contour de e_n qui ont les mêmes extrémités que ce segment; décrivant $\mathcal{L}$ depuis un point intérieur à C jusqu'à a nous répétons cette opération successivement sur tous les segments analogues que nous rencontrons; mais les domaines e_n ainsi rencontrés tendent vers a puisque leurs dimensions tendent vers zéro (il en est de même d'ailleurs pour les δ_{-n} qui renferment ces e_n). La courbe $\mathcal{L}$ ainsi modifiée, soit $\mathcal{L}'$, tend donc toujours vers a. Je dis d'autre part que les contours de ces e_n sont vus de a sous des angles qui tendent vers zéro. S'il n'en est pas ainsi, considérons une suite de ces e_n pour lesquels cet angle ne tend pas vers zéro; de la suite des fonctions $R_{-n}(z)$ qui font la représentation conforme des $q_n(\delta)$ sur ces e_n, ou de δ sur ces δ_n, nous pouvons en extraire une autre qui est représentable par la formule asymptotique

$$f_n(z) - a = \mu_n[\varphi(z) + \varepsilon_n(z)],$$

$\varphi(z)$ n'est pas une constante, mais n'est pas nulle dans δ. La différence des arguments de deux valeurs de $f_n(z) - a$ ne change évidemment pas si l'on supprime la constante multiplicative μ_n du second membre. Soit z_0 le centre de δ; la circonférence de $q^n(\delta)$ est représentable par

$$z_0 + x_n e^{i\omega},$$

ω variant de 0 à 2π et x_n étant le rayon qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Le second membre de l'égalité précédente, divisé par μ_n, devient, quand on y remplace z par cette valeur,

$$\varphi(z_0 + x_n e^{i\omega}) + \varepsilon_n(z_0 + x_n e^{i\omega}),$$

$\varepsilon_n(z)$ tendant uniformément vers zéro dans δ, et $\varphi(z_0+z_n e^{i\omega})$ tendant uniformément vers $\varphi(z_0)$ qui n'est pas nul, l'argument de cette quantité tend uniformément vers celui de $\varphi(z_0)$. Il s'ensuit que le contour e_n est vu de a sous un angle qui tend vers zéro. Le chemin $\mathcal{L}'$ fait donc le même angle que $\mathcal{L}$ avec f, et d'autre part on a sur $\mathcal{L}'$, comme on l'a vu précédemment,

$$|F(z)| > M^n \quad (M > 1),$$

et l'entier n tendant vers l'infini quand z tend vers a (¹).

On pourra donc en particulier mener par tout point de f un chemin normal à f sur lequel $F(z)$ tend vers l'infini; ce chemin ne devra être distinct du rayon que pour un ensemble de points de mesure nulle. Mais on voit que deux chemins tangents entre eux et non tangents à la circonférence ne sont pas équivalents au point de vue des valeurs limites de $F(z)$ qui pourra avoir une infinité de zéros sur l'un et tendre régulièrement vers l'infini sur l'autre.

65. Nous allons considérer maintenant la fonction dérivée $F'(z)$. On peut choisir r de manière que dans la couronne comprise entre f et le cercle γ de rayon r on ait

$$|R'(z)| > K > 1.$$

L'équation fonctionnelle

$$F'[R(z)]\,R'(z) = s\,F'(z)$$

montre que les zéros de $F'(z)$ dans (γ, f) sont ceux qui sont contenus dans (γ, γ_{-1}) et leurs antécédents. Nous pouvons aussi considérer la dérivée logarithmique $\dfrac{F'(z)}{F(z)} = \Phi(z)$ qui vérifie l'équation

$$\Phi[R(z)] = \frac{1}{R'(z)}\Phi(z).$$

Si z est un point de (γ, f) de *hauteur* n par rapport à (γ, γ_{-1}), c'est-à-dire dont le $n^{\text{ième}}$ conséquent est dans cette dernière couronne, on aura

$$|\Phi(z)| > K^n |\Phi(z_n)|.$$

(¹) Il est à peine utile de dire que les conclusions subsistent s'il y a plusieurs zéros de $F(z)$, c'est-à-dire plusieurs domaines (δ) dans la couronne (γ, γ_{-1}).

On pourra donc refaire sur la fonction $\Phi(z)$ tous les raisonnements faits au sujet de $F(z)$; le nombre $\frac{1}{|s|}$ devra ici être remplacé par K, les domaines δ par les domaines δ' entourant les zéros de $F'(z)$ dans la couronne initiale; le nombre q devra être pris entre 1 et $\frac{1}{K}$. On pourra raisonner simultanément sur ces deux fonctions, en considérant à la fois δ et δ', $q^n(\delta)$ et $q^n(\delta')$, q étant $> \frac{1}{K}$ et que $|s|$. Nous pouvons donc résumer comme il suit les propriétés des fonctions F et Φ :

Considérons une substitution à cercle fondamental de première espèce avec un point double de multiplicateur non nul au centre du cercle C. *La fonction de Kœnigs holomorphe en* α *est holomorphe dans* C *et représentée par une série de Taylor qui est d'ordre fini sur la circonférence; par tout point* a *de la circonférence on peut mener une ligne intérieure à* C, *faisant un angle déterminé choisi arbitrairement avec la circonférence sur laquelle la fonction et sa dérivée logarithmique tendent vers l'infini lorsqu'on se rapproche indéfiniment de* a; *on peut prendre pour ces chemins les rayons mêmes du cercle, sauf peut-être pour des points* a *formant un ensemble de mesure nulle. Les zéros de la fonction ont pour points limites tous les points de la circonférence; il en est de même pour les zéros de la dérivée; par tout point* a *de la circonférence on peut mener un arc de courbe faisant avec celle-ci un angle fini et contenant une infinité de zéros de l'une quelconque de ces deux fonctions.*

Ces résultats appellent les remarques suivantes. $F(z)$ devenant infinie sur certains chemins qui tendent vers la circonférence, $\frac{1}{F(z)}$ (qui a des pôles dans C) tend vers zéro dans les mêmes conditions; il en sera de même, au moins dans certains cas pour la dérivée $-\frac{F'(z)}{F^2(z)}$. En effet la fonction $\frac{F'}{F^2}$ vérifie l'équation

$$\frac{F^2[R(z)]}{F'[R(z)]} = s\,R'(z)\frac{F^2(z)}{F'(z)}.$$

Pour qu'on puisse lui appliquer la même analyse qu'aux fonctions

F et $\frac{F'}{F}$, il suffit qu'on ait dans C

$$|s\,R'(z)| < k < 1.$$

Ceci peut avoir lieu. Exemple :

$$R(z) = \frac{z(1-5z)}{5-z},$$

qui admet le cercle fondamental $|z| \leqq 1$. On trouve

$$R'(z) = \frac{1-50z+5z^2}{(5-z)^2}.$$

Pour $|z| \leqq 1$, on a

$$|R'(z)| < \frac{1+50+5}{(5-1)^2} < 4,$$

$$|s\,R'(z)| = \left|\frac{1}{5}R'(z)\right| < \frac{4}{5}.$$

La fonction $\frac{F^2(z)}{F'(z)}$ tend donc vers l'infini et $\frac{-F'(z)}{F^2(z)}$ vers zéro sur les chemins qui satisfont aux conditions que nous venons d'exprimer.

D'autre part, il existe aussi une fonction de Kœnigs $F_1(z)$ holomorphe à l'extérieur de C, nulle à l'infini; F et F_1 prennent des valeurs respectives imaginaires conjuguées en deux points symétriques par rapport à C. La fonction de z égale à $\frac{1}{F(z)}$ à l'intérieur de C, à $\frac{1}{F_1(z)}$ à l'extérieur n'est pas analytique sur f; néanmoins elle est continue ainsi que sa dérivée sur une infinité de lignes traversant f en tous les points et sous tous les angles, ces fonctions étant nulles sur ces chemins en tous les points de f. Je ne sais pas si le résultat s'étend aux dérivées d'ordre supérieur.

On voit par là que l'étude de la fonction de Kœnigs sur sa coupure met en évidence certaines particularités d'apparence assez paradoxale, et notablement différentes de celles qu'on a pu étudier jusqu'ici sur les fonctions présentant les lignes singulières.

66. On peut obtenir des résultats analogues, naturellement moins précis pour la fonction de Kœnigs dans le cas d'une substitution rationnelle quelconque. Si l'on considère un petit cercle de centre α contenant ses conséquents, les domaines antécédents de ce petit cercle et qui sont d'un seul tenant avec α sont contenus les uns dans les autres et s'étendent de sorte qu'on finit par en trouver un $\mathcal{A}$ dans lequel se permutent toutes les branches de la fonction $\overline{R}_{-1}(z)$ restreinte au domaine D_α et qui contient ainsi tous les points critiques de cette fonction restreinte; soit $\mathcal{A}_{-1}$ le domaine antécédent immédiat de $\mathcal{A}$ qui contient $\mathcal{A}$. Le domaine à connexion multiple $(\mathcal{A}_{-1} - \mathcal{A})$ va jouer le rôle de la couronne (γ, γ_{-1}) dans le cas de la substitution à cercle fondamental. Ce domaine ne contient aucun point critique ou conséquent de point critique de $\overline{R}_{-1}(z)$; les fonctions $\overline{R}_{-n}(z)$ y deviennent uniformes quand on l'a rendu simplement convexe par un système de coupures; il contient d'autre part, puisque $R'(\alpha) \neq 0$, des antécédents de α qui sont des zéros de la fonction de Kœnigs $F(z)$ et qu'on pourra entourer de petits cercles δ ou $q^n(\delta)$, q ayant toujours la même signification. Dans le domaine Δ ou $(\mathcal{A}_{-1} - \mathcal{A})$ ainsi affecté de coupures qui ne séparent pas les cercles δ, on peut appliquer aux fonctions $\overline{R}_{-n}(z)$ le théorème de Kœbe et comparer ainsi non pas les longueurs mais les aires de domaines images de Δ et $q^n(\delta)$, en supposant comme il est permis de le faire que le domaine $(D_\alpha - \mathcal{A})$ soit borné, de sorte que la somme des aires Δ_{-n} a une valeur finie. On obtient ainsi le résultat suivant : pour que $F(z)$ tende uniformément vers l'infini quand z tend vers la frontière de D_α, il suffit d'enlever de D_α des domaines e_n dont les diamètres tendent vers zéro en même temps que leur plus courte distance à la frontière et dont la somme des aires peut être rendue aussi petite qu'on le veut. D'une manière plus précise, si n désigne la *hauteur* d'un point de D_α suffisamment voisin de la frontière par rapport à un domaine intérieur tel que $(\mathcal{A}_{-1} - \mathcal{A})$, par σ_n et Σ_n la somme des aires des e_n d'une part et d'autre part des parties de D_α qui sont de hauteur n, le rapport $\frac{\sigma_n}{\Sigma_n}$ tend vers zéro comme q^n, et $|F(z)|$ tend vers l'infini comme $\frac{q^n}{|s|^n}$ $(q > |s|)$.

Si a est un point accessible de f, $\mathcal{L}$ un chemin intérieur à D_α aboutissant en a, on peut toujours remplacer $\mathcal{L}$ par un autre chemin $\mathcal{L}'$ aboutissant au même point sur lequel $F(z)$ tend vers l'infini, la ou les valeurs limites de l'argument de $z - a$ étant les mêmes sur les chemins $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$. La démonstration est la même que pour le cas déjà examiné.

Les résultats relatifs aux valeurs limites de la fonction dérivée ne s'étendent que si l'on a $|R'(z)| > K > 1$ sur f, ce qui n'a pas toujours lieu.

Remarquons encore que si D_α est simplement connexe, la représentation conforme de D_α sur un cercle ramène l'étude de la fonction de Kœnigs à celle de la même fonction relative à une substitution à cercle fondamental. Car si l'on pose, comme au Chapitre VI, $z = h(t)$, $z_1 = R(z) = h(t_1)$, l'équation

$$F(z_1) = s\,F(z)$$

devient

$$F[h(t_1)] = s\,F[h(t)],$$

ou, en posant $F[h(t)] = \Phi(t)$,

$$\Phi(t_1) = s\,\Phi(t).$$

Nous savons que $t_1 = \varphi(t)$ désigne une substitution rationnelle à cercle fondamental; $\Phi(t)$ étant holomorphe pour $t = 0$ est précisément la fonction de Kœnigs relative à cette dernière substitution. Aux rayons du cercle correspond un faisceau des courbes analytiques passant par α, ayant pour équations (en prenant $\alpha = 0$)

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} + H(x, y) = \text{const.},$$

H étant la fonction associée à la fonction de Green relative au point double. On peut prendre pour mesure d'un ensemble de ces courbes celle de leurs points de rencontre avec une courbe du faisceau orthogonal. Cela étant, sur toutes les courbes précédentes, sauf sur un ensemble de mesure nulle d'entre elles, $F(z)$ tend vers l'infini quand z tend vers la frontière. D'ailleurs toutes ces courbes, sauf peut-être celles d'un ensemble de mesure nulles, aboutissent en un point frontière déterminé, puisque $h(t)$ ne prend pas dans C les valeurs correspondant au continu f (¹).

Dans certains cas particuliers on pourra affirmer que $F(z)$ tend vers l'infini suivant les rayons issus de α, sauf sur un ensemble de mesure nulle. Si $|R'(z)| > K > 1$ sur f et dans les parties de D_α

(¹) P. Fatou, *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1913, p. 113).

suffisamment voisines de f, il suffira qu'on ait

$$q \frac{d}{K} < 1,$$

d étant le degré de $R(z)$, et q un nombre quelconque compris entre 1 et $|s|$. Comme $|K| > 1$, ceci aura lieu si $|s| \leq \frac{1}{d}$. Exemple :

$$R(z) = \frac{z + z^2}{2}.$$

67. Nous allons rechercher maintenant les fonctions absolument invariantes par une substitution rationnelle et uniforme dans le domaine invariant D_α qui contient un point double attractif de multiplicateur non nul; une telle fonction sera un invariant du groupe $\mathcal{G}$ de substitutions algébriques auquel nous avons déja fait allusion et dont nous allons préciser quelque peu les propriétés. On peut décrire de α comme centre un cercle c qui d'une part contienne son conséquent c_1 et dans lequel en outre $R(z)$ ne prenne jamais deux fois la même valeur, ce qui est possible puisque $R'(\alpha) \neq 0$; les domaines $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ limités par des courbes simples et ne se recouvrant pas eux-mêmes tendent vers α. Je dis que la couronne E comprise entre c et c_1 est un domaine fondamental du groupe $\mathcal{G}$. Si z et z' sont deux points distincts de c, z_1 et z'_1 seront également distincts, de même z_2 et z'_2, z_n et z'_n. On ne pourra pas avoir non plus

$$z_n = z'_{n+p} \qquad (n \text{ et } p \geqq 0),$$

si z et z' sont deux points distincts de E, car on en déduirait

$$R_n(z) = R_n(z'_p),$$

et par suite

$$z = z'_p.$$

Or z' étant dans la couronne comprise entre c et c_1, z'_p sera dans la couronne comprise entre c_p et c_{p+1}, enveloppée par la première; si $z \neq z'$, l'égalité précédente ne pourra avoir lieu que si z est sur le contour extérieur de E et z' son conséquent situé sur le contour intérieur, ces deux contours étant naturellement équivalents par rapport à $\mathcal{G}$. D'autre part, tout point intérieur à D_α a dans c un conséquent qui sera par suite à l'intérieur ou sur le contour d'un domaine $E_p = c_{p+1} - c_p$, et dont un antécédent de rang p se trouvera ainsi dans E ou sur son contour.

Il s'ensuit que E renferme un point et un seul équivalent à un point quelconque de D_α autre que α; E est donc bien un domaine de discontinuité du groupe $\mathcal{G}$.

Soit ensuite Δ un domaine quelconque complètement intérieur à D_α; il ne contient donc qu'un nombre limité d'antécédents de α, ces points n'ayant d'autres points limites que les points frontières de D_α; enlevons de Δ des petits cercles ayant pour centres les points α_{-n} qui y sont contenus. Nous obtenons un domaine Δ dans lequel le groupe $\mathcal{G}$ est proprement discontinu. En effet il existe un entier p tel que $p^{\text{ième}}$ conséquent Δ'_p de Δ soit intérieur au cercle c; d'autre part Δ'_p ne contient pas α à son intérieur ni sur son contour; il n'a donc de points communs qu'avec un nombre fini de domaines conséquents de E. Δ'_p ne renfermant ainsi qu'un nombre fini de points équivalents entre eux, il en est de même pour Δ' puisqu'un point n'a qu'un nombre fini d'antécédents de rang p. D'une manière plus précise, Δ n'a de points communs qu'avec un nombre fini de domaines équivalant à E qui sont les domaines $E, E_1, \ldots, E_n, \ldots$ et leurs antécédents. Appelons domaines G tous les équivalents de E; on voit qu'il y a des domaines G rassemblés autour du point α et tendant vers ce point et de même autour de chaque point antécédent de α; les autres tendent vers la frontière sur laquelle ils s'aplatissent. Chaque domaine G renferme un nombre fini de points équivalant à un point z de D_α autre que les antécédents de α; mais pour certains d'entre eux ce nombre est plus grand que l'unité et devient de plus en plus grand à mesure qu'on se rapproche de la frontière, à cause de la présence dans D_α des points critiques de la fonction $\overline{R}_{-1}(z)$ restreinte à ce domaine. En outre, il peut arriver que l'ordre de connexion de ces domaines aille en croissant indéfiniment. Pour obtenir des domaines simplement connexes et ne contenant pas plus d'un point équivalent à un point donné il faut y pratiquer un système de coupures de la manière suivante : joignons un point du contour extérieur de E à son conséquent situé sur le contour intérieur par une coupure intérieure à E et passant par tous les conséquents des points critiques de $\overline{R}_{-1}(z)$ qui y sont contenus (il y a en général un conséquent et un seul de chacun de ces points critiques dans E, il peut y avoir exception si ces points critiques sont des antécédents de α); la coupure ainsi tracée λ pourra être formée d'un seul arc régulier de courbe analytique ou même algébrique; les arcs conséquents $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ tendent vers α et constituent par leur réunion un élément de courbe invariante Λ passant par α; l'ensemble de tous les arcs antécédents de Λ, ou, ce qui revient au même, l'ensemble de tous les arcs équivalant à λ constitue dans D un réseau invariant de courbes (algébriques) qui divise les domaines G en domaines simplement connexes $\overline{G}$ dans lesquels il n'y a qu'un point équivalent à un point donné; les antécédents des points critiques sont des points de bifurcation pour ce réseau, le nombre des branches qui y passent restant d'ailleurs borné; ce sont des sommets pour les polygones $\overline{G}$. Je dis que les dimensions de ces domaines tendent vers zéro lorsqu'on se rapproche indéfiniment de la frontière; en effet ces domaines (abstraction faite des conséquents de $\overline{E}$ qui tendent vers α) sont ou bien des antécédents de $\overline{E}$, ou bien des antécédents de domaines qui sont eux-mêmes compris dans des cercles entourant les points α_{-1}, antécédents immédiats de α distincts de α; or dans $\overline{E}$ aussi bien que dans ces derniers cercles il n'y a pas de points limites de conséquents de points critiques; par conséquent on peut déterminer un entier h tel que dans les domaines antécédents de rang h les fonctions $R_{-n}(z)$ n'aient plus de points critiques et forment une famille normale à fonctions limites constantes pourvu qu'on se borne à des domaines simplement connexes, ce qui est bien le cas ici d'après la manière dont nous avons tracé les coupures. Nous voyons par là qu'en nous rapprochant indéfiniment de f nous traverserons des polygones $\overline{G}$ dont les dimensions tendront vers zéro et de telle manière que leurs angles et le rapport des longueurs de leurs côtés oscillent entre des limites finies et non nulles, en vertu du théorème de Kœbe. Il en sera de même quand on se rapprochera indéfiniment d'un point α_p.

68. Proposons-nous maintenant de trouver les fonctions uniformes dans D_α telles que l'on ait

$$I(z) = I[R(z)],$$

et par suite

$$I(z) = I(z'),$$

lorsque z et z' sont équivalents par rapport au groupe $\mathcal{G}$. Il est clair par ce qui précède que le point α et ses antécédents sont des points singuliers essentiels de $I(z)$; il est bien facile de trouver les fonctions $I(z)$ n'ayant pas d'autres points singuliers essentiels dans D_α. Soit $F(z)$ la fonction de Kœnigs holomorphe en α telle que

$$F[R(z)] = s F(z), \qquad [F(\alpha) = 0, \ F'(\alpha) = 1].$$

Si l'on pose $Z = F(z)$, on a inversement

$$z = f(Z), \qquad R(z) = f(sZ),$$

$f(Z)$ étant holomorphe pour $Z = 0$. On aura donc

$$I(z) = H(Z).$$

$H(Z)$ étant uniforme dans un cercle de centre O avec un point singulier essentiel isolé à l'origine et vérifiant l'équation fonctionnelle

$$H(Z) = H(sZ),$$

$H(Z)$ étant uniforme pour $|Z| \leqq |Z_0|$ sera uniforme pour $|Z| \leqq \left|\frac{Z_0}{S^n}\right|$, quel que soit n, donc dans tout le plan et n'aura d'autres singularités essentielles que l'origine et le point à l'infini.

Posons

$$z = e^W,$$
$$s = e^\omega,$$
$$H(e^W) = \Phi(W).$$

La fonction $\Phi(W)$ est uniforme dans tout le plan, n'a d'autres singularités à distance finie que des pôles et vérifie les relations

$$\Phi(W + 2i\pi) = \Phi(W),$$
$$\Phi(W + \omega) \quad = \Phi(W).$$

C'est donc une fonction elliptique.

Réciproquement d'une fonction elliptique $\Phi(W)$, aux périodes $2i\pi$ et ω, on déduit par la substitution $W = \log Z$ une fonction uniforme de Z ayant pour points singuliers essentiels les points o et ∞, et invariante quand on y remplace Z par sZ; en remplaçant ensuite Z par la fonction de Kœnigs $F(z)$, qui est holomorphe et uniforme dans D_α et admet comme zéros les antécédents de α, on obtient une fonction $I(z)$ ayant ces derniers points comme seuls points singuliers essentiels dans D_α et uniforme dans ce domaine. Si la fonction $\Phi(W)$ est d'ordre m, la fonction $I(z)$ prend en général m fois la même valeur dans le domaine fondamental E, ainsi que dans les domaines $\overline{G}$.

Il suit de là et des propriétés connues des fonctions elliptiques que deux fonctions invariantes I et I_1 sont toujours liées par une équation algébrique; ces fonctions prennent toutes les valeurs au voisinage des points α_{-n} et des points de f.

On obtiendra des résultats analogues relativement aux solutions uniformes de l'équation fonctionnelle

$$L[R(z)] = c\, L(z),$$

c étant une constante qui n'est pas de la forme $s^{\pm n}$. On est alors ramené aux fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

69. Faisons encore quelques remarques au sujet d'équations fonctionnelles d'un type un peu plus général, tel que

$$F[R(z)] = A[z, F(z)],$$

où $A(z, y)$ désigne une fonction rationnelle donnée des deux variables z et y. On peut, dans bien des cas, démontrer l'existence de solutions uniformes de cette équation autour d'un point double α ou même dans tout le domaine D_α, comme pour l'équation de Schröder. C'est à quoi on parvient soit par la formation directe de séries ou de produits infinis convergents qui vérifient cette équation, soit par une méthode d'approximations successives. Mais la solution obtenue étant, par exemple, uniforme dans D_α, il n'est pas toujours facile de reconnaître si tous les points frontières de ce domaine sont des points singuliers de la fonction. La question se simplifie dans le cas des substitutions à cercle fondamental de première espèce. En effet, la démonstation du n° **40** (Chap. VI) est ici applicable; la fonction A qui joue le rôle de R dans la démonstration à laquelle nous renvoyons; $R(z)$ joue le rôle de $\varphi(t)$; A dépend ici à la fois de la variable indépendante et de la fonction inconnue; mais on verra facilement que cela ne modifie en rien les conclusions. Le cas particulier où $R(z)$ est de la forme az^q devrait toutefois être examiné à part. Si on le laisse de côté, on peut dire que toute solution de l'équation fonctionnelle précédente, méromorphe à l'intérieur du cercle fondamental, est ou bien une fonction rationnelle, ou bien une fonction qui ne peut pas être prolongée au delà de ce cercle. Mais cette méthode ne met pas en évidence la nature des singularités sur la circonférence. Enfin, l'extension de cette démonstration, au cas où $R(z)$ est une fonction rationnelle plus générale, présente des difficultés, provenant notamment du fait que toutes les branches de la fonction $R_{-1}(z)$ ne sont pas toujours permutées entre elles à l'intérieur du domaine D_α. On trouvera facilement certaines extensions sur lesquelles nous n'insisterons pas davantage ici.

70. Nous allons considérer maintenant les solutions de l'équation fonctionnelle de Schröder au voisinage d'un point double répulsif que nous prendrons pour origine. La branche de fonction $R_{-1}(z)$, nulle à l'origine, étant holomorphe pour $|z|\leqq r$ si l'on prend r assez petit pour que l'inégalité $|z|\leqq r$ entraîne $|R_{-1}(z)|<k|z|$ $(k<1)$, il existe dans ce cercle une fonction holomorphe, nulle à l'origine et de dérivée égale à 1 en ce point, qui vérifie l'équation

$$\Phi[R_{-1}(z)] = \frac{1}{S}\Phi(z) \qquad [S = R'(0)].$$

Cette fonction n'est pas uniforme dans tout le plan, mais on démontre facilement que la fonction inverse de l'élément de fonction analytique ainsi défini est une fonction méromorphe ou entière, dont l'existence a été établie par Poincaré dans son Mémoire sur les fonctions qui admettent un théorème de multiplication. Cette fonction $\theta(u)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\theta(Su) = R[\theta(u)],$$

et peut servir à étudier l'itération de $R(z)$ au moyen de la représentation paramétrique

$$z = \theta(u),$$
$$R_n(z) = \theta(S^n u).$$

C'est la méthode qu'a employée Lattès pour obtenir quelques-uns des résultats que nous avons démontrés au Chapitre IV par une autre voie. En utilisant le théorème de Picard, on démontre aisément que si l'équation $z_0 = \theta(u)$ n'a pas de solutions, le point z_0 ne possède que 1 ou 2 antécédents distincts; on est alors ramené à une substitution polynomiale en effectuant une transformation homographique convenable sur les variables z et z_1 liées par la relation $z_1 = R(z)$; $R(z)$ étant alors un polynome, $\theta(u)$ est une fonction entière qui n'a pas de valeur exceptionnelle à distance finie, sauf dans le cas banal $z_1 = az^q$, qui conduit pour $\theta(u)$ à la fonction exponentielle. Il est inutile d'insister sur ces questions qui sont faciles et se rattachent à d'autres que nous avons déjà traitées en détail.

Il est plus instructif d'étudier la fonction inverse de $\theta(u)$, c'est-à-dire précisément les solutions non uniformes de l'équation de Schröder. Nous allons d'abord rechercher les points critiques algébriques de cette fonction. On a l'identité

$$S^n \theta'(S^n u) = R'_n[\theta(u)]\,\theta'(u)$$

ou

$$S^n \theta'(u) = R'_n\left[\theta\left(\frac{u}{S^n}\right)\right]\theta'\left(\frac{u}{S^n}\right).$$

Si $\theta'(u_0) = 0$, on peut prendre n assez grand pour que $\theta'\left(\frac{u_0}{S^n}\right)$ ne soit pas nul, on a alors

$$R'_n\left[\theta\left(\frac{u_0}{S^n}\right)\right] = 0.$$

Posons

$$\theta(u_0) = z_0,$$

$$\theta\left(\frac{u_0}{S^n}\right) = z_{-n}.$$

On a alors

$$R'_n(z_{-n}) = 0,$$

$$z_0 = R_n(z_{-n}),$$

ce qui exprime que z_0 est un point critique de la fonction inverse de $R_n(z)$, c'est-à-dire le conséquent d'un point critique de la fonction $R_{-1}(z)$.

Réciproquement, les conséquents des points critiques de la fonction $R_{-1}(z)$ sont en général des points critiques algébriques de la fonction inverse de $\theta(u)$. S'il n'y a pas de point exceptionnel, nous pouvons admettre que le point à l'infini n'est jamais un antécédent de rang n des points critiques de la fonction $R_{-n}(z)$, ce qui veut dire que les fonctions $R_n(z)$ n'ont pas de pôles multiples; il suffit pour arriver à ce résultat de transformer la relation $z_1 = R(z)$ par une transformation homographique préalable, laissant invariante l'origine, et rejetant à l'infini un point distinct des antécédents des points critiques des $R_{-n}(z)$, ces derniers points ayant naturellement un caractère invariant. Ces points critiques c s'obtiennent alors tous en cherchant les racines finies z de l'équation $R'_n(z) = 0$ et posant $c = R_n(z)$. L'équation

$$z = \theta\left(\frac{u}{S^n}\right)$$

donne alors une valeur finie pour u. On a ensuite

$$S^n \theta'(u) = R'_n(z)\,\theta'\left(\frac{u}{S^n}\right).$$

Comme $R'_n(z)$ est nul et que $\theta'\left(\frac{u}{S^n}\right)$ n'est pas infini $\left[\text{puisque } \theta\left(\frac{u}{S^n}\right) = z \text{ n'est pas infini}\right]$, on a

$$\theta'(u) = 0,$$
$$c = R_n(z) = \theta(u),$$

ce qui montre que c est un point critique algébrique de la fonction inverse de $\theta(u)$.

S'il y a un point exceptionnel, nous supposerons ce point rejeté à l'infini, de manière que $R(z)$ soit un polynome et $\theta(u)$ une fonction entière. Les points critiques à distance finie des fonctions $R_{-n}(z)$ sont encore des points critiques algébriques de la fonction $u(z)$; le point à l'infini, qui est un point critique pour toutes les fonctions $R_{-n}(z)$, est un point critique transcendant de la fonction $u(z)$.

71. Nous allons montrer maintenant que les points critiques transcendants de $u(z)$ sont tous des points limites des points c, c'est-à-dire qu'ils appartiennent à l'ensemble dérivé E'_c des conséquents des points critiques de $R_{-1}(z)$. Nous devons rappeler que nous considérons comme appartenant à E_c les points où se trouvent confondus une infinité de conséquents d'un même point, c'est-à-dire les points d'un cycle qui sont les conséquents d'un point critique. Aussi peut-il arriver qu'un point critique transcendant ne soit pas point limite de points critiques algébriques, par exemple quand $R(z)$ étant un polynome, le domaine du point à l'infini ne contient pas d'autre point critique de $R_{-1}(z)$ que ce point lui-même, qui est alors un point critique transcendant de la fonction inverse de la fonction entière $\theta(u)$, sans être point limite de points critiques algébriques.

Ces remarques faites, démontrons que la proposition que nous venons d'énoncer. Soient z' un point quelconque du plan des z qui ne soit pas un point exceptionnel, u' une racine de l'équation $\theta(u) = z'$, de sorte qu'il y ait un élément de fonction analytique $u(z)$, prenant en z' la valeur u' et holomorphe quand z décrit un cercle γ de centre z' auquel correspond un domaine élémentaire δ entourant u'; les domaines $\frac{1}{S^n}(\delta)$ tendent uniformément vers l'origine et sont tous pour $n > p$ intérieurs à un cercle de centre O et de rayon r' aussi petit qu'on le veut; les domaines correspondants dans le plan des z, qui sont des antécédents de γ, tendent également vers l'origine et sont tous pour $n > p$ intérieurs au cercle de rayon r considéré au début de ce paragraphe. Soit maintenant z'' un autre point du plan des z, et supposons qu'on puisse joindre $z'\,z''$ par une ligne n'ayant aucun point commun avec l'ensemble $E_c + E'_c$; il existe un domaine Γ renfermant cette ligne et comprenant le cercle γ dans lequel les fonctions $R_{-n}(z)$ sont uniformes et forment une famille normale; il existe, d'autre part, comme on vient de le démontrer, une certaine suite de fonctions $R_{-n}(z)$ qui converge uniformément vers la constante zéro dans γ; cette suite converge donc uniformément vers zéro dans tout le domaine Γ. Il y a donc un domaine antécédent de Γ, soit Γ_{-n} qui est entièrement contenu dans le cercle $|z| \leqq r$; à ce domaine Γ_{-n} l'élément de fonction $u = \Phi(z)$, holomorphe et nulle à l'origine, fait correspondre un domaine voisin de l'origine $\frac{1}{S^n}(\Delta)$ et qui comprend le domaine $\frac{1}{S^n}(\delta)$; quand z décrit Γ_{-n}, $Z = R_n(z)$ décrit Γ de manière que z est une fonction analytique de Z quand Z est dans ce dernier domaine; en posant $U = S^n u$, U décrit Δ quand u décrit $\frac{1}{S^n}(\Delta)$; donc, quand Z décrit Γ, U est une fonction analytique de Z qui décrit Δ, et cette fonction coïncide quand z est dans γ avec l'élément de fonction analytique inverse de $\theta(u)$ prenant en z' la valeur u'. On voit donc que le prolongement analytique de cet élément peut se faire le long d'une ligne quelconque ne renfermant aucun point de $E_c + E'_e$. Si cette ligne renferme des points de E_c n'appartenant pas à E'_c, on sera ramené au premier cas en considérant une antécédente de cette ligne sur laquelle le prolongement pourra se faire par le même procédé; sur la ligne initiale, le prolongement pourra se faire au moyen d'éléments algébriques n'introduisant que des points critiques algébriques. Donc, les seuls points critiques transcendants possibles sont les points de E'_c. Mais la réciproque n'a pas lieu. Je vais montrer que certains points de E'_c peuvent être des points ordinaires de $u(z)$.

Comme l'a montré M. Hurwitz, il faut pour qu'un point α soit un point critique transcendant de l'inverse d'une fonction méromorphe $\theta(u)$ que α soit une valeur asymptotique de $\theta(u)$ sur certains chemins aboutissant au point à l'infini. Je suppose que la substitution $z_1 = R(z)$ admette un point double attractif α, mais de sorte que le point double répulsif origine ne soit pas sur la frontière f de son domaine immédiat D_α. Je dis que dans ces conditions α n'est pas une valeur asymptotique. En effet, supposons que quand u décrit un chemin $\mathcal{L}$ allant de u_0 à l'infini, z décrive un chemin $\mathcal{C}$ tendant vers α, et soit $z_0 = \theta(u_0)$. On peut supposer que le chemin $\mathcal{C}$ est tout entier intérieur au domaine D_α en prenant u_0 suffisamment loin. Quand H décrit $\mathcal{L}$, le point $\frac{u}{S^p}$, p étant un entier positif, décrit le chemin $\frac{1}{S^p}(\mathcal{L})$ allant du point $\frac{S^p}{u_0}$ à l'infini; comme on a

$$\theta(u) = R_p\left[\theta\left(\frac{u}{S^p}\right)\right],$$

le point $z_{-p} = \theta\left(\frac{u}{S^p}\right)$ décrira un chemin $\mathcal{C}_{-p}$ dont tous les points resteront intérieurs soit au domaine D_α, soit à l'un de ses antécédents. Désignons par β l'une des valeurs limites de z_{-p}; on aura

$$R_p(\beta) = \alpha.$$

S'il y avait deux valeurs limites distinctes, il y en aurait une infinité formant un continu, et comme il n'y a qu'un nombre fini d'antécédents de rang p de α, on voit que z_{-p} tend vers l'un de ces antécédents qui est bien déterminé. Mais comme $\theta\left(\frac{u_0}{S^p}\right)$ tend vers zéro pour p infini, et que l'origine n'est pas sur la frontière de D_α, on peut prendre p assez grand pour que le point de départ du chemin $\mathcal{C}_{-p}$ soit extérieur à D_α; donc le chemin $\mathcal{C}_{-p}$ tout entier sera extérieur à D_α, intérieur à un domaine antécédent de D_α, et tendra vers un antécédent de α distinct de α. On peut même démontrer qu'il en est ainsi pour toute valeur positive de p. Mais ce point α_{-p} est un point critique transcendant de $u(z)$, car la réciproque du théorème de M. Hurwitz est exacte ([1]). Or, ceci est impossible, car α est limite de conséquents de points critiques, mais α_{-p} ne l'est pas.

Prenons comme exemple la substitution (Chap. V, 36)

$$z_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(z^4+1)+z.$$

Il y a deux points doubles attractifs à distance finie α et $\bar{\alpha}$ séparés par l'axe réel qui appartient au domaine du point à l'infini, et de même deux points doubles répulsifs imaginaires conjugués β et $\bar{\beta}$. Si l'on suppose $\bar{\beta}$ et α séparés par l'axe réel, on aura, en ramenant l'origine en β, *une fonction entière* $\theta(u)$, *pour laquelle le point* $\alpha - \beta$ *sera limite de points critiques algébriques de la fonction inverse (car dans le cas actuel les conséquents de points critiques contenus dans* D_α *sont distincts) et en même temps point ordinaire de cette fonction inverse.*

Il découle, en outre, de la démonstration précédente que l'ensemble des points critiques transcendants est un ensemble invariant contenu dans E'_c, mais que je ne sais pas en général déterminer d'une manière précise. Dans un grand nombre de cas particuliers on peut démontrer qu'il coïncide avec l'ensemble des points doubles attractifs ou de multiplicateur $+1$.

Il est, d'autre part, très facile de voir comment les propriétés de l'ensemble $\mathcal{F}$, qui s'introduit dans l'étude de l'itération de $R(z)$, se

---

[1] F. Iversen, *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes* (Helsingfors, 1914, p. 6-15).

réflètent dans les propriétés de la fonction $\theta(u)$. Pour cette question et pour l'étude des autres propriétés de $\theta(u)$, nous renverrons à la Thèse de M. Valiron, et à diverses Notes de Lattès et de M. Julia. (*C. R. Acad. Sc.*, 1918-19, *passim.*)

72. Nous allons étudier maintenant les équations fonctionnelles de l'itération au voisinage d'un point double de multiplicateur égal à 1. Nous ferons précéder cette étude de quelques compléments aux résultats des nos 7 et 8 (Chap. II). Nous considérons donc une substitution de la forme

$$z_1 = z + a + \psi(z) = R(z),$$

où a est réel et positif, $\psi(z)$ pouvant avoir à l'infini un point critique isolé mais satisfaisant à l'inégalité

$$|\psi(z)| < \frac{k}{|z|},$$

et $R(z)$ ne prenant jamais deux fois la même valeur à l'extérieur d'un cercle de rayon suffisamment grand. Nous avons déjà démontré qu'on peut, étant donné un angle $\alpha > 0$, aussi petit qu'on le veut, obtenir un domaine D jouissant des propriétés suivantes : D est limité par deux demi-droites issues d'un point A de Ox, et faisant avec Ox les angles $\pi - \alpha$ et $-(\pi - \alpha)$; il s'étend à l'infini vers la droite; dans D, la fonction $R(z)$ possède les propriétés énumérées plus haut, et de plus $|\psi(z)|$ reste inférieure en module à un nombre $\varepsilon < a$, d'ailleurs arbitraire; le domaine D contient ses conséquents; $R_n(z)$ tend uniformément vers l'infini dans toute partie bornée de D et même dans les parties non bornées définies par $x \geqq x_0$.

Nous allons montrer que ces propriétés subsistent dans le domaine fermé D tout entier. Si nous effectuons sur la demi-droite AL la translation définie par $z_1 = z + a$, nous obtenons une demi-droite parallèle distante de la première de la quantité $a \sin\alpha$; si de chaque point de la seconde comme centre on décrit un cercle de rayon ε, on obtient une bande de largeur 2ε dans laquelle sera comprise la transformée de AL par la substitution $z_1 = R(z)$, ε étant le module maximum de $\psi(z)$ dans D; si nous supposons

$$\varepsilon < a \sin \alpha,$$

et par suite

$$a' = a - \frac{\varepsilon}{\sin \alpha} > 0,$$

cette ligne transformée se trouvera ainsi, par rapport à l'origine, au delà de la droite déduite de AL par la translation a' parallèle à l'axe réel; pour que cette inégalité soit vérifiée, puisque $|\psi(z)| < \frac{k}{|z|}$, il suffira de prendre

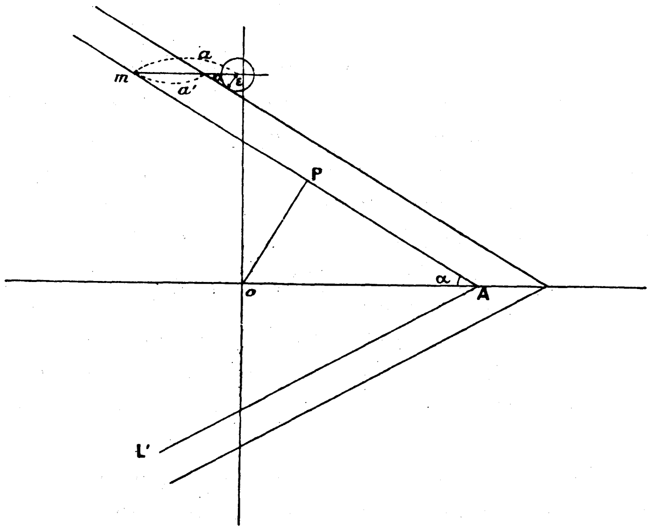
$$|z| > \frac{k}{a \sin \alpha},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{OP} > \frac{k}{a \sin \alpha},$$

OP étant la distance de l'origine à AL (*fig.* 8). Le même raison-

Fig. 3.



nement s'applique à la droite symétrique AL'. Par conséquent, le domaine D_1, conséquent de D, sera intérieur au domaine déduit de D par la translation a'. En itérant la substitution, on parvient à un domaine D_n intérieur à celui qu'on déduit de D par la translation na'. La plus courte distance de D_n à l'origine, c'est-à-dire le module minimum de z_n, quand z est un point arbitraire du domaine fermé D, sera donc supérieure à

$$\frac{na'}{\sin\alpha} + \mathrm{OP}.$$

On aura ainsi uniformément dans D

$$|z_n| > Cn. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous devons maintenant démontrer que l'expression asymptotique obtenue pour la fonction $F(z)$ qui vérifie l'équation fonctionnelle d'Abel est encore exacte dans le domaine D ainsi défini, autrement dit qu'on aura toujours

$$F(z) = z + o(\mathfrak{L}|z|).$$

Si nous nous reportons à la démonstration du n° 9 (Chap. II), nous voyons qu'elle sera encore valable pourvu d'une part que $|z_n| > Cn$, ce que nous venons de vérifier; en second lieu, nous avons admis que $|z_n|$ va en croissant avec n; mais il suffit, pour que la conclusion subsiste, qu'on ait constamment pour $p > 0$:

$$\left|\frac{z_p}{z}\right| > q > 0.$$

Établissons cette propriété qui est déjà démontrée quand z est dans la partie de D définie par $x \geqq x_0$. Elle est, d'autre part, évidemment exacte dans tout domaine borné faisant partie de D. Il suffit de l'établir pour les points du domaine LQRST couvert de hachures sur la figure 4, la droite ORS faisant l'angle α avec Ox. On a évidemment

$$\left|\frac{z_p}{z}\right| \geqq \left|\frac{y_p}{z}\right|.$$

L'argument ω de z restant compris entre α et $\pi - \alpha$ dans le domaine considéré, on a

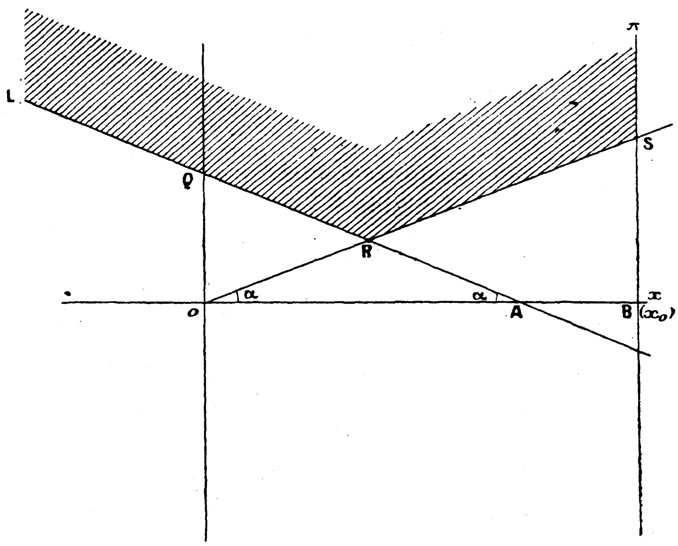
$$\frac{1}{|z|} = \left|\frac{\sin\omega}{y}\right| \geqq \left|\frac{\sin\alpha}{y}\right|.$$

Par suite,

$$\left|\frac{z_p}{z}\right| > \left|\frac{y_p}{y}\right| \sin\alpha.$$

Il suffit donc de montrer que $\left|\frac{y_p}{y}\right|$ a une borne inférieure non nulle ; on pourra, d'autre part, ne donner à p que des valeurs

Fig. 4.



pour lesquelles la partie réelle de z_p est inférieure à x_0, puisque ensuite les $|z_p|$ vont en croissant avec l'indice. Ceci posé, on a

$$z_n = z_{n-1} + a + \psi(z_{n-1}),$$

$$z_p = z + pa + \sum_0^{p-1} \psi(z_n),$$

$$|y_p - y| < \sum_0^{p-1} |\psi(z_n)|.$$

En vertu des inégalités

$$|\psi(z)| < \frac{k}{|z|}, \qquad |z_n| > \mathrm{C}n, \qquad |z| > \mathrm{C}',$$

on déduit de ce qui précède

$$|y_p - y| < \mathrm{K}\,\mathfrak{L}p.$$

On peut donc écrire

$$\frac{y_p}{y} = \frac{y \pm \theta \mathrm{K}\,\mathfrak{L}p}{y},$$

θ étant compris entre o et 1. On doit donner à p des valeurs telles que x_p ne dépasse pas la valeur x_0. Or, on déduit de suite des inégalités écrites plus haut la suivante :

$$x_p > x + \mathrm{B}p \qquad (\mathrm{B} > 0),$$

en valeur algébrique. On pourra donc supposer

$$x + \mathrm{B}p < x_0,$$
$$p < \frac{x_0 - x}{\mathrm{B}} + 1.$$

Comme l'argument de z dans le domaine envisagé varie entre α et $\pi - \alpha$, on a

$$|x| < \frac{|y|}{\operatorname{tang}\alpha},$$

d'où

$$p < \frac{x_0 + \dfrac{|y|}{\operatorname{tang}\alpha}}{\mathrm{B}} + 1,$$

ou plus simplement

$$h < \mathrm{M}|y| + \mathrm{N},$$

M, N constantes positives.

D'où finalement

$$\frac{y_p}{y} = 1 \pm \frac{\theta \mathrm{K}\mathfrak{L}p}{y} = 1 \pm \frac{\theta' \mathrm{K}\mathfrak{L}(\mathrm{M}|y| + \mathrm{N})}{|y|} \qquad (\theta' < 1).$$

La quantité $\dfrac{\mathrm{K}\mathfrak{L}(\mathrm{M}|y| + \mathrm{N})}{|y|}$ tend vers zéro pour $|y|$ infini et peut être supposée constamment inférieure à $\frac{1}{2}$; en faisant cette hypothèse, on néglige une partie du domaine LQRST dont les ordonnées sont bornées, qui par suite est elle-même bornée et pour laquelle la proposition n'a pas besoin d'être démontrée. Dans la partie restante, on aura

$$\left|\frac{y_p}{y}\right| > \frac{1}{2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

L'analyse des n^{os} 7 et 8 reste donc applicable dans les conditions actuelles. La fonction d'Abel $\mathrm{F}(z)$ fait la représentation conforme de D sur une aire illimitée Δ du plan des Z, limitée par deux courbes analytiques qui s'étendent à l'infini de sorte que l'argument limite de Z ait, en vertu de la relation

$$Z = z + o(\mathfrak{L}|z|),$$

la même valeur que l'argument correspondant du plan des z, c'est-à-dire $\pm(\pi - \alpha)$. On a de plus, pour z infiniment grand,

$$\lim F'(z) = \lim \frac{dZ}{dz} = 1.$$

Les courbes qui limitent Δ ont donc les directions asymptotiques $\pm(\pi - \alpha)$. Elles ne sont rencontrées qu'en un nombre fini de points par une droite faisant l'angle $(\pi - \alpha')$, ou $-(\pi - \alpha')$ avec OX, si $\alpha' > \alpha$. On voit donc que Δ renferme des domaines analogues à D, l'angle α étant remplacé par l'angle 2α, pour fixer les idées. On aura d'ailleurs inversement

$$z = Z + o(\mathfrak{L}|Z|).$$

Ceci posé, quelle sera la solution générale de l'équation fonctionnelle d'Abel, en se bornant aux fonctions analytiques et uniformes dans D? Si on l'exprime en fonction de la variable Z, on devra avoir, en appelant $\Phi(Z)$ cette solution

$$\Phi(Z + a) = a + \Phi(Z),$$

puisque remplacer z par $R(z)$ revient à remplacer Z par $Z + a$. La fonction $\Phi(Z) - Z$ a donc la période a; comme elle est holomorphe dans Δ qui comprend des bandes de largeur a parallèles à l'axe des Y et illimitées vers le haut et vers le bas, c'est nécessairement une fonction périodique entière :

$$\Phi(Z) - Z = \Omega(Z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_N e^{\frac{2N i\pi}{a} Z} \left(\lim \sqrt[N]{|A_N|} = 0\right),$$

$$\Phi(Z) = Z + \Omega(Z).$$

En remplaçant dans cette expression Z par $F(z)$, on a l'expression générale des solutions cherchées.

Par quoi se distingue la fonction $F(z)$ parmi l'ensemble de ces solutions? Peut-être par la condition de ne prendre qu'une fois une valeur donnée dans D. Pour en être certain, il faudrait prouver que si $\Omega(Z)$ est une fonction périodique entière, la fonction

$Z + \Omega(Z)$ prend plusieurs fois certaines valeurs dans un domaine tel que Δ, à moins que Ω ne se réduise à une constante. La chose est probable, mais non démontrée.

Dans tous les cas, $F(z)$ est déterminée à une constante additive près par la condition que $F'(z)$ tend vers l'unité quand z tend vers l'infini suivant les chemins intérieurs à D sur lesquels l'argument de z tend vers zéro. En effet, posons

$$G(z) = \Phi(Z).$$

Nous aurons

$$G'(z) = \Phi'(Z)\,F'(z).$$

$G'(z)$ et $F'(z)$ tendant vers l'unité, il en est de même de $\Phi'(Z) = 1 + \Omega'(Z)$. $\Omega'(Z)$ tend donc vers zéro. On peut supposer que Z décrit la partie positive de l'axe réel, car cela revient à faire décrire à z un chemin de l'espèce indiquée; si Ω n'est pas une constante, $\Omega'(Z)$ reprend périodiquement les mêmes valeurs et ne tend vers aucune limite. Il y a donc contradiction.

Remarquons que $\Omega[F(z)]$ est l'expression générale des fonctions analytiques dans D et invariantes par la substitution $z_1 = R(z)$.

73. Lorsque le point double de multiplicateur $+1$ est à distance finie, il suffit de faire l'inversion $\left(t = \frac{1}{z - \alpha}\right)$ pour pouvoir appliquer les résultats qui précèdent; le domaine D est alors remplacé par un domaine limité par deux arcs de cercle et présente au point double un angle $2\pi - 2\alpha$, qui peut être aussi voisin que l'on veut de 2π; les domaines de convergence uniforme que nous avions désigné par Δ au n° 10 peuvent donc être remplacés par d'autres d'amplitude angulaire plus grande. On peut même démontrer qu'il y en a dont l'amplitude angulaire est égale à 2π. Dans le cas où l'on a $R''(\alpha) = 0, \ldots, R^{(q)}(\alpha) = 0$, $R^{q+1}(\alpha) \neq 0$, c'est-à-dire une étoile à q branches, on étend les résultats obtenus, comme au Chapitre II, par l'emploi de deux transformations conformes auxiliaires, l'une régulière au point double origine, l'autre de la forme $z = t^{\frac{1}{q}}$.

Nous allons encore revenir sur l'étude des fonctions dérivées $R'_n(z)$ dans le domaine D. Nous supposons que $R(z)$ est développable dans D en série de la forme

$$z + a + \frac{b}{z} + \ldots,$$

les termes qui suivent pouvant avoir des exposants fractionnaires, mais la série étant dérivable terme à terme,

$$R'(z) = 1 - \frac{b}{z^2} \ldots$$

Montrons que les fonctions $R'_n(z)$ sont bornées dans leur ensemble uniformément dans D. On a en effet

$$R'_n(z) = R'(z) R'(z_1) \ldots R'(z_{n-1}),$$
$$|R'(z)| < 1 + \frac{C}{|z|^h},$$

$h \geqq 2$, C constante positive. $R'_n(z)$ est donc inférieure en module au produit infini

$$\prod_n \left(1 + \frac{C}{|z_n|^h}\right),$$

qui est absolument et uniformément convergent puisque $|z_n| > Kn$, et $|z| > K'$. De plus, nous avons montré que $\left|\frac{z_n}{z}\right|$ a une limite inférieure non nulle, donc que $\left|\frac{z}{z_n}\right|$ est uniformément borné dans D. Il s'ensuit que les fonctions

$$\frac{R'_n(z) z^2}{R_n^2(z)} = \frac{d\frac{1}{z_n}}{d\frac{1}{z}}$$

sont bornées dans leur ensemble et uniformément dans D. On peut montrer qu'elles sont inférieures à 1 en module dans certaines parties illimitées de D. On a en effet

$$\frac{R'(z) z^2}{R^2(z)} = \frac{1 - \frac{b}{z^2} \cdots}{\left(1 + \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2} + \ldots\right)^2} = 1 - \frac{2a}{z} + \frac{\lambda}{z^2},$$

λ étant borné. Si $z = \rho e^{i\omega}$ et $|\lambda| < A$, cette expression est inférieure en module à

$$\left|1 - \frac{2a}{\rho e^{i\omega}}\right| + \frac{A}{\rho^2} = \sqrt{1 - \frac{4a}{\rho}\cos\omega + \frac{4a^2}{\rho^2}} + \frac{A}{\rho^2},$$

ce qui est plus petit qu'une expression de la forme

$$1 - \frac{2a}{\rho}\cos\omega + \frac{B}{\rho^2}.$$

Si ω reste compris entre $+\beta$ et $-\beta$, β compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, ceci est inférieur à

$$1 - \frac{2a}{\rho}\cos\beta + \frac{B}{\rho^2},$$

et a étant positif, cette expression demeure inférieure à l'unité pour $\rho > \rho'$. Si l'on mène par le point d'abscisse ρ' de l'axe réel deux demi-droites d'argument $\pm\beta$, on limite ainsi un domaine contenu dans D, s'étendant à l'infini vers les x positifs et qui, comme on le vérifie immédiatement, contient ses conséquents. Dans ce domaine, on aura

$$\left|\prod_{p=0}^{n-1}\frac{R'(z_p)z_p^2}{R^2(z_p)}\right| = \left|\frac{R'_n(z)z^2}{R_n^2(z)}\right| < 1.$$

Supposons maintenant que z reste dans un domaine borné intérieur à D. On aura alors, puisque $|z|$ est borné et $|z_n| > Kn$,

$$\left|\frac{R'_n(z)z^2}{R_n^2(z)}\right| < \frac{M}{n^2},$$

ce qui est le terme général d'une série convergente. Nous allons voir dans un instant quelles sont les conséquences géométriques de ces résultats. Mais nous devons d'abord les étendre au cas où le point double donne lieu à une étoile à q branches, c'est-à-dire où l'on a

$$z_1 = z + \frac{a}{z^{q-1}} + \ldots,$$

le second membre étant ordonné suivant les puissances descendantes entières de q. Si l'on fait d'abord une transformation conforme et régulière à l'infini, les quotients différentiels

$\dfrac{d\frac{1}{z_n}}{d\frac{1}{z}}$ et $\dfrac{d\frac{1}{w_n}}{d\frac{1}{w}}$, w étant la nouvelle variable, différent par un facteur qui est infiniment voisin de 1 quand les w, w_n, z, z_n sont infiniment grands. Posons ensuite

$$w = t^{\frac{1}{q}},$$
$$w_n = t_n^{\frac{1}{q}}.$$

Il vient

$$\frac{d\frac{1}{w_n}}{d\frac{1}{w}} = \frac{d\frac{1}{t_n}}{d\frac{1}{t}}\left(\frac{t_n}{t}\right)^{1-\frac{1}{q}}.$$

Or, la relation entre t_1 et t étant maintenant de la forme

$$t_1 = t + a + \frac{b}{t} + \ldots,$$

les dérivées $\dfrac{d\frac{1}{t_n}}{d\frac{1}{t}}$ sont bornées dans leur ensemble dans le domaine de convergence uniforme D, et dans toute partie bornée de D elles sont de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$, le quotient $\frac{t_n}{t}$ étant alors de l'ordre de n ; on a donc dans ces conditions

$$\frac{d\frac{1}{w_n}}{d\frac{1}{w}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{q}}}\right).$$

En remontant ensuite à la variable z, on voit que dans les domaines de convergence uniformes qui correspondent à D, le quotient différentiel $\dfrac{d\frac{1}{z_n}}{d\frac{1}{z}}$ sera uniformément borné quel que soit n et de l'ordre de $\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{q}}}$ dans toute partie bornée de ces domaines.

Si le point double est à distance finie, on a alors le résultat géométrique suivant : *soit* D *un domaine élémentaire de convergence uniforme relatif aux conséquents d'un point; si* AB *est un arc de courbe de longueur finie contenue dans ce domaine* *et ne contenant pas le point double, la somme des longueurs des arcs conséquents forme une série convergente; en particulier, les courbes invariantes aboutissant au point double et formées d'une chaîne d'arcs conséquents* AA_1, $A_1A_2\ldots$ *ont une longueur finie.* Si OA est un arc de longueur finie contenu dans D et terminé au point double O, les arcs conséquents de OA ont des longueurs qui tendent vers zéro; car une partie OB de OA de longueur ε a des conséquents qui sont tous de longueur inférieure à $k\varepsilon$, tandis que les conséquents de AB ont des longueurs qui finissent par devenir inférieures à ε. Ces résultats s'appliquent également à la substitution inverse, c'est-à-dire aux antécédents d'un arc dans un domaine D' analogue à D.

74. Soient $z_1 = R(z)$ une substitution rationnelle avec un point double α de multiplicateur $+1$, D_α son domaine immédiat, f la frontière de D_α; f est l'ensemble limite des courbes antécédentes de la courbe présentant en α un point anguleux et qui limite un domaine de convergence élémentaire, en ne prenant que celles de ces courbes antécédentes qui sont intérieures à D_α, sauf aux points antécédents de α qui appartiennent à f. Il y a des cas où l'on est certain que cet ensemble limite f ne sera pas modifié si l'on supprime deux bouts de la courbe initiale terminés en α. En effet, soit λ un arc de cette courbe d'extrémité α et contenu dans un domaine de convergence élémentaire D' relatif aux antécédents d'un point, c'est-à-dire aux itérées de la fonction $R_{-1}^{(0)}(z)$, égale à α pour $z=\alpha$. Nous savons que $R_{-1}^{(0)}(z)$ se ramifie autour de certains points critiques intérieurs à D_α; il y a ainsi sur f des antécédents immédiats α_{-1} de α, distincts de α. Nous supposerons que les fonctions $\overline{R}_{-n}(z)$ restreintes à D_α n'ont pas de points critiques autour de ces points α_{-1}. Considérons une suite d'antécédents de l'arc λ; un antécédent de rang n s'obtient en appliquant d'abord n' fois la substitution $z_{-1} = R_{-1}^{(0)}(z)$, la $(n'+1)^{\text{ième}}$ étant définie par une autre branche de $R_{-1}(z)$; la première série d'opérations nous fournit un arc dont la longueur reste inférieure à $k\lambda$, en désignant les longueurs des arcs par les mêmes lettres que les arcs eux-mêmes; de plus, $\lambda_{-n'}$ tend vers zéro si n' croît indéfiniment; la $(n+1^{\text{ième}})$ opération nous fournit un arc terminé en un point α_{-1}, de longueur inférieure à $k'\lambda_{-n'}$ et qu'on peut supposer

intérieur à un cercle de rayon r et de centre α_{-1} où les fonctions $\overline{R}_{-n}(z)$ sont holomorphes et forment une famille normale à fonctions limites constantes et bornées (f étant supposé borné); il suffit de prendre $\lambda < \frac{r}{kk'}$; dans ce cercle, les fonctions dérivées des $\overline{R}_{-n}(z)$ sont bornées dans leur ensemble et tendent uniformément vers zéro quand l'indice d'itération croît indéfiniment; or, si n croît indéfiniment, l'un au moins des nombres n' et $n - n'$ croît indéfiniment; dans les deux cas, λ_{-n} tend vers zéro; l'ensemble limite des courbes antécédentes de la courbe considérée n'est donc pas modifiée si l'on en supprime deux bouts de part et d'autre de α; il reste alors une courbe non fermée complètement intérieure à D_α, de manière que dans un domaine convenable contenant cette courbe les fonctions $\overline{R}_{-n}(z)$ forment une famille normale à fonctions limites constantes et que l'ensemble limite f coïncide avec l'ensemble dérivé des antécédents d'un point de la courbe, ou même d'un point arbitraire du domaine D_α, ou encore d'un point de f pourvu que ce point ne soit pas limite de points critiques des $\overline{R}_{-n}(z)$, ce qui a lieu par exemple pour les α_{-1}.

Nous voyons que, le point α étant sur f, pour pouvoir obtenir le mode de génération de la frontière qui nous a servi dans le cas d'un point double attractif, nous avons dû faire des hypothèses supplémentaires concernant la distribution des points critiques des fonctions inverses, hypothèses qui sont probablement superflues.

Remarquons que le résultat obtenu subsiste si les points α_{-1} sont critiques pour certaines fonctions $\overline{R}_{-n}(z)$, mais sans être limites de conséquents de points critiques de $\overline{R}_{-1}(z)$, de sorte que les surfaces de Riemann correspondantes ne se ramifient pas à l'infini en ces points; c'est ce qu'on voit, par exemple, en remplaçant $R(z)$ par $R_h(z)$, h étant un entier convenablement choisi.

Le résultat obtenu aux n^{os} 51-52 concernant la non-existence des tangentes à f, quand cette frontière est continue, est applicable ici moyennant les mêmes hypothèses. Si ξ est un point de E'_c situé sur f, on ne peut avoir $\xi = \alpha_{-p} \not\equiv \alpha$, que s'il y a une infinité de points ξ sur f; en effet, si α_{-p} est limite de conséquents d'un point c, α est aussi limite de conséquents de c et les c_n ont alors une infinité de points limites distincts (n° 15); donc si les points ξ

sont en nombre fini, ils ne coïncident pas avec les α_{-p} autour desquels les fonctions $\overline{R}_{-n}(z)$ ne peuvent se ramifier indéfiniment. La discussion du n° 52 est donc applicable sans nouvelles hypothèses. La courbe frontière n'a de tangente qu'en une infinité dénombrable de points, parmi lesquels se trouvent les antécédents de α [du moins si $R''(\alpha) \neq 0$]. Ce seront les seuls points pourvus de tangentes, si α est le seul point ξ situé sur f.

75. Considérons maintenant la fonction $F(z)$ qui vérifie l'équation fonctionnelle d'Abel et que nous avons considérée jusqu'ici dans un domaine élémentaire au voisinage de α ; cette fonction est la limite d'une suite de fractions rationnelles qui converge uniformément dans D_α. Elle est donc holomorphe dans ce domaine. Je ne peux pas affirmer d'une manière absolument générale que tous les points frontières sont des points singuliers essentiels de cette fonction ; mais il en est certainement ainsi lorsque l'hypothèse faite sur les points α_{-1} est vérifiée. En effet, dans ce cas, tout point de f est limite d'antécédents de α situés eux-mêmes sur f, et même limite d'antécédents d'un domaine élémentaire de convergence δ ayant une pointe en α ; dans ce domaine δ, la fonction $F(z)$ prend des valeurs qui forment un domaine Δ décrit précédemment ; Δ comprend notamment toute une région du plan des Z définie par

$$\mathcal{R}(Z) \geqq X_0 \qquad (l'\infty \text{ excepté}).$$

En vertu de l'équation fonctionnelle

$$F[R_p(z)] = F[R(z)] + pa,$$

la fonction $F(z)$ prendra dans le domaine δ_{-p} intérieur à D_α avec une pointe en α_{-p}, toutes les valeurs $Z - pa$, où $\mathcal{R}(Z) \geqq X_0$, c'est-à-dire toutes les valeurs dont la partie réelle est supérieure à $X_0 - pa$; a étant positif et des domaines δ_{-p}, p aussi grand qu'on le veut, existant dans le voisinage de tout point m de f, on voit que $F(z)$ prend toutes les valeurs, sauf l'infini au voisinage de tout point de f.

Ceci s'applique notamment aux substitutions singulières admettant un cercle fondamental et à tous les exemples que l'on sait pratiquement étudier, entre autres $R(z) = z - z^2$.

Dans les mêmes conditions, la fonction $\Omega[F(z)]$, Ω étant une fonction entière de période a, représente une fonction invariante par la substitution donnée et holomorphe dans le domaine D_α. C'est un invariant absolu du groupe G qui est proprement discontinu dans le domaine D_α et admet comme domaine fondamental, par exemple, le domaine $\delta - \delta_1$ compris entre un domaine élémentaire de convergence et son conséquent immédiat; mais ici cette fonction invariante prend nécessairement une infinité de fois la même valeur dans un domaine fondamental.

On peut former des solutions uniformes dans D_α d'autres équations fonctionnelles simples; mais il n'est pas toujours facile de prouver que tous les points frontières sont singuliers pour ces fonctions. En voici un exemple. Posons

$$R(z) = z + a + \frac{b}{z} + \ldots \qquad (a > 0),$$

et soit

$$\Phi(z) = \frac{1}{z^\mu} + \frac{1}{z_1^\mu} + \ldots + \frac{1}{z_n^\mu} + \ldots,$$

μ étant un entier $\geqq 2$. Cette expression définit une fonction méromorphe dans le domaine du point double à l'infini; elle est continue dans le domaine de convergence élémentaire D, même à l'infini et cette dernière propriété la distingue des autres solutions de l'équation fonctionnelle

$$\Phi(z_1) = \Phi(z) - \frac{1}{z^\mu}.$$

Il n'y a donc pas de singularité apparente au point à l'infini pour la fonction ni pour sa dérivée :

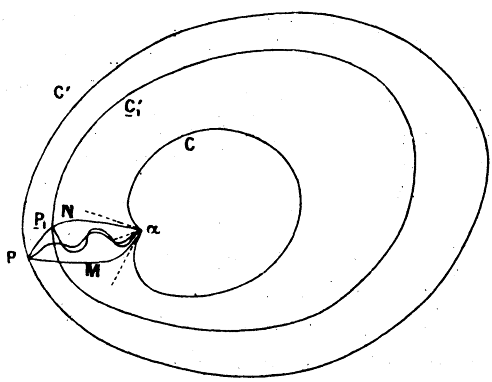
$$\Phi'(z) = -\mu \sum \frac{R'_n(z)}{z_n^{\mu+1}}.$$

Il est vraisemblable cependant que tous les points frontières sont singuliers. Il y a des cas où ce fait apparaît facilement; par exemple lorsqu'il y a un point double répulsif β sur f; l'équation fonctionnelle montre en effet que la valeur limite de $\Phi(z)$ en ce point est infinie ou indéterminée; il en sera de même aux points antécédents de β qui, au moins dans les cas les plus simples sont denses sur f.

76. Nous allons encore, comme application de ce qui précède, compléter l'étude de cet ensemble frontière f, en montrant que

dans certains cas c'est une courbe susceptible du même mode de représentation que celui que nous avons obtenu au Chapitre III, notamment pour la substitution $Z_1 = \frac{z + z^2}{2}$. Supposons qu'il y ait outre le point double α de multiplicateur $+1$, un point double attractif β, le domaine total de chacun de ces points étant d'un seul tenant et simplement connexe. On peut alors, comme dans les cas déjà traités, enfermer f entre deux séries de courbes d'un seul tenant, antécédentes de deux courbes C et C' qui appartiennent aux domaines respectifs de α et β; C'_{-n} est intérieure à $C'_{-(n-1)}$, C_{-n} est extérieure à $C_{-(n-1)}$ sauf au point α qui est un point anguleux commun à toutes ces courbes. Pour pouvoir appliquer l'analyse du n° 24 il faut démontrer l'existence d'une ligne sans points doubles et invariante, terminée en α et jouant le rôle de coupure de la couronne (C, C') [1]. Joignons α à un point P de C par une ligne sans points doubles qui soit intérieure à cette couronne sauf en α et P; on peut supposer que cette ligne α P ou L est tangente en α à la bissectrice de la pointe de C (*fig.* 5). Soit $R_{-1}^{(0)}(z)$ la fonction

Fig. 5.



inverse égale à α pour $z = \alpha$; les transformées de L par les itérées de cette fonction tendent vers le point α; cela est vrai pour la partie de L suffisamment voisine de α; c'est encore vrai pour la partie restante qui appartient à un domaine où les $R_{-n}(z)$ sont holomorphes

[1] Signalons ici que l'analyse présentée à la fin du n° 24 est incorrecte sur quelques points de détail; on la corrigera aisément en tenant compte de celle qui est développée ici.

et bornées dans leur ensemble, les points critiques de ces fonctions étant intérieurs à C ou extérieurs à C′; sur ces lignes l_{-n} l'argument de $z - \alpha$ tend vers la limite ω, qui correspond à la bissectrice de la pointe; elles seront donc à partir d'un certain rang intérieures à un angle rectiligne A de sommet α et aussi petit qu'on le veut. Nous supposerons donc pour faciliter l'intuition et bien que ce ne soit pas essentiel qu'on a remplacé la courbe C′ par une antécédente et de même la ligne L, de manière que L et son antécédente immédiate L_{-1} sont comprises dans un angle A inférieur par exemple à $\frac{\pi}{4}$; ces lignes sont tangentes entre elles en α et continues respectivement dans les couronnes (C, C′) et (C, C'_{-1}); elles sont simples mais peuvent se traverser mutuellement; dans ce dernier cas on peut joindre α à P et à P_{-1} par deux autres lignes αMP et αNP_{-1} simples et ne se traversant pas mutuellement, comprises dans l'angle A et comprenant entre elles L et L_{-1}.

Ceci posé, joignons P à P_{-1} par une ligne simple intérieure à la couronne (C′, C'_{-1}) et ne traversant pas α MP; ces chemins sont de deux sortes; on en choisira un sur lequel l'argument de $z - \alpha$ varie d'une quantité inférieure à A, c'est-à-dire tel que le domaine simplement connexe limité par les trois lignes αMP, αNP_{-1} et PP_{-1} ne contienne pas C. Soit δ le triangle ainsi formé à l'intérieur duquel les $R_{-n}(z)$ sont uniformes; dans ces conditions il est visible que les triangles antécédents δ, δ_{-1}, δ_{-2}, . . ., δ_{-n}, . . . obtenus successivement par $z_{-1} = R^0_{-1}(z)$ ont pour côtés opposés à α les arcs PP_{-1}, $P_{-1}P_{-2}$, . . ., $P_{-n}P_{-(n+1)}$ formant une chaîne continue; ces arcs sont simples, ne se traversent pas mutuellement, tendent vers le point α en vertu du raisonnement fait pour les lignes l_{-n} et constituent par leur réunion une coupure invariante de la couronne (C, C′) qui est même de longueur finie et a une tangente en α.

(Ce qui précède est tout à fait intuitif, mais l'omission de certaines précautions peut conduire dans des cas analogues à des résultats erronés, par exemple dans le cas d'un point double répulsif à multiplicateur négatif; on pourra étudier par exemple ce qui se passe au voisinage du point double $z = \frac{1}{2}$ de la substitution $z_1 = 2z^2 - 1$.)

Il n'y a plus maintenant aucune difficulté pour appliquer la méthode du n° 24. On devra montrer que les longueurs des côtés des domaines antécédents de la couronne (C, C′) rendue simplement connexe par la coupure que nous venons de tracer tendent vers zéro; pour cela on décompose le domaine coupé Δ en plusieurs parties: celles qui sont contenues dans un cercle de centre α et de rayon suffisamment petit auxquelles on applique exactement le raisonnement du n° 74 et la partie restante pour laquelle la démonstration a été donnée à plusieurs reprises.

On pourra donc dans ce cas et même dans certains autres un peu plus généraux représenter la courbe f par une équation de la forme

$$z = \varphi(t),$$

$\varphi(t)$ étant une fonction imaginaire de la variable réelle t qui ne prend qu'une fois chaque valeur dans l'intervalle $(0, 1)$ et qui est continue. De plus, on a

$$\varphi(d.t) = R[\varphi(t)],$$

d étant le degré de $R(z)$. Ceci s'applique notamment à la substitution $z_1 = z - z^2$. On verra facilement que la démonstration s'applique avec des modifications insignifiantes dans le cas où il y a deux points doubles de multiplicateur $+1$.

77. Nous allons terminer cette étude en établissant certaines propriétés d'une classe de fonctions méromorphes très intéressantes qui se rattachent à l'équation fonctionnelle d'Abel et qui s'obtiennent de la même manière que la fonction de Poincaré dans le cas d'un point double répulsif.

Soient comme toujours

$$z_1 = z + a + \frac{b}{z} + \ldots \qquad (a > 0)$$

une substitution rationnelle avec un point double de multiplicateur $+1$ à l'infini, et

$$z_{-1} = z - a - \frac{b}{z} + \ldots$$

la substitution inverse à laquelle correspond, en tenant compte du changement de signe du terme constant a, un domaine élémentaire de convergence D′ limité par deux demi-droites partant d'un point de l'axe réel et faisant avec Ox les angles $\pm\omega$; ω est aussi petit qu'on le veut et nous le supposerons inférieur à $\frac{\pi}{2}$; D′ contient le domaine antécédent D'_{-1} obtenu par la branche considérée ici de la fonction $R_{-1}(z)$, et dont les itérées convergent uniformément vers l'infini dans le domaine non borné D' qui comprend entre autres tous les points de l'axe réel dont l'abscisse est infinie négative ; ces fonctions itérées donnent naissance à une fonction holomorphe dans D', infinie à l'infini, et vérifiant l'équation d'Abel

$$\Phi[R_{-1}(z)] = \Phi(z) - a$$

avec les conditions asymptotiques

$$\Phi(z) = z + o(\log|z|),$$
$$\Phi'(z) = 1 + o\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

Cette fonction n'est pas la même que celle déduite des itérées de $R(z)$ qui est définie dans D. $\Phi(z) = u$ ne prend qu'une fois chaque valeur dans D' et fait la représentation conforme de D' sur un domaine Δ' du plan des u, limité par deux courbes analytiques s'étendant à l'infini et ayant respectivement les directions asymptotiques $+\omega$ et $-\omega$; Δ' comprend donc tous les points du plan des u dont l'abscisse est négative et infiniment grande, et plus généralement tous les points dont l'argument est compris entre $\omega + \varepsilon$ et $2\pi - \omega - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) et le module supérieur à ρ ; Δ' comprend notamment toute la région du plan définie par l'inégalité $\mathcal{R}(u) < X$, au moins pour X négatif et suffisamment grand en valeur absolue.

Dans Δ', z est inversement une fonction uniforme de u qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\theta(u - a) = R_{-1}[\theta(u)]$$

ou

$$\theta(u + a) = R[\theta(u)],$$

pourvu que u et $u + a$ appartiennent tous deux à Δ'. Mais cette équation fonctionnelle elle-même donne immédiatement le prolongement analytique de $\theta(u)$ dans tout le plan sous forme d'une fonction méromorphe. En effet, $\theta(u)$, étant bien définie et holomorphe pour $\mathcal{R}(u) < X$, sera définie par l'équation fonctionnelle et méromorphe pour $\mathcal{R}(u) < X + a$, et de même en général pour $\mathcal{R}(u) < Y + pa$, quel que soit l'entier positif p. Elle est donc méromorphe dans tout le plan, tandis que la fonction inverse $\varphi(z)$ qui existe dans tout le plan des z présente naturellement des points critiques (algébriques et transcendants). On voit que tout se passe ici exactement comme dans le cas d'un point double répulsif, l'équation d'Abel remplaçant celle de Schröder. Remarquons à ce propos que ces deux équations fonctionnelles, celle de Schröder et celle d'Abel, sont identiques au fond puisqu'on passe de l'une à l'autre en prenant les logarithmes des deux membres; mais quand on les étudie au point de vue de l'uniformité des solutions, il y a lieu de ne pas les confondre.

Ainsi donc, lorsqu'une substitution rationnelle présente un point double de multiplicateur $+1$, l'itération de cette substitution est susceptible d'une représentation paramétrique

$$z = \theta(u),$$
$$z_n = \theta(u + na),$$

θ étant une fonction méromorphe qui, dans un domaine comprenant tout le plan sauf un secteur d'angle aussi petit qu'on le veut, est représentable par une expression de la forme

$$u + o(\log|u|),$$

pour les grandes valeurs de u. Cela résulte de ce que nous avons dit sur la structure du domaine Δ', et du fait que la formule

$$u = z + o(\log|z|)$$

est réversible. Dans les mêmes conditions la dérivée $\theta'(u)$ est infiniment voisine de l'unité.

78. Nous allons obtenir d'autres propriétés de ces fonctions en étudiant la correspondance entre le plan des z et le plan des u tout entiers. Remarquons d'abord que les deux domaines D et D' du plan des z, limités par des demi-droites faisant les angles $\pm\omega$ et $\pm(\pi-\omega)$ avec $Ox\left(\omega < \frac{\pi}{2}\right)$, ont en commun deux domaines non bornés comprenant tous les points dont l'argument est compris entre ω et $\pi-\omega$, ou entre $-\omega$ et $-(\pi-\omega)$, et le module suffisamment grand. Considérons dans Δ' un rectangle de hauteur infinie limité par deux parallèles à l'axe des Y distantes de a, et un segment d'ordonnée H parallèle à l'axe des X, H étant positif et très grand. Il lui correspond dans D′ un domaine limité par deux courbes s'étendant à l'infini dans le demi-plan supérieur avec Oy comme direction asymptotique, et par un arc borné; si H tend vers l'infini, les points du rectangle E tendent uniformément vers l'infini et leurs arguments tendent uniformément vers zéro; il en est de même pour le domaine image du plan des z; donc si H est suffisamment grand, ce domaine image est dans la partie commune à D et à D′

Considérons alors le demi-plan

$$J(u) \geqq H,$$

nous pouvons tracer une demi-droite faisant avec Ox un angle ω compris entre ω et $\frac{\pi}{2}$ et qui divise ce demi-plan en deux secteurs; dans le secteur de gauche $\theta(u)$ tend vers l'infini uniformément quand u tend vers l'infini sur un chemin quelconque. Je dis qu'il en est de même dans le secteur de droite; en effet, on peut le diviser par une suite infinie d'ordonnées distantes de a en trapèzes qui se déduisent par les translations

$$u_n = u + na$$

des trapèzes congruents compris dans le rectangle illimité E; pour que u_n tende vers l'infini en restant dans ce secteur, il faut que n tende vers l'infini; les formules

$$z = \theta(u),$$
$$z_n = R_n(z) = \theta(u + na)$$

montrent alors que $\theta(u + na)$ tend vers l'infini uniformément, car u étant dans E, z est dans D et nous savons que $R_n(z)$ converge uniformément vers l'infini dans D. Le même résultat s'obtient pour le demi-plan

$$J(u) \leqq -H.$$

En outre, on aura

$$R'_n(z)\,\theta'(u) = \theta'(u + na).$$

Nous savons que, dans Δ', $\theta'(u)$ tend uniformément vers la valeur 1 à l'infini; en outre, dans D les $R'_n(z)$ sont bornéesd ans leur ensemble; donc dans les demi-plans $J(u) \geqq H$ ou $J(u) \leqq -H$, la fonction $\theta'(u)$ est bornée à l'infini.

On a donc l'énoncé suivant : *Il existe une bande de largeur* *finie parallèle à l'axe réel, telle que dans les parties du plan extérieures à cette bande, $\theta(u)$ tend uniformément vers l'infini et $\theta'(u)$ reste uniformément bornée pour les valeurs infiniment grandes de u.*

On peut évidemment n'enlever du plan que la moitié de cette bande s'étendant à l'infini vers les x positifs et l'énoncé qui précède est valable dans le domaine d'un seul tenant ainsi obtenu.

79. Soit maintenant z_0 un point du plan des z; l'équation $\theta(u) = z_0$ a une infinité de racines sauf au plus pour deux valeurs de z_0. Si z_0 n'est pas un point exceptionnel, au sens du n° 5, c'est-à-dire s'il a une infinité d'antécédents distincts, il y a au moins un de ces antécédents z_{-p} pour lequel l'équation

$$z_{-p} = \theta(u)$$

admet une infinité de racines; soit u' l'une d'elles, on aura

$$z_0 = R_p(z_{-p}) = R_p[\theta(u')] = \theta(u' + pa).$$

L'équation $z_0 = \theta(u)$ a donc une infinité de racines. Si z_0 n'a qu'un nombre fini d'antécédents distincts, ces antécédents sont tous confondus avec z_0 lui-même; un tel point z_0 est unique, le cas où il y en aurait deux ne peut pas se présenter ici, la substitution ayant un point double de multiplicateur $+1$; on a alors

$$Z = \frac{1}{z - z_0},$$

$$P(Z) = \frac{1}{R(z) - z_0},$$

$P(Z)$ étant un polynome, et généralement :

$$P_n(Z) = \frac{1}{R_n(z) - z_0}.$$

Si l'on pose

$$\frac{1}{\theta(u) - z_0} = \varphi(u),$$

il vient

$$Z = \varphi(u),$$

$$P(Z) = \varphi(u + a).$$

$\varphi(u)$ est alors une fonction entière, car étant holomorphe pour

$\mathcal{R}(u) \leqq X$, l'équation fonctionnelle

$$\varphi(u + a) = P[\varphi(u)]$$

montre qu'elle est holomorphe dans tout le plan. Ainsi, sauf dans le cas où la substitution se ramène à la forme polynomiale par une transformation homographique, la fonction $\theta(u)$ n'a pas de valeurs exceptionnelles.

Considérons l'ensemble $\mathcal{F}$ des points du plan des Z où les fonctions $R_n(z)$ ne forment pas une suite normale; cet ensemble parfait n'est nulle part dense superficiellement, car il y a des régions où les $R_n(z)$ convergent uniformément vers le point double à l'infini. A tout point z de $\mathcal{F}$ correspondent une infinité de points u, car le point exceptionnel z_0 s'il existe n'appartient pas à $\mathcal{F}$. A l'ensemble $\mathcal{F}$ correspond ainsi un ensemble $\mathcal{E}$ dans le plan des u; on démontre bien facilement que $\mathcal{E}$ est parfait; il n'y a qu'à le porter au n° 41 où la démonstration a été donnée à propos d'une représentation paramétrique analogue. $\mathcal{F}$ n'étant pas dense superficiellement, $\mathcal{E}$ ne l'est pas non plus. Si u appartient à $\mathcal{E}$, il en est de même de $u \pm na$; c'est la traduction du fait que $\mathcal{F}$ contient les conséquents et antécédents de tous ses points; $\mathcal{E}$ est donc invariant par la translation $(u | u + a)$ et contient par suite le point à l'infini. Si u' appartient à $\mathcal{E}$, la fonction $\theta(u)$ prend dans un cercle de rayon ε arbitrairement petit et de centre $u' + na$ toutes les valeurs sauf celles qui sont contenues dans un cercle de centre z_0 et de rayon quelconque r, lorsqu'il y a un point exceptionnel z_0 : cela pour toutes les valeurs de n supérieures à un entier positif convenablement choisi p. La fonction $\theta(u)$ est donc indéterminée à l'infini et prend une infinité de fois toutes les valeurs sauf une au plus dans une bande parallèle à l'axe réel, de largeur aussi petite qu'on le veut comprenant u' à son intérieur : plus précisément, dans la moitié de cette bande qui s'étend à l'infini vers la droite. Tout cela n'est que la traduction des propriétés de $\mathcal{F}$ développées au Chapitre IV. Au contraire, si u' n'appartient pas à $\mathcal{E}$, les valeurs de $\theta(u)$, dans les cercles de centre $u' + na$ et de rayon convenablement choisi, sont bornées dans leur ensemble ou convergent uniformément vers l'infini quand n croît indéfiniment; en général les valeurs de $\theta(u)$ dans ces cercles convergent vers une valeur limite constante ou tendent périodiquement vers un nombre fini de constantes. L'ensemble $\mathcal{E}$ est naturellement compris dans la bande de largeur finie parallèle à Ox considérée plus haut.

Si $\mathfrak{F}$ est partout discontinu, il en est de même de $\mathfrak{P}$; on peut en effet entourer un point z' de $\mathfrak{F}$ d'une courbe simple formée d'arcs de cercle ne contenant aucun point de $\mathfrak{F}$, et aussi voisine qu'on le veut de z'; il y a d'autre part correspondance continue entre un cercle du plan des u entourant un point-racine u' de l'équation $\theta(u) = z'$, et un élément d'aire du plan des z (ou un élément de surface de Riemann ramifiée en z'), de sorte qu'à la courbe entourant z' correspondra une courbe entourant u', infiniment voisine de ce dernier point et ne contenant aucun point de $\mathfrak{P}$; $\mathfrak{P}$ est donc partout discontinu. Réciproquement, si $\mathfrak{P}$ est partout discontinu, il en est de même de $\mathfrak{F}$. Si $\mathfrak{F}$ est continu, il en est de même de $\mathfrak{P}$: supposons qu'il en soit autrement et soit alors u' un point de $\mathfrak{P}$ qui n'est pas bien enchaîné dans $\mathfrak{P}$ avec le point à l'infini; l'ensemble $\mathfrak{P}'$ des points de $\mathfrak{P}$ qui sont bien enchaînés avec u' est un ensemble parfait bien enchaîné, à moins qu'il ne se réduise au seul point u'; $\mathfrak{P}'$ ne contient pas le point à l'infini, il est donc borné; tout ensemble contenant $\mathfrak{P}'$ et contenu dans $\mathfrak{P}$ est discontinu; l'ensemble $\mathfrak{P}''$ déduit de $\mathfrak{P}'$ par la translation $-pa$ jouit des mêmes propriétés; on peut choisir p de manière que $\mathfrak{P}''$ soit contenu dans Δ'. On peut entourer $\mathfrak{P}''$ d'une ligne simple contenue dans Δ', ne contenant aucun point de $\mathfrak{P}$ et dont tous les points sont aussi voisins qu'on le veut d'un point de $\mathfrak{P}''$ (¹). A cette courbe, il correspondra dans le plan des z une courbe tout entière à distance finie, ne contenant aucun point de $\mathfrak{F}$, mais limitant un domaine qui contient des points de $\mathfrak{F}$; ces points sont séparés du point à l'infini par une courbe ne contenant aucun point de $\mathfrak{F}$. $\mathfrak{F}$ ne serait donc pas continu.

La réciproque paraît plus difficile à établir; nous la laisserons de côté.

Prenons comme exemple le cas d'une substitution à cercle fondamental singulière et de deuxième espèce, laissant invariant le

---

(¹) ZORETTI, *Sur les fonctions analytiques uniformes qui possèdent un ensemble parfait discontinu de points singuliers* (*Journal de Liouville*, 1905, p. 10).

MONTEL, *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, Paris, Gauthier-Villars, 1910, p. 7.

demi-plan supérieur $J(z) \geqq 0$; par exemple

$$z_1 = R(z) = z + 1 - \frac{1}{z}.$$

Les fonctions $R_{-n}(z)$ étant réelles pour z réel, il en est de même de la branche de fonction $u = \Phi(z)$ dans le domaine D'; au segment $(x_0, -\infty)$ de l'axe réel contenu dans D' correspond le segment $(X_0, -\infty)$ de l'axe réel contenu dans Δ' et réciproquement; $\mathcal{F}$ étant un ensemble parfait et discontinu situé sur l'axe réel, $\mathcal{P}$ est aussi partout discontinu et sa section par Δ' n'a que des points réels; donc $\mathcal{P}$ tout entier n'a que des points réels. La bande du plan des u dans laquelle $\theta(u)$ ne tend pas uniformément vers l'infini en même temps que u est ici une bande aussi mince qu'on le veut comprenant l'axe réel; dans cette bande $\theta(u)$ est indéterminée à l'infini vers les x positifs et prend une infinité de fois toutes les valeurs; l'indétermination n'a lieu que dans les cercles de rayon ε ayant pour centres les points de l'ensemble discontinu $\mathcal{P}$. Les régions d'indétermination à l'infini ont donc une densité extrêmement faible.

Si l'on prend

$$z_1 = R(z) = z + \frac{1}{z} + 2,$$

substitution qui laisse invariante le demi-axe réel négatif et le domaine extérieur à ce demi-axe, on est conduit à une fonction $\theta(u)$ pour laquelle l'ensemble parfait $\mathcal{P}$ se réduit à l'axe réel.

80. Examinons maintenant le cas où il y a un point exceptionnel, c'est-à-dire où la fonction $\frac{1}{\theta(u) - c}$ est une fonction entière, $\varphi'(u)$ qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\varphi(u + a) = P[\varphi(u)],$$

où P est un polynome; $\varphi(u)$ tend alors vers une valeur finie et $\varphi'(u)$ vers zéro quand u tend vers l'infini en restant dans les domaines précédemment décrits. Je vais montrer que $\varphi(u)$ est de genre infini. Soit

$$P(z) = A z^d + A_1 z^{d-1} + \ldots + A_d.$$

Pour $|z| \geqq \rho$, on aura

$$|P(z)| > (|A| - \varepsilon)\rho^d,$$

ε étant aussi petit qu'on le veut pour ρ suffisamment grand. On peut donc supposer $\varepsilon < \frac{|A|}{2}$ et, par suite,

$$|P(z)| > \frac{|A|}{2}\rho^d.$$

Le second membre est $> \rho$ si $\rho > \left(\frac{2}{|A|}\right)^{\frac{1}{d-1}}$, ce que nous supposerons. On trouve alors, par récurrence, l'inégalité

$$|P_n(z)| > \left(\frac{|A|}{2}\right)^{1+d+\ldots+d^{n-1}} \rho^{d^n} = \left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{d^n-1}{d-1}} \rho^{d^n},$$

ou en posant

$$\left(\frac{|A|}{2}\right)^{\frac{1}{d-1}} = B \qquad (B\rho > 1),$$

$$|P_n(z)| > \frac{1}{B}(B\rho)^{d^n}.$$

Si $B < 1$, on a

$$|P_n(z)| > (B\rho^{d^n});$$

Si $B > 1$, il suffit de prendre $\rho > 1$ pour avoir

$$|P_n(z)| > \rho^{d^n}.$$

Dans tous les cas on a

$$|P_n(z)| > C^{d^n} \qquad (C > 1).$$

Soient $z_0 = \rho e^{i\beta}$ et u_0 une solution de l'équation $\theta(u) = z_0$. On aura

$$|\varphi(u_0 + na)| > C^{d^n}.$$

Soient r un nombre quelconque compris entre $|u_0 + na|$ et $|u_0 + (n+1)a|$. Le module maximum de $\varphi(u)$ pour $|u| = r$ est supérieur à C^{d^n}; d'ailleurs, n et r tendent vers l'infini en même temps et l'on a, pour n suffisamment grand,

$$n > kr \qquad \left(0 < k < \frac{1}{a}\right).$$

Donc finalement :

$$\mathfrak{M}(r) > C^{d^{kr}} = e^{\log C . d^{kr}} = e^{\log C . e^{(k \log d) r}} = e^{\log C . e^{mr}},$$

en posant $m = k \log d$. Pour r suffisamment grand, on aura aussi, si $0 < c < m$,

$$\mathfrak{M}(r) > e^{e^{cr}} \qquad (c > 0).$$

Le module maximum de $\varphi(u)$ croît donc plus vite qu'une exponentielle itérée : la fonction $\varphi(u)$ est de genre infini.

Je vais d'ailleurs montrer qu'on aura aussi

$$\mathfrak{M}(r) < e^{e^{c'r}}.$$

Soit u' le point de la circonférence de centre O et de rayon r où $\varphi(u)$ atteint son module maximum ; u' est situé sur l'arc compris entre les deux droites $Y = \pm A$ et qui coupe la partie positive de l'axe réel, du moins dès que r dépasse une certaine limite, car sur le reste de la circonférence $\varphi(u)$ tend uniformément vers α, affixe du point double de multiplicateur $+1$ que nous avons ramené à distance finie. En effectuant sur cet arc la translation $-na$ nous obtenons un arc compris dans le rectangle :

$$\begin{gathered} 0 \leqq X \leqq a, \\ -H \leqq Y \leqq +H. \end{gathered}$$

Dans ce rectangle, $\varphi(u)$ est inférieure en module à un nombre $M \geqq 1$. Soit K un nombre au moins égal à

$$|A| + |A_1| + \ldots + |A_{d-1}| + |A_d|,$$

et tel que $KM^d > 1$. En posant $z = \varphi(u)$, u étant un point du rectangle, on obtient :

$$\begin{aligned} &|z| < M, \\ &|z_1| < KM^d, \\ &|z_2| < K^{1+d} M^{d^2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &|z_n| < K^{1+d+\ldots+d^{n-1}} M^{d^n} < \left(K^{\frac{1}{d-1}} M\right)^{d^n} = L^{d^n}, \end{aligned}$$

$$|\varphi(u')| = |\varphi(u+na)| < L^{d^n},$$

$$r = |u + na| > na - |u'| \geqq na - \sqrt{a^2 + H^2};$$

$$n \leqq k'r \qquad (k' > 0)$$

On obtient finalement pour $\mathfrak{M}(r)$

$$\mathfrak{M}(r) < e^{\log L . d^{k'r}},$$

d'où l'on déduit

$$\mathfrak{M}(r) < e^{e^{c'r}}$$

Faisons voir maintenant que $\varphi(u)$ est non seulement de genre, mais d'ordre infini. Si z_0 est un nombre fini quelconque, et u' un point de l'ensemble parfait $\mathfrak{P}$, il existe des points racines de l'équation $\varphi(u) = z_0$ dans un cercle de centre $u' + pa$, et de rayon arbitraire l pourvu que l'entier p soit suffisamment grand; en effet, les valeurs de $\varphi(u)$ dans ce cercle sont représentées par un domaine du plan des z qui, pour une valeur convenable de p, couvre le cercle $\Gamma(|z| \leqq \rho)$. Nous supposerons ρ assez grand pour que $\rho > |z_0|$ et que d'autre part l'inégalité $|z| \geqq \rho$ entraîne $|P(z)| > |z|$.

Dans le cercle de centre $u'' = u' + pa$ et de rayon l, la fonction $\varphi(u)$ prend ainsi au moins une fois la valeur z_0. Dans le cercle de centre $u'' + a$ et de même rayon, elle prend au moins d fois la valeur z_0; car lorsque $z = \varphi(u)$ décrit Γ, $R(z)$ décrit un domaine multiple qui couvre d fois Γ; de même $R_2(z)$ prend d^2 fois, $R_n(z) d^n$ fois chaque valeur de Γ; $\varphi(u + na)$ prend ainsi $(1 + d + d_2 + \ldots + d^n)$ fois la valeur z_0 dans un cercle de rayon r tel que

$$r < |u''| + na + l, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{r}{n} = a.$$

On a donc $n > kr$ pour r suffisamment grand et le nombre $N(r)$ de racines de l'équation $\theta(u) = z_0$ dont le module est inférieur à r vérifie l'inégalité

$$N(r) \geqq 1 + d + \ldots + d^n > d^n > d^{kr} = e^{(k \log d) r}.$$

De plus, la série $\sum_p \frac{1}{r_p^\lambda}$ étendue à ces racines est divergente quel que soit λ. Nous avons en effet d^n racines dans le cercle de centre $u'' + na$ et de rayon l, racines dont le module est inférieur à $\frac{n}{k}$ et qui donne dans la série précédente une contribution supérieure à $\left(\frac{k}{n}\right)^\lambda d^n$, quantité infinie en même temps que n.

Revenons au cas d'une fonction méromorphe sans valeurs exceptionnelles. Dans ce cas, les valeurs de cette fonction $\theta(u)$ dans la suite des cercles considérés plus haut couvrent une fois, d fois, ..., d^n fois, ... le plan des z tout entier; le même raisonnement s'applique et la série $\sum \frac{1}{r^\lambda}$, étendue aux modules des zéros ou des pôles de la fonction $\theta(u) - z_0$ est divergente quel que soit λ. *Cette fonction est le quotient de deux fonctions entières qui sont toutes deux d'ordre infini* (1).

(1) Nous nous sommes placés dans le cas où $R''(\alpha)$ n'est pas nul au point

81. Telles sont les propriétés les plus importantes de ces fonctions méromorphes. Nous pourrions également rechercher les points critiques des fonctions inverses; cela se fait exactement de la même manière que dans le cas de la fonction de Poincaré et il n'y a pas lieu d'y insister.

Remarquons que lorsqu'on recherche quelles propriétés de la fonction de Poincaré, vérifiant l'équation fonctionnelle $\theta(\mathrm{S}\,u) = \mathrm{R}[\theta(u)]$ où $\mathrm{S} > 1$, correspondent à celles de l'ensemble parfait $\mathcal{J}$, on est conduit à des résultats qui, dans ce qu'ils ont d'essentiel, appartiennent à toutes les fonctions méromorphes ou entières ainsi que l'a montré M. Julia dans des recherches récentes. Les fonctions que nous venons d'étudier présentent au contraire des propriétés singulières; si l'on ramène en effet le point singulier à distance finie par le changement de la variable $w = \frac{1}{u}$, on obtient une fonction pour laquelle l'indétermination en ce point n'existe que suivant les chemins compris entre deux arcs de cercle tangents entre eux au point singulier et terminés en ce point. Des fonctions de ce genre ne seraient peut-être pas faciles à obtenir par les procédés généralement utilisés pour construire des fonctions méromorphes ou entières ayant des propriétés spéciales.

Il nous resterait à étudier les courbes analytiques invariantes par une transformation rationnelle et dont l'étude est intimement liée à celle des fonctions étudiées dans ce Chapitre. Nous espérons y revenir bientôt. Si incomplète que soit cette étude des transcendantes uniformes définies par des équations fonctionnelles itératives, nous pensons qu'elle suffit à montrer l'intérêt qui s'y attache; certaines de ces fonctions jouissant de propriétés simples et présentant des singularités d'une nature différente de celles rencontrées jusqu'ici mériteraient, semble-t-il, de prendre une place importante en Analyse, à côté des fonctions elliptiques et automorphes avec lesquelles elles ont d'ailleurs une parenté évidente.

---

double $\alpha[\mathrm{R}'(\alpha) = +1]$. Si $\mathrm{R}''(\alpha) = 0$, on est ramené au premier cas par l'emploi des deux représentations conformes auxiliaires utilisées préeédemment. On verra facilement que rien d'essentiel n'est changé aux résultats.