BULLETIN DE LA S. M. F.

ÉMILE COTTON

Sur quelques formules d'hydrodynamique

Bulletin de la S. M. F., tome 50 (1922), p. 134-147
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1922__50__134_1>

SUR QUELQUES FORMULES D'HYDRODYNAMIQUE;

PAR M. ÉMILE COTTON.

Les énoncés élémentaires des propositions fondamentales de la Dynamique des Systèmes donnés dans les Ouvrages classiques s'appliquent à un système formé des mêmes molécules, qu'on suit en quelque sorte dans leur mouvement. En Hydraulique, au contraire, on étudie le plus souvent la partie d'un fluide occupant un volume déterminé E limité par une surface S, en général fixe; les molécules intérieures à E ne sont pas nécessairement les mêmes d'un instant à l'autre. Il faut donc modifier les énoncés des propositions fondamentales; ce sont ces modifications que je me propose d'exposer ici, pour les fluides parfaits, en admettant que la surface frontière S peut varier avec le temps suivant une loi quelconque.

J'examine d'abord le principe des forces vives ou de la conservation de l'énergie, pour lequel M. Lamb a donné deux formules [*Hydrodynamics*, 4e édition, 1916, (5), p. 9, et (10), p. 10], concernant toutes deux le cas où la surface frontière S est une *surface fluide;* c'est donc le même ensemble de molécules qui intervient. M. Love a donné d'autre part (*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, édition française, t. IV, vol. 5, fasc. 1, p. 93) une formule pour le cas où la surface frontière S est *fixe*. Les formules données dans le présent article (dont les démonstrations diffèrent peu de celles de M. Lamb) concernent une surface S variable avec le temps, suivant une loi, censée connue, mais qui peut être indépendante de celle du mouvement du fluide. J'ai montré, par un exemple, que la Mécanique appliquée conduit à des problèmes de cette nature.

J'étudie ensuite les propositions concernant les quantités de mouvement. Elles conduisent à une généralisation du théorème auquel M. Joukowski (*Aérodynamique*, 1916) a donné le nom de « théorème d'Euler ».

1. *Rappel d'une formule d'Analyse.* — Nous utiliserons ici l'une des formules de dérivation des intégrales multiples où la fonction à intégrer et le domaine d'intégration dépendent d'un même paramètre variable. Rappelons tout d'abord cette formule, en renvoyant, pour la démonstration, au *Cours d'Analyse* de M. Goursat (3e édition, t. I, p. 658).

Soit

$$\text{(1)} \qquad I(t) = \int_E F(x, y, z, t)\, dE$$

une intégrale triple étendue au volume E limité par la surface S variable avec le paramètre t, désignant ici le temps, paramètre dont dépend elle-même la fonction à intégrer. La dérivée de I est donnée par la formule suivante :

$$\text{(2)} \qquad \frac{dI}{dt} = \int_E \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial t}\, dE + \int_S F(x, y, z, t)\, w_n\, dS,$$

où w_n, que j'appellerai la *vitesse normale de la surface* S *au point* M, a le sens suivant : soit M un point de la surface avec laquelle S coïncide à l'instant t, la normale à S en M rencontre la surface infiniment voisine avec laquelle S coïncide à l'instant $t + \delta t$ en un point M′, soit δn le vecteur MM′ compté positivement suivant la normale extérieure, $\frac{\delta n}{\delta t}$ a pour limite w_n lorsque δt tend vers zéro. Il est clair que w_n est nul si la surface frontière S est fixe.

2. *Calcul préliminaire.* — Nous allons appliquer cette formule successivement aux cas où $I(t)$ représente l'énergie cinétique, l'énergie potentielle correspondant aux forces de profondeur agissant sur le fluide et enfin l'énergie potentielle interne ou énergie intrinsèque (intrinsic energy).

Dans ces divers cas la fonction $F(x, y, z, t)$ est de la forme

$$F = \rho G, \tag{3}$$

ρ désignant comme d'habitude la densité; ρ et G sont des fonctions des variables x, y, z, t d'Euler.

Pour abréger, nous remarquerons une fois pour toutes que l'expression

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} G + \rho \frac{\partial G}{\partial t} \tag{4}$$

peut être transformée en utilisant l'expression de $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ donnée par l'équation de continuité ou de conservation de la masse.

Cette équation est, avec les notations couramment employées u, v, w pour les composantes de la vitesse,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \rho \frac{\partial G}{\partial t} - G\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] \\ &= \rho\left[\frac{\partial G}{\partial t} + u\frac{\partial G}{\partial x} + v\frac{\partial G}{\partial y} + w\frac{\partial G}{\partial z}\right] \\ &\quad - \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho G u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho G v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho G w)\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Le premier crochet n'est autre que la dérivée de la fonction G prise en suivant la molécule dans son mouvement : on la désigne par

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + u\frac{\partial G}{\partial x} + v\frac{\partial G}{\partial y} + w\frac{\partial G}{\partial z};$$

quant au second, il représente la divergence du vecteur $\rho G u$, $\rho G v$, $\rho G w$; l'intégrale triple correspondante peut être transformée en une intégrale de surface ou flux par la formule de Green; on a ainsi

$$\int_E \frac{\partial(\rho G)}{\partial t} dE = \int_E \rho \frac{dG}{dt} dE - \int_S \rho\, G(\alpha u + \beta v + \gamma w)\, dS,$$

où α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface frontière, Nous écrirons

$$(7) \qquad \int_E \frac{\partial(\rho G)}{\partial t} dE = \int_E \rho \frac{dG}{dt} dE - \int_S \rho G v_n dS,$$

en posant

$$v_n = u\alpha + v\beta + w\gamma;$$

v_n est la projection sur la normale extérieure à la surface frontière de la vitesse propre de la molécule du fluide placée sur cette surface à l'instant considéré, nous dirons plus brièvement que v_n est la *vitesse normale de la molécule fluide.*

On a donc, en définitive, formules (2) et (7),

$$(9) \qquad \frac{d}{dt}\left\{ \int_E \rho G \, dE \right\} = \int_E \rho \frac{dG}{dt} dE - \int_S \rho G (v_n - w_n) \, dS.$$

La différence $v_n - w_n$ entre la vitesse normale de la molécule fluide et la vitesse normale de la surface S représente ce qu'on peut appeler la *vitesse normale de la molécule par rapport à la surface* S, comptée positivement vers l'extérieur. Cette vitesse normale relative est bien définie, même si la surface S se déforme quand t varie : elle est nulle pour une surface imperméable; on peut dire que $\rho(v_n - w_n) \, dS \, \delta t$ représente la masse fluide ayant traversé entre les instants t et $t + \delta t$ un petit élément de la surface frontière dont l'aire (à l'instant t) est dS; nous dirons que $\rho(v_n - w_n) \, dS$ est le débit élémentaire de masse fluide à l'instant t, à travers l'élément dS, débit compté positivement vers l'extérieur de E.

Remarquons encore, à propos de l'interprétation physique des équations telles que (9) que, s'il s'agit d'une énergie $\int_E \rho G \, dE$, G est l'énergie rapportée à l'unité de masse, et l'intégrale

$$\int \rho G (v_n - w_n) \, dS$$

multipliée par δt donne, suivant une expression de M. Brillouin, l'énergie « entraînée par le fluide hors du volume E » entre les instants t et $t + \delta t$; on peut dire que $\int_S \rho G (v_n - w_n) \, dS$ donne le *débit de l'énergie correspondante à travers la surface* S (débit compté positivement vers l'extérieur), il est variable en général avec l'instant considéré.

3. *Énergie cinétique.* — Nous considérons d'abord l'énergie cinétique T_E correspondant à la masse fluide contenue dans E. On a

$$(10) \qquad T_E = \int_E \frac{1}{2} \rho q^2 \, dE, \qquad q^2 = u^2 + v^2 + w^2;$$

la fonction G est ici égale au demi-carré de la vitesse; on calcule la dérivée $\frac{dG}{dt}$ à l'aide des équations fondamentales de l'Hydrodynamique

$$(11) \qquad \frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad \frac{dw}{dt} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z};$$

où X, Y, Z sont les composantes de la force de profondeur rapportée à l'unité de masse et où p désigne la pression. Il vient

$$\rho \frac{d\left(\frac{1}{2}q^2\right)}{dt} = \rho(Xu + Yv + Zw) - \left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z}\right)$$
$$= \rho(Xu + Yv + Zw) - \left[\frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z}\right] + p\Theta,$$

où

$$(12) \qquad \Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

est la vitesse de dilatation cubique.

L'intégrale

$$\int_E \left[\frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z}\right] dE = \int_S p v_n \, dS,$$

d'après la formule de Green. On a donc, en appliquant la relation (9), la première relation cherchée

$$(13) \qquad \frac{dT_E}{dt} = \int_E \rho(Xu + Yv + Zw)\, dE + \int_E p\Theta \, dE$$
$$- \int_S p v_n \, dS - \int_S \frac{1}{2}\rho q^2 (v_n - w_n)\, dS.$$

La première intégrale

$$P_1 = \int_E \rho(Xu + Yv + Zw)\, dE$$

représente la *puissance*, à l'instant considéré, *des forces de* *profondeur*. On sait, en effet, que la puissance d'une force agissant sur un point matériel (dérivée par rapport au temps du travail correspondant) est égale au produit scalaire (ou produit géométrique) de la force par la vitesse. En assimilant à un point matériel la masse fluide intérieure à l'élément dE, les projections de la force sont $\rho X\, dE$, $\rho Y\, dE$, $\rho Z\, dE$; celles de la vitesse sont u, v, w et la puissance correspondante est bien représentée par l'élément de l'intégrale que nous voulons interpréter.

La seconde intégrale

$$P_2 = \int_E p\Theta\, dE$$

représente la *puissance des pressions intérieures*. En effet, la masse fluide occupant à l'instant le volume infiniment petit dE occupe à l'instant $t + \delta t$ le volume $dE(1 + \Theta\, \delta t)$; l'accroissement de volume est $\Theta\, dE\, \delta t$, et le travail des poussées s'exerçant sur les faces de l'élément (regardé comme assez petit pour que p y soit sensiblement constant) est, d'après une formule connue, $p\Theta\, dE\, \delta t$, la puissance correspondante est bien $p\Theta\, dE$ (quotient du travail élémentaire par la durée infiniment petite δt).

La première intégrale de surface $\int_S p v_n dS$ représente évidemment ce que serait la puissance des poussées exercées par le fluide sur la surface frontière S si chacun des points M de cette surface était animé d'une vitesse égale à celle de la molécule fluide qui est en contact avec lui à l'instant t; on peut donc dire que

$$P_3 = \int_S p\, v_n\, dS$$

est la *puissance exercée par les poussées intérieures sur la surface fluide placée à la frontière à l'instant considéré*.

Remarque. — Pour une partie S′ de la surface S que le fluide ne traverse pas (ou plus brièvement, dirons-nous, pour une partie imperméable), comme le sont, par exemple, la surface de contact du fluide et d'une paroi solide mobile ou la surface de séparation d'un liquide et d'un gaz, on a, comme nous le savons, $v_n = w_n$. Les composantes des efforts normaux variant d'une façon continue (nous négligeons, en admettant ce point, les actions capillaires), on peut remplacer la puissance exercée par le fluide intérieur sur la surface fluide *frontière par la puissance exercée par le fluide sur le milieu extérieur contigu.*

Enfin nous avons vu que

$$P_4 = \int_S \frac{1}{2} \rho q^2 (v_n - w_n)\, dS$$

représente le *débit de l'énergie cinétique à travers la surface frontière à l'instant considéré.*

En résumé, la loi de variation de l'énergie cinétique T_E incluse dans le volume E limité par la surface frontière S est donnée en fonction des puissances et débit précédents par

$$(14) \qquad \frac{dT_E}{dt} = P_1 + P_2 - P_3 - P_4.$$

La formule (13) ou (14) *généralise la formule donnée par M. Love* à l'endroit cité plus haut : la formule de M. Love se déduit en effet de celle que nous venons d'obtenir en supposant la surface S fixe et par suite w_n nul.

4. *Énergie potentielle de profondeur.* — On peut transformer l'équation précédente lorsque les forces de profondeur rapportées à l'unité de masse, X, Y, Z dérivent d'un potentiel Ω que nous supposons indépendant du temps :

$$X = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial \Omega}{\partial z}.$$

En posant

$$(15) \qquad V_E = \int_E \rho\, \Omega\, dE,$$

V_E peut être appelée l'*énergie potentielle des forces de profondeur.* Comme

$$\rho \frac{d\Omega}{dt} = \rho u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \rho w \frac{\partial \Omega}{\partial z} = -\rho (u X + v Y + w Z),$$

la formule (9) donne ici

$$\frac{dV_E}{dt} = -P_1 - \int_S \rho\, \Omega (v_n - w_n)\, dS$$

et, par suite ([1]), en ajoutant à (13),

$$(16)\qquad \frac{d}{dt}(T_E + V_E) = P_2 - P_3 - \int_S \left(\frac{1}{2}\rho q^2 + \rho\Omega\right)(v_n - w_n)\, dS.$$

C'est la généralisation de la première formule de M. Lamb qu'on obtient *en admettant que* S *est une surface fluide;* alors on a

$$(17)\qquad \frac{d}{dt}(T_E + V_E) = P_2 - P_3.$$

Nous n'insistons pas sur cette relation, et nous examinons l'hypothèse importante où, comme nous le supposons désormais, la pression est fonction de la densité seule.

5. *Énergie mécanique interne.* — Quand cette hypothèse est réalisée, $pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$ est la différentielle d'une certaine fonction de ρ que nous désignerons par — H, de telle sorte que

$$(18)\qquad H = -\int pd\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

M. Lamb (Ouvrage cité, p. 10) fait observer que H mesure le travail produit par l'unité de masse du fluide contre la pression extérieure, lorsque cette masse unité passe de son volume actuel à un volume fixe donné ([2]) (standard), la relation entre p et ρ ne cessant pas d'être vérifiée au cours de ce passage. Dans le cas d'un liquide incompressible, on prend $H = 0$.

([1]) Dans cette formule (16), Ω peut être remplacé par $\Omega + C$, C désignant une constante arbitraire.

Changer Ω en $\Omega + C$ conduit à ajouter à V_E un terme de la forme $C\int_E \rho\, dE$ et à modifier les deux membres de (16) en ajoutant au premier $C\frac{d}{dt}\left\{\int_E \rho\, dE\right\}$ et au second $-C\int_S \rho(v_n - w_n)\, dS$; ces deux expressions sont égales en vertu du principe de conservation de la masse. On le voit en faisant $G = 1$ dans la formule (9). L'équation (16) subsiste donc quelle que soit la valeur attribuée à C.

([2]) Le choix de ce volume — ou de la limite inférieure de l'intégrale (18) — pouvant être fait d'une façon arbitraire, la fonction H n'est définie qu'à une constante additive près. Mais on voit, comme plus haut, que quelle que soit la valeur attribuée à cette constante l'équation (22) reste exacte.

On peut appeler H l'énergie mécanique interne par unité de masse (intrinsic energy per unit mass de M. Lamb).

Puisque l'équation de continuité peut s'écrire

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\theta,$$

nous avons

$$(19)\qquad \rho\frac{dH}{dt} = \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -p\theta.$$

L'énergie mécanique interne (intrinsic energy de M. Lamb) incluse dans le volume E étant donnée par

$$(20)\qquad W_E = \int_\mu \rho \left\{ -\int p\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) \right\} dE,$$

la formule (9) nous donne

$$(21)\qquad \frac{dW_E}{dt} = -P_2 - \int_S \rho\, H(v_n - w_n)\, dS.$$

Ajoutant (21) et (16) il vient finalement

$$(22)\qquad \frac{d}{dt}(T_E + V_E + W_E) = -\int_S \rho\left(\frac{1}{2}q^2 + \Omega + H\right)(v_n - w_n)\, dS - P_3.$$

Ce résultat correspond à la seconde formule de M. Lamb (qu'on obtient en supposant, comme plus haut, que E contienne toujours les mêmes molécules fluides, c'est-à-dire que $v_n - w_n = 0$).

6. *Énoncé intuitif de la formule précédente.* — L'équation peut être énoncée sous une forme intuitive :

Supposons, comme il a été dit, la pression fonction de la densité et appelons *énergie* (mécanique) *globale* [1] la somme de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle de profondeur et de l'énergie mécanique interne [1].

L'énergie globale, correspondant à la masse fluide contenue dans un volume E limité par une surface S qui peut se déplacer et se déformer suivant une loi arbitrairement donnée, varie avec le temps, d'une part à cause des changements d'état mécanique de la

---

(1) On notera que cette énergie globale diffère de l'énergie totale considérée dans les Ouvrages classiques (*Traité de Mécanique* de M. Appell, tome II) par suite de la présence ici de l'énergie potentielle de profondeur.

masse intérieure à E et d'autre part à cause des entrées et des sorties du liquide au travers de la surface limite S.

La dérivée par rapport au temps de cette énergie globale est à chaque instant donnée par le débit à cet instant de l'énergie globale à travers la surface limite compté positivement vers l'intérieur de E *diminué de la puissance mécanique exercée par les poussées intérieures sur la surface fluide placée à la frontière à l'instant considéré* ([1]).

7. *Exemple.* — Pour indiquer très rapidement une application de ce qui précède, imaginons un liquide parfait pesant se mouvant dans un tuyau en y traversant un moteur; nous admettons que le liquide n'y est en contact qu'avec des parois solides, sans qu'il y ait de gaz dans l'espace considéré. Cet espace E est limité par les parois S′ du tuyau, par la surface S″ de contact du liquide et du moteur, et par deux sections, planes ou gauches, imaginées dans le tuyau, l'une S_1 en amont, l'autre S_2 en aval du moteur.

Nous négligeons la compressibilité du liquide $d\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$ et regardons par suite comme nuls l'énergie mécanique interne et le débit correspondant.

Les seules forces de profondeur sont les poids, alors $\Omega = gz$, la cote z étant comptée suivant la verticale ascendante, et V_E est égal au poids total multiplié par la cote du centre de gravité de la masse liquide intérieure à E; V_E sera bien souvent constant. Les débits de cette énergie-poids sont nuls à travers les parois solides, et pour les surfaces S_1 et S_2 ils se calculent par des intégrales étendues à ces surfaces, intégrales dont les éléments s'obtiennent en multipliant le débit en poids du liquide à travers un élément de surface par la cote de cet élément.

Avec ces indications, on peut arriver à établir le résultat suivant que nous énoncerons seulement. Si, à un instant donné t, la somme de l'énergie cinétique T_E et de l'énergie-poids V_E peut être regardée comme constante, c'est-à-dire si $\frac{d}{dt}(T_E + V_E) = 0$, la

---

([1]) Les débits d'énergie se mesurent évidemment avec les unités de puissance mécanique (cheval-vapeur, watt, etc.); il en est de même de la dérivée (ou vitesse de variation) considérée ci-dessus.

puissance fournie au moteur par le liquide en mouvement est égale à la différence de deux puissances correspondant aux deux sections S_1, S_2. Chacune de ces puissances s'obtient en multipliant le débit total de la masse liquide à travers la section considérée par le trinome de Bernoulli $\frac{1}{2}V'^2 + \frac{P}{\rho} - U'$ correspondant, où les termes V'^2, carré moyen de la vitesse; P, pression moyenne; $U' = -gZ$, valeur moyenne de la fonction des forces, sont obtenus par le calcul de moyennes indiqué dans le n° 2 d'une Note *Sur la formule de Bernoulli* insérée aux *Comptes rendus* du 17 mars 1919.

Sans vouloir insister sur ce point, indiquons que les considérations du n° 3 de la même Note servent à comparer pendant un état de régime l'énergie mécanique transmise au volume E sous diverses formes au travers des sections S_1, S_2 et celle recueillie par le moteur.

On constate ainsi, comme il était à prévoir pour un liquide parfait, l'égalité de ces énergies, mais il n'en serait pas de même si l'on procédait à leur calcul d'une façon incorrecte en confondant par exemple le carré moyen de la vitesse avec le carré de la vitesse de débit. Pour cette raison, il conviendrait de baser la définition théorique des rendements divers considérés en Hydraulique, sur des moyennes définies comme il a été indiqué dans les n^os^ 2 et 3 de la Note citée plus haut. Si, en effet, les liquides naturels, tels que l'eau, s'écartent des liquides parfaits de la Mécanique rationnelle (par suite de leur viscosité, de leur compressibilité, etc.) et si la fraction appelée *rendement* donne en quelque sorte la mesure de ces écarts, il est cependant une condition à laquelle elle doit tout d'abord satisfaire, celle d'être égale à l'unité pour un fluide parfait.

8. *Quantités de mouvement projetées. Moments cinétiques.* — La même méthode s'applique, plus simplement encore, aux formules concernant les premiers principes de la Dynamique des systèmes. Considérons d'abord l'intégrale

$$\int_E \rho\, u\, dE$$

étendue au volume E du n° 1; elle représente la projection sur l'axe fixe Ox de la résultante de translation des quantités de mouvement de la masse fluide intérieure à E. En appliquant la formule (9), il vient

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_E \rho u \, dE\right\} = \int_E \rho \frac{du}{dt} dE - \int_S \rho u(v_n - w_n)\, dS,$$

ou, puisque $\rho \frac{du}{dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x}$ d'après les équations du mouvement, et que $\int_E \frac{\partial p}{\partial x} dE = \int_S \alpha p \, dS$, d'après la formule de Green,

$$(23) \quad \frac{d}{dt}\left\{\int_E \rho u \, dE\right\} = \int_E \rho X \, dE - \int_S \alpha p \, dS - \int_S \rho u(v_n - w_n)\, dS.$$

Le moment résultant par rapport à Ox des quantités de mouvement de la masse fluide intérieure à E est de même donné par l'intégrale

$$\int_E \rho(yw - zv)\, dE.$$

La formule (9) et les équations du mouvement permettent de la transformer en observant, d'une part, que

$$\frac{dy}{dt} = u, \qquad \frac{dz}{dt} = w$$

donnent

$$\frac{d}{dt}(yw - zv) = y\frac{dw}{dt} - z\frac{dv}{dt}$$

et, d'autre part, que

$$y\frac{\partial p}{\partial z} - z\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}(py) - \frac{\partial}{\partial y}(pz).$$

Il vient ainsi

$$(24) \quad \frac{d}{dt}\int_E \rho(yw - zv)\, dE = \int_E \rho(yZ - zY)\, dE - \int_S p(y\gamma - z\beta)\, dS$$
$$- \int_S \rho(yw - zv)(v_n - w_n)\, dS.$$

Chacune des formules (23) et (24) donne, par permutations circulaires, deux autres formules analogues relatives aux autres axes. On peut énoncer les six formules ainsi obtenues de la façon suivante.

Considérons, comme on le fait au début de la Dynamique des systèmes, deux vecteurs Or et Os représentant la résultante de translation et le moment résultant par rapport au point fixe O des quantités de mouvement pour la masse fluide intérieure à E. Ces vecteurs Or et Os varient avec l'instant t considéré à cause de la variation des vitesses avec le temps et à cause des entrées et des sorties du fluide à travers la surface frontière.

A. *Les vitesses des points r et s* (ou dérivées géométriques, par rapport au temps, des vecteurs précédents) *sont équipollentes à deux vecteurs Or', Os', qui sont précisément les éléments* (*résultante de translation*, *moment résultant*) *de la réduction géométrique au point* O *d'un dyname* (*c'est-à-dire d'un ensemble de forces*) *provenant de la réunion du dyname* D_1 *des forces de profondeur*, *pour la masse fluide intérieure à* E, *de celui* D_2 *des poussées superficielles exercées sur la surface* S *par les corps extérieurs à* E, *et d'un troisième dyname* D_3 *que nous allons définir*.

Soient, à l'instant considéré t, un élément dS de la surface frontière S, M un point de cet élément. Le débit de la masse du fluide au travers de dS est (*voir* n° 2) $-\rho(v_n - w_n)\,dS$ en le comptant ici positivement vers l'intérieur, c'est-à-dire pour l'entrée dans E. Le vecteur infiniment petit MF, obtenu en multipliant ce débit par le vecteur vitesse propre de la molécule fluide passant en M à l'instant t, peut être assimilé, au point de vue des unités, à une force que nous appellerons la *poussée* (fictive) due aux mouvements (du fluide et de S) quand elle sera dirigée vers l'intérieur de E, la *tension* (fictive) due aux mouvements quand elle sera dirigée vers l'extérieur. *L'ensemble de ces poussées ou tensions fictives correspondant aux divers éléments dS en lesquels on décompose* S *constitue le dyname* D_3.

On vérifie facilement que si S est fixe, toutes les forces MF sont dirigées vers l'intérieur de E, ce sont des poussées.

Lorsque la surface S n'est pas traversée par le fluide, le dyname D_3 est nul; nous n'insistons pas sur ce cas, où l'on suit dans son mouvement une même masse fluide et où les équations fondamentales de la Dynamique des systèmes conservent leur forme élémentaire.

B. *Si le mouvement est permanent et si la frontière* S *est fixe*, les vecteurs Or', Os' sont nuls et les vitesses w_n le sont aussi; *l'ensemble des forces de profondeur* (D_1) *des poussées exercées par les corps extérieurs à* E *sur le fluide* (D_2) *et des poussées* (D_3) *dues au mouvement est alors géométriquement équivalent à zéro.*

Dans le cas particulier où l'on ajoute aux dernières hypothèses la supposition que les forces de profondeur sont nulles, on retrouve la proposition indiquée par M. Joukowski (*Aérodynamique*, Chap. I, p. 10) sous le nom de « théorème d'Euler », et que M. Brillouin avait donnée en 1911 pour le mouvement plan [*voir* son Mémoire : *Sur les surfaces de glissement d'Helmholtz* (*Annales de Chimie et de Physique*, 8e série, t. XXIII, Chap. III, nos 26 à 28)].

Si le mouvement est périodique par rapport au temps, et de période T, et si la surface S est fixe (ou si elle se déforme suivant une loi admettant la période T), la proposition B est applicable aux dynames moyennes par rapport au temps et pendant une période des trois dynames D_1, D_2, D_3; r et s reprennent périodiquement les mêmes positions, et *le théorème* B *est applicable aux dynames* D_{1m}, D_{2m}, D_{3m} *moyennes par rapport au temps, et pendant une période, des dynames* D_1, D_2, D_3.

Dans cet énoncé, le mot *moyenne* a le sens suivant :

Soient X, Y, Z, L, M, N les coordonnées d'un dyname D par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz; les coordonnées du dyname D_m moyenne par rapport au temps t_0 de D dans l'intervalle t_0, t_0+T sont données par

$$X_m = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} X\,dt, \quad \ldots, \quad N_m = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} N\,dt.$$

Ces valeurs sont indépendantes de t_0 si le mouvement est périodique.