BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Sur quelques équations du second ordre qui admettent une transformation de Bäcklund

Bulletin de la S. M. F., tome 49 (1921), p. 1-65

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1921__49__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

SUR QUELQUES ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE QUI ADMETTENT UNE TRANSFORMATION DE BÄCKLUND;

PAR M. E. GOURSAT.

La recherche générale des équations aux dérivées partielles de Monge-Ampère, qui admettent une transformation de Bäcklund B_2 ou B_3, paraît difficile. Dans le travail ci-dessous, je me suis borne à déterminer certaines équations de cette espèce qui ne renferment que la dérivée du second ordre s et qui sont bilinéaires par rapport aux dérivées du premier ordre p et q. Les résultats, quoique très particuliers, ne me semblent pas dépourvus d'intérêt, et d'autre part la méthode suivie peut certainement s'appliquer à des équations d'une forme plus générale.

I.

1. Je rappellerai d'abord quelques résultats empruntés à un Mémoire récent *Sur le problème de Bäcklund* (1). Soit (S) un système de deux équations de Pfaff à six variables

$$(\mathrm{S})\qquad \begin{cases} \omega_1 = A_1\,dx_1 + A_2\,dx_2 + \ldots + A_6\,dx_6 = 0, \\ \omega_2 = B_1\,dx_1 + B_2\,dx_2 + \ldots + B_6\,dx_6 = 0, \end{cases}$$

dont les coefficients A_i, B_i sont des fonctions quelconques des six

---

(1) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. X, 1918.

variables $x_1, x_2, \ldots, x_6$; ce système peut *en général*, par un choix convenable des variables, être ramené, de deux façons différentes et de deux façons seulement, à la forme réduite

$$(1) \qquad \begin{cases} \Omega_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ \Omega_2 = X\,dx + Y\,dy + P\,dp + Q\,dq = 0, \end{cases}$$

X, Y, P, Q étant des fonctions de x, y, z, p, q et d'une sixième variable u. Considérons une intégrale M_2 du système (S) représentée par les quatre équations

$$z = f(x, y), \qquad p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad u = \varphi(x, y);$$

les deux fonctions $z = f$ et $u = \varphi$ des variables indépendantes x et y doivent satisfaire aux deux relations

$$(2) \qquad X + Pr + Qs = 0, \qquad Y + Ps + Qt = 0,$$

où

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

et l'élimination de u entre ces deux relations conduit à une équation aux dérivées partielles du second ordre E_1, à laquelle doit satisfaire la fonction $z = f(x, y)$,

$$(3) \qquad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Cette équation E_1 dont l'intégration est équivalente à celle du système (S), je l'appelle une *résolvante de première espèce du système* (S). D'après la façon même dont cette équation (3) a été obtenue, l'équation E_1 admet une famille de caractéristiques du premier ordre, et inversement toute équation du second ordre admettant une famille de caractéristiques du premier ordre est une résolvante de première espèce pour un système de deux équations de Pfaff. Si l'équation E_1 est une équation de Monge-Ampère, ayant ses deux familles de caractéristiques distinctes, elle est une résolvante de première espèce pour deux systèmes distincts de deux équations de Pfaff à six variables, chacun de ces systèmes correspondant à une des familles de caractéristiques.

Puisque le système (S) peut en général être ramené de deux façons différentes à la forme réduite (1), ce système admet en général deux résolvantes de première espèce (E_1), (E_2), qui ne sont d'ailleurs déterminées qu'à une transformation de contact près.

Dans ce qui va suivre, nous ne regarderons pas comme distinctes deux équations du second ordre qui se ramènent l'une à l'autre par une transformation de contact, ni comme distincts deux systèmes de deux équations de Pfaff qui peuvent se ramener l'un à l'autre par un changement de variables.

Les deux résolvantes de première espèce (E_1), (E_2) d'un système de Pfaff (S) se déduisent l'une de l'autre par une transformation de Bäcklund B_1, et inversement, deux équations du second ordre qui se déduisent l'une de l'autre par une transformation de Bäcklund B_1 sont les deux résolvantes de première espèce d'un système (S) de deux équations de Pfaff à six variables. Ces propositions donnent aisément la solution des principaux problèmes que l'on peut se proposer relativement aux transformations B_1; je n'y reviendrai pas.

2. L'intégration du système (S) peut, dans certains cas, se ramener d'une autre façon à l'intégration d'une équation de Monge-Ampère. Prenons une équation quelconque du système (S)

$$\Omega_1 = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0,$$

et supposons cette équation ramenée, par un choix convenable des variables, à une forme canonique

$$\Omega_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

les variables étant x, y, z, p, q, u. On peut former un système équivalent au système (S) en ajoutant à $\Omega_1 = 0$ une équation $\Omega_2 = 0$ ne renfermant pas dz. Si cette équation ne renferme pas du, le système (S) est ramené à la forme réduite (1); c'est le cas qui vient d'être examiné, et que nous pouvons écarter. Ce système (S) peut donc, d'une infinité de manières, être ramené à la forme

$$(4)\qquad \begin{cases} \Omega_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ \Omega_2 = du - X\,dx - Y\,dy - P\,dp - Q\,dq = 0, \end{cases}$$

X, Y, P, Q étant des fonctions des six variables x, y, z, p, q, u, qui peuvent être quelconques. Soit M_2 une multiplicité intégrale à deux dimensions de ce système, représentée par les quatre équations

$$z = f(x, y), \qquad p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad u = \varphi(x, y);$$

la fonction $u = \varphi(x, y)$ est une intégrale de l'équation aux différentielles totales

$$(5) \qquad du = (X + Pr + Qs)\,dx + (Y + Ps + Qt)\,dy,$$

où

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

La condition d'intégrabilité de cette équation renferme en général la fonction u; mais il peut se faire que, pour un choix particulier de l'équation $\Omega_1 = 0$, c'est-à-dire du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$, cette condition d'intégrabilité ne renferme pas u. C'est alors une équation de Monge-Ampère E′, à laquelle doit satisfaire la fonction $z = f(x, y)$. A toute intégrale de cette équation correspondent une infinité de fonctions $u = \varphi(x, y)$, dépendant d'une constante arbitraire, qui s'obtiennent par l'intégration d'une équation aux différentielles totales (5) complètement intégrable. Pour abréger, je dirai que E′ est une *résolvante de seconde espèce du système* (S).

Un système (S) n'admet pas forcément de résolvante de seconde espèce, mais il peut aussi en admettre plusieurs ou même une infinité. Une résolvante de première espèce et une résolvante de seconde espèce d'un même système de Pfaff (S) se déduisent l'une de l'autre par une transformation de Bäcklund B_2. Deux résolvantes de seconde espèce d'un même système de Pfaff se déduisent l'une de l'autre par une transformation de Bäcklund B_3. Les réciproques sont vraies.

3. Étant donnée une équation de Monge-Ampère E, la recherche des équations aux dérivées partielles du second ordre que l'on peut déduire de E par une transformation de Bäcklund se décompose d'après ce qui précède en deux problèmes distincts :

1° Trouver tous les systèmes distincts (S) de deux équations de Pfaff à six variables qui admettent l'équation E pour résolvante de seconde espèce;

2° Trouver toutes les résolvantes de seconde espèce de chacun de ces systèmes (S).

Je ne m'occuperai dans ce Mémoire que du premier de ces problèmes, pour une équation du second ordre

$$s + F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{6}$$

où la fonction F est bilinéaire en p et q. Quelle que soit la fonction $F(x, y, z, p, q)$, tout système de deux équations de Pfaff dont l'équation (6) est une résolvante de seconde espèce peut être ramené à la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ du - f(x, y, z, p, u)\,dx - \varphi(x, y, z, q, u)\,dy = 0, \end{array} \right. \tag{7}$$

et la condition d'intégrabilité de la seconde des équations (7)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)s + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}q - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}p + \frac{\partial f}{\partial u}\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial u}f = 0$$

doit être identique à l'équation (6), ce qui exige que l'on ait

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial p}\right)F + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}q - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}p + \frac{\partial f}{\partial u}\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial u}f = 0. \tag{8}$$

Si cette condition est satisfaite, il est évident qu'en posant

$$v = \theta(x, y, z, u)$$

et par suite

$$dv = \frac{\partial \theta}{\partial x}dx + \frac{\partial \theta}{\partial y}dy + \frac{\partial \theta}{\partial z}(p\,dx + q\,dy) + \frac{\partial \theta}{\partial u}du,$$

la seconde des équations (7) est remplacée par une équation de même forme

$$dv = f_1(x, y, z, p, v)\,dx + \varphi_1(x, y, z, q, v)\,dy \tag{9}$$

dont la condition d'intégrabilité est la même que pour la première. Mais les deux systèmes de Pfaff ainsi obtenus ne sont pas distincts, puisque l'on passe de l'un à l'autre par un simple changement de variables.

Lorsque les fonctions $f(x, y, z, p)$ et $\varphi(x, y, z, q)$ ne renferment pas la variable u, il est clair que la condition d'intégrabilité de l'équation

$$du = f(x, y, z, p)\,dx + \varphi(x, y, z, q)\,dy \tag{10}$$

ne renferme pas u, et conduit bien à une équation de la forme (6).

J'ai établi dans un Mémoire antérieur, *Sur quelques transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre* (1), les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation

$$Ss + R = 0, \tag{11}$$

où R et S ne dépendent que de x, y, z, p, q, provienne sans aucune réduction de la condition d'intégrabilité d'une équation de la forme (10). Il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$\tag{12} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 S}{\partial p\,\partial q} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 R}{\partial p^2} = \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{\partial S}{\partial p}\right), \quad \dfrac{\partial^2 R}{\partial q^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial S}{\partial q}\right), \quad \dfrac{\partial^2 R}{\partial p\,\partial q} = \dfrac{\partial S}{\partial z}, \\ \dfrac{d^2 S}{dx\,dy} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial R}{\partial p}\right) + \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{\partial R}{\partial q}\right), \\ \dfrac{d}{dx} = \dfrac{\partial}{\partial x} + p\dfrac{\partial}{\partial z}, \qquad \dfrac{d}{dy} = \dfrac{\partial}{\partial y} + q\dfrac{\partial}{\partial z}, \qquad \dfrac{d^2}{dx\,dy} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dy}\right). \end{array} \right.$$

Si ces conditions sont remplies, on peut trouver en effet, d'une infinité de manières, deux fonctions $f(x, y, z, p)$ et $\varphi(x, y, z, q)$ satisfaisant aux deux équations

$$\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q} = S, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} p = R.$$

Il existe évidemment une infinité de systèmes de deux fonctions $f(x, y, z, p)$, $\varphi(x, y, z, q)$, satisfaisant à la première de ces équations, puisque l'on a $\dfrac{\partial^2 S}{\partial p\,\partial q} = 0$. Si $f_1(x, y, z, p)$, $\varphi_1(x, y, z, q)$ forment un premier système de solutions, tous les autres sont de la forme

$$f = f_1 + Up + V, \qquad \varphi = \varphi_1 + Uq + W,$$

U, V, W étant des fonctions de x, y, z. En portant ces expres-

(1) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. IV, 1902 p. 299-340.

sions de f, φ dans la seconde condition, elle devient

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial x} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z}\right)p + \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x}\right)q = \mathfrak{R},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\mathfrak{R} = R - \left(\frac{df_1}{dy} - \frac{d\varphi_1}{dx}\right).$$

Or les dernières conditions (12) peuvent s'écrire, on le voit facilement,

$$(12') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial p^2} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial q^2} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial p\, \partial q} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{R}}{\partial z} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{R}}{\partial p}\right) + \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q}\right); \end{cases}$$

$\mathfrak{R}$ est donc une fonction linéaire de p et de q, et par suite on doit avoir

$$(13) \quad \begin{gathered} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial p}, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q}, \\ \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial x} = \mathfrak{R} - p\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial p} - q\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q}. \end{gathered}$$

La condition d'intégrabilité bien connue

$$(14) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial p\, \partial x} + \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial q\, \partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial p} + q\frac{\partial \mathfrak{R}}{dq} - \mathfrak{R}\right) = 0$$

est précisément identique à la dernière des conditions (12).

On peut donc trouver une infinité de solutions des équations (13). On peut prendre par exemple

$$U_1 = 0, \qquad V_1 = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q}\, dz + \psi(x, y), \qquad W_1 = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial p}\, dz + \pi(x, y),$$

les fontions ψ et π satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \pi}{\partial x} = \left(\mathfrak{R} - p\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial p} - q\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q}\right)_{z = z_0}.$$

Tout autre système de solutions des équations (13) est de la forme

$$U = U_1 + \frac{\partial \theta}{\partial z}, \qquad V = V_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x}, \qquad W = W_1 + \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

L'équation $Ss + R = o$ s'obtient donc comme condition d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales

$$du = \left[f_1 + V_1 + \frac{\partial\theta}{\partial x} + p\left(U_1 + \frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\right] dx$$
$$+ \left[\varphi_1 + W_1 + \frac{\partial\theta}{\partial y} + q\left(U_1 + \frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\right] dy;$$

quelle que soit la fonction $\theta(x, y, z)$, on voit que le système de Pfaff dont l'équation $Ss + R = o$ est une résolvante de seconde espèce est toujours le même

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$du = [f_1 + V_1 + U_1 p]\,dx + [\varphi_1 + W_1 + U_1 q]\,dy.$$

Pour qu'une équation

$$s + F(x, y, z, p, q) = o \tag{15}$$

puisse être obtenue comme condition d'intégrabilité d'une équation aux différentielles totales de la forme (10), il faut et il suffit que l'on puisse trouver un facteur $\lambda(x, y, z, p, q)$ tel qu'en posant

$$S = \lambda(x, y, z, p, q), \qquad R = \lambda F,$$

les conditions (12) soient satisfaites. On a ainsi un système de cinq équations aux dérivées partielles du second ordre auxquelles doit satisfaire la fonction λ. Toute solution de ces cinq équations est un *multiplicateur* pour l'équation. D'après ce qu'on vient de rappeler, à tout multiplicateur correspond un système de Pfaff et un seul dont l'équation (15) est une résolvante de seconde espèce.

Dans le travail cité plus haut (p. 329 et suiv.), j'ai déterminé tous les multiplicateurs pour une équation complètement linéaire

$$s + ap + bq + cz = o,$$

a, b, c ne dépendant que de x, y. Je reprends d'abord le même problème pour les équations plus générales où s est une fonction bilinéaire à coefficients quelconques des dérivées du premier ordre p, q.

II.

4. Les équations bilinéaires en p et q

$$s + g(x, y, z)pq + a(x, y, z)p + b(x, y, z)q + c(x, y, z) = o \tag{16}$$

conservent la même forme quand on prend pour inconnue une fonction quelconque $Z = \theta(x, y, z)$, sans changer les variables indépendantes, ou quand on prend pour variables nouvelles $x' = \varphi(x)$, $y' = \psi(y)$, les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ étant arbitraires. Dans l'équation obtenue en posant $Z = \theta(x, y, z)$, le coefficient de PQ est

$$\left(g\frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right) \times \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^{-3};$$

on peut donc toujours faire disparaître le terme en pq, en prenant pour inconnue une intégrale $Z = \theta(x, y, z)$ de l'équation

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = e^{\int g\,dz}.$$

Si par exemple $g = 0$, l'équation conserve la même forme quand on prend pour inconnue une fonction linéaire quelconque de z,

$$Z = \varphi(x, y) + z\psi(x, y).$$

Cherchons dans quels cas l'équation (16) est intégrable par la méthode de Monge. Pour que les équations différentielles

$$dx = 0, \qquad dz = q\,dy, \qquad dp + (gpq + ap + bq + c)\,dy = 0$$

de l'un des systèmes de caractéristiques admettent la combinaison intégrable $dF = 0$, la fonction F doit satisfaire aux deux relations

$$\frac{\partial F}{\partial q} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}q - \frac{\partial F}{\partial p}(gpq + ap + bq + c) = 0,$$

et par suite aux deux relations

$$\frac{\partial F}{\partial y} - (ap + c)\frac{\partial F}{\partial p} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} - (gp + b)\frac{\partial F}{\partial p} = 0.$$

Or ce système ne peut admettre d'autre intégrale que l'intégrale évidente $F = x$, à moins d'être un système complet, ce qui exige que l'on ait

(17) $$\frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial y}, \qquad \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial y} + gc - ab = 0.$$

Si l'on a fait disparaître le terme en pq, comme il vient d'être dit, on a $g = 0$, et les conditions précédentes deviennent

$$\frac{\partial a}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial b}{\partial y} + ab.$$

Le coefficient a ne dépend donc pas de z; on peut alors, en changeant z en $\lambda(x, y)z$, faire disparaître ce coefficient. Si $a = 0$. il reste une seule condition $\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial b}{\partial y}$, qui exprime que b et c sont les dérivées partielles d'une fonction $U(x, y, z)$ par rapport aux variables y, z, et l'équation (16) est ramenée à la forme

$$s + \frac{\partial U}{\partial z} q + \frac{\partial U}{\partial y} = 0;$$

on voit immédiatement qu'elle admet l'intégrale intermédiaire

$$p + U(x, y, z) = X.$$

On voit de même que si les équations différentielles du second système de caractéristiques admettent une combinaison intégrable autre que $dy = 0$, l'équation peut être ramenée à la forme

$$s + \frac{\partial V}{\partial z} p + \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

et admet l'intégrale intermédiaire

$$q + V(x, y, z) = Y.$$

Dans le cas particulier d'une équation de la forme $s + gpq = 0$, où $a = b = c = 0$, les conditions (17) se réduisent à une seule $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$. L'équation $s + g(x, z)pq = 0$ admet en effet l'intégrale intermédiaire

$$\operatorname{Log} p + \int g(x, z)\, dz = X.$$

Pour la recherche des multiplicateurs d'une équation de la forme (16), nous pouvons évidemment supposer que l'on a fait disparaître le coefficient de pq par un changement d'inconnue, et prendre l'équation sous la forme réduite

$$s + ap + bq + c = 0. \tag{18}$$

Si, pour cette équation réduite, le coefficient a est indépendant de z, on peut aussi supposer que l'on a fait disparaître ce coefficient. Remarquons aussi que, si l'équation (16) admet un multiplicateur $\mu(x, y)$, indépendant de z, p, q, c'est-à-dire si l'on peut trouver deux fonctions $f(x, y, z, p)$ et $\varphi(x, y, z, q)$ telles que l'on ait identiquement

$$\mu(x, y)(s + gpq + ap + bq + c) = \frac{df}{dy} - \frac{d\varphi}{dx} + \left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) s,$$

l'équation

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\, \partial y} + GPQ + \ldots = 0$$

que l'on déduit de l'équation (16) en prenant pour inconnue $Z = \mu z$ admet pour multiplicateur l'unité.

5. Ces remarques étant faites, cherchons à déterminer les multiplicateurs $\lambda(x, y, z, p, q)$ pour l'équation réduite

$$s + ap + bq + c = 0. \tag{18}$$

On doit poser, dans les équations générales (12),

$$S = \lambda, \qquad R = \lambda(ap + bq + c).$$

Les conditions obtenues sont linéaires et homogènes par rapport à la fonction inconnue λ et à ses dérivées; la somme d'un nombre quelconque de multiplicateurs est donc aussi un multiplicateur, résultat qu'il était facile de prevoir *a priori*.

La première des conditions (12), $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p\, \partial q} = 0$, montre que tout multiplicateur est de la forme

$$\lambda = F(x, y, z, p) + \Phi(x, y, z, q).$$

La condition

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial^2 R}{\partial p\, \partial q}$$

donne ensuite

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = b\frac{\partial F}{\partial p} + a\frac{\partial \Phi}{\partial q} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial F}{\partial z} - b\frac{\partial F}{\partial p} = a\frac{\partial \Phi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial z};$$

la valeur commune de ces deux expressions est forcément indépendante de p et de q. C'est donc une fonction $\mu(x, y, z)$ des variables x, y, z que l'on peut supposer nulle; il suffit en effet de remplacer F par $F+\int_{z_0}^{z}\mu(x,y,z)\,dz$ et Φ par $\Phi-\int_{z_0}^{z}\mu(x,y,z)\,dz$, ce qui ne change pas la somme $F+\Phi=\lambda$. On peut donc toujours supposer que l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial z}-b\frac{\partial F}{\partial p}=0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z}-a\frac{\partial \Phi}{\partial q}=0;$$

si nous posons

$$a=\frac{\partial \alpha}{\partial z}, \qquad b=\frac{\partial \beta}{\partial z}, \tag{19}$$

tout multiplicateur λ est donc de la forme

$$\lambda=F(x,y,u)+\Phi(x,y,v), \tag{20}$$

où

$$u=p+\beta, \qquad v=q+\alpha.$$

Remarquons que lés fonctions α et β ne sont pas complètement déterminées par les équations (19), car on peut ajouter à chacune d'elles une fonction arbitraire de x et de y, mais il vaut mieux en vue de la suite ne pas préciser davantage, au moins pour le moment.

La condition

$$\frac{\partial^2 R}{\partial p^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)$$

nous donne ensuite, en remplaçant a par $\frac{\partial \alpha}{\partial z}$, et b par $\frac{\partial \beta}{\partial z}$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}p+\frac{\partial \beta}{\partial z}q+c\right)+2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial \alpha}{\partial z}=\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial \beta}{\partial z}q+\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial \beta}{\partial y},$$

ce qu'on peut écrire, en remplaçant p par $u-\beta$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}u+c-\frac{\partial \beta}{\partial y}-\beta\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)+2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial \alpha}{\partial z}=\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial y},$$

ou encore

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z}\left(u\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+2\frac{\partial F}{\partial u}\right)+\left(c-\frac{\partial \beta}{\partial y}-\beta\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial y}. \tag{21}$$

Nous avons plusieurs cas à examiner.

1° Pour que les coefficients des dérivées de F soient indépendants de z, il faut que l'on ait

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} = 0, \qquad \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial \beta}{\partial z} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial a}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial y} - ab = 0.$$

L'équation (18) admet alors, comme on l'a vu au paragraphe précédent, une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire. Ce cas sera examiné plus loin.

2° Supposons

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} = 0, \qquad \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial \beta}{\partial z} \neq 0;$$

en différentiant les deux membres de l'équation (21) par rapport à z, et tenant compte de la condition $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$, on voit que l'on doit avoir $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0$, de sorte que F doit être une fonction linéaire de u

$$F = \rho u + \mu.$$

L'équation (21) devient alors

$$2a\rho = \frac{\partial \rho}{\partial y},$$

et l'équation (21) admet une infinité d'intégrales qui ne dépendent que de x, y, u

$$F = X u e^{2\int_{y_0}^{y} a\, dy} + \mu(x, y), \tag{22}$$

X étant une fonction arbitraire de x, $\mu(x, y)$ une fonction arbitraire des variables x et y.

3° Supposons

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} = \frac{\partial a}{\partial z} \neq 0.$$

En différentiant les deux membres de l'équation (21) par rapport à z, il vient

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}\left(u\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\frac{\partial F}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial y} - ab - \beta\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0.$$

Si le rapport des coefficients de $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$ et de $u\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+2\frac{\partial F}{\partial u}$ n'est pas indépendant de z, il faudra que l'on ait

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}=0, \qquad u\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+2\frac{\partial F}{\partial u}=0,$$

et par suite $\frac{\partial F}{\partial u}=0$. L'équation (21) n'admet donc que la solution $F=\mu(x, y)$, qui soit indépendante de z. Pour qu'il y ait d'autres solutions, il faut donc que le rapport

$$\frac{\frac{\partial}{\partial z}\left(c-\frac{\partial\beta}{\partial y}-\beta\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)}{\frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}}$$

soit égal à une fonction $H(x, y)$ indépendante de z. On a donc

$$c-\frac{\partial\beta}{\partial y}=\frac{\partial\alpha}{\partial z}(\beta+H)+K(x, y).$$

Comme on peut augmenter β d'une fonction quelconque des variables x, y sans changer l'équation (16), on peut supposer que l'on a $H=0$, et la relation précédente devient

$$c-\frac{\partial\beta}{\partial y}-\beta\frac{\partial\alpha}{\partial z}=K(x, y)$$

et la relation (21) se décompose en deux équations distinctes, puisque $\frac{\partial\alpha}{\partial z}$ dépend de z,

$$u\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+2\frac{\partial F}{\partial u}=0,$$

$$K(x, y)\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial y}.$$

La première montre que $\frac{\partial F}{\partial u}$ est de la forme $\frac{\rho(x, y)}{u^2}$, et la dernière devient

$$\frac{-2K(x, y)}{u^3}\rho=\frac{\frac{\partial\rho}{\partial y}}{u^2};$$

il faut donc que l'on ait $K(x, y)=0$, $\rho=X$. On en conclut que l'équation (21) admet une solution de la forme

$$F = \frac{X}{u} + \mu(x, y),$$

si les deux équations

$$\frac{\partial\beta}{\partial z} = b, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial y} = c - a\beta$$

admettent une solution commune en β. Elles ne peuvent former un système complètement intégrable, car la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial z}\beta - ab$$

ne peut être vérifiée identiquement que si l'on a

$$\frac{\partial a}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial z} - ab;$$

c'est le cas que nous avons réservé, où l'équation (16) admet une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire.

En résumé, lorsque les équations différentielles du système de caractéristiques,

$$dx = 0, \qquad dz = q\,dy, \qquad dp + (ap + bq + c)\,dy = 0$$

n'admettent pas d'autre combinaison intégrable que $dx = 0$, la fonction

$$F(x, y, u) = F[x, y, p + \beta(x, y, z)]$$

a l'une des formes suivantes :

(A) $$F = \mu(x, y),$$

(B) $$F = X u e^{\int_{y_0}^{y} 2a\,dy} + \mu(x, y),$$

(C) $$F = \frac{X}{u} + \mu(x, y);$$

la première convient au cas général où les coefficients a, b, c et leurs dérivées ne vérifient aucune condition particulière d'égalité. La forme (B) convient au cas où $\frac{\partial a}{\partial z} = 0$, et la forme (C) au cas où, $\frac{\partial a}{\partial z}$ n'étant pas nul, les deux équations

$$\frac{\partial\beta}{\partial z} = b, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial y} = c - a\beta \tag{23}$$

admettent une solution commune en β.

On verrait de même que, lorsque les équations différentielles du second système de caractéristiques n'admettent pas d'autre combinaison intégrable que $dy = 0$, la fonction

$$\Phi(x, y, v) = \Phi(x, y, q + \alpha)$$

a l'une des formes suivantes :

$$\Phi = \mu(x, y), \tag{A'}$$

$$\Phi = \mathrm{Y} v e^{\int_{x_0}^{x} 2b\,dx} + \mu(x, y), \tag{B'}$$

$$\Phi = \frac{\mathrm{Y}}{v} + \mu(x, y). \tag{C'}$$

La forme (A') convient au cas général, la forme (B') au cas où $\frac{\partial b}{\partial z}$ est nul, et la forme (C') au cas où, $\frac{\partial b}{\partial z}$ n'étant pas nul, les deux équations

$$\frac{\partial\alpha}{\partial z} = a, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial x} = c - b\alpha \tag{23'}$$

admettent une solution commune en α.

Il nous reste à associer de toutes les manières possibles les diverses formes des fonctions F et Φ, en tenant compte de la dernière équation de condition (12), dont on ne s'est pas servi jusqu'ici.

6. Nous allons d'abord chercher dans quels cas l'équation (16) admet un multiplicateur de la forme

$$\lambda = \frac{\mathrm{X}}{p + \beta} + \frac{\mathrm{Y}}{q + \alpha} + \mu(x, y), \qquad \mathrm{XY} \neq 0; \tag{I}$$

il faut pour cela que le système (23) admette une solution en β, et le système (23') une solution en α. Il est facile de voir quelle est la signification de ces conditions. Des équations (23) on tire

$$b = \frac{\partial\beta}{\partial z}, \qquad c = \frac{\partial\beta}{\partial y} + a\beta,$$

et l'équation (18) devient

$$(24)\qquad s + \frac{\partial\beta}{\partial z} q + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \alpha(p + \beta) = 0;$$

elle admet donc toutes les intégrales de l'équation du premier ordre

$$(25)\qquad p + \beta(x, y, z) = 0.$$

Réciproquement, si l'équation (18) admet toutes les intégrales de l'équation du premier ordre (25), elle doit être vérifiée identiquement quand on y remplace p par $-\beta(x, y, z)$ et s par $-\frac{\partial\beta}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z} q$; cette équation est donc de la forme (24).

Si les équations (23′) sont également compatibles en α, l'équation (18) admet aussi toutes les intégrales de l'équation du premier ordre

$$(25')\qquad q + \alpha(x, y, z) = 0.$$

Cela posé, des relations (23) et (23′) on déduit la nouvelle relation

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial z} = \frac{\partial\beta}{\partial y} + \beta\frac{\partial\alpha}{\partial z},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\partial(-\alpha)}{\partial x} + (-\beta)\frac{\partial(-\alpha)}{\partial z} = \frac{\partial(-\beta)}{\partial y} + (-\alpha)\frac{\partial(-\beta)}{\partial z},$$

et qui montre que l'équation

$$dz + \alpha\, dy + \beta\, dx = 0$$

est complètement intégrable. On a donc pour α et β des expressions de la forme

$$\alpha = \frac{\partial U}{\partial y} : \frac{\partial U}{\partial z}, \qquad \beta = \frac{\partial U}{\partial x} : \frac{\partial U}{\partial z},$$

et l'équation (18) admet toutes les intégrales des deux équations du premier ordre

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} p = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} q = 0,$$

c'est-à-dire toutes les fonctions $z(x, y)$ qui satisfont à l'une des relations

$$U(x, y, z) = \psi(x), \qquad U(x, y, z) = \pi(y),$$

les fonctions ψ et π étant arbitraires. Si l'on prend pour inconnue la fonction $U(x, y, z)$ elle-même, l'équation obtenue doit être vérifiée pourvu que l'une des dérivées du premier ordre de la fonction inconnue soit nulle. Cette équation sera donc de la forme

$$(26) \qquad s + g(x, y, z)pq = 0,$$

et par conséquent *toute équation* (18) *qui admet un multiplicateur de la forme* (I) *peut être ramenée, par un changement d'inconnue, à la forme réduite* (26).

Il est facile de trouver directement les multiplicateurs pour une équation de cette forme. On a en effet dans ce cas

$$S = F(x, y, z, p) + \Phi(x, y, z, q), \qquad R = g(F + \Phi)pq.$$

La condition $\frac{\partial^2 R}{\partial p^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)$ est ici

$$gq\left(p\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} + 2\frac{\partial F}{\partial p}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial p} + \frac{\partial^2 F}{\partial z\, \partial p}q;$$

F ne contenant pas q, il faut que l'on ait $\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial p} = 0$, c'est-à-dire que $\frac{\partial F}{\partial p}$ ne contienne pas y. Il en est de même de $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial z\, \partial p}$, et la relation

$$g\left(p\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} + 2\frac{\partial F}{\partial p}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial z\, \partial p}$$

donnera pour g une valeur indépendante de y, à moins que l'on ait à la fois

$$p\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} + 2\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial z\, \partial p} = 0$$

La première hypothèse est à rejeter, car l'équation (26) serait alors intégrable par la méthode de Monge (n° 4). Il s'ensuit que F est de la forme

$$F = \frac{X}{p} + f_1(x, y, z);$$

on verrait de même que Φ est de la forme

$$\Phi = \frac{Y}{q} + \varphi_1(x, y, z),$$

et par suite un multiplicateur de l'équation (26) est de la forme

$$(I') \qquad \lambda = \frac{X}{p} + \frac{Y}{q} + \rho(x, y, z).$$

On a donc

$$R = Xgq + Ygp + \rho gpq$$

et la condition $\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial^2 R}{\partial p \, \partial q}$ donne ensuite

$$(27) \qquad \rho g = \frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

Enfin la dernière des conditions (12) se réduit, tous calculs faits, à la forme simple

$$(28) \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \, \partial y} = X \frac{\partial^2 \log \rho}{\partial y \, \partial z} + Y \frac{\partial^2 \log \rho}{\partial x \, \partial z}.$$

Il suffira donc, pour obtenir une équation (26) ayant un multiplicateur de la forme voulue, de prendre pour ρ une intégrale de l'équation (28), X et Y étant des fonctions données de x et de y respectivement, puis de prendre pour g la dérivée logarithmique

$$g = \frac{\partial \log \rho}{\partial z}.$$

Il est facile de vérifier ce résultat. Considérons en effet l'équation aux différentielles totales

$$(29) \qquad du = [X \log p + \rho(x, y, z) p + \rho_1] \, dx - (Y \log q + \rho_2) \, dy$$

dont la condition d'intégrabilité est

$$X \frac{s}{p} + \rho s + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial z} q\right) p + \frac{\partial \rho_1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_1}{\partial z} q + Y \frac{s}{q} + \frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} p = 0.$$

Pour que cette condition soit identique à l'équation (26), il faut que l'on ait

$$\rho g = \frac{\partial \rho}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial y} - Y g + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \rho_1}{\partial z} - X g = 0, \qquad \frac{\partial \rho_1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = 0.$$

On en tire

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x\, \partial y} = \mathrm{Y}\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial x\, \partial z}, \qquad \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial x\, \partial z} = -\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial y\, \partial z} = -\mathrm{X}\frac{\partial g}{\partial y}$$

et enfin

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x\, \partial y} = \mathrm{Y}\frac{\partial^2 \log \rho}{\partial x\, \partial z} + \mathrm{X}\frac{\partial^2 \log \rho}{\partial y\, \partial z}.$$

On détermine ensuite ρ_1 et ρ_2 au moyen des équations compatibles

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial z} = \mathrm{Y}g - \frac{\partial \rho}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \rho_1}{\partial z} = \mathrm{X}g, \qquad \frac{\partial \rho_1}{\partial y} = -\frac{\partial \rho_2}{\partial x}.$$

Remarque. — En prenant pour variables indépendantes

$$x' = \int \mathrm{X}\, dx \quad \text{et} \quad y' = \int \mathrm{Y}\, dy,$$

l'équation (28) prend la forme

$$(28') \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \log \rho}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial^2 \log \rho}{\partial x\, \partial z}.$$

On obtient des intégrales ne dépendant que de z et de $x + y = t$, en intégrant l'équation à deux variables

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = 2\frac{\partial^2 \log \rho}{\partial t\, \partial z},$$

qui admet l'intégrale intermédiaire

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - 2\frac{\partial \log \rho}{\partial z} = \mathrm{Z}.$$

7. Pour que l'équation (18) admette un multiplicateur de la forme

$$(\mathrm{II}) \qquad \lambda = \frac{\mathrm{X}}{p+\beta} + \mathrm{Y}(q+\alpha)e^{2\int_{x_0}^{x} b\, dx} + \mu(x, y), \qquad \mathrm{XY} \neq 0,$$

il faut d'abord que b soit indépendant de z, et de plus que l'équation (18) admette toutes les intégrales de l'équation du premier ordre $p + \beta(x, y, z) = 0$. Si b est indépendant de z, on peut d'abord, en changeant z en $\mathrm{K}(x, y)z$, remplacer l'équation (18) par une autre équation admettant un multiplicateur de la même forme, pour laquelle on aura $b = 0$. Cette transformaion étant effectuée, on a $\frac{\partial \beta}{\partial z} = 0$, et l'équation est de la forme

$$s + \frac{\partial \beta(x, y)}{\partial y} + a[p + \beta(x, y)] = 0;$$

enfin, si l'on prend pour inconnue $z + \int \beta(x, y)\,dx$ au lieu de z, on voit que *toute équation* (18) *admettant un multiplicateur de la forme* (II) *peut être ramenée à la forme réduite*

$$s + ap = 0. \tag{30}$$

D'après l'étude qui vient d'être faite, tout multiplicateur de cette équation est de la forme

$$\lambda = \frac{X}{p} + Y(q + \alpha) + \mu(x, y), \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial z} = a.$$

Il reste à déterminer la fonction $\mu(x, y)$ de façon à satisfaire à la dernière des conditions (12). Nous emploierons pour cela la méthode rappelée à la fin du n° 3. Nous avons, dans le cas actuel,

$$S = \frac{X}{p} + Y(q + \alpha) + \mu, \qquad R = Xa + Yap(q + \alpha) + \mu ap;$$

nous pouvons poser

$$f_1 = X \log p + \mu p, \qquad \varphi_1 = -Y\frac{q^2}{2} - Y\alpha q,$$

et il vient

$$\mathfrak{R} = R - \frac{df_1}{dy} + \frac{d\varphi_1}{dx} = Xa + \left(Ya\alpha + \mu a - \frac{\partial \mu}{\partial y}\right)p - \frac{Y\,\partial \alpha}{\partial x}q,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial p} = Ya\alpha + \mu a - \frac{\partial \mu}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q} = -Y\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \qquad \mathfrak{R} - p\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial p} - q\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q} = Xa,$$

et la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial x\,\partial p} + \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial y\,\partial q} + \frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial p} + q\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q} - \mathfrak{R}\right) = 0,$$

qui est identique à la dernière des conditions (12), devient

$$-\frac{\partial^2 \mu}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial(\mu a)}{\partial x} + Y\frac{\partial(a\alpha)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(Y\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right) - X\frac{\partial a}{\partial z} = 0, \tag{31}$$

où $a = \frac{\partial \alpha}{\partial z}$.

Si la fonction $\mu(x, y)$ satisfait à cette condition, on peut, d'une infinité de manières, déterminer deux fonctions $\mu_1(x, y, z)$ et $\mu_2(x, y, z)$ telles que la condition d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales

$$du = [\mathrm{X}\log p + \mu p + \mu_1(x, y, z)]\,dx - \left[\mathrm{Y}\frac{q^2}{2} + \mathrm{Y}\alpha q + \mu_2(x, y, z)\right]dy$$

soit identique à l'équation (30). Il faut et il suffit pour cela que μ_1 et μ_2 vérifient les relations

$$\frac{\partial\mu_2}{\partial z} = -\frac{\partial\mu}{\partial y} + a\mu + a\mathrm{Y}\alpha, \qquad \frac{\partial\mu_1}{\partial z} = -\mathrm{Y}\frac{\partial\alpha}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\mu_1}{\partial y} + \frac{\partial\mu_2}{\partial x} = a\mathrm{X},$$

qui sont compatibles d'après l'équation (31).

Il est évident que si le coefficient a est une fonction quelconque des variables x, y, z, l'équation (31) n'admet pas en général d'intégrale $\mu(x, y)$ indépendante de z. Pour obtenir des équations (30) admettant un multiplicateur de la forme voulue, on pourra se donner arbitrairement les fonctions X, Y, $\mu(x, y)$ et prendre pour α une intégrale de l'équation (31), dépendant de la variable z.

En échangeant le rôle des variables x et y, on déterminerait de même les équations qui admettent un multiplicateur de la forme

$$\lambda = \frac{\mathrm{Y}}{q+\alpha} + \mathrm{X}(p+\beta)e^{2\int_{y_0}^{y} a\,dy} + \mu(x, y);$$

ces équations peuvent, par un changement linéaire d'inconnue, être ramenées à la forme réduite

$$(30') \qquad s + b(x, y, z)q = 0.$$

8. Toute équation (18), qui admet un multiplicateur de la forme

$$(\mathrm{III}) \qquad \lambda = \frac{\mathrm{X}}{p+\beta} + \mu(x, y), \qquad \mathrm{X} \neq 0,$$

admet aussi (n° 6) toutes les intégrales de l'équation $p + \beta = 0$. Soit $z = f(x, y, \mathrm{Y})$ l'intégrale générale de cette équation du premier ordre; l'équation du second ordre obtenue en posant

$$z = f(x, y, \mathrm{Z})$$

doit admettre toutes les intégrales de l'équation $\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x} = 0$. Nous pouvons donc supposer l'équation (18) ramenée à la forme

$$s + gpq + ap = 0, \tag{32}$$

et l'on voit aisément que le multiplicateur de la nouvelle équation doit être de la forme

$$\lambda = \frac{A}{p} + \rho(x, y, z).$$

On a donc, dans ce cas,

$$S = \frac{A}{p} + \rho, \qquad R = Agq + Aa + g\rho pq + a\rho p,$$

et l'on peut poser

$$f_1 = A \log p + \rho p, \qquad \varphi_1 = 0,$$

$$\mathcal{R} = R - \frac{df_1}{dy} = Agq + Aa + g\rho pq + a\rho p - \frac{dA}{dy}\log p - p\frac{d\rho}{dy}.$$

Pour que $\mathcal{R}$ soit une fonction linéaire de p, q, on doit avoir

$$\frac{dA}{dy} = 0 \quad \text{ou} \quad A = X, \qquad g\rho - \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0,$$

et il reste

$$\mathcal{R} = \left(-\frac{\partial \rho}{\partial y} + a\rho\right)p + Xgq + Xa;$$

la dernière des conditions (12) devient

$$-\frac{\partial^2 \rho}{\partial x\, \partial y} + X\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial (a\rho)}{\partial x} - X\frac{\partial a}{\partial z} = 0, \qquad \text{où} \qquad g = \frac{\partial \log \rho}{\partial z}. \tag{33}$$

Les deux fonctions $a(x, y, z)$ et $\rho(x, y, z)$ sont liées par la seule relation (33), et l'on peut choisir l'une d'elles arbitrairement pour avoir une équation (32) admettant un multiplicateur

$$\lambda = \frac{X}{p} + \rho(x, y, z). \tag{III'}$$

Inversement, la condition d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales

$$du = [X \log p + \rho p + \rho_1]\, dx - \rho_2\, dy$$

est identique à l'équation (32) pourvu que l'on ait

$$g = \frac{\partial \log \rho}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \rho_1}{\partial z} = gX, \qquad \frac{\partial \rho_2}{\partial z} = a\rho - \frac{\partial \rho}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \rho_1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = Xa.$$

Les trois dernières équations sont compatibles en vertu de la condition (33).

On déterminerait de même, en échangeant le rôle des variables x et y, les équations de la forme (18) qui admettent un multiplicateur

$$\frac{Y}{q+\alpha}+\mu(x,y), \qquad Y \neq 0.$$

9. Si l'équation (18) admet un multiplicateur linéaire en p et en q,

$$\text{(IV)} \qquad \lambda = X(p+bz)e^{2\int_{y_0}^{y} a\,dy} + Y(q+az)e^{2\int_{x_0}^{x} b\,dx} + \mu(x,y), \quad XY \neq 0,$$

a et b sont indépendants de z, et nous écrirons ce multiplicateur, pour simplifier les formules,

$$\lambda = U(p+bz)+V(q+az)+\mu(x,y),$$

U et V étant des fonctions de x et de y qui satisfont aux deux conditions

$$(34) \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 2aU, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = 2bV.$$

Nous avons dans ce cas

$$\begin{aligned} R = {} & aUp^2 + bVq^2 + (aV+bU)pq + (cU+a\mu)p + (cV+b\mu)q \\ & + c\mu + (aV+bU)z(ap+bq+c), \end{aligned}$$

et nous pouvons prendre

$$f_1 = \frac{Up^2}{2} + (aV+bU)pz + \mu p, \qquad \varphi_1 = -V\frac{q^2}{2};$$

il vient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= R - \frac{df_1}{dy} + \frac{d\varphi_1}{dx} \\ &= \left[cU + a\mu + az(aV+bU) - z\frac{\partial}{\partial y}(aV+bU) - \frac{\partial\mu}{\partial y}\right]p \\ &\quad + [cV + b\mu + bz(aV+bU)]q + c\mu + cz(aV+bU), \end{aligned}$$

et la dernière condition (12) devient

$$\begin{aligned} (35) \qquad & \frac{\partial}{\partial x}[cU + a\mu + az(aV+bU)] - z\frac{\partial^2(aV+bU)}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\mu}{\partial x\,\partial y} \\ & + \frac{\partial}{\partial y}[cV + b\mu + bz(aV+bU)] - \mu\frac{\partial c}{\partial z} - c(aV+bU) \\ & - z\frac{\partial c}{\partial z}(aV+bU) = 0. \end{aligned}$$

En différentiant par rapport à z, on obtient l'équation

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}[a(a\mathrm{V}+b\mathrm{U})] &+ \frac{\partial}{\partial y}[b(a\mathrm{V}+b\mathrm{U})] - \frac{\partial^2(a\mathrm{V}+b\mathrm{U})}{\partial x\,\partial y}\\ &+ \frac{\partial^2(c\mathrm{U})}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2(c\mathrm{V})}{\partial y\,\partial z} - (a\mathrm{V}+b\mathrm{U})\frac{\partial^2(cz)}{\partial z^2} - \mu\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = 0,\end{aligned}$$

qui donne une valeur unique de μ si $\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$ n'est pas nul. Cette valeur de μ doit être indépendante de x et de y, et satisfaire à l'équation précédente (35).

Le résultat est tout différent si c est une fonction linéaire de z,

$$c = \mathrm{K}(x, y)z + \mathrm{H}(x, y).$$

L'équation (35) se décompose alors en deux conditions distinctes :

$$(36)\quad \begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}[\mathrm{KU} + a(a\mathrm{V}+b\mathrm{U})]\\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y}[\mathrm{KV} + b(a\mathrm{V}+b\mathrm{U})] - \frac{\partial^2(a\mathrm{V}+b\mathrm{U})}{\partial x\,\partial y} - 2\mathrm{K}(a\mathrm{V}+b\mathrm{U}) = 0,\end{aligned}$$

$$(37)\quad \begin{aligned}&\frac{\partial^2\mu}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial(a\mu)}{\partial x} - \frac{\partial(b\mu)}{\partial y}\\ &\quad + \mu\mathrm{K} + \mathrm{H}(a\mathrm{V}+b\mathrm{U}) - \frac{\partial(\mathrm{HU})}{\partial x} - \frac{\partial(\mathrm{HV})}{\partial y} = 0.\end{aligned}$$

La relation (36) est une équation de condition à laquelle doit satisfaire $\mathrm{K}(x, y)$ pour qu'il existe des multiplicateurs de la forme indiquée. Si cette condition est satisfaite, il existe une infinité de multiplicateurs, car $\mu(x, y)$ est déterminée par l'équation linéaire (37). Nous retrouvons le cas d'une équation linéaire, que j'ai traité dans le Mémoire cité plus haut (*Annales de la Faculté de Toulouse*, t. IV, 2e série, p. 333).

J'ai montré, dans ce Mémoire, que l'on peut en multipliant l'inconnue z par un facteur convenablement choisi, supposer que l'on a $a\mathrm{V} + b\mathrm{U} = 0$; les fonctions a, b, U, V sont alors de la forme

$$a = -\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial x}}, \qquad b = -\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial y}},$$

$$\mathrm{U} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\partial v}{\partial x}}, \qquad \mathrm{V} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\partial v}{\partial y}},$$

la fonction $v(x, y)$ pouvant être choisie arbitrairement.

La condition (36) qui détermine K prend la forme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{K}}{\frac{\partial v}{\partial x}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathrm{K}}{\frac{\partial v}{\partial y}}\right)=0;$$

on en conclut que K est de la forme

$$\mathrm{K}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\psi(v).$$

Réciproquement, si la condition (35) est vérifiée pour une fonction $\mu(x, y)$, la condition d'intégrabilité de l'équation

$$du=\left[\mathrm{U}\frac{p^2}{2}+(a\mathrm{V}+b\mathrm{U})zp+\mu(x,y)p+\rho_1(x,y,z)\right]dx \\ -\left[\mathrm{V}\frac{q^2}{2}+\rho_2(x,y,z)\right]dy$$

est identique à l'équation $s+ap+bq+c=0$, pourvu que les fonctions ρ_1 et ρ_2 vérifient les relations

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial z}=c\mathrm{V}+b[\mu+z(a\mathrm{V}+b\mathrm{U})],$$
$$\frac{\partial\rho_2}{\partial z}=c\mathrm{U}+a[\mu+z(a\mathrm{V}+b\mathrm{U})]-\frac{\partial\mu}{\partial y}-z\frac{\partial(a\mathrm{V}+b\mathrm{U})}{\partial y},$$
$$\frac{\partial\rho_1}{\partial y}+\frac{\partial\rho_2}{\partial x}=c\mu+cz(a\mathrm{V}+b\mathrm{U}),$$

qui sont compatibles en vertu de l'équation (35).

10. Lorsque l'équation admet un multiplicateur linéaire en p et indépendant de q, on peut supposer $a=0$, et l'équation (26) ramenée à la forme réduite

$$s+bq+c=0.$$

Supposons qu'elle admette un multiplicateur de la forme

$$(\mathrm{V})\qquad \lambda=\mathrm{X}(p+\beta)+\mu(x,y),\qquad \mathrm{X}\neq 0,$$

où $\frac{\partial\beta}{\partial z}=b$. On a dans ce cas

$$\mathrm{R}=\mathrm{X}bpq+\mathrm{X}cp+(\mathrm{X}\beta+\mu)bq+(\mathrm{X}\beta+\mu)c,$$

et l'on peut prendre

$$f_1=\mathrm{X}\frac{p^2}{2}+\mathrm{X}\beta p+\mu p,\qquad \varphi_1=0,$$

et il vient

$$\mathcal{R} = R - \frac{df_1}{dy} = \left(Xc - X\frac{\partial\beta}{\partial y} - \frac{\partial\mu}{\partial y}\right)p + (X\beta + \mu)bq + (X\beta + \mu)c.$$

La dernière des conditions (12) donne la relation

$$(37)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(Xc - X\frac{\partial\beta}{\partial y}\right) - \frac{\partial^2\mu}{\partial x\,\partial y} + X\frac{\partial(b\beta)}{\partial y} + \frac{\partial(b\mu)}{\partial y} - \frac{\partial(c\mu)}{\partial z} - X\frac{\partial(\beta c)}{\partial z} = 0;$$

les fonctions b, c, X étant données, pour qu'il existe un multiplicateur de la forme (V), il faudra que l'équation (37) admette une intégrale μ indépendante de z. Pour obtenir des équations de cette espèce, on pourra se donner arbitrairement X, $\mu(x, y)$, et l'une des fonctions c, β; la seconde devra satisfaire à la condition (37).

Dans le cas d'une équation linéaire, on peut prendre

$$\beta = b(x, y)z, \qquad c = \gamma(x, y)z,$$

et l'équation (37) se dédouble en deux équations distinctes, dont l'une est l'équation adjointe de l'équation linéaire, tandis que l'autre peut s'écrire

$$(38)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[X\left(\frac{\partial b}{\partial y} - \gamma\right)\right] = 2bX\left(\frac{\partial b}{\partial y} - \gamma\right).$$

Or les invariants de l'équation linéaire

$$s + b(x, y)q + \gamma(x, y)z = 0$$

sont

$$h = -\gamma, \qquad k = \frac{\partial b}{\partial y} - \gamma,$$

et l'on a, d'après la relation (38),

$$\frac{\partial}{\partial x}(Xk) = 2bXk.$$

On en tire

$$2b = \frac{\partial}{\partial x}\log(Xk),$$

$$2\frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial^2 \log k}{\partial x\,\partial y},$$

et par suite

$$2k - 2h = \frac{\partial^2 \log k}{\partial x\,\partial y}.$$

C'est le résultat que j'avais obtenu directement (p. 332 du Mémoire cité plus haut). L'équation peut alors être ramenée à la forme suivante, en changeant z en ρz :

$$s - \frac{1}{2}\frac{\partial \log v}{\partial x} q - vz = 0,$$

et elle admet un multiplicateur

$$\lambda = \frac{C}{v} q + \mu(x, y),$$

C étant une constante et $\mu(x, y)$ une solution de l'équation adjointe.

11. Lorsque l'équation (18) admet un multiplicateur λ indépendant de p et de q, la condition $\frac{\partial^2 R}{\partial p \partial q} = \frac{\partial S}{\partial z}$ prouve que ce multiplicateur est aussi indépendant de z. Soit $\mu(x, y)$ ce multiplicateur; les équations (12) sont vérifiées d'elles-mêmes, sauf la dernière qui devient

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(a\mu)}{\partial x} - \frac{\partial(b\mu)}{\partial y} + \frac{\partial(c\mu)}{\partial z} = 0. \tag{39}$$

Si l'équation (18) est linéaire en p, q, z, l'équation (39) est identique à l'équation adjointe. Mais, dans le cas général où a, b, c sont des fonctions quelconques de x, y, z, il est clair que cette équation n'admet pas d'autre solution indépendante de z que $\mu = 0$.

Supposons qu'elle admette une solution différente de zéro. En multipliant l'inconnue z par un facteur convenable, nous pouvons être ramenés au cas où ce multiplicateur est $\mu = 1$. L'équation en μ est alors

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} - a\frac{\partial \mu}{\partial x} - b\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0, \tag{39'}$$

et les fonctions a, b, c doivent satisfaire à la condition

$$\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}. \tag{40}$$

On satisfait à cette condition d'une façon générale en posant

$$a = \frac{\partial \alpha}{\partial z}, \qquad b = \frac{\partial \beta}{\partial z}, \qquad c = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}, \tag{41}$$

α, β étant des fonctions quelconques de x, y, z. L'équation

$$(18') \qquad s + \frac{\partial\alpha}{\partial z}p + \frac{\partial\beta}{\partial z}q + \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} = 0$$

est alors la condition d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales

$$(41) \qquad du = [p + \beta(x, y, z)]\,dx - \alpha(x, y, z)\,dy.$$

Cherchons si l'équation (39') peut admettre deux intégrales linéairement distinctes $\mu_1(x, y)$, $\mu_2(x, y)$. Des deux équations

$$\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x\,\partial y} = a\frac{\partial\mu_1}{\partial x} + b\frac{\partial\mu_1}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial x\,\partial y} = a\frac{\partial\mu_2}{\partial x} + b\frac{\partial\mu_2}{\partial y}$$

on tirera pour a, b des fonctions indépendantes de z et par suite l'équation (18) sera linéaire en p, q, z, à moins que l'on ait

$$\frac{D(\mu_1, \mu_2)}{D(x, y)} = 0.$$

S'il en est ainsi, on peut supposer $\mu_2 = f(\mu_1)$; il vient alors

$$\frac{\partial\mu_2}{\partial x} = f'(\mu_1)\frac{\partial\mu_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\mu_2}{\partial y} = f'(\mu_1)\frac{\partial\mu_1}{\partial y},$$
$$\frac{\partial^2\mu_2}{\partial x\,\partial y} = f'(\mu_1)\frac{\partial^2\mu_1}{\partial x\,\partial y} + f''(\mu_1)\frac{\partial\mu_1}{\partial x}\frac{\partial\mu_1}{\partial y},$$

et il reste la condition

$$f''(\mu_1)\frac{\partial\mu_1}{\partial x}\frac{\partial\mu_1}{\partial y} = 0.$$

On peut satisfaire à cette condition de plusieurs manières :

1° Si $f''(\mu_1) = 0$, on a $\mu_2 = C_1\mu_1 + C_2$, C_1 et C_2 étant deux constantes arbitraires. On peut choisir arbitrairement $\mu(x, y)$ et l'une des fonctions a, b, et l'on obtient ainsi des équations (18) admettant des multiplicateurs $\mu(x, y)$ dépendant de deux constantes arbitraires.

2° Si $\frac{\partial\mu_1}{\partial x} = 0$, on a forcément $b = 0$, et toute fonction de y seul $\mu = Y$ est un multiplicateur. L'équation (18) admet alors une intégrale intermédiaire. En effet, si $b = 0$, la condition (40) devient $\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial a}{\partial x}$; on a donc $c = \frac{\partial\theta}{\partial x}$, $a = \frac{\partial\theta}{\partial z}$, et l'équation admet l'intégrale intermédiaire

$$q + \theta(x, y, z) = \mathrm{Y}.$$

On voit de même que, si $\dfrac{\partial \mu_1}{\partial y} = 0$, l'équation admet une intégrale intermédiaire, et toute fonction X de la seule variable x est un multiplicateur.

En résumé, sauf dans le cas des équations linéaires en p, q, z, et des équations admettant une intégrale intermédiaire, les multiplicateurs indépendants de p, q, z *dépendent au plus de deux constantes arbitraires.*

12. Il nous reste à déterminer les multiplicateurs d'une équation admettant une intégrale intermédiaire. Nous pouvons supposer cette équation ramenée à la forme

$$s + \frac{\partial \theta}{\partial z} q + \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \tag{42}$$

et nous traiterons d'abord le cas où il existe une seule intégrale intermédiaire, ce qui exclut le cas où θ serait de la forme

$$\theta = \mathrm{X}z + \Psi(x, y).$$

D'après les résultats exposés aux paragraphes précédents (n$^{\text{os}}$ 5 et suiv.), tout multiplicateur de cette équation est de la forme

$$\lambda = f(x, p + \theta) + \varphi(x, y, q),$$

la fonction f étant quelconque et la fonction $\varphi(x, y, q)$ doit être une intégrale, *indépendante de* z, de l'équation

$$\frac{\partial \theta}{\partial z}\left(q \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q\, \partial x}. \tag{43}$$

Cette fonction φ satisfait donc aussi à l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\left(q \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y\, \partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0. \tag{44}$$

Si la fonction $\theta(x, y, z)$ est quelconque, il est clair que cette dernière équation exige que l'on ait $\dfrac{\partial \varphi}{\partial q} = 0$, et par suite φ se réduit à une fonction $\mu(x, y)$. Donc, dans le cas général où la fonction $\theta(x, y, z)$ ne satisfait à aucune condition particulière, tout multiplicateur de l'équation (42) est de la forme

$$\lambda = f(x, p+\theta) + \mu(x, y) = \frac{\partial F(x, p+\theta)}{\partial p} + \mu(x, y);$$

on a dans ce cas

$$S = \frac{\partial F}{\partial p} + \mu, \qquad R = \left(\frac{\partial F}{\partial p} + \mu\right)\left(\frac{\partial \theta}{\partial z} q + \frac{\partial \theta}{\partial y}\right),$$

et l'on peut prendre

$$f_1 = F(x, p+\theta) + \mu p, \qquad \varphi_1 = 0,$$

ce qui donne

$$\mathcal{R} = R - \frac{df_1}{dy} = \mu \frac{\partial \theta}{\partial z} q + \mu \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial y} p.$$

La dernière des conditions (12) est alors

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) - \mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial y\, \partial z} = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

Si $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$ n'est pas nul, μ est une fonction de la seule variable x, et tout multiplicateur est de la forme

$$\frac{\partial F(x, p+\theta)}{\partial p}.$$

Il est évident en effet que la condition d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales $du = F(x, p+\theta)dx$ est

$$\frac{\partial F}{\partial p}\left(s + \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial z} q\right) = 0.$$

Si $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0$, l'équation (42) est linéaire en q, z, et tout multiplicateur est de la forme

$$\lambda = \frac{\partial F(x, p+\theta)}{\partial p} + \mu(x, y),$$

$\mu(x, y)$ étant une solution de l'équation adjointe.

Cherchons encore dans quels cas l'équation (43) admet des intégrales, indépendantes de z, autres que $\varphi = \mu(x, y)$.

Si $\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}$ n'est pas nul, l'équation (44) montre que l'on doit avoir

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial y\,\partial z} = \mathrm{K}(x, y)\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}.$$

En changeant z en $\mathrm{Z}-\int \mathrm{K}\,dy$, on remplace l'équation (42) par une équation de même forme pour laquelle on a $\frac{\partial^2\theta}{\partial y\,\partial z}=0$. L'intégrale générale de l'équation (44) est alors

$$\varphi = \frac{\mathrm{C}}{q} + \mu(x, y),$$

et, en substituant cette expression de φ dans la relation (43), on est conduit à la condition

$$2\mathrm{C}\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{1}{q^3} = -\frac{\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial x}}{q^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial x} = 0.$$

La fonction θ est donc indépendante de y; l'équation (42) devient

$$s + \frac{\partial\,\theta(x, z)}{\partial z}q = 0,$$

et tout multiplicateur de cette équation est de la forme

$$\lambda = \frac{\partial\,\mathrm{F}(x, p+\theta)}{\partial p} + \frac{\mathrm{Y}}{q} + \mu(x, y).$$

En opérant comme dans les autres cas, on trouve pour la dernière des conditions (12)

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial z} - \mathrm{Y}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0.$$

Une différentiation par rapport à z nous donne

$$\frac{\frac{\partial\mu}{\partial y}}{\mathrm{Y}} = \frac{\frac{\partial^3\theta}{\partial z^3}}{\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}},$$

et la valeur commune de ces rapports étant indépendantede z et de y

est forcément une fonction de la seule variable x. On a donc

$$\frac{\partial\mu}{\partial y} = -XY, \qquad \frac{\partial^2\mu}{\partial x\,\partial y} = -X'Y,$$

et la fonction $\theta(x, z)$ satisfait à l'équation différentielle linéaire

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} - X\frac{\partial\theta}{\partial z} + X' = o$$

dont l'intégrale générale est

$$\theta = \frac{\partial \log X}{\partial x} z + X_1 e^{Xz} + X_2,$$

X, X_1, X_2 étant des fonctions de la seule variable x. L'équation (42) est donc de la forme

$$s + \left(\frac{X'}{X} + X_1 X e^{Xz}\right) q = o.$$

En prenant Xz pour inconnue, et en remplaçant la variable x par une fonction convenable de x, cette équation peut être ramenée à la forme simple

(45) $$s + e^z q = o;$$

cette équation admet une infinité de multiplicateurs compris dans la formule

$$\lambda = \frac{\partial F(x, p + e^z)}{\partial p} + \frac{Y'}{q} + Y.$$

Il est facile en effet de vérifier que la condition d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales

$$du = [F(x, p + e^z) + Y(p + e^z)]\,dx - Y'(\log q - z)\,dy,$$

est identique à

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{Y'}{q} + Y\right)(s + q e^z) = o.$$

Considérons enfin le cas où $\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = o$. L'équation (42) est alors linéaire en p, q, z, et en changeant z en $z + \varphi(x, y)$, on peut supposer que l'on a fait disparaître le terme indépendant. L'équation est alors de la forme

(46) $$s + b(x, y) q + \frac{\partial b}{\partial y} z = o.$$

écartons le cas où $\theta = b(x, y)z$ ne dépendrait pas de y; l'équation admettrait alors deux intégrales intermédiaires. On déduit de l'équation (44) que toute intégrale $\varphi(x, y, q)$, qui dépend de q, est linéaire en q. Si l'équation (46) admet un multiplicateur linéaire en q, on sait, d'après un résultat rappelé plus haut, que cette équation peut être ramenée à la forme

$$s - \frac{1}{2}\frac{\partial \log v}{\partial x} q - vz = 0. \tag{47}$$

Pour que cette équation admette une intégrale intermédiaire

$$p - \frac{1}{2}\frac{\partial \log v}{\partial x} z = F(x),$$

la fonction $v(x, y)$ doit être une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 \log v}{\partial x\, \partial y} = 2v. \tag{48}$$

On a donc

$$v = \frac{X'Y'}{(X+Y)^2}$$

et l'équation (47) prend la forme

$$s - \frac{1}{2}\left(\frac{X''}{X'} - \frac{2X'}{X+Y}\right) q - \frac{X'Y'}{(X+Y)^2} z = 0. \tag{49}$$

D'après le résultat rappelé plus haut (n° 10), la forme générale des multiplicateurs de cette équation est

$$\lambda = \frac{\partial F(x, p+\theta)}{\partial p} + \frac{C}{v} q + \mu(x, y),$$

F étant une fonction arbitraire, C une constante, et μ une intégrale de l'équation adjointe.

En résumé, toute fonction $f(x, p+\theta)$ est un multiplicateur de l'équation (42). Pour qu'il en existe d'autres, il faut que l'équation soit une équation linéaire, ou qu'elle soit réductible à l'une des formes (45) ou (49), qui sont l'une et l'autre intégrables. L'intégrale générale de l'équation (45) est donnée par la formule

$$e^z = \frac{X'}{X+Y},$$

X étant une fonction arbitraire de x, et Y une fonction arbitraire de y.

Lorsque l'équation (18) admet deux intégrales intermédiaires, on peut la ramener à la forme $s = 0$, et les équations (12) deviennent

$$\frac{\partial^2 S}{\partial p\,\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial p\,\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial q\,\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

L'intégrale générale est

$$S = f(x, p) + \varphi(y, q);$$

il est évident en effet que la condition d'intégrabilité de l'équation

$$du = F(x, p)\,dx + \Phi(y, q)\,dy$$

conduit, quelles que soient les fonctions F et Φ, à l'équation $s = 0$.

13. Nous avons passé en revue, dans les paragraphes précédents, toutes les formes possibles pour les multiplicateurs d'une équation

$$s + ap + bq + c = 0.$$

Les coefficients a, b, c étant donnés, pour trouver effectivement les multiplicateurs de cette équation, on aura à examiner si certaines équations simultanées sont compatibles. Prenons par exemple l'équation

$$(50) \qquad s + c(x, y, z) = 0.$$

Un multiplicateur est de la forme

$$\lambda = F(x, y, p) + \Phi(x, y, q),$$

et les équations (12) du n° 3 prouvent que les fonctions F et Φ doivent satisfaire aux relations

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial y} = c\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}, \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q\,\partial x} = c\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2}.$$

Écartons le cas où c serait indépendant de z; l'équation serait alors réductible à la forme $s = 0$. On doit donc avoir

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q\,\partial x} = 0,$$

et le multiplicateur est de la forme

$$Xp + Yq + \mu(x, y).$$

La dernière des conditions (12) donne ensuite

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial(cX)}{\partial x} + \frac{\partial(cY)}{\partial y}. \tag{51}$$

Pour qu'il existe un multiplicateur, il faut que l'on puisse choisir les fonctions X et Y de façon que l'équation (51) admette une intégrale $\mu(x, y)$ indépendante de z. Nous pouvons supposer que $\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$ n'est pas nul, car l'équation serait linéaire en z, et l'on serait ramené à un problème dont la solution est connue. De l'équation (51) on déduit alors, en différentiant par rapport à z,

$$\mu \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = \frac{\partial^2(cX)}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2(cY)}{\partial y \partial z}.$$

Une nouvelle différentiation par rapport à z conduit à une relation de la forme

$$AX + BX' + cY + bY' = 0,$$

A, B, C, D ne dépendant que des dérivées de c. Il faudra que l'on puisse satisfaire à cette relation en prenant pour X une fonction de x et pour Y une fonction de y. Je laisserai de côté l'examen de cette question.

III.

14. Étant donnée une équation bilinéaire quelconque en p, q

$$s + gpq + ap + bq + c = 0, \tag{52}$$

où g, a, b, c sont des fonctions de x, y, z, la recherche des systèmes de deux équations de Pfaff à six variables, dont elle est une résolvante de seconde espèce, revient à la détermination de deux fonctions $f(x, y, z, p, u)$, $\varphi(x, y, z, q, u)$ telles que la condition d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales

$$du = f(x, y, z, p, u)\,dx + \varphi(x, y, z, q, u)\,dy$$

soit identique, à un facteur près, à l'équation (52). Or cette condition d'intégrabilité est

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q + \frac{\partial f}{\partial p} s + \frac{\partial f}{\partial u} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p + \frac{\partial \varphi}{\partial q} s + \frac{\partial \varphi}{\partial u} f;$$

il faudra donc que l'on ait identiquement

$$(53) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial p}\right)(gpq + ap + bq + c) + \frac{df}{dy} - \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u}\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial u} f = 0.$$

Tous les termes de cette relation qui précèdent les deux derniers sont linéaires par rapport à l'une des variables p ou q, et satisfont par conséquent à la relation $\frac{\partial^4}{\partial p^2 \partial q^2} = 0$. Il faudra donc que l'on ait aussi

$$\frac{\partial^4}{\partial p^2 \partial q^2}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial u} f\right) = 0,$$

ou, en développant,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial u\, \partial p^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial u\, \partial q^2}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0,$$

ce que l'on peut écrire, *en supposant* $\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}$ *et* $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2}$ *différents de zéro*,

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\log \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\log \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2}\right).$$

La valeur commune des deux membres est forcément indépendante de p et de q; c'est donc une fonction des variables x, y, z, u seulement, et l'on a par conséquent

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = \mathrm{U}(x, y, z, u) f_1(x, y, z, p),$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = \mathrm{U}(x, y, z, u) \varphi_1(x, y, z, q).$$

On en déduit pour f et φ des expressions de la forme

$$(54) \begin{cases} f = \mathrm{U}(x, y, z, u)\mathrm{F}(x, y, z, p) + \mathrm{U}_1(x, y, z, u)p + \mathrm{U}_2(x, y, z, u), \\ \varphi = \mathrm{U}(x, y, z, u)\Phi(x, y, z, q) + \mathrm{V}_1(x, y, z, u)q + \mathrm{V}_2(x, y, z, u), \end{cases}$$

où $\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial p^2}$ et $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2}$ ne sont pas nuls.

L'équation aux différentielles totales

$$du = (\mathrm{UF} + \mathrm{U}_1 p + \mathrm{U}_2)\, dx + (\mathrm{U}\Phi + \mathrm{V}_1 q + \mathrm{V}_2)\, dy$$

peut se simplifier en prenant pour inconnue une nouvelle fonction

$$v = \theta(x, y, z, u), \qquad \text{où} \qquad \theta = \int \frac{du}{U},$$

ce qui ne change pas la condition d'intégrabilité. On a en effet

$$\begin{aligned} dv &= \frac{\partial\theta}{\partial x}dx + \frac{\partial\theta}{\partial y}dy + \frac{\partial\theta}{\partial z}dz + \frac{\partial\theta}{\partial u}du \\ &= \frac{du}{U} + \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} + p\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)dx + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} + q\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)dy, \end{aligned}$$

et l'équation devient

$$\begin{aligned} dv = {} & F\,dx + \Phi\,dy + \frac{1}{U}(U_1 p + U_2)\,dx \\ & + \frac{1}{U}(V_1 q + V_2)\,dy + \frac{d\theta}{dx}dx + \frac{d\theta}{dy}dy. \end{aligned}$$

Si l'on remplace dans U, U_1, U_2, V_1, V_2, $\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y}$, la variable u par son expression au moyen de x, y, z, v, on est finalement ramené à une équation de la forme

$$(55)\qquad du = F\,dx + \Phi\,dy + (U_1 p + U_2)\,dx + (V_1 q + V_2)\,dy,$$

U_1, U_2, V_1, V_2 étant des fonctions de x, y, z, u, indépendantes de p, q.

La condition d'intégrabilité est

$$(56)\qquad \begin{aligned} & \left(\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial\Phi}{\partial q} + U_1 - V_1\right)s + \frac{dF}{dy} - \frac{d\Phi}{dx} \\ & + \left(\frac{\partial U_1}{\partial u}p + \frac{\partial U_2}{\partial u}\right)(\Phi + V_1 q + V_2) - \left(\frac{\partial V_1}{\partial u}q + \frac{\partial V_2}{\partial u}\right)(F + U_1 p + U_2) \\ & + \frac{dU_1}{dy}p + \frac{dU_2}{dy} - \frac{dV_1}{dx}q - \frac{dV_2}{dx} = 0. \end{aligned}$$

Supposons d'abord que $U_1 - V_1$ soit une fonction $\psi(x, y, z)$ indépendante de u. Pour que la valeur de s déduite de cette condition soit indépendante de u, il faut que la somme des termes qui suivent le premier ne renferme pas u. Or les termes de cette somme qui ne sont pas bilinéaires en p et q et qui peuvent dépendre de u sont les suivants :

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}p + \frac{\partial U_2}{\partial u}\right)\Phi - \left(\frac{\partial V_1}{\partial u}q + \frac{\partial V_2}{\partial u}\right)F.$$

Les termes tels que $p\Phi$, Φ, qF, F ne peuvent se réduire avec aucun autre. Il faudra donc que $\frac{\partial U_1}{\partial u}$, $\frac{\partial V_1}{\partial u}$, $\frac{\partial V_2}{\partial u}$ soient indépendants de u, ou que U_1, U_2, V_2 soient des fonctions linéaires de u,

$$U_1 = A_1 u + B_1, \qquad U_2 = A_2 u + B_2, \qquad V_2 = A_3 u + B_3.$$

En remplaçant U_1, V_1, U_2, V_2 par leurs expressions, et en égalant à zéro les termes qui dépendent de u, on obtient les conditions

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{\partial A_3}{\partial z}, \qquad \frac{\partial A_2}{\partial z} = \frac{\partial A_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial A_2}{\partial y} = \frac{\partial A_3}{\partial x},$$

qui expriment que $A_1\,dz + A_2\,dx + A_3\,dy = dV$, et l'équation (55) est de la forme

$$du = F\,dx + \Phi\,dy + u\,dV + (B_1 p + B_2)\,dx + [(B_1 + \psi)q + B_3]\,dy.$$

En posant $u = e^V v$, l'équation (55) est remplacée par une équation aux différentielles totales

$$dv = e^{-V}\{(F + B_1 p + B_2)\,dx + [\Phi + (B_1 + \psi)q + B_3]\,dy\},$$

où le second membre ne renferme pas v. Toute équation de la forme (52) obtenue de cette façon est donc comprise parmi les équations qui ont été étudiées dans la première partie de ce travail, et l'on n'obtient pas de système de Pfaff différent de ceux qui ont été déjà déterminés.

15. Supposons maintenant que $U_1 - V_1$ dépende de u. En donnant à u deux valeurs u_0, u_1, telles que $(U_1 - V_1)_0$ et $(U_1 - V_1)_1$ soient différents, et retranchant les deux égalités ainsi déduites de la formule (56), il vient

$$\begin{aligned}
&[(U_1 - V_1)_1 - (U_1 - V_1)_0]s \\
&\quad + \left\{\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)_1 - \left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)_0\right]p + \left(\frac{\partial U_2}{\partial u}\right)_1 - \left(\frac{\partial U_2}{\partial u}\right)_0\right\}\Phi \\
&\quad - \left\{\left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial u}\right)_1 - \left(\frac{\partial V_1}{\partial u}\right)_0\right]q + \left(\frac{\partial V_2}{\partial u}\right)_1 - \left(\frac{\partial V_2}{\partial u}\right)_0\right\}F + \ldots = 0,
\end{aligned}$$

les termes non écrits étant bilinéaires en p, q. Pour que l'expression de s obtenue soit elle-même bilinéaire en p et q, il faut évidemment que les termes en F et Φ disparaissent, quelles que soient les valeurs u_0, u_1, ce qui exige que U_1, U_2, V_1, V_2 soient des fonctions linéaires de u. Nous sommes ainsi conduits à rechercher les équations aux différentielles totales

$$(57)\qquad \begin{aligned} du = {} & [F(x, y, z, p) + u(\alpha p + \beta)]\,dx \\ & + [\Phi(x, y, z, q) + u(\gamma q + \delta)\,dy, \end{aligned}$$

où α, β, γ, δ sont des fonctions de x, y, z, dont la condition d'intégrabilité conduit à une équation de la forme (52). Les calculs qui vont suivre ne supposent pas que $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}$ et $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2}$ sont différents de zéro.

La condition d'intégrabilité de l'équation (57) est, en ordonnant par rapport à u,

$$\begin{aligned} & \frac{dF}{dy} - \frac{d\Phi}{dx} + (\alpha p + \beta)\Phi - (\gamma q + \delta)F + \left(\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial q}\right)s \\ & \qquad + u\left[(\alpha - \gamma)s + p\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dy} - q\frac{d\gamma}{dx} - \frac{d\delta}{dx}\right] = 0. \end{aligned}$$

Pour que cette condition soit indépendante de u, il faut et il suffit que les expressions de s obtenues en égalant à zéro le coefficient de u et le terme indépendant de u soient identiques. S'il en est ainsi, l'équation obtenue est aussi la condition d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales

$$(58)\qquad dv = (\alpha p + \beta)\,dx + (\gamma q + \delta)\,dy.$$

On n'obtient donc pas de cette façon d'équations différentes de celles qui ont été déjà étudiées, mais ces équations peuvent être des résolvantes de seconde espèce pour de nouveaux systèmes de deux équations de Pfaff, ce qui conduit à de nouvelles espèces de transformations de Bäcklund.

La condition d'intégrabilité de l'équation (58) conduit à une équation du second ordre (1)

$$s + ap + bq + c = 0$$

qui admet le multiplicateur $\alpha - \gamma$. En multipliant z par une fonction convenable de x, y, on peut toujours supposer que cette équation admet pour multiplicateur l'unité, c'est-à-dire que l'on a $\alpha - \gamma = 1$; c'est ce que nous ferons par la suite. L'équation (57) est alors

$$du = F\,dx + \Phi\,dy + u\gamma(p\,dx + q\,dy) + u\,[(p + \beta)\,dx + \delta\,dy],$$

(1) On suppose que l'on choisit l'inconnue z de façon qu'il n'y ait pas de terme en pq dans l'équation (n° 4).

ou

$$du - u\gamma\,dz = \mathrm{F}\,dx + \Phi\,dy + u[(p+\beta)\,dx + \delta\,dy].$$

Posons $u = v\,\theta(x, y, z)$, où $\theta = e^{\int \gamma\,dz}$, l'équation devient

$$\theta\,dv + v\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}dx + \frac{\partial\theta}{\partial y}dy + \frac{\partial\theta}{\partial z}dz\right) - v\theta\gamma\,dz$$
$$= \mathrm{F}\,dx + \Phi\,dy + v\theta[(p+\beta)\,dx + \delta\,dy],$$

ou

$$dv = \frac{\mathrm{F}\,dx + \Phi\,dy}{\theta} + v\left[\left(p + \beta - \frac{\partial\log\theta}{\partial x}\right)dx + \left(\delta - \frac{d\log\theta}{dy}\right)dy\right].$$

En modifiant un peu les notations, nous écrirons cette équation :

(59) $$du = \mathrm{F}\,dx + \Phi\,dy + u[(p+\beta)\,dx - \alpha\,dy];$$

pour que la condition d'intégrabilité soit indépendante de u, il faut et il suffit que l'on ait identiquement

(60) $$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q} - \frac{\partial\mathrm{F}}{\partial p}\right)\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) + \frac{d\mathrm{F}}{dy} - \frac{d\Phi}{dx} + \Phi(p+\beta) + \mathrm{F}\alpha = 0,$$

et cette condition d'intégrabilité est alors

(61) $$s + \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} = 0.$$

Les fonctions $\alpha(x, y, z)$ et $\beta(x, y, z)$ étant données, nous allons chercher s'il est possible de déterminer deux fonctions $\mathrm{F}(x, y, z, p)$ et $\Phi(x, y, z, q)$ satisfaisant à la relation (60). Remarquons que l'on peut, sans changer l'équation (61), remplacer α par $\alpha - \frac{\partial\Theta}{\partial y}$, et β par $\beta + \frac{\partial\Theta}{\partial x}$, $\Theta(x, y)$ étant une fonction arbitraire des deux variables x et y. On peut donc toujours ajouter à l'une des fonctions α ou β une fonction quelconque de x et de y, à condition d'ajouter aussi à l'autre une fonction convenablement choisie des mêmes variables.

Nous pouvons observer aussi que, si les fonctions $\mathrm{F}(x, y, z, p)$, $\Phi(x, y, z, q)$ vérifient la relation (60), il en est de même des fonctions CF, $\mathrm{C}\Phi$, quelle que soit la constante C. Si l'on connaît deux systèmes de solutions (F_1, Φ_1), (F_2, Φ_2), $\mathrm{F} = \mathrm{C}_1\mathrm{F}_1 + \mathrm{C}_2\mathrm{F}_2$, $\Phi = \mathrm{C}_1\Phi_1 + \mathrm{C}_2\Phi_2$ est un autre système de solutions, quelles que soient les constantes C_1, C_2.

16. Cherchons d'abord s'il est possible de satisfaire à la relation (60) en prenant pour F et Φ des fonctions linéaires de p et de q respectivement

$$F = A(x, y, z)p + B(x, y, z), \qquad \Phi = C(x, y, z)q + D(x, y, z).$$

En remplaçant F et Φ par ces expressions, la condition (60) devient

$$\begin{aligned}(C-A)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}p + \frac{\partial\beta}{\partial z}q\right) + p\left(\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}q\right) \\ + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial z}q - q\left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial z}p\right) - \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial D}{\partial z}p \\ + (Cq + D)(p + \beta) + \alpha(Ap + B) = 0;\end{aligned}$$

les fonctions A, B, C, D doivent donc satisfaire aux quatre conditions

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial z} - C, \\ &(C-A)\frac{\partial\alpha}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial y} + A\alpha - \frac{\partial D}{\partial z} + D = 0, \\ &(C-A)\frac{\partial\beta}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} + C\beta = 0, \\ &(C-A)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\right) + \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial x} + D\beta + B\alpha = 0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose $C = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}$, la première équation donne $\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial U}{\partial z}$ et, par suite, on a

$$A = \frac{\partial U}{\partial z} - U + \mu(x, y).$$

Comme on peut ajouter à U une fonction quelconque de x et de y, sans changer C, nous pouvons remplacer U par $U + \mu(x, y)$, et poser, par conséquent,

$$A = \frac{\partial U}{\partial z} - U, \qquad C = \frac{\partial U}{\partial z}, \qquad U = C - A.$$

La seconde des conditions (62) devient alors

$$U\frac{\partial\alpha}{\partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial U}{\partial y} + \alpha\left(\frac{\partial U}{\partial z} - U\right) - \frac{\partial D}{\partial z} + D = 0$$

ou

$$\frac{\partial(\alpha U)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - U\right) - \alpha U = \frac{\partial D}{\partial z} - D,$$

ce que l'on peut encore écrire, en multipliant les deux membres par e^{-z},

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[e^{-z}\left(\alpha \mathrm{U} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial z}(e^{-z}\mathrm{D}),$$

et l'on en tire

$$\mathrm{D} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} + \alpha \mathrm{U} + e^{z}\varphi(x, y).$$

On déduit de même de la troisième des conditions (62) que B est de la forme

$$\mathrm{B} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} - \beta \mathrm{U} + f(x, y).$$

En remplaçant A, B, C, D par les expressions précédentes dans la dernière des conditions (62), on trouve, après réductions, la nouvelle condition

$$(63) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha f = e^{z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \beta \varphi\right).$$

L'équation (59) peut s'écrire, lorsque F et Φ sont linéaires en p et q respectivement,

$$du = \left[u(p+\beta) + \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} - \mathrm{U}\right)p + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} - \mathrm{U}\beta + f\right]dx$$
$$+ \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}q + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} + \alpha \mathrm{U} + e^{z}\varphi - \alpha u\right)dy$$

ou, en posant $u - \mathrm{U} = v$,

$$(59') \qquad dv = v(p+\beta)\,dx - v\alpha\,dy + f\,dx + e^{z}\varphi\,dy.$$

Si f et φ sont nuls, cette équation (59') conduit évidemment à la condition d'intégrabilité (61); cette solution était facile à prévoir *a priori*, mais elle ne donne pas de systèmes de Pfaff nouveaux.

Pour qu'il y ait une solution différente de cette solution banale, il faut que l'on puisse déterminer deux fonctions $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ satisfaisant à la relation (63). On pourra prendre alors

$$\mathrm{A} = 0, \qquad \mathrm{B} = f(x, y), \qquad \mathrm{C} = 0, \qquad \mathrm{D} = e^{z}\varphi(x, y),$$

et le système de Pfaff,

$$(64) \qquad \begin{cases} dz = p\,dx + q\,dy, \\ dv = v[(p+\beta)\,dx - \alpha\,dy] + f\,dx + e^{z}\varphi\,dy, \end{cases}$$

admettra l'équation (62) pour résolvante de seconde espèce.

Nous pouvons encore transformer la condition (63). Supposons que les fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ satisfassent à cette condition. Si l'on pose, dans l'équation aux différentielles totales (59'), $v = wf$, elle devient

$$dw = w\left[\left(p + \beta - \frac{\partial \log f}{\partial x}\right) dx - \left(\alpha + \frac{\partial \log f}{\partial y}\right) dy\right] + dx + e^{z}\frac{\varphi}{f}\, dy;$$

c'est une équation de même forme que la première, où α, β, f, φ sont remplacés respectivement par

$$\alpha + \frac{\partial \log f}{\partial y}, \quad \beta - \frac{\partial \log f}{\partial x}, \quad 1, \quad \frac{\varphi}{f}.$$

Or la relation (63) peut s'écrire

$$\alpha + \frac{\partial \log f}{\partial y} = e^{z}\left[\frac{\partial\left(\frac{\varphi}{f}\right)}{\partial x} - \left(\beta - \frac{\partial \log f}{\partial x}\right)\frac{\varphi}{f}\right];$$

on peut donc supposer la fonction $f(x, y)$ égale à l'unité, les coefficients α, β satisfaisant à une relation de la forme

$$\alpha = e^{z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \beta\varphi\right). \tag{63'}$$

Si nous posons ensuite $z = Z - \log\varphi(x, y)$, β est remplacée par $\beta - \frac{\partial \log \varphi}{\partial x}$, et la relation (63') devient finalement

$$\alpha + \beta e^{z} = 0. \tag{63''}$$

Donc, toutes les fois qu'il existe des fonctions $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ satisfaisant à une relation de la forme (63), on peut, par une transformation simple, ramener l'équation (59') à la forme

$$dv = v[(p + \beta)\, dx - \alpha\, dy] + dx + e^{z}\, dy, \tag{59''}$$

α et β étant liés par la condition (63'').

On vérifie immédiatement que la condition d'intégrabilité est indépendante de v.

Le calcul précédent suppose toutefois que les deux fonctions f et φ sont différentes de zéro. Si $\varphi = 0$, α doit être indépendant de z, et l'on peut alors, d'après une remarque déjà utilisée, supposer $\alpha = 0$. On doit alors avoir $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, et l'équation aux différentielles totales (59′) se réduit à

$$dv = [v(p+\beta) + X]\,dx,$$

dont la condition d'intégrabilité est

$$s + \frac{d\beta}{dy} = 0,$$

quelle que soit la fonction X. On est donc conduit à une équation admettant une intégrale intermédiaire du premier ordre.

De même, si $f = 0$, β ne dépend pas de z; on peut supposer $\beta = 0$, $\varphi = Y$, et l'équation (59′) devient

$$dv = vp\,dx + (Ye^z - \alpha v)\,dy.$$

La condition d'intégrabilité est, quelle que soit la fonction Y,

$$s + \frac{d\alpha}{dx} = 0,$$

et admet une intégrale intermédiaire du premier ordre.

Supposons enfin qu'il existe une infinité de systèmes de deux fonctions (f, φ), différentes de zéro, satisfaisant à la condition (63). Soient (f_1, φ_2), (f_2, φ_2) deux systèmes distincts de solutions de cette équation. Des deux relations

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} + \alpha f_1 = e^z\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \beta\varphi_1\right),$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial y} + \alpha f_2 = e^z\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \beta\varphi_2\right),$$

on tire

$$\alpha(f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1) = e^z\left(\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right) + \varphi_1\frac{\partial f_2}{\partial y} - \varphi_2\frac{\partial f_1}{\partial y},$$
$$-\beta(f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1) = e^{-z}\left(f_1\frac{\partial f_2}{\partial y} - f_2\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) + f_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - f_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}.$$

On ne peut avoir $f_2\varphi_1 = f_1\varphi_2$; en effet, en posant $\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{f_2}{f_1} = \rho$, les équations précédentes donneraient $\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\rho}{\partial y} = 0$, et les deux systèmes de solutions (f_1, φ_1), (f_2, φ_2) ne seraient pas distincts. Les fonctions α et β sont donc de la forme

$$\alpha = a(x, y)e^z + \pi(x, y),$$
$$\beta = b(x, y)e^{-z} + \pi_1(x, y).$$

Ainsi qu'on l'a déjà remarqué plusieurs fois, nous pouvons, en changeant z en $z + \psi(x, y)$, augmenter α et β de fonctions arbitraires de x et de y. On peut donc, sans diminuer la généralité, supposer les deux fonctions α et β de la forme

$$(65) \qquad \alpha = a(x, y)e^{z}, \qquad \beta = b(x, y)e^{-z}.$$

Toutes les fois que les fonctions α et β sont de cette forme, il existe une infinité de systèmes de deux fonctions $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, satisfaisant à la condition (63). Cette condition devient, en effet,

$$\frac{\partial f}{\partial y} + afe^{z} = e^{z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - b\varphi e^{-z}\right),$$

et l'on a, pour déterminer f et φ, les deux équations simultanées

$$(66) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -b\varphi, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = af;$$

l'élimination de φ conduit à une équation linéaire de Laplace pour la fonction $f(x, y)$.

En résumé, quatre cas peuvent se présenter :

1° Si α et β sont des fonctions quelconques, il n'y a pas d'autres fonctions $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ satisfaisant à la relation (63) que $f = 0$, $\varphi = 0$.

2° Si, en ajoutant à z une fonction de x, y convenable, on peut ramener l'équation aux différentielles totales à la forme (59″) où α et β sont liées par la relation

$$\alpha + \beta e^{z} = 0,$$

la fonction β étant quelconque; l'équation (63) admet le système de solutions $f = 1$, $\varphi = -1$, et celui-là seulement.

3° Si l'une seule des fonctions α, β, la première par exemple, est indépendante de z, on peut supposer $\alpha = 0$, $f = Y$, $\varphi = 0$.

4° Enfin, si les fonctions α, β sont de la forme (65), ou peuvent être ramenées à cette forme, il existe une infinité de systèmes de deux fonctions $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ satisfaisant à la condition (63), et dépendant de deux fonctions arbitraires d'une variable.

17. Considérons en particulier le dernier cas. Nous écrirons l'équation aux différentielles totales en changeant u en $\frac{1}{u}$,

$$d \log u = -(p + b e^{-z})\, dx + a e^{z}\, dy;$$

des deux relations

$$(67) \qquad \frac{\partial \log u}{\partial x} = -p - b e^{-z}, \qquad \frac{\partial \log u}{\partial y} = a e^{z},$$

on tire, en éliminant u, l'équation

$$(68) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + \frac{d}{dy}(be^{-z}) + \frac{d}{dx}(ae^{z}) = 0,$$

tandis que l'élimination de z conduit à une équation linéaire en u

$$(69) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial \log a}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + a b u = 0.$$

L'équation (68) est une équation de Moutard qui se déduit de l'équation linéaire (69) par la transformation de Bäcklund B_2 définie par les formules (67).

Soient f et φ un système de solutions des équations (66). L'équation aux différentielles totales

$$(70) \qquad dv = v\,[(p + b e^{-z})\, dx - a e^{z}\, dy] + f\, dx + e^{z} \varphi\, dy$$

conduit encore à la condition d'intégrabilité (68), et la fonction v est elle-même une intégrale d'une équation du second ordre qui se déduit de l'équation linéaire (69) par une transformation connue. En effet, si l'on rapproche les relations

$$(71) \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = v(p + b e^{-z}) + f, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^{z}(\varphi - a v)$$

des conditions (67), elles deviennent, en éliminant z et p,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = f - v \frac{\partial \log u}{\partial x},$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = - v \frac{\partial \log u}{\partial y} + \frac{\varphi}{a} \frac{\partial \log u}{\partial y},$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{\partial (uv)}{\partial x} = uf, \qquad \frac{\partial (uv)}{\partial y} = \frac{\varphi}{a} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

L'élimination de uv conduit encore à l'équation (69), tandis que l'élimination de u conduit à une autre équation linéaire, à laquelle satisfait le produit uv. Ce sont des transformations bien connues, et nous n'obtenons pas de cette façon de résultats essentiellement nouveaux.

18. Cherchons maintenant s'il est possible de satisfaire à la relation (60) en prenant pour $F(x, y, z, p)$ une fonction *non linéaire* de p. En différentiant cette relation (60) deux fois par rapport à p, on obtient une nouvelle relation, où ne figure plus la fonction Φ,

$$-\frac{\partial^3 F}{\partial p^3}\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}\right)-2\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{\partial\alpha}{\partial z}+\frac{\partial^3 F}{\partial p^2\,\partial y}+\frac{\partial^3 F}{\partial p^2\,\partial z}q+\alpha\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}=0,$$

qui se décompose en deux équations distinctes :

$$\frac{\partial^3 F}{\partial p^2\,\partial z}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\frac{\partial^3 F}{\partial p^3}=0,$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial p^2\,\partial y}+\alpha\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}-2\frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}-\frac{\partial^3 F}{\partial p^3}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\alpha}{\partial z}p\right)=0.$$

On déduit de la première que $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}$ est une fonction des variables $x, y, v = p+\beta$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}=f(x, y, p+\beta);$$

on a ensuite

$$\frac{\partial^3 F}{\partial p^3}=\frac{\partial f}{\partial v},\qquad \frac{\partial^3 F}{\partial p^2\,\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial\beta}{\partial y},$$

et la seconde équation devient

$$(72)\qquad \frac{\partial f}{\partial y}+\alpha f=\frac{\partial\alpha}{\partial z}\left(2f+v\frac{\partial f}{\partial v}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\beta\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right).$$

Nous avons à examiner dans quels cas cette équation admet une intégrale *différente de zéro* et indépendante de z. En différentiant par rapport à z, on obtient la nouvelle relation

$$(73)\quad f\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}-2\frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial f}{\partial v}\left(v\frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\beta\frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}\right)=0.$$

Supposons d'abord que $\frac{\partial\alpha}{\partial z}-2\frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}$ ne soit pas nul. Le quotient

$$\frac{f}{\frac{\partial f}{\partial v}} = v\,\frac{\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}}{\frac{\partial \alpha}{\partial z} - 2\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}} + \frac{\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \beta\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}}{\frac{\partial \alpha}{\partial z} - 2\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}}$$

ne doit dépendre que de x, y, v. Il faut donc que le coefficient de v soit une fonction des seules variables x, y, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} = \frac{\partial \alpha}{\partial z}\varphi(x, y).$$

Si $\varphi(x, y)$ n'est pas nul, ce que nous supposerons d'abord, α est de la forme

$$\alpha = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)\,e^{\varphi(x, y)z}, \tag{74}$$

et, en remplaçant α par cette expression dans l'équation (72), elle devient

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} + [\varphi_1 + \varphi_2 e^{\varphi(x,y)z}]f = \varphi\varphi_2 e^{\varphi z}\left(2f + v\frac{\partial f}{\partial v}\right)\\ + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}e^{\varphi z} + \varphi_2\frac{\partial \varphi}{\partial x}z e^{\varphi z} - \beta\varphi_2\varphi e^{\varphi z}\right).\end{aligned}$$

En donnant à v une valeur telle que $\frac{\partial f}{\partial v}$ ne soit pas nul, on voit que, pourvu que φ ne soit pas nul, β est de la forme

$$\beta = \psi_0(x, y) + \psi_1(x, y)z + \psi_2(x, y)e^{-\varphi z}. \tag{75}$$

Substituons ces expressions de α et de β dans l'équation (72): elle devient

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} + (\varphi_1 + \varphi_2 e^{\varphi z})f = \varphi\varphi_2 e^{\varphi z}\left(2f + v\frac{\partial f}{\partial v}\right)\\ + \frac{\partial f}{\partial v}\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}e^{\varphi z} + \varphi_2\frac{\partial \varphi}{\partial x}z e^{\varphi z} - \varphi\varphi_2 e^{\varphi z}(\psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 e^{-\varphi z})\right]\end{aligned}$$

et se décompose en trois équations distinctes :

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial y} + f\varphi_1 = \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \varphi\varphi_2\psi_2\right),\\ &\varphi_2 f = \varphi\varphi_2\left(2f + v\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \varphi\varphi_2\psi_0\right),\\ &\varphi_2\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi\psi_1\right) = 0.\end{aligned}\right. \tag{76}$$

Si $\varphi_2 \frac{\partial f}{\partial v}$ n'est pas nul, on tire de la dernière de ces relations

$$\psi_1 = \frac{\partial \log \varphi}{\partial x},$$

et les deux premières donnent

$$(77) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \log f}{\partial v} &= \frac{1 - 2\varphi}{\varphi v + \frac{\partial \log \varphi_2}{\partial x} - \varphi\psi_0}, \\ \frac{\partial \log f}{\partial y} &= \frac{\partial \log f}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \varphi\varphi_2\psi_2\right) - \varphi_1, \end{aligned} \right.$$

car le dénominateur ne peut être nul, puisque φ est supposé différent de zéro. Pour obtenir la condition d'intégrabilité de ce système, il suffit de calculer de deux façons la dérivée seconde $\frac{\partial^2 \log f}{\partial y\, \partial v}$. En différentiant les deux équations par rapport à v, on a

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial y\, \partial v} = \frac{\partial^2 \log f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \varphi\varphi_2\psi_2\right) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \varphi\varphi_2\psi_2\right)\frac{\varphi(2\varphi - 1)}{\left(\varphi v + \frac{\partial \log \varphi_2}{\partial x} - \varphi\psi_0\right)^2}.$$

Si l'on différentie la première par rapport à y, on a, d'autre part,

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial v\, \partial y} = \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial y} v - 2\frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial \log \varphi_2}{\partial x} - \varphi\psi_0\right) - (1 - 2\varphi)\left[\frac{\partial^2 \log \varphi_2}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial(\varphi\psi_0)}{\partial v}\right]}{\left(\varphi v + \frac{\partial \log \varphi_2}{\partial x} - \varphi\psi_0\right)^2}.$$

Pour que ces deux expressions de $\frac{\partial^2 \log f}{\partial y\, \partial v}$ soient les mêmes, il est nécessaire que $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ soit nul, c'est-à-dire que $\varphi(x, y)$ soit une fonction X de la seule variable x. Les formules (76) donnent alors

$$(76') \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \log f}{\partial v} &= \frac{1 - 2\mathrm{X}}{\mathrm{X} v + \frac{\partial \log \varphi_2}{\partial x} - \mathrm{X}\psi_0}, \\ \frac{\partial \log f}{\partial y} &= \frac{\partial \log f}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \mathrm{X}\varphi_2\psi_2\right) - \varphi_1, \\ \psi_1 &= \frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}}. \end{aligned} \right.$$

La condition d'intégrabilité des deux premières équations devient

$$\frac{X(2X-1)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-X\varphi_2\psi_2\right)}{\left(Xz+\frac{\partial\log\varphi_2}{\partial x}-X\psi_0\right)^2}=\frac{(2X-1)\left(\frac{\partial^2\log\varphi_2}{\partial x\,\partial y}-X\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right)}{\left(Xz+\frac{\partial\log\varphi_2}{\partial x}-X\psi_0\right)^2},$$

ou, en supposant (¹) $2X-1\neq 0$,

$$\frac{\partial^2\log\varphi_2}{\partial x\,\partial y}-X\frac{\partial\psi_0}{\partial y}=X\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-X^2\varphi_2\psi_2,$$

d'où l'on tire

$$\psi_2=\frac{1}{X\varphi_2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right)-\frac{1}{X^2\varphi_2}\,\frac{\partial^2\log\varphi_2}{\partial x\,\partial y}.$$

On a donc les expressions générales des coefficients α et β,

$$(78)\quad \begin{cases} \alpha=\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)e^{Xz}, \\ \beta=\psi_0(x,y)+\dfrac{X'}{X}z+\dfrac{e^{-Xz}}{X\varphi_2}\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\dfrac{\partial\psi_0}{\partial y}-\dfrac{1}{X}\,\dfrac{\partial^2\log\varphi_2}{\partial x\,\partial y}\right), \end{cases}$$

qui dépendent d'une fonction arbitraire X de la variable x et de *trois fonctions arbitraires* $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$, $\psi_0(x,y)$ *des deux variables* x *et* y.

L'expression correspondante de la fonction f est

$$f=X_1 e^{-\int\varphi_1 dy}\left(Xz+\frac{\partial\log\varphi_2}{\partial x}-X\psi_0\right)^{\frac{1}{X}-2},$$

X_1 étant une nouvelle fonction arbitraire de x.

Mais on peut, par quelques transformations simples, faire disparaître quelques-unes des fonctions arbitraires qui figurent dans les expressions de α, β, f. Dans l'équation aux différentielles totales

$$d\log u=(p+\beta)\,dx-\alpha\,dy,$$

où α et β ont les expressions (78), posons

$$z=Z-\frac{1}{X}\log\varphi_2,\qquad p=P+\frac{X'}{X^2}\log\varphi_2-\frac{1}{X}\,\frac{\partial\log\varphi_2}{\partial x};$$

(¹) On aurait alors $2\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}=\dfrac{\partial\alpha}{\partial z}$, cas qui sera examiné plus loin.

cette équation devient

$$d\log u = \left[P + \frac{X'}{X^2}\log\varphi_2 - \frac{1}{X}\frac{\partial \log\varphi_2}{\partial x} + \psi_0 + \frac{X'}{X}\left(Z - \frac{1}{X}\log\varphi_2\right) + \frac{e^{-XZ+\log\varphi_2}}{X\varphi_2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_0}{\partial y} - \frac{1}{X}\frac{\partial^2\log\varphi_2}{\partial x\,\partial y}\right)\right]dx - (\varphi_1 + \varphi_2 e^{XZ-\log\varphi_2})\,dy.$$

C'est une équation de même forme que la première, où l'on aurait $\varphi_2 = 1$, et où ψ_0 serait remplacé par $\psi_0 - \frac{1}{X}\frac{\partial\log\varphi_2}{\partial x}$. On peut donc, sans restreindre la généralité, prendre pour α et β les expressions

$$(78') \qquad \begin{cases} \alpha = \varphi_1(x, y) + e^{Xz}, \\ \beta = \psi_0(x, y) + \dfrac{X'}{X}z + \dfrac{e^{-Xz}}{X}\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi_0}{\partial y}\right). \end{cases}$$

L'équation aux différentielles totales

$$d\log u = \left[p + \psi_0 + \frac{X'}{X}z + \frac{e^{-Xz}}{X}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right)\right]dx - (\varphi_1 + e^{Xz})\,dy$$

peut à son tour être remplacée par l'équation

$$d\log u = \left[p + \psi_0 + \int\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}dy + \frac{X'}{X}z + \left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)\frac{e^{-Xz}}{X}\right]dx - e^{Xz}\,dy.$$

qui donne la même condition d'intégrabilité. Les valeurs correspondantes de α et β sont

$$(78'') \qquad \begin{cases} \alpha = e^{Xz}, \\ \beta = \psi_0 + \displaystyle\int\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}dy + \frac{X'}{X}z + \frac{e^{-Xz}}{X}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right); \end{cases}$$

ce sont encore des expressions de la forme (78) où l'on aurait $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 1$, et où l'on aurait remplacé ψ_0 par $\psi_0 + \int\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}dy$. Nous pouvons donc prendre pour α et β les expressions

$$(79) \qquad \alpha = e^{Xz}, \qquad \beta = \psi_0 + \frac{X'}{X}z + \frac{e^{-Xz}}{X}\frac{\partial\psi_0}{\partial y},$$

$\psi_0(x, y)$ étant une fonction arbitraire. On a alors

$$-X_1(v - \psi_0)^{\frac{1}{X}-2} = X_1(p + \beta - \psi_0)^{\frac{1}{X}-2},$$

X_1 étant une autre fonction arbitraire de x ou, en tenant compte de l'expression de β,

$$f = X_1 \left(p + \frac{X'}{X} z + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{e^{-Xz}}{X}\right)^{\frac{1}{X}-2} \tag{80}$$

Si X est différent de l'unité, $F(x, y, z, p)$ est de la forme

$$F = X_2 \left(p + \frac{X'}{X} z + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{e^{-Xz}}{X}\right)^{\frac{1}{X}} + Ap + B,$$

et l'on vérifie facilement que l'on satisfait à la condition (60) en prenant

$$F = X_2 \left(p + \frac{X'}{X} z + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{e^{-Xz}}{X}\right)^{\frac{1}{X}}, \qquad \Phi = 0,$$

quelle que soit la fonction arbitraire $X_2(x)$.

L'équation aux différentielles totales

$$\begin{aligned} du = u \left[\left(p + \psi_0 + \frac{X'}{X} z + \frac{e^{-Xz}}{X} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right) dx - e^{Xz} dy\right] \\ + X_2 \left(p + \frac{X'}{X} z + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{e^{-Xz}}{X}\right)^{\frac{1}{X}} dx \end{aligned} \tag{81}$$

donne donc toujours la même condition d'intégrabilité, quelle que soit la fonction X_2,

$$s + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + \frac{X'}{X} q + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \frac{e^{-Xz}}{X} - \frac{\partial \psi_0}{\partial y} e^{-Xz} q + X' e^{Xz} z + X e^{Xz} p = 0. \tag{82}$$

Nous traiterons plus loin le cas où l'on peut satisfaire à la condition (60) en prenant pour F une fonction non linéaire de p et pour Φ une fonction non linéaire de q.

Dans le cas particulier où $X = 1$, on a

$$\alpha = e^z, \qquad \beta = \psi_0 + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} e^{-z}, \qquad f = X_1 \left(p + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} e^{-z}\right)^{-1}$$

et l'on vérifie de même que l'on satisfait à la condition (60) en prenant

$$F = X_1 \left(p + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} e^{-z}\right) \left\{ \log\left(p + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} e^{-z}\right) + 1 \right\}, \qquad \Phi = 0;$$

l'équation aux différentielles totales correspondante conduit à la condition d'intégrabilité

$$s + \frac{\partial\psi_0}{\partial y} + \frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2} e^{-z} - \frac{\partial\psi_0}{\partial y} e^{-z} q + e^z p = 0,$$

qui se déduit de l'équation (82) en y faisant $X = 1$.

19. On a supposé, dans ce qui précède, que $\frac{\partial\alpha}{\partial z}$, $\frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial z} - 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ ne sont pas nuls; la relation (73) prouve d'ailleurs que la dernière hypothèse entraîne la troisième. Il reste donc seulement trois cas à examiner.

1° Si $\frac{\partial\alpha}{\partial z} = 0$, α est indépendant de z et l'on a vu plus haut que l'on peut supposer $\alpha = 0$. L'équation (72) donne alors $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, et l'on peut prendre pour f une fonction arbitraire de x et de $p + \beta$. L'équation

$$du = [u(p+\beta) + F(x, p+\beta)]\, dx$$

conduit toujours, quelle que soit la fonction F, à la même condition d'intégrabilité

$$s + \frac{d\beta}{dy} = 0.$$

2° Supposons $\frac{\partial\alpha}{\partial z} \neq 0$, $\frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} = 0$; α est une fonction linéaire de z

$$\alpha = \varphi(x, y)z + \varphi_1(x, y),$$

et la condition (72) montre que β est aussi une fonction linéaire de z

$$\beta = \psi(x, y)z + \psi_1(x, y).$$

L'équation aux différentielles totales

$$d\log u = [p + \psi(x, y)z + \psi_1(x, y)]\, dx - [\varphi(x, y)z + \varphi_1(x, y)]\, dy$$

ne change pas de forme, et les coefficients φ et ψ restent les mêmes, quand on change z en $z + \mu(x, y)$. On peut donc supposer que $z = 0$ est une intégrale de l'équation linéaire qui exprime la condition d'intégrabilité, c'est-à-dire que $\psi_1\, dx - \varphi_1\, dy$ est une différentielle exacte $d\lambda$. En changeant u en ue^λ, l'équation aux différentielles totales devient

$$d \log u = [p + \psi(x, y) z]\, dx - \varphi(x, y) z\, dy.$$

On peut donc supposer $\varphi_1 = \psi_1 = 0$. L'équation (72) devient alors

$$\frac{\partial f}{\partial y} + f \varphi z = \varphi\left(2f + v\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} z - \varphi\psi z\right);$$

on en déduit que l'on a

$$\frac{\partial \log f}{\partial v} = \frac{\varphi}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi\psi},$$

et par suite f est de la forme

$$f = e^{\mathrm{A}v + \mathrm{B}} = e^{\mathrm{A}(p + \psi z) + \mathrm{B}},$$

A et B étant des fonctions de x, y. La relation (72) devient, en divisant par l'exponentielle,

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y} + \varphi z = \varphi(2 + \mathrm{A} v) + \mathrm{A}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} z - \varphi\psi z\right),$$

ce qui exige que l'on ait

$$\frac{\partial \log \mathrm{A}}{\partial y} = \varphi, \qquad \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y} = 2\varphi, \qquad \varphi = \mathrm{A}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi\psi\right);$$

on en tire

$$(83) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \frac{\partial \log \mathrm{A}}{\partial y}, \qquad \mathrm{B} = \log \mathrm{A}^2 + \log \mathrm{X}, \\ \psi &= \frac{\partial \log \varphi}{\partial x} - \frac{1}{\mathrm{A}} = \frac{\partial^2 \log \mathrm{A}}{\partial x\, \partial y} : \frac{\partial \log \mathrm{A}}{\partial y} - \frac{1}{\mathrm{A}}, \end{aligned} \right.$$

$\mathrm{A}(x, y)$ étant une fonction arbitraire des variables x et y, et X une fonction arbitraire de x. On vérifie aisément que l'on satisfait à la condition (60) en prenant

$$\mathrm{F} = \mathrm{X} e^{\mathrm{A}(p + \psi z)}, \qquad \Phi = 0,$$

et par suite la condition d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales

$$du = u[(p + \psi z)\, dx - \varphi z\, dy] + \mathrm{X} e^{\mathrm{A}(p + \psi z)}\, dx$$

conduit toujours à l'équation linéaire

$$(84) \qquad s + \frac{\partial \psi}{\partial y} z + \psi q + \frac{\partial \varphi}{\partial x} z + \varphi p = 0,$$

quelle que soit la fonction X. De même, l'élimination de z entre les deux relations

$$(85)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= u(p+\psi z) + X e^{\lambda(p+\psi z)},\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\varphi z u, \end{aligned}\right.$$

conduit à une autre équation du second ordre en u, qui se déduit de l'équation linéaire par une transformation B_2.

3° Si l'on a $\frac{d\alpha}{dz} = 2\frac{d^2\alpha}{dz^2}$, α est de la forme

$$\alpha = e^{\frac{z+\varphi(x,y)}{2}} + \varphi_1(x, y).$$

Ainsi qu'on l'a remarqué plusieurs fois, on peut ajouter à α une fonction quelconque de x, y, à condition de changer aussi β. On peut donc supposer $\varphi_1 = 0$; si l'on change ensuite z en $z - \varphi$, on voit que l'on est ramené à une équation de la forme

$$d \log u = (p + \beta)\, dx - e^{\frac{z}{2}}\, dy.$$

L'équation (72) devient

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} e^{\frac{z}{2}}(v - \beta)\frac{\partial f}{\partial v};$$

comme f ne dépend que de x, y, v et que β est indépendant de v, cette égalité n'est possible que si l'on a $\frac{df}{dy} = \frac{df}{dv} = 0$, c'est-à-dire que f doit se réduire à une fonction de la seule variable x. Nous sommes donc conduits à chercher à satisfaire à l'identité (60) en prenant pour F et Φ des expressions de la forme suivante :

$$(86)\qquad F = Xp^2 + Ap + B, \qquad \Phi = Cq + D,$$

A, B, C, D étant des fonctions de x, y, z. La condition (60) s'écrit alors

$$(C - A - 2Xp)\left(\frac{1}{2} e^{\frac{z}{2}} p + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial z} q\right) + p\left(\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} q\right) + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial z} q$$
$$- \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial z} p\right) q - \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial D}{\partial z} p + (Cq + D)(p + \beta) + e^{\frac{z}{2}}(Xp^2 + Ap + B) = 0.$$

Le premier membre est une fonction bilinéaire en p et q et, en égalant à zéro les coefficients de pq, p, q, et le terme indépendant, on obtient les quatre relations

$$(87)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial z} - 2X\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial z} + C = 0,\\
&\frac{1}{2}(C - A)e^{\frac{z}{2}} - 2X\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial z} + D + Ae^{\frac{z}{2}} = 0,\\
&(C - A)\frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} + C\beta = 0,\\
&(C - A)\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial x} + D\beta + Be^{\frac{z}{2}} = 0.
\end{aligned}\right.$$

On satisfait à la première relation de la façon la plus générale en prenant

$$(88)\quad C = \frac{\partial U}{\partial z}, \qquad A = 2X\beta + \frac{\partial U}{\partial z} - U, \qquad C - A = U - 2X\beta,$$

U étant une fonction arbitraire de x, y, z. La troisième relation devient

$$(U - 2X\beta)\frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z}\beta = 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(B - X\beta^2 + U\beta - \frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0.$$

On aura donc

$$(89)\quad B = \frac{\partial U}{\partial x} - U\beta + X\beta^2 + \varphi(x, y).$$

La seconde des conditions (87) devient

$$\frac{1}{2}(U - 2X\beta)e^{\frac{z}{2}} - 2X\frac{\partial \beta}{\partial y} + 2X\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial z}$$
$$+ D + e^{\frac{z}{2}}\left(2X\beta + \frac{\partial U}{\partial z} - U\right) = 0,$$

ou, en multipliant par e^{-z},

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(Ue^{-\frac{z}{2}} + e^{-z}\frac{\partial U}{\partial y} - e^{-z}D\right) + X\beta e^{-\frac{z}{2}} = 0.$$

Si nous posons

$$(90)\quad D = \frac{\partial U}{\partial y} + e^{\frac{z}{2}}U + e^{z}V,$$

on en tire

$$(91) \qquad X\beta e^{-\frac{z}{2}} = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

En substituant les expressions précédentes de A, B, C, D dans la dernière des conditions (87), U disparaît et il reste la relation

$$(92) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + e^{\frac{z}{2}}\varphi - e^{z}\frac{\partial V}{\partial x} + \beta e^{z} V + X\beta^2 e^{\frac{z}{2}} = 0.$$

Si l'on y remplace β par sa valeur tirée de la formule (91), on a une équation aux dérivées partielles du premier ordre pour déterminer $V(x, y, z)$. Les fonctions X et $\varphi(x, y)$ peuvent être choisies arbitrairement. En particulier, pour que Φ soit nul, il faut prendre pour U une fonction indépendante de z, et les relations (90) et (91) montrent que β doit être de la forme

$$\beta = \psi(x, y) + 2\frac{\partial \psi}{\partial y} e^{-\frac{z}{2}}.$$

Les relations qui donnent A et B montrent ensuite que l'on doit prendre

$$F = X\left(p + 2\frac{\partial \psi}{\partial y} e^{-\frac{z}{2}}\right)^2,$$

et l'équation aux différentielles totales

$$(81') \quad du = u\left(p + \psi + 2\frac{\partial \psi}{\partial y} e^{-\frac{z}{2}}\right)dx - ue^{\frac{z}{2}}dy + X\left(p + 2\frac{\partial \psi}{\partial y} e^{-\frac{z}{2}}\right)^2 dx$$

conduit, quelle que soit la fonction X, à la condition d'intégrabilité

$$(82') \qquad s + \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{z}{2}}\right) + \frac{d}{dy}\left(2\frac{\partial \psi}{\partial y} e^{-\frac{z}{2}}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Remarquons que les équations (81') et (82') se déduisent des équations générales (81) et (82) en y faisant $X = \frac{1}{2}$.

20. On peut opérer de la même façon pour trouver les cas où il est possible de satisfaire à la condition (60) en prenant pour Φ une fonction non linéaire de q. En différentiant deux fois par rapport à q cette relation, elle devient

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial q^3}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\alpha}{\partial z}p+\frac{\partial\beta}{\partial z}q\right)$$
$$+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial q^2}\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\,\partial q^2}-p\frac{\partial^3\Phi}{\partial z\,\partial q^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial q^2}(p+\beta)=0;$$

en égalant à zéro le coefficient de p et le terme indépendant de p, on obtient les deux équations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\varphi=0,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial q}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial z}q\right)+2\frac{\partial\beta}{\partial z}\varphi-\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varphi\beta=0,$$

où l'on a posé $\varphi=\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial q^2}$. La première montre que φ est de la forme

$$\varphi=e^z g(x,y,w),\qquad \text{où}\qquad w=q+\alpha,$$

et la deuxième devient

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\beta g=\frac{\partial\beta}{\partial z}\left(2g+w\frac{\partial g}{\partial w}\right)+\frac{\partial g}{\partial w}\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}-\alpha\frac{\partial\beta}{\partial z}\right);\tag{93}$$

c'est une équation analogue à l'équation (72), et que l'on peut discuter de la même façon. En différentiant les deux membres par rapport à z, on obtient la nouvelle équation

$$\left(2\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}+\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)g+\frac{\partial g}{\partial w}\left(w\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\beta}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\beta}{\partial z}-\alpha\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}\right)=0.$$

Supposons d'abord que $\frac{\partial\beta}{\partial z}$, $\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}$, $\frac{\partial\beta}{\partial z}+2\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}$, $\frac{\partial g}{\partial w}$ soient différents de zéro; on en conclut, comme plus haut, que le rapport $\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}:\frac{\partial\beta}{\partial z}$ ne dépend que des variables x, y, et par suite β est de la forme

$$\beta=\omega_1(x,y)+\omega_2(x,y)e^{\omega(x,y)z}.\tag{94}$$

En substituant cette expression de β dans la relation (93), on voit de même que α a une expression de la forme

$$\alpha=\pi_0(x,y)+\pi_1(x,y)z+\pi_2(x,y)e^{-\omega(x,y)z}.\tag{95}$$

En substituant ces expressions de α et de β dans l'équation (93), on obtient les trois conditions

$$(96)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} - g\,\omega_1 = \dfrac{\partial g}{\partial w}\left(\dfrac{\partial \omega_1}{\partial y} - \omega\omega_2\pi_2\right), \\ -\omega_2 g = \omega\omega_2\left(2g + w\dfrac{\partial g}{\partial w}\right) + \dfrac{\partial g}{\partial w}\left(\dfrac{\partial \omega_2}{\partial y} - \omega\omega_2\pi_0\right), \\ \omega_2\dfrac{\partial g}{\partial w}\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial y} - \pi_1\omega\right) = 0, \end{cases}$$

ω_2 et $\dfrac{\partial g}{\partial w}$ n'étant pas nuls par hypothèse, on a donc

$$(97)\quad \pi_1 = \frac{\partial \log \omega}{\partial y},$$

et les deux premières équations peuvent s'écrire

$$(98)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \log g}{\partial w} = -\dfrac{2\omega + 1}{\omega w + \dfrac{\partial \log \omega_2}{\partial y} - \omega\pi_0}, \\ \dfrac{\partial \log g}{\partial x} = \omega_1 + \dfrac{\partial \log g}{\partial w}\left(\dfrac{\partial \omega_1}{\partial y} - \omega\omega_2\pi_2\right). \end{cases}$$

Pour que ces deux équations soient compatibles, on voit, comme plus haut, que l'on doit avoir $\dfrac{\partial \omega}{\partial y} = 0$, ou $\omega = Y$. La condition d'intégrabilité donne alors

$$\pi_2(x, y) = \frac{1}{Y\omega_2}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} + \frac{\partial \pi_0}{\partial x}\right) - \frac{1}{Y^2\omega_2}\frac{\partial^2 \log \omega_2}{\partial x\,\partial y}$$

et les expressions générales des fonctions α et β sont les suivantes :

$$(99)\quad \begin{cases} \alpha = \pi_0(x, y) + \dfrac{Y'}{Y}z + \dfrac{1}{Y\omega_2}\left[\left(\dfrac{\partial \omega_1}{\partial y} + \dfrac{\partial \pi_0}{\partial x}\right) - \dfrac{1}{Y}\dfrac{\partial^2 \log \omega_2}{\partial x\,\partial y}\right]e^{-Yz}, \\ \beta = \omega_1(x, y) + \omega_2 e^{Yz}, \end{cases}$$

Y étant une fonction arbitraire de la variable y, ω_1, ω_2, π_0, trois fonctions arbitraires des deux variables x et y.

On verrait, comme au n° **18**, que l'on peut alors satisfaire à l'identité (60) en prenant pour Φ une fonction non linéaire de q et pour F la valeur zéro.

21. Si α et β sont à la fois de la forme (78) et de la forme (99), on peut satisfaire à l'identité (60) en prenant pour F une fonction non linéaire de p et pour Φ une fonction non linéaire de q. Il faut d'abord pour cela que l'on ait $X = -Y = m$, m étant une constante différente de zéro. Il faut, en outre, que l'on ait

$$\psi_0 = \omega_1, \qquad \omega_2 = \frac{1}{m\varphi_2}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} - \frac{1}{m}\frac{\partial^2 \log \varphi_2}{\partial x\, \partial y}\right),$$
$$\varphi_1 = \pi_0, \qquad \varphi_2 = \frac{-1}{m\,\omega_2}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} + \frac{\partial \pi_0}{\partial x} + \frac{1}{m}\frac{\partial^2 \log \omega_2}{\partial x\, \partial y}\right).$$

Supposons, comme on l'a expliqué plus haut (n° **18**), que l'on ait ramené α et β à une forme simple; on aura alors

$$\varphi_1 = 0, \qquad \omega_1 = 0, \qquad \psi_0 = 0, \qquad \pi_0 = 0,$$

et il reste les deux conditions

(100) $$\frac{\partial^2 \log \varphi_2}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \log \omega_2}{\partial x\, \partial y} = -m^2 \varphi_2 \omega_2.$$

On peut encore faire les calculs d'une façon plus symétrique. Si α et β sont de la forme

$$\alpha = \varphi_2(x, y)e^{mz}, \qquad \beta = \omega_2(x, y)e^{-mz},$$

les relations en f et g deviennent respectivement

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \varphi_2 e^{mz} f = m\varphi_2 e^{mz}\left(2f + v\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}e^{mz} - m\,\varphi_2\omega_2\right),$$
$$\frac{\partial g}{\partial x} - \omega_2 e^{-mz} g = -m\,\omega_2 e^{-mz}\left(2g + w\frac{\partial g}{\partial w}\right) + \frac{\partial g}{\partial w}\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial y}e^{-mz} + m\,\omega_2\varphi_2\right)$$

La première se décompose en deux équations distinctes

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -m\varphi_2\omega_2\frac{\partial f}{\partial v},$$
$$\varphi_2 f = 2m\varphi_2 f + m\varphi_2 v\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v},$$

ou

(101) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \log f}{\partial v} &= \frac{1 - 2m}{mv + \dfrac{\partial \log \varphi_2}{\partial x}}, \\ \frac{\partial \log f}{\partial y} &= \frac{-m(1 - 2m)\varphi_2\omega_2}{mv + \dfrac{\partial \log \varphi_2}{\partial x}}; \end{aligned}\right.$$

l'équation en g donne de même les deux conditions

$$
(102)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \log g}{\partial w} &= \frac{1 - 2m}{m w - \dfrac{\partial \log \omega_2}{\partial y}},\\
\frac{\partial \log g}{\partial x} &= \frac{m(1 - 2m)\,\omega_2 \varphi_2}{m w - \dfrac{\partial \log \omega_2}{\partial y}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si $2m - 1 \neq 0$, les conditions d'intégrabilité des équations (101) et (102) sont précisément les équations (100). Si ces conditions sont satisfaites, on a pour f et g les expressions générales suivantes :

$$
(103)\quad \left\{
\begin{aligned}
f &= \mathrm{X}\left(p + \omega_2 e^{mz} - \frac{1}{m}\,\frac{\partial \log \varphi_2}{\partial x}\right)^{\frac{1}{m} - 2},\\
g &= \mathrm{Y}\left(q + \varphi_2 e^{mz} - \frac{1}{m}\,\frac{\partial \log \omega_2}{\partial y}\right)^{\frac{1}{m} - 2}
\end{aligned}
\right.
$$

X étant une fonction arbitraire de x et Y une fonction arbitraire de y.

On vérifie aisément que l'on satisfait à la condition (60), pourvu que m soit différent de l'unité, en prenant

$$
\mathrm{F} = \mathrm{X}\left(p + \omega_2 e^{-mz} + \frac{1}{m}\,\frac{\partial \log \varphi_2}{\partial x}\right)^{\frac{1}{m}},
$$

$$
\Phi = \mathrm{Y} e^{z}\left(q + \varphi_2 e^{mz} - \frac{1}{m}\,\frac{\partial \log \omega_2}{\partial y}\right)^{\frac{1}{m}},
$$

de sorte que l'équation aux différentielles totales

$$
\begin{aligned}
(104)\quad du = u\,[(p + \omega_2 e^{-mz})\,dx - \varphi_2 e^{mz}\,dy]&\\
+ \mathrm{X}\left(p + \omega_2 e^{-mz} + \frac{1}{m}\,\frac{\partial \log \varphi_2}{\partial x}\right)^{\frac{1}{m}} dx&\\
+ \mathrm{Y} e^{z}\left(q + \varphi_2 e^{mz} - \frac{1}{m}\,\frac{\partial \log \omega_2}{\partial y}\right)^{\frac{1}{m}} dy&
\end{aligned}
$$

conduit toujours à la même condition d'intégrabilité,

$$
(105)\quad s + \frac{d}{dx}(\varphi_2 e^{mz}) + \frac{d}{dy}(\omega_2 e^{-mz}) = 0,
$$

quelles que soient les fonctions arbitraires X et Y.

22. On peut ramener l'équation (104) à une forme canonique simple par un changement de variables et d'inconnues. Des relations (100) on déduit immédiatement que le rapport $\omega_2 : \varphi_2$ est le produit d'une fonction de x par une fonction de y, ce qui conduit à une équation du second ordre se ramenant à l'équation de Liouville. On en conclut que les fonctions φ_2 et ω_2 sont de la forme

$$\varphi_2 = \frac{X_1 Y_1}{X + Y}, \qquad \omega_2 = \frac{X_2 Y_2}{X + Y},$$

X, X_1, X_2 étant des fonctions de x, et Y, Y_1, Y_2 des fonctions de y. En substituant dans les relations (100), on trouve que ces six fonctions doivent vérifier la relation

$$X' Y' = - m^2 X_1 X_2 Y_1 Y_2. \tag{106}$$

Le quotient $\frac{X_1 X_2}{X'}$ est donc constant et, comme X_1 n'est déterminée qu'à un facteur constant près, on peut supposer que l'on a

$$X' = m X_1 X_2, \qquad Y' = - m Y_1 Y_2. \tag{107}$$

Il est visible que l'équation (105) ne change pas de forme quand on prend pour variables indépendantes, au lieu de x et y, deux fonctions quelconques de ces variables. On peut donc supposer que l'on a $X = mx$, $Y = - my$, et les relations (107) deviennent

$$X_1 X_2 = Y_1 Y_2 = 1. \tag{107'}$$

Si l'on pose ensuite

$$z = Z - \frac{1}{m}(\log X_1 + \log Y_1), \qquad u = \frac{v}{X_1^{m}},$$

on voit que l'équation (104) est ramenée à une forme toute pareille, où l'on aurait

$$\varphi_2 = \omega_2 = \frac{1}{m(x-y)},$$

$$\begin{aligned} dv = v \left\{ \left[p + \frac{e^{-mz}}{m(x-y)}\right] dx - \frac{e^{mz}}{m(x-y)} dy \right\} \\ + X_z \left[p + \frac{e^{-mz}}{m(x-y)} - \frac{1}{m(x-y)}\right]^{\frac{1}{m}} dx \\ + Y_z e^z \left[q + \frac{e^{mz}}{m(x-y)} - \frac{1}{m(x-y)}\right]^{\frac{1}{m}} dy. \end{aligned} \tag{104'}$$

Supposons en particulier $X_z = Y_z = 0$: en posant $mz = Z$, $\log u = -\frac{1}{m}\log v$, l'équation aux différentielles totales donne les deux conditions

$$(108)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \log v}{\partial x} &= -\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{e^{-Z}}{x-y},\\ \frac{\partial \log v}{\partial y} &= \frac{e^{Z}}{x-y},\end{aligned}\right.$$

et l'élimination de Z conduit à l'équation linéaire

$$(109)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{x-y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{(x-y)^2} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$(110)\qquad v = X_1' + \frac{Y_1 + X_1}{x-y},$$

X_1 étant une fonction arbitraire de x et Y_1 une fonction arbitraire de y. On voit donc que, quelles que soient les fonctions arbitraires que l'on prenne dans la formule (104'), les résolvantes du système de Pfaff défini par l'équation (104') et la relation $dz = p\,dx + q\,dy$, seront intégrables.

Le calcul précédent suppose implicitement que X dépend effectivement de x, et Y de y. Si l'une de ces fonctions se réduit à une constante, on peut prendre

$$\varphi_2 = X_1 Y_1, \qquad \omega_2 = X_2 Y_2,$$

et les formules (100) montrent que l'une de ces fonctions φ_2, ω_2 doit être nulle. Supposons par exemple $\omega_2 = 0$, φ_2 n'étant pas nul. On peut alors, par la même transformation que plus haut, ramener le cas général au cas où $\varphi_2 = 1$, c'est-à-dire supposer

$$\alpha = e^{mz}, \qquad \beta = 0.$$

On peut prendre alors $f = Xp^{\frac{1}{m}-2}$, et g doit être égal à une fonction arbitraire de y et de $q + e^{mz}$. On vérifie en effet que l'équation aux différentielles totales

$$du = u(p\,dx - e^{mz}\,dy) + Xp^{\frac{1}{m}}\,dx + e^{z}\Phi(y, q + e^{mz})\,dy$$

conduit toujours à la même condition d'intégrabilité

$$s + m e^{mz} p = 0,$$

quelles que soient les deux fonctions X et Φ. On obtiendra donc ainsi de nouveaux systèmes de Pfaff intégrables par des quadratures. Si l'on suppose, en particulier, la fonction Φ indépendante de q, on aura une résolvante de première espèce en éliminant z entre les deux équations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = up + Xp^{\frac{1}{m}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{mz} + e^{z}\Phi(y).$$

Par exemple, si l'on prend $m = 1$, $X = 1$, $\Phi = 1$, on retrouve une transformation de Bäcklund que j'ai signalée antérieurement (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. I, p. 443).

En résumé, nous avons déterminé toutes les équations aux différentielles totales

$$du = f(x, y, z, p, u)\,dx + \varphi(x, y, z, q, u)\,dy,$$

dont la condition d'intégrabilité conduit à une équation aux dérivées partielles

$$s + g(x, y, z)pq + a(x, y, z)p + b(x, y, z)q + c(x, y, z) = 0,$$

bilinéaire en p et q, *lorsque les deux dérivées* $\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}$ *et* $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2}$ *sont différentes de zéro*. La méthode suivie n'exige pas d'ailleurs que cette condition soit remplie, mais elle ne donne pas toutes les solutions du problème lorsque l'une au moins de ces deux dérivées n'est pas nulle. J'examinerai ce cas particulier dans un autre travail.