BULLETIN DE LA S. M. F.

H. DULAC

Sur les cycles limites

Bulletin de la S. M. F., tome 51 (1923), p. 45-188

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1923__51__45_1>

SUR LES CYCLES LIMITES;

PAR M. H. DULAC.

INTRODUCTION.

1. EXPOSÉ DE LA QUESTION. — Nous appellerons *caractéristique* une courbe réelle définie par une équation différentielle

$$X(x, y)\, dy + Y(x, y)\, dx = 0.$$

Nous supposerons provisoirement, afin de simplifier les énoncés, que X et Y sont des polynomes en x et y. Une caractéristique fermée sera un *cycle*.

L'étude des courbes définies par cette équation différentielle permet, d'après les travaux de Poincaré et de M. Bendixson [1], de donner les énoncés suivants :

A. Les coordonnées d'un point d'un arc de courbe S étant exprimées en fonction d'un paramètre, soient M_0 et M deux points voisins, situés sur S, définis par les valeurs t_0 et t du paramètre. Supposons que de M_0 et M partent deux caractéristiques voisines C_0 et C_1 qui, suivies toutes les deux dans le même sens, vont couper de nouveau S en M'_0 et M' de paramètres t'_0 et t'. *Si l'arc* $M_0M'_0$ *de* C_0 *ne contient aucun point singulier de l'équation différentielle et si* C_0 *n'est pas tangent à* S *en* M'_0, *on a*

$$t' = h(t),$$

la fonction $h(t)$ *étant une fonction holomorphe dans le voisinage de* $t = t_0$. La loi de *conséquence* qui lie les positions de M et de M' est holomorphe.

B. *Si un cycle* Γ *ne passe ni par un* COL, *ni par un point singulier multiple* [point d'intersection multiple des courbes $X(x, y) = 0$, $Y(x, y) = 0$], *il est possible de déterminer de part et d'autre de* Γ *deux régions annulaires adjacentes à* Γ, *l'une* I *intérieure à* Γ, *l'autre* E *extérieure, telles que pour chacune d'elles on soit dans l'un des deux cas suivants :*

1° *Aucune des caractéristiques passant à l'intérieur de la région n'est un cycle;*

2° *Toutes les caractéristiques passant à l'intérieur de la région sont des cycles.*

Le cas qui se présente pour la région I se présente également

---

(1) POINCARÉ, *Journal de Mathématiques*, années 1881 et 1882; BENDIXSON, *Acta mathematica*, t. XXIV. Ce sont les seuls travaux que je connaisse sur ce sujet et c'est à eux que je renverrai en citant les noms de Poincaré et de M. Bendixson.

pour la région E. Si le cas 1° se présente, Γ est dit un *cycle limite.*

C. *S'il n'y a aucun cycle passant par un col ou un point singulier multiple, les cycles limites sont en nombre fini.*

Si une caractéristique C aboutit à un nœud, ou aboutit à un point singulier multiple, en traversant une région dont toutes les caractéristiques aboutissent à ce même point singulier, on sait qu'il n'y a pas lieu de prolonger C au delà de ce point. Il n'en est plus de même si ce point est un col, ou s'il y a des caractéristiques aussi voisines que l'on veut de C et n'aboutissant pas au point singulier. La caractéristique C admet alors un ou deux prolongements. Nous désignerons par C_0 l'ensemble de C et de l'un de ses prolongements.

L'étude des caractéristiques dans le voisinage d'un col ou d'un point singulier multiple m'a permis de généraliser de la manière suivante les énoncés A, B et C :

A'. *Si l'arc* $M_0 M'_0$ *de* C_0 *passe par un seul col, la loi de correspondance entre les points* M *et* M' *considérés dans l'énoncé* A *se met, en prenant* $t_0 = 0$, *sous la forme*

$$t' - t'_0 = t^\lambda f(t);$$

λ *est un nombre positif* fourni immédiatement par l'équation différentielle, *la fonction* $f(t)$ *définie pour* t *voisin de zéro n'est pas nulle pour* $t = 0$. Elle se présente, si λ n'est pas rationnel, sous la forme d'une série dont les termes sont des polynomes en t^λ, les coefficients de ces polynomes étant des séries entières en t.

Bien que f ne puisse être considérée, en général, comme une série entière en t et t^λ, cette fonction jouit de la propriété suivante qui permet de l'employer commodément dans les démonstrations. Quel que soit le nombre positif s, on peut écrire

$$f(t) \equiv P_s(t, t^\lambda) + t^s R_s(t),$$

P_s étant un polynome en t et t^λ et $R_s(t)$ tendant vers zéro avec t.

Si λ est rationnel, ou si l'arc $M_0 M'_0$ contient plusieurs cols ou des points singuliers multiples, la loi de correspondance entre M et M′ est plus compliquée, mais jouit d'une propriété analogue à celle que nous venons d'énoncer.

B′. Soit Γ_0 un cycle passant par un ou plusieurs points singuliers. En un point quelconque M_0 sur Γ_0 menons une droite, par exemple la normale en M_0 à Γ_0. *On peut déterminer sur cette droite, de part et d'autre de* M_0, *deux points* M_1 *et* M_2 *tels que, pour chacun des segments* M_0M_1 *et* M_0M_2, *on soit dans l'un des deux cas suivants :*

1° *Aucune des caractéristiques rencontrant le segment n'est un cycle;*
2° *Toutes les caractéristiques rencontrant le segment sont des cycles.*

Il est possible que l'un des cas qui se présente pour l'un des segments ne se présente pas pour l'autre.

C′. *Les cycles limites sont en nombre fini.*

Les démonstrations données supposent seulement que les caractéristiques que nous considérons sont situées dans une région telle que, dans le voisinage de tout point de cette région, $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ soient des fonctions holomorphes de x et y.

Dans l'Introduction, après avoir rappelé quelques résultats dont je ferai usage, j'établis quelques lemmes que j'utiliserai dans la suite.

Dans la première Partie, j'établis une forme de l'intégrale générale de l'équation différentielle, valable dans le champ réel, pour le voisinage d'un col.

Je me sers de cette intégrale pour étudier la forme de la *loi de correspondance* qui lie les points d'intersection M et M′ de deux arcs S et S′ avec une caractéristique C voisine d'un arc caractéristique C_0 passant par un col. Je démontre le théorème B′ pour un cycle Γ_0 passant par un ou plusieurs cols.

Dans la deuxième Partie, je considère un point singulier, que j'appelle *point exceptionnel*, dans le voisinage duquel l'équation différentielle peut, en choisissant convenablement les axes, se mettre sous la forme

$$[x + X_2(x, y)]\,dy + Y_2(x, y)\,dx = 0,$$

X_2 et Y_2 étant des séries entières en x et y dont tous les termes sont au moins du second degré. Je traite, pour le cas de points exceptionnels, les problèmes traités dans la première Partie pour le cas de cols.

Dans la troisième Partie, je considère un point singulier absolument quelconque, et à l'aide des résultats précédents j'étudie la forme de la *loi de correspondance* qui lie les points d'intersection M et M′ de deux arcs S et S′ avec une caractéristique C, voisine d'une caractéristique C_0 passant par un point exceptionnel. J'établis le théorème B′ pour un cycle passant par un nombre quelconque de points singuliers.

Dans la quatrième Partie, avant de démontrer que les cycles limites sont en nombre fini, je considère le cas d'un point singulier (*centre*) auquel aucune caractéristique n'aboutit avec une tangente déterminée. Je montre que les caractéristiques voisines de ce point sont ou bien toutes des spirales, ou bien toutes des cycles entourant le point. Considérant plus particulièrement le cas où X et Y sont des polynomes, je montre comment la loi de correspondance peut s'étendre à des caractéristiques présentant des branches infinies.

Je compte développer dans un autre travail les résultats que j'ai obtenus sur les principales circonstances qui peuvent se présenter dans la disposition des caractéristiques ainsi que sur le nombre et la position approximative des cycles limites.

2. Loi de correspondance dans le voisinage d'un arc de caractéristique ne passant par aucun point singulier. — Considérons une équation différentielle écrite sous la forme

$$\frac{dx}{X(x,y)} = \frac{dy}{Y(x,y)} = dz, \tag{1}$$

X et Y étant deux fonctions holomorphes de x et y dans le voisinage de n'importe quelles valeurs de x et y correspondant aux coordonnées d'un point d'un arc $M_0 M'_0$ de caractéristique C_0 que nous allons considérer. Soient S et S′ deux arcs de courbe passant respectivement par M_0 et M'_0. Faisons les hypothèses suivantes :

1° Dans le voisinage de M_0, de coordonnées x_0, y_0, les coordonnées d'un point M de l'arc S sont des fonctions holomorphes d'un paramètre t que l'on peut supposer nul pour le point M_0 ;

2° Dans le voisinage de M'_0 de coordonnées x'_0, y'_0, les coordonnées d'un point M' de l'arc S' sont des fonctions holomorphes d'un paramètre t', que l'on peut supposer nul pour le point M'_0 ;

3° La caractéristique C_0 de l'équation (1) n'est pas tangente en M'_0 à la courbe S' ;

4° Si l'on parcourt l'arc $M_0M'_0$ de C_0, on ne passe par aucun point singulier de l'équation (1).

Nous allons montrer que *si l'on considère une caractéristique* C *passant par un point* M *de paramètre* t, *situé sur* S *et voisin de* M_0, *cette caractéristique rencontre* S' *en un point* M' *de paramètre* t' *et nous avons la relation*

$$t' = h(t), \qquad h(t) \equiv c_1 t + c_2 t^2 + \ldots, \tag{2}$$

$h(t)$ *étant une fonction de* t *holomorphe et nulle pour* $t = 0$.

Lorsqu'on va de M_0 en M'_0 en suivant C_0, le paramètre z qui figure dans l'équation (1) reste fini, puisqu'on ne passe par aucun point singulier : z varie de z_0 à z'_0. On peut supposer $z'_0 = 0$. Si l'on considère une caractéristique C partant, pour $z = z_0$, du point M, voisin de M_0 sur S, ayant pour coordonnées x_1 et y_1, et fourni par la valeur t du paramètre, les coordonnées d'un point x, y de cette caractéristique seront, d'après un théorème de Poincaré, des fonctions holomorphes de z et de t, dans le voisinage de $t = 0$ et de $z = z'_0 = 0$. En effet, x et y sont des fonctions holomorphes de x_1 et y_1 pour x_1 voisin de x_0 et y_1 voisin de y_0. Ce seront donc des fonctions holomorphes de t. Ce sont des fonctions holomorphes de z d'après l'équation (1). Nous avons

$$\begin{cases} x = x'_0 + az + \alpha t + \ldots, \\ y = y'_0 + bz + \beta t + \ldots, \end{cases} \tag{3}$$

en n'écrivant que les termes de moindre degré en z et t.

Les coordonnées d'un point M' de l'arc S' s'expriment dans le voisinage de M'_0 sous la forme

$$\begin{cases} x = x'_0 + a't' + \ldots, \\ y = y'_0 + b't' + \ldots, \end{cases} \tag{4}$$

en n'écrivant que les termes de moindre degré et désignant par a', b', comme par a, b, α, β, des constantes. Cherchons l'intersection de C représentée par (3) avec S' représentée par (4). On aura

$$az + \alpha t + \ldots = a't' + \ldots,$$
$$bz + \beta t + \ldots = b't' + \ldots.$$

La quantité $ab' - ba'$ n'est pas nulle, car la caractéristique C_0, obtenue pour $t = 0$, n'est pas tangente à S' au point M'_0. On peut donc, pour t, z et t' voisins de zéro, tirer z et t' en fonction de t. Ces fonctions sont holomorphes et nulles pour $t = 0$.

Il en résulte d'abord que, pour M voisin de M_0, la caractéristique C coupera S' en un point M' et ensuite que la valeur du paramètre t' correspondant au point M' sera bien de la forme (2).

Remarque I. — Nous supposons implicitement que les dérivées de x et y exprimées en fonction de t', pour un point de l'arc S', ne sont pas nulles toutes les deux pour $t' = 0$. Cela est toujours possible si M'_0 est un point ordinaire de S'.

Remarque II. — Si M_0 est un point ordinaire de l'arc S et si la caractéristique C_0 n'est pas tangente en M_0 à S, le paramètre t du point M pourra être considéré comme une fonction holomorphe de t' dans le voisinage de $t' = 0$. Il en résulte que, dans la formule (2), la constante c_1 n'est pas nulle.

Lorsque les conditions que nous venons d'énoncer plus haut seront vérifiées, nous dirons, pour abréger, qu'il y a une *correspondance holomorphe* entre les points M et M', où une caractéristique C rencontre respectivement les courbes S et S'.

Nous avons ainsi obtenu une généralisation de la *loi de conséquence* obtenue par Poincaré (année 1881, p. 257) pour deux points de rencontre consécutifs d'une caractéristique avec une courbe S.

Cette loi de correspondance nous donnerait facilement la démonstration des théorèmes B et C. Pour généraliser ces énoncés B et C, nous chercherons comment doit être modifiée la loi de correspondance lorsque l'arc $M_0M'_0$ de C_0 traverse un point singulier. Il est nécessaire pour cela de préciser d'abord quels sont les divers types de points singuliers, comment on prolongera une caractéristique au delà d'un point singulier, et quels sont les cycles qu'il y a lieu de considérer. C'est ce que je ferai dans les trois paragraphes suivants, en exposant la question d'après les travaux de Poincaré et de M. Bendixson. Il ne faut voir dans cet exposé qu'un rappel de résultats connus, que j'ai groupés de la manière qui m'a paru la plus simple. J'ai introduit quelques dénominations nouvelles pour la commodité du langage.

3. Séparatrices. — Lorsqu'il sera question dans la suite d'un *arc de caractéristique aboutissant à un point* P, il s'agira d'un arc limité au point P. Une caractéristique prolongée au delà du point P sera composée de deux arcs aboutissant à P.

Soit C un arc de caractéristique aboutissant à un point singulier P avec une tangente déterminée. Menons la normale en un point M de C, considérons les caractéristiques voisines de C et suivons-les dans le sens qui va de M vers P. On sait que l'on peut déterminer sur la normale en M, de part et d'autre de M, deux points M_1 et M_2 tels que l'on soit dans l'un des trois cas suivants :

1° Toutes les caractéristiques traversant $M_1 M_2$ aboutissent à P;

2° Aucune caractéristique, autre que C, traversant $M_1 M_2$, n'aboutit à P;

3° Les caractéristiques traversant l'un des segments MM_1 ou MM_2 aboutissent à P, les caractéristiques traversant l'autre segment n'aboutissent pas à P.

Dans le premier cas, nous dirons que C est intérieur à une *région nodale* relative à P.

Dans les cas 2° et 3°, nous dirons que C est une *séparatrice relative au point singulier* P [1]. D'une façon moins précise, nous dirons que C est une *séparatrice* lorsque, sur l'un des côtés au moins de C, il n'existe pas de caractéristiques voisines de C aboutissant à P.

Considérons un cercle de centre P et de rayon assez petit pour

---

[1] Ces séparatrices sont identiques « aux caractéristiques aboutissant à P d'une manière telle qu'elles aient des prolongements » considérées par M. Bendixson (p. 25) dans un cas plus général que celui que nous envisageons, en supposant X et Y holomorphes au voisinage de P.

ne contenir à son intérieur aucun point singulier autre que P. Nous pouvons supposer que M se trouve à l'intersection de C et du cercle. Supposons que le point M_1 soit à droite pour un observateur placé en M et regardant dans le sens que l'on suit sur C pour aboutir en P. Si les caractéristiques rencontrant MM_1 n'aboutissent pas à P, nous dirons que les caractéristiques situées à droite de C n'aboutissent pas à P. Dans ce cas, il existe un arc de caractéristique C′ aboutissant à P tel que, à l'intérieur du secteur situé à droite de C, limité par C, C′ et le cercle, il n'existe aucune caractéristique Γ aboutissant au point P. Si, partant d'un point de ce secteur, on suit une caractéristique Γ toujours dans le même sens de manière à se rapprocher d'abord de P, on s'en éloigne ensuite et l'on sort du secteur. Nous dirons que ce secteur constitue un *secteur répulsif* ou une région répulsive relative à P. Les caractéristiques situées dans cette région répulsive présentent une disposition analogue à celle de branches d'hyperboles asymptotes à deux droites jouant le rôle de C et de C′. On convient de considérer C′ comme le *prolongement à droite* de C au delà du point P.

Si les caractéristiques rencontrant MM_2 n'aboutissent pas à P, il existe un arc C″ de caractéristique aboutissant à P, qui est le *prolongement à gauche* de C au delà de P et qui limite avec C une seconde région répulsive relative à P.

Sauf dans le cas dont nous parlerons plus tard d'un point semi-singulier (n° 5), C′ et C″ sont deux arcs distincts.

Si une caractéristique C n'est pas une séparatrice, elle est intérieure à une région dont toutes les caractéristiques aboutissent à P (*région nodale* ou *région attractive relative à* P). On convient de ne pas prolonger cette caractéristique au delà de P. Pour définir le prolongement d'une pareille caractéristique, il faudrait une convention. On ne voit ni l'utilité, ni même la possibilité de faire une *convention générale* de ce genre.

Remarque I. — La convention, faite pour prolonger une séparatrice C au delà de P, revient à dire que le prolongement à droite C′ est choisi de telle façon que les caractéristiques situées à droite de C et voisines de C restent voisines du prolongement C′. Par conséquent, si C′, prolongement à droite de C, aboutit à un nouveau point singulier P_1, on doit considérer le prolongement à droite de C' au delà de P_1. Si l'on a commencé à prolonger C à droite, on doit faire tous les prolongements successifs à droite. Si les caractéristiques voisines de C et situées à sa droite aboutissent à un point singulier P', après être passées dans le voisinage de divers points singuliers, on doit arrêter en P' le prolongement de C. Il résulte également de ce qui précède que, si C peut admettre deux prolongements, C ne peut admettre plus de deux prolongements, quel que soit le nombre de points singuliers traversés.

Remarque II. — Une séparatrice limite deux régions dont les caractéristiques ont en général une allure toute différente. Les séparatrices sont les seules caractéristiques C telles que des caractéristiques voisines de C et situées de part et d'autre de C ne restent pas voisines.

4. Cycles. — Nous réserverons dans la suite le nom de *cycle* à une caractéristique fermée ne passant par aucun point singulier.

Un *cycle limite* est un cycle C tel que les caractéristiques voisines de C soient des spirales s'approchant indéfiniment de C si on les suit dans un sens convenable. On sait que si les caractéristiques voisines de C et situées de l'un des côtés de C sont des spirales se rapprochant indéfiniment de C, il en est de même des caractéristiques situées de l'autre côté de C et voisines de C.

Si les caractéristiques voisines d'un cycle C ne sont pas des spirales ce sont des cycles, et C sera dit un *cycle ordinaire*.

S'il existe une courbe fermée C composée d'arcs de séparatrices reliant entre eux divers points singuliers, et si l'une au moins des régions limitées par C ne contient aucune caractéristique aboutissant à l'un des points singuliers situés sur C, nous dirons que C est un *cycle singulier*.

Un cycle singulier parcouru à partir d'un point régulier est composé d'une séparatrice et de ses prolongements, faits ou toujours à droite, ou toujours à gauche. Le cycle singulier peut ne passer que par un seul point singulier.

Il ne nous sera pas utile de considérer les autres courbes fermées composées d'arcs de caractéristique.

5. Diverses espèces de points singuliers. — Nous pouvons classer les points singuliers de deux façons différentes, selon que nous considérons la disposition des caractéristiques dans le voisinage des points singuliers, ou que nous considérons la forme de l'équation différentielle dans le voisinage du point singulier.

Les deux points de vue sont bien distincts : des équations de formes différentes peuvent fournir des caractéristiques ayant la même disposition dans le voisinage du point singulier considéré. Le premier point de vue intervient seul dans les questions qui peuvent se résoudre avec la seule notion de continuité des caractéristiques. Il sera nécessaire de nous placer au second point de vue pour l'étude de la loi de correspondance lorsqu'une caractéristique passe dans le voisinage d'un point singulier sans y aboutir.

Examinons dans ce paragraphe les points singuliers au point de vue de la disposition des caractéristiques.

Toute caractéristique qui aboutit à un point singulier P, ou bien aboutit au point P avec une tangente déterminée, ou bien est une spirale qui s'enroule autour de P, en s'en rapprochant indéfiniment. Celui de ces cas qui se présente pour une caractéristique se présente également pour toutes les caractéristiques qui aboutissent à P. Ce résultat rappelé, nous pourrons distinguer les cas suivants :

1° Aucune caractéristique n'aboutit au point P. *Le point* P *sera dit un centre* (1).

2° Des caractéristiques aboutissent au point P et aucune d'elles n'y aboutit avec une tangente déterminée. Le point est un *foyer*. On peut (n° 52), de P comme centre, décrire un cercle tel que toutes les caractéristiques passant à l'intérieur du cercle soient des spirales aboutissant à P. Il n'y a pas de séparatrices relatives à P.

3° Des arcs de caractéristiques aboutissent à P avec une tangente déterminée et ce sont tous des séparatrices relatives à P. Le

(1) Cet énoncé constitue une définition du mot *centre*. M. Bendixson (p. 26) a donné une définition des centres légèrement différente de celle donnée par Poincaré (année 1885, p. 179). Je montrerai (n° 52) que, dans le cas où X et Y sont holomorphes dans le voisinage de P, les trois définitions sont équivalentes.

point est un *col*. Les arcs de caractéristiques aboutissant à un col sont en nombre fini et pair. Chacun de ces arcs admet deux prolongements. Toute région limitée par deux arcs de caractéristiques voisins aboutissant à P est une région répulsive.

4° Des arcs de caractéristiques aboutissent à P, chacun avec une tangente déterminée, et aucun d'eux n'est une *séparatrice*. Le point est un *nœud*. On peut, de P comme centre, décrire un cercle tel que toute caractéristique passant à l'extérieur du cercle aboutisse au point P avec une tangente déterminée.

5° Des arcs de caractéristiques aboutissent à P avec une tangente déterminée et certains d'entre eux, mais non tous, sont des séparatrices. Nous dirons que P est un *point mixte*. Il y a un nombre fini de séparatrices aboutissant à P, chacune d'elles admet un ou deux prolongements. Décrivons, de P comme centre, un cercle ne contenant à son intérieur aucun point singulier autre que P. On peut démontrer que l'on peut prendre le rayon de ce cercle assez petit pour qu'il ne coupe chaque séparatrice qu'en un point. Appelons *séparatrices voisines* celles dont les points d'intersection N et N′ avec le cercle déterminent un arc NN′ qui n'est coupé par aucune autre séparatrice relative à P. Deux caractéristiques voisines qui sont le prolongement l'une de l'autre limitent un secteur répulsif. Deux caractéristiques voisines qui ne sont pas le prolongement l'une de l'autre limitent un secteur *attractif* ou *nodal*.

L'exemple le plus simple de point mixte est fourni par l'équation

$$x^2\,dy + y\,dx = 0,$$

dont l'intégrale générale est $y = Ce^{\frac{1}{x}}$. La région pour laquelle on a $x < 0$ est une région nodale. Les deux régions limitées par $x = 0$, $y = 0$, et pour lesquelles on a $x > 0$, sont des régions répulsives. La partie positive de Ox est une séparatrice ayant pour prolongements les deux portions de Oy. Nous pourrons désigner d'une façon générale, sous le nom de *points à région répulsive*, les cols et les points mixtes.

Remarque I. — De tout ce qui précède il résulte que, pour généraliser la loi de correspondance et l'étendre aux caractéristiques voisines d'une caractéristique C_0 traversant un point singulier, nous n'avons à considérer que les caractéristiques C_0 passant par des points à région répulsive et limitant pour chacun de ces points une région répulsive.

Pour généraliser l'énoncé B relatif à un cycle, nous n'aurons pas à considérer d'autres courbes fermées que les *cycles singuliers*.

Remarque II. — Il est utile de signaler parmi les points singuliers ceux auxquels n'aboutissent que deux arcs de caractéristiques. Ces arcs tangents en ce point singulier P à la même droite présentent en général la disposition des deux arcs d'une caractéristique aboutissant à un point régulier. Nous appellerons pour cette raison ces points *points semi-singuliers* (¹).

Les deux arcs de caractéristique qui aboutissent à un point semi-singulier, que l'on peut supposer en $x = 0, y = 0$, représentent une fonction $y = f(x)$ qui peut être holomorphe, ou algébroïde pour $x = 0$, ou n'être ni holomorphe ni algébroïde. Si l'on considère l'équation

$$[y^2 + x^2(x^2 + y^2)]\,dy + xy(1 - x^2 - y^2)\,dx = 0,$$

qui en polaires admet l'intégrale générale

$$\rho^2 \operatorname{Log} \sin^2\theta + C\rho^2 = 1,$$

les deux arcs de caractéristiques passant par $x = 0, y = 0$ sont les deux portions de $y = 0$.

Pour l'équation

$$2y\,dy - 3x^2\,dx = 0,$$

dont l'intégrale générale est $y^2 - x^3 = C$, les deux arcs de caractéristique aboutissant à $x = 0, y = 0$ sont donnés par

$$y^2 = x^3.$$

Pour l'équation

$$(5)\quad [(x^2 + y^2)^2 + 2y^2 + 2x^2y + 2y^3]\,dy + 2x[y + x^2 + y^2]\,dx = 0,$$

il n'y a que deux arcs de caractéristique aboutissant au point

---

(¹) M. Bendixson a déjà fait remarquer (p. 28) qu'un tel point « peut être assimilé à un point régulier ». On peut montrer que, au point de vue de la loi de correspondance, ils jouent un rôle analogue à celui des points réguliers.

$x = 0$, $y = 0$. Chacun de ces arcs est osculateur à l'une des branches de la parabole $y + x^2 = 0$. Ils ne peuvent représenter une fonction $y = f(x)$ holomorphe ou algébroïde pour $x = 0$. En effet, l'équation (5) se déduit par le changement de variable

$$u^2 = x^2 + y^2$$

de l'équation

$$u^2\, dy + (y + u)\, du = 0,$$

équation qui admet comme seules caractéristiques passant par $u = 0$, $y = 0$ les caractéristiques $u = 0$ et $y = \varphi(u)$, où $\varphi(u)$ n'est ni holomorphe ni algébroïde pour $u = 0$.

6. Diverses formes des équations différentielles dans le voisinage d'un point singulier. — Plaçons-nous maintenant au second point de vue signalé. Supposons que le point singulier soit $x = 0$, $y = 0$, et considérons l'équation différentielle (1) au voisinage du point $P(x = 0, y = 0)$.

1° Si le point P est un point simple des courbes

$$X(x, y) = 0, \qquad Y(x, y) = 0,$$

et si ces courbes ne sont pas tangentes en ce point, P est un *point singulier ordinaire*. Si on laisse de côté le cas d'un centre ou d'un foyer, un choix convenable d'axes permet de mettre l'équation sous la forme

$$(x + \ldots)\, dy + (\lambda y + \alpha x + \ldots)\, dx = 0, \tag{6}$$

en n'écrivant que les termes du premier degré. λ et α sont des constantes, λ n'est jamais nul. On a un *col* ou un *nœud* suivant que λ est positif ou négatif.

2° Si P est point multiple de l'une au moins des courbes

$$X(x, y) = 0, \qquad Y(x, y) = 0,$$

ou si ces deux courbes sont tangentes en P, nous dirons que nous avons un *point singulier multiple*.

Parmi les points singuliers multiples, il y aura lieu de considérer à part le cas où, par un changement d'axes, l'équation peut se mettre sous la forme

$$X_2(x, y)\, dy + [y + Y_2(x, y)]\, dx, \tag{7}$$

X_2 et Y_2 étant des polynomes ou des séries entières en x et y dont tous les termes sont de degré supérieur à 1.

Nous dirons que dans ce cas le point singulier est *un point exceptionnel*

On peut déterminer des séries entières $Q_2(x, y)$ et $R_2(x, y)$ ne contenant que des termes de degré supérieur au premier et telles que, par le changement de variables

$$u = x + Q_2(x, y), \qquad v = y + R_2(x, y),$$

les équations (6) et (7) prennent la forme

$$u^{n+1}\,dv + (\lambda v + \alpha u + \ldots)\,du = 0. \tag{8}$$

Nous dirons que cette équation est une *équation de forme simple*. Si l'on a $n = 0$, nous sommes dans le cas d'un *point singulier ordinaire* (col ou nœud). Si n n'est pas nul, nous avons un *point exceptionnel*, qui sera un col, un nœud ou un point mixte, suivant le signe de λ et la parité de n.

Nous dirons que nous avons un *point singulier élémentaire* lorsque, en transportant l'origine en ce point et choisissant les axes, l'équation différentielle peut se mettre sous la forme (6) ou (7). Un point singulier qui ne sera pas un point élémentaire sera appelé un *point complexe*. Cette distinction en *points élémentaires* et *points complexes* nous sera beaucoup plus utile que la distinction en points singuliers ordinaires et points singuliers multiples.

7. Fonctions dominantes. — Nous rencontrerons à plusieurs reprises dans la suite des fonctions $f(x, y)$ qui, pour leur emploi dans nos démonstrations, devront vérifier certaines conditions. Pour exprimer que ces conditions sont satisfaites j'emploierai, à défaut d'expression meilleure, la locution suivante.

Étant donnés un nombre positif λ et une fonction $f(x, y)$, je dirai que cette fonction satisfait aux conditions $\lambda - F > 0$, si les conditions suivantes sont vérifiées :

1° On peut écrire

$$f(x, y) = f_0(x) + y f_1(x) + \ldots + y^n f_n(x) + \ldots,$$

les fonctions $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ étant des fonctions continues de x pour

$$0 \leqq x \leqq 1.$$

2° Il existe des nombres positifs F_i tels que, pour $0 \leqq x \leqq 1$, on ait, quel que soit i,

$$|f_i(x)| \leqq F_i.$$

3° La série entière en y

$$F(y) = F_0 + y F_1 + y^2 F_2 + \ldots + y^n F_n + \ldots$$

est convergente pour $y = 1$.

4° On a

$$\lambda - F(1) > 0.$$

Il résulte de ces hypothèses que $f(x, y)$, considérée comme série entière en y, est absolument convergente pour $|y| \leqq 1$.

Les constantes F_i sont des fonctions dominantes des coefficients $f_i(x)$ de cette série en y. La fonction $F(y)$ est une dominante de $f(x, y)$ pour $0 \leqq x \leqq 1$ et $0 \leqq y \leqq 1$. Enfin, pour ces valeurs de x et de y, on a

$$\lambda - f(x, y) > 0.$$

Si $g(x, y)$ est une fonction holomorphe et nulle pour $x = 0$, $y = 0$, et si l'on fait un changement de variables $x = ax_1$, $y = by_1$, où a et b sont constants, on obtient

$$g(ax_1, by_1) \equiv f(x_1, y_1).$$

Montrons que l'on peut choisir a et b de manière que $f(x_1, y_1)$ vérifie les conditions $\lambda - F > 0$.

Puisque $g(x, y)$ est holomorphe pour x et y voisins de zéro, il existe des nombres ε et η tels que $g(x, y)$ soit représenté par une série entière en x et y, absolument convergente pour $x = \varepsilon$, $y = \eta$. Si nous faisons le changement de variables $x = \varepsilon u$, $y = \eta v$, nous aurons

$$g(\varepsilon u, \eta v) \equiv \gamma(u, v).$$

La série $\gamma(u, v)$ est absolument convergente pour $u = 1$, $v = 1$. On peut écrire

$$\gamma(u, v) = \gamma_0(u) + v\gamma_1(u) + \ldots + v^n \gamma_n(v) + \ldots.$$

Soit $\Gamma(u, v)$ la série entière en u et v que l'on déduit de $\gamma(u, v)$, en remplaçant tous les coefficients des termes en u et v par leurs valeurs absolues. Nous pouvons écrire

$$\Gamma(u, v) = \Gamma_0(u) + v\Gamma_1(u) + \ldots + v^n\Gamma_n(u) + \ldots.$$

Pour $0 \leqq u \leqq 1$ et $0 \leqq v \leqq 1$ on a, quel que soit n,

$$|\gamma_n(u)| \leqq \Gamma_n(u) \leqq \Gamma_n(1), \qquad |\gamma(u, v)| < \Gamma(u, v).$$

La fonction $\gamma(u, v)$ étant nulle pour $u = 0$, $v = 0$, on peut écrire

$$\Gamma(u, v) \equiv uA(u) + vB(u, v)$$

avec

$$A(u) \equiv \Gamma_0(u), \qquad B(u, v) \equiv \Gamma_1(u) + v\Gamma_2(u) + \ldots + v^{n-1}\Gamma_n(u) + \ldots.$$

Désignons par $\frac{\lambda}{2r}$ un nombre supérieur à $A(1)$ et à $B(1, 1)$. Nous pouvons toujours supposer que le nombre r introduit ici n'est pas supérieur à 1. Nous avons

$$\lambda - \Gamma(r, r) > 0. \tag{9}$$

Si nous faisons un dernier changement de variables

$$u = rx_1, \qquad v = ry_1,$$

nous avons

$$g(x, y) = \gamma(u, v) = \gamma(rx_1, ry_1) = f(x_1, y_1),$$

et la fonction $f(x_1, y_1)$ jouit des propriétés suivantes :

1° $f(x_1, y_1) = \gamma_0(rx_1) + ry_1\gamma_1(rx_1) + \ldots + r^n y_1^n \gamma_n(rx_1) + \ldots,$

ou encore, en posant

$$f_n(x_1) = r^n\gamma_n(rx_1),$$

on a

$$f(x_1, y_1) = f_0(x_1) + y_1 f_1(x_1) + \ldots + y_1^n f_n(x_1) + \ldots,$$

les $f_i(x_1)$ étant des fonctions continues pour $0 \leqq x_1 \leqq 1$.

2° On a

$$|f_n(x_1)| = |r^n\gamma_n(rx_1)| < r^n\Gamma_n(r);$$

donc, en posant

$$F_n = r^n\Gamma_n(r),$$

on a

$$|f_n(x_1)| < F_n,$$

quel que soit n, pour x_1 variant de o à 1.

3° Si l'on prend

$$F(y_1) = F_0 + y_1 F_1 + \ldots + y^n F_n + \ldots,$$
$$F(y_1) = \Gamma_0(r) + r y_1 \Gamma_1(r) + \ldots + r^n y_1^n \Gamma_n(r),$$

cette série est convergente pour $y_1 = 1$, puisque

$$H(1) = \Gamma(r, r).$$

4° De $F(1) = \Gamma(r, r)$ et de (9) on conclut que l'on a

$$\lambda - F(1) > 0.$$

La fonction $f(x_1, y_1)$ satisfait bien aux quatre conditions

$$\lambda - F > 0.$$

Remarque I. — Si la fonction

$$f(x, y) = f_0(x) + y f_1(x) + \ldots + y^n f_n(x) + \ldots$$

est holomorphe pour $|x| \leqq 1$ et $|y| \leqq 1$, nous conviendrons de prendre toujours, pour nombre F_n dominant de f_n, la somme des valeurs absolues des termes de la série $f_n(1)$. Cette convention entraîne, comme conséquences des conditions $\lambda - F > 0$, les propriétés suivantes :

1° Quel que soit n on a, pour $|x| < 1$,

$$\lambda - f_n(x) > 0.$$

2° $[\lambda - f_n(x)]^{-1}$ et $[\lambda - f(x, y)]^{-1}$ sont des fonctions holomorphes de x et y pour $|x| < 1$ et $|y| < 1$.

3° Si l'on ordonne $f(x, y)$ suivant les puissances de x,

$$f(x, y) = \varphi_0(y) + x\varphi_1(y) + \ldots + x^n \varphi_n(y) + \ldots.$$

On a, quel que soit n, pour $|y| \leqq 1$,

$$\lambda - \varphi_n(y) > 0.$$

Remarque II. — Par analogie avec la convention faite plus haut, si nous avons un nombre positif λ et une série entière $f(x)$

absolument convergente pour $x = 1$, nous dirons que la fonction $f(x)$ vérifie la condition $\lambda - F > 0$, si la somme des valeurs absolues des termes de la série $f(1)$ est inférieure à λ.

Remarque III. — Conformément à une dénomination employée (*voir* GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 3), nous avons dit que $F(x)$ est dominante pour une fonction $f(x)$, dans l'intervalle $(0, 1)$, lorsque $F(x)$ est positif et que l'on a

$$F(x) \leqq |f(x)|.$$

Nous aurons parfois, étant donnée une fonction $f(x)$ positive ou négative, à considérer une fonction $F(x)$ positive ou négative, mais telle que l'on ait

$$F(x) > f(x) \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqq x \leqq 1.$$

Nous dirons qu'en remplaçant $f(x)$ par $F(x)$, nous augmentons la fonction $f(x)$. Nous augmenterons en particulier une fonction en la remplaçant par une dominante.

8. LEMME I. — *L'équation différentielle*

$$x[\lambda - xg(x)]\frac{dy}{dx} - (r+\lambda)y = x^{s+1}h(x), \tag{10}$$

où λ et r sont des constantes positives, s un entier, $g(x)$ et $h(x)$ des séries entières en x à coefficients positifs, convergentes pour $x = 1$, admet pour solution une série entière

$$y = a_{s+1}x^{s+1} + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

qui est convergente pour $x = 1$, et dont tous les coefficients sont positifs si l'on a

$$\lambda - g(1) > 0, \quad s\lambda - r > 0.$$

En considérant l'équation sans second membre, nous avons

$$\frac{dy}{y} = \frac{(r+\lambda)\,dx}{x[\lambda - xg(x)]} \equiv \frac{r+\lambda}{\lambda x}dx + u'(x)\,dx,$$

$u'(x)$ désignant la dérivée par rapport à x d'une série $u(x)$ entière en x. Cette série u est convergente pour $x = 1$, d'après les hypothèses faites sur $g(x)$. On a donc, pour solution générale de l'équation (10),

$$y = Cx^{1+\frac{r}{\lambda}} e^u + x^{1+\frac{r}{\lambda}} e^u \int x^{s-1-\frac{r}{\lambda}} e^{-u} h(x)\, dx.$$

L'expression sous le signe $\int$ se met sous la forme

$$c_0 x^{s-r-\frac{r}{\lambda}} + c_1 x^{s-\frac{r}{\lambda}} + \ldots + c_n x^{s+n-1-\frac{r}{\lambda}} + \ldots,$$

qui, après intégration, devient

$$\frac{\lambda c_0}{s\lambda - r} x^{s-\frac{r}{\lambda}} + \frac{\lambda c_1}{s\lambda + \lambda - r} x^{s+1-\frac{r}{\lambda}} + \ldots + \frac{\lambda c_n}{s\lambda + n\lambda - r} x^{s+n-\frac{r}{\lambda}} + \ldots.$$

D'après l'hypothèse, $s\lambda - r > 0$, aucun des dénominateurs ne peut être nul. Cette série est, comme les précédentes, convergente pour $x = 1$. En faisant $C = 0$, nous avons une solution particulière de l'équation (10) donnée par

$$y = \lambda e^u x^{s+1} \left(\frac{c_0}{s\lambda - r} + \frac{c_1 x}{s\lambda + \lambda - r} + \ldots + \frac{c_n x^n}{s\lambda + n\lambda - r} \right).$$

On a bien, pour y, une série entière en x convergente pour $x = 1$. Dans le cas où l'on aurait $r = q\lambda$, q étant un entier, toutes les solutions de l'équation (10) seraient des séries entières; mais nous ne considérons pas ces séries qui auraient un terme en x^{q+1}, c'est-à-dire de degré inférieur à $s + 1$.

Pour montrer que tous les coefficients de la série entière y qui fournit la solution particulière considérée sont positifs, posons

$$\begin{aligned} y &= a_{s+1} x^{s+1} + \ldots + a_n x^n + \ldots, \\ g(x) &= g_1 + g_2 x + \ldots + g_n x^n + \ldots, \\ h(x) &= h_1 + h_2 x + \ldots + h_n x^n + \ldots, \end{aligned}$$

et calculons directement les coefficients a_{n_1} en nous servant de l'équation (10). En remplaçant y par la série et égalant dans les deux membres les coefficients de x^n, on a

$$(n\lambda - r - \lambda)\, a_n = a_{n-1} g_1 + a_{n-2} g_2 + \ldots + a_{s+1} g_{n-s-1} + h_n.$$

Le coefficient $n\lambda - r - \lambda$ est toujours positif, puisque pour $n = s + 1$, qui est la plus petite valeur à attribuer à n, ce coefficient est égal à $s\lambda - r$, c'est-à-dire positif. On voit donc successivement que a_{s+1}, a_{s+2}, ..., a_n sont positifs.

Remarque. — La première partie du raisonnement s'applique à l'équation

$$x[1 - x g(x)]\frac{dy}{dx} - [\nu + x f(x)] y = h(x),$$

où f, g et h sont des séries entières à coefficients quelconques convergentes pour $x = 1$. *Si la série $g(x)$ vérifie la condition* $1 - G > 0$ (*voir* n° 7, remarque II), *l'équation considérée admet pour solution une série entière convergente pour* $x = 1$.

On peut écrire

$$\frac{\nu + x f(x)}{x[1 - x g(x)]} = \frac{\nu}{x} + u'(x),$$

u' étant la dérivée d'une série entière convergente pour $x = 1$. La solution générale de l'équation est donnée par

$$y = C x^{\nu} e^{u} + x^{\nu} e^{u} \int \frac{h(x) e^{-u}\, dx}{x^{\nu+1}}.$$

La quantité sous le signe $\int$ peut s'écrire

$$\frac{c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots}{x^{\nu+1}}.$$

Si ν n'est pas un entier positif, nous obtenons pour y, en raisonnant comme ci-dessus, une série entière convergente pour $x = 1$.

Si ν est un entier, il y a deux cas à distinguer : 1° c_ν n'est pas nul. Aucune solution de l'équation n'est une série entière, car l'intégration introduit dans y l'expression $x^{\nu} e^{u} \operatorname{Log} x$; 2° c_ν est nul. Quel que soit C, on obtient pour y une série entière convergente pour $x = 1$.

9. Lemme II. — Considérons l'équation différentielle

(11) $$x^{n+1}\frac{dy}{dx} + g(x) y + f(x) = 0,$$

où n est un entier positif ou nul, $g(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions continues pour $0 \leq x \leq 1$. Cette équation admet une solution $y(x)$

et une seule se réduisant à $y = 0$ pour $x = 1$. Nous allons considérer cette solution pour x variant dans l'intervalle $(0, 1)$. Établissons les propriétés suivantes :

1° *La solution $y(x)$ considérée est positive dans l'intervalle $(0, 1)$ si $f(x)$ est positif dans cet intervalle.*

En effet, si l'on pose

$$u(x) = \int_x^1 \frac{g(x)\,dx}{x^{n+1}},$$

on a

$$y(x) = e^{u(x)} \int_x^1 \frac{f(x)\,e^{-u(x)}\,dx}{x^{n+1}}.$$

2° *Si l'on augmente $g(x)$ (voir* n° 7, remarque III) *sans changer $f(x)$, la solution $y(x)$, nulle pour $x = 1$, augmente.* Soit $G(x) > g(x)$. Considérons la fonction $Y(x)$ nulle pour $x = 1$ et vérifiant l'équation

$$x^{n+1}\frac{dY}{dx} + G(x)\,Y + f(x) = 0. \tag{12}$$

En retranchant (11) de (12), on a

$$x^{n+1}\frac{d(Y-y)}{dx} + G(x)Y - g(x)\,y = 0,$$

$$x^{n+1}\frac{d(Y-y)}{dx} + G(x)(Y-y) + [G(x) - g(x)]y = 0.$$

$Y - y$ se réduit à zéro pour $x = 1$. On a

$$[G(x) - g(x)]y > 0.$$

On a donc, d'après 1°,

$$Y - y > 0.$$

3° *Si l'on augmente $f(x)$ sans changer $g(x)$, la solution $y(x)$ augmente.* Cela résulte immédiatement de la formule donnée dans 1° et fournissant $y(x)$.

4° *Si l'on considère la solution $y = \varphi(x)$ de l'équation* (11), *qui prend pour $x = 1$ une valeur positive $y = b$, on a, toujours dans l'intervalle* $(0, 1)$,

$$\varphi(x) > y(x).$$

En effet, les calculs d'intégration indiqués dans 1° donnent

$$\varphi(x) = y(x) + b\, e^{u(x)}.$$

5° Il résulte des propriétés précédentes que, si l'on augmente les fonctions $g(x)$ et $f(x)$ dans l'intervalle $(0, 1)$ et si l'on remplace la valeur initiale $y(1) = b$ par une valeur plus grande, on augmente, dans l'intervalle $(0, 1)$, la solution y considérée prenant pour $x = 1$ la valeur $y = b$.

10. Fonctions semi-régulières. — Nous rencontrerons à plusieurs reprises, dans la suite, des fonctions $f(x)$ qui peuvent, quel que soit le nombre entier σ, se mettre sous la forme

$$f(x) = P_\sigma(x) + x^\sigma R_\sigma(x),$$

où R_σ tend vers zéro en même temps que x ; $P_\sigma(x)$ est une somme d'un nombre *fini* de termes. Nous dirons qu'une telle fonction $f(x)$ est semi-régulière pour $x = 0$.

Nous préciserons dans chaque cas la nature des termes qui figurent dans les polynomes P_σ. Dans certains cas, ce sont des puissances entières de x, dans d'autres cas des puissances entières de x et d'expressions telles que x^{λ_i}, $x^{\lambda_i}\operatorname{Log} x$, λ_i étant des constantes positives et i prenant un certain nombre de valeurs.

Nous choisirons pour P_σ un polynome tel que, si $p(x)$ est l'un quelconque de ses termes, le quotient $p(x) : x^\sigma$ ou bien devienne infini ou bien tende vers une limite finie lorsque x tend vers zéro. Ce choix n'a rien d'obligatoire; ce qui nous sera utile, est la propriété de n'avoir dans P_σ qu'un nombre fini de termes.

Il est évident que la somme ou le produit de fonctions semi-régulières est une fonction semi-régulière. Les fonctions semi-régulières que nous rencontrerons seront en général nulles pour $x = 0$. Nous pourrons, d'après la définition des fonctions semi-régulières, parler du terme de degré infinitésimal minimum pour une telle fonction. Pour les fonctions que nous rencontrerons, ce terme de degré minimum sera de la forme cx^ν, c et ν étant des constantes. Il n'y aura de termes en $\operatorname{Log} x$ que dans les termes d'ordre plus élevé.

Nous allons démontrer la propriété suivante :

Si $f(u)$ est une fonction semi-régulière pour $u = 0$ et *si* $u = g(x)$ *est une fonction semi-régulière et nulle pour* $x = 0$, *la fonction* $h(x) = f[g(x)]$ *est semi-régulière pour* $x = 0$.

Soient un entier σ que nous fixons arbitrairement, et r et s des entiers que nous déterminerons ultérieurement. On a

$$f(u) = \overline{P}_r(u) + u^r\overline{R}_r(u) = au^\alpha[1 + A(u)] + u^r\overline{R}_r(u),$$
$$u = g(x) = \underline{P}_s(u) + u^s\underline{R}_s(u) = bx^\beta[1 + B(x)] + x^s\underline{R}_s(x);$$

au^α et bx^β désignent respectivement les termes de moindre degré de $f(u)$ et de $g(x)$. $A(u)$ et $B(x)$ sont des polynomes nuls, l'un pour $u = 0$, l'autre pour $x = 0$.

1° On peut écrire
$$u = bx^\beta(1 + v),$$

v tendant vers zéro avec x. Si l'on remplace u par cette expression dans $u^r\overline{R}_r(u)$, et si l'on suppose que l'on ait pris r tel que l'on ait $\beta r > \sigma$, on aura
$$u^r\overline{R}_r(u) = x^\sigma S(x),$$

$S(x)$ tendant vers zéro avec x. L'expression $u^r\overline{R}_r(u)$ ne fournira que des termes de $h(x)$ d'ordre supérieur à σ.

2° Montrons que $\overline{P}_r(u)$ ne fournira, pour la fonction $h(x)$, qu'un nombre fini de termes dont le degré, infinitésimal par rapport à x, ne dépasse pas σ.

Désignons dans la suite par $\mathrm{L}\,u$, pour abréger, le logarithme de u.

Soit $mu^\nu(\mathrm{L}u)^{\nu'}$ un terme de $\overline{P}_r(u)$. L'exposant ν' est zéro ou un entier positif. Nous pouvons écrire

$$u = bx^\beta(1 + B)(1 + x^{s-\beta}z),$$

z tendant vers zéro avec x. On a

$$mu^\nu(\mathrm{L}u)^{\nu'} = mb^\nu x^{\beta\nu}(1 + B)^\nu(1 + x^{s-\beta}z)^\nu$$
$$\times [\mathrm{L}b + \beta\mathrm{L}x + \mathrm{L}(1 + \beta) + \mathrm{L}(1 + x^{s-\beta}z)]^{\nu'}.$$

Développons $(1 + B)^\nu$ et $(1 + x^{s-\beta}z)^{\nu'}$ par la série du binome, effectuons le développement de la puissance ν' (entière) qui figure dans l'expression précédente. Considérons les termes qui contiennent z. Ceux de ces termes où x figurera avec l'ordre le plus faible seront de la forme

$$m_1 x^{\beta\nu-\beta+s}(Lb+\beta Lx)^{\nu'}.$$

La valeur minimum de l'exposant ν est égale à α. Par conséquent, si l'on prend s tel que l'on ait $\alpha\beta-\beta+s>\sigma$, l'ensemble des termes contenant z sera de la forme $x^\sigma\overline{S}(x)$.

Il en résulte que $x^s\overline{R}_s(x)$ ne fournira que des termes de $h(x)$ dont le degré dépassera σ.

Pour avoir les termes de $h(x)$ fournis par un terme $mu^\nu(Lu)^{\nu}$ de $\overline{P}_r(u)$, il suffit de considérer l'expression

$$mb^\nu x^{\beta\nu}(1+B)^{\nu}[Lb+\beta Lx+L(1+B)]^{\nu'}.$$

Cette expression ne fournira qu'un nombre fini de termes dont le degré ne dépasse pas σ.

En raisonnant de même pour les divers termes de $\overline{P}_r(u)$, on voit que l'on aura

$$h(x)=f[y(x)]=P_\sigma(x)+x^\sigma R_\sigma(x),$$

$P_\sigma(x)$ ne contenant qu'un nombre fini de termes. La fonction $h(x)$ sera semi-régulière pour $x=0$.

PREMIÈRE PARTIE.

CYCLES PASSANT DANS LE VOISINAGE DE COLS.

11. Marche suivie. — Nous établirons d'abord des formes simples que l'on peut donner à l'équation différentielle, au moyen de changements de variables valables dans le voisinage d'un col. Ces formes simples faciliteront la démonstration de l'existence d'une forme d'intégrale générale de l'équation différentielle, forme valable dans le champ réel, pour le voisinage d'un col, ainsi que l'établissement des propriétés de cette intégrale.

A l'aide de celle-ci, nous obtiendrons la forme de la loi de correspondance pour une caractéristique voisine d'une caractéristique passant par un col. Nous entendons par là que, étant donné sur une caractéristique C_0 un arc $M_0M'_0$, contenant un seul col, et considérant des arcs de courbes S et S′ coupant C_0 respectivement en M_0 et M'_0, nous obtiendrons la relation qui existe entre les paramètres qui définissent la position des points M et M′ où une caractéristique C, voisine de C_0, coupe les arcs S et S′. A l'aide de la loi de correspondance trouvée nous étudierons les caractéristiques voisines d'un cycle singulier passant par un ou plusieurs cols.

12. Simplification de l'équation différentielle dans le voisinage d'un col. — Nous allons montrer que l'on peut, au moyen de changements de variables, faire disparaître dans une équation

$$X(x, y)\,dy + Y(x, y)\,dx = 0 \tag{13}$$

certains groupes de termes des séries entières X et Y.

On sait tout d'abord que, si l'on prend pour axes $x = 0$ et $y = 0$ les deux caractéristiques qui passent par le col, l'équation (13) prend la forme

$$x\,dy + y[\lambda + a(x, y)]\,dx = 0, \tag{14}$$

λ est une constante positive; $a(x, y)$ est une série entière en x et y, nulle pour $x = 0$, $y = 0$. Nous pourrons toujours, sans changer la forme de cette équation, remplacer x par cx et y par $c_1 y$ de manière que $a(x, y)$ vérifie les conditions $\lambda - A > 0$ (*voir* n° 7).

Montrons que si λ n'est pas un nombre rationnel et si l'on désigne par r et s deux entiers positifs quelconques et par $l(x, y)$ et $b(x, y)$ deux séries entières en x et y nulles pour $x = 0$, $y = 0$, on peut trouver un changement de variable

$$v = y[1 + l(x, y)],$$

tel que l'équation (14) prenne la forme

$$x\,dv + v[\lambda + x^r v^s b(x, v)]\,dx = 0. \tag{14'}$$

En désignant par φ_1, φ_2, φ_3, ..., des fonctions de x seul, cherchons à déterminer une fonction de la forme

$$\varphi = y\varphi_1(x) + y^2\varphi_2(x) + \ldots$$

vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$(15) \qquad x\varphi'_x - y[\lambda + a(x, y)]\varphi'_y + \lambda\varphi = 0.$$

On peut mettre $a(x, y)$ sous la forme

$$a(x, y) = x\alpha'(x) + y a_1(x) + y^2 a_2(x) + \ldots;$$

α' est la dérivée d'une série entière $\alpha(x)$ nulle pour $x = 0$; a_1, a_2, ... sont des séries entières convergentes comme nous l'avons dit pour $|x| \leqq 1$. On a

$$x\varphi'_1(x) + x\alpha'(x)\varphi_1(x) = 0,$$

d'où $\varphi_1 = e^{\alpha(x)}$, en supposant que φ_1 soit égal à 1 pour $x = 0$. φ_1 est une série entière en x, convergente pour $|x| < 1$. Nous allons voir qu'il en est de même pour $\varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$. Si la propriété est vraie pour $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, il en sera de même pour φ_n. En effet, en égalant à zéro le coefficient de y^n dans (15), on a

$$(16) \quad x\varphi'_n - [(n-1)\lambda + nx\alpha']\varphi_n = -a_1\varphi_{n-1} - a_2\varphi_{n-2} - \ldots - a_{n-1}\varphi_1.$$

Le second membre de cette équation est une série entière en x, convergente pour $|x| \leqq 1$; l'équation (16) admettra donc (n° 8, remarque) une solution φ_n qui sera une série entière convergente pour $|x| \leqq 1$.

Déterminons successivement les termes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_s$ et posons

$$f = y\varphi_1(x) + y^2\varphi_2(x) + \ldots + y^s\varphi_s(x).$$

Si dans (15) nous remplaçons φ par f, les termes en $y, y^2, \ldots, y^s$ disparaissent dans le premier membre de (15) et il reste, en désignant par $\eta(x, y)$ une série entière,

$$(17) \qquad \lambda f + xf'_x - y[\lambda + a(x, y)]f'_y \equiv y^{s+1}\eta(x, y).$$

Si l'on pose $\varphi = f + \psi$, la fonction ψ vérifie l'équation

$$(18) \qquad x\psi'_x - y[\lambda + a(x, y)]\psi'_y + \lambda\psi + y^{s+1}\eta(x, y) = 0.$$

En ordonnant suivant les puissances de x, on a

$$a(x, y) = \beta(y) + x\beta_1(y) + x^2\beta_2(y) + \ldots,$$
$$\eta(x, y) = \eta_0(y) + x\eta_1(y) + x^2\eta_2(y) + \ldots.$$

Cherchons une solution de (18) de la forme

$$\psi = \psi_0(y) + x\psi_1(y) + x^2\psi_2(y) + \ldots,$$

ψ_0, ψ_1, ψ_2, ... étant des fonctions de y seul dont nous désignerons les dérivées par ψ'_0, ψ'_1, ... On a

$$y[\lambda + \beta(y)]\psi'_0 - \lambda\psi_0 + y^{s+1}\eta_0(y) = 0.$$

La série $\beta(y)$ vérifie (n° 7, remarque III) la condition $\lambda - B > 0$. Il en résulte que cette équation différentielle en ψ_0 admet (n° 8, remarque) pour solutions une infinité de séries entières en y; l'une d'elles n'admet pas de terme du premier degré en y. C'est cette série que nous prendrons pour fonction ψ_s. Elle contient y^{s+1} en facteur et sera convergente pour $y = 1$. Nous allons montrer que de même ψ_1, ψ_2, ... sont des séries entières en y, convergentes pour $y = 1$ et contenant y^{s+1} en facteur. Si nous supposons la démonstration faite pour ψ_0, ψ_1, ..., ψ_{n-1}, nous aurons en égalant à zéro le coefficient de x^n, dans (18),

$$y[\lambda + \beta(y)]\psi'_n - (n+\lambda)\psi^n = y^{s+1}\eta_n + y\beta_1\psi'_{n-1} + \ldots + y\beta_n\psi'_0.$$

Nous pourrons désigner le second membre de cette relation par $y^{s+1}\gamma_n(y)$, γ_n étant une série entière en y convergente pour $y = 1$. Nous aurons bien (n° 8, remarque) pour solution ψ_n de cette équation une série entière en y convergente pour $y = 1$. On voit immédiatement qu'elle contient y^{s+1} en facteur. Déterminons les séries ψ_0, ψ_1, ..., ψ_{r-1} et posons

$$g(x, y) = \psi_0(y) + x\psi_1(y) + \ldots + x^{r-1}\psi_{r-1}(y).$$

Si l'on remplace ψ par g dans le premier membre de (18) les termes en x, x^2, ..., x^{r-1} disparaissent en même temps que les termes ne contenant pas x et nous avons

$$(19)\quad xg'_x - y[\lambda + a(x, y)]g'_y + \lambda g + y^{s+1}\eta(x, y) \equiv x^r y^{s+1} h(x, y).$$

Si nous ajoutons les équations (17) et (19), en posant

$$K(x, y) = f + g,$$

nous avons

$$xK'_x - y[\lambda + a(x, y)]K'_y + \lambda K = x^r y^{s+1} h(x, y).$$

Cette fonction K vérifie donc l'équation

$$(20) \qquad x\varphi'_x - y[\lambda + a(x, y)]\varphi'_y + \lambda\varphi = x^r y^{s+1} h(x, y).$$

Faisons le changement de variable

$$(21) \qquad v = K(x, y).$$

La fonction K est de la forme $K = y[1 + l(x, y)]$ où $l(x, y)$ est une série entière, nulle pour $x = 0$, $y = 0$, on peut donc tirer de la relation (21) y en fonction de v et de x. Faisons dans l'équation (14) le changement de variable (21). On a

$$x\,dv = x K'_x\,dx + x K'_y\,dy = [x K'_x - y(\lambda + a) K'_y]\,dx.$$

Si nous désignons par $V(x, v)$ ce que devient le coefficient de dx, lorsque y est remplacé en fonction de v et de x, on obtient l'équation

$$x\,dv + V(x, v)\,dx = 0.$$

Si d'autre part on désigne par $F(x, v)$ ce que devient une fonction $\varphi(x, y)$, lorsqu'on fait le changement de variable (21) et qu'on effectue ce même changement pour l'équation (20), cette équation devient

$$x F'_x - [y(\lambda + a)K'_y - x K'_x]F'_v + \lambda F = x^r y^{s+1} h(x, y),$$
$$x F'_x - V(x, v) F'_v + \lambda F = x^r v^{s+1} b(x, v).$$

Cette équation admet la solution $F \equiv v$. On a donc

$$V(x, v) \equiv \lambda v - x^r y^{s+1} b(x, v).$$

Le changement de variable (21) met bien l'équation (14) sous la forme (14').

Remarque I. — Le changement de variable (21) n'est valable que si v est assez petit pour que l'on ne puisse avoir $K'_y = 0$, mais en remplaçant v par cv, et prenant c assez petit, on peut supposer que le changement de variable est valable pour $|x| \leqq 1$, $|v| \leqq 1$ et que $b(x, v)$ vérifie les conditions $\lambda - B > 0$ (n° 7).

Remarque II. — Nous mettons en particulier l'équation (14) sous la forme

$$x\,dv + v[\lambda - v\,b(x, v)]\,dx = 0.$$

On peut obtenir cette forme d'équation par un changement portant sur x seul au lieu de porter sur y. L'équation (14) s'écrit en effet

$$\frac{dy}{y}+\frac{\lambda+x\alpha'(x)}{x}dx+\frac{ya_1(x)+y^2a_2(x)+\ldots}{x}dx=0,$$

avec les notations déjà employées. Prenons une variable u définie par

$$\frac{\lambda+x\alpha'(x)}{x}dx=\frac{\lambda\,du}{u},\qquad x e^{\frac{\alpha(x)}{\lambda}}=\mathrm{C}u.$$

En prenant la constante C assez petite et substituant à x la variable u, on obtiendra l'équation

$$u\,dy+y[\lambda-yb(u,y)]\,du=0,$$

$b(u,y)$ étant une série convergente pour $|u|\leqq 1$, $|y|\leqq 1$.

13. Cas où λ est rationnel. — Si l'on a $\alpha=p:q$, les entiers p et q étant premiers entre eux, les raisonnements précédents ne peuvent être appliqués quels que soient r et s. Supposons pour simplifier que l'équation ait d'abord été mise sous la forme (nº **12**, remarque II)

$$x\,dy+y(\lambda+a)\,dx$$

avec

$$a=ya_1(x)+y^2a_2(x)+\ldots,$$

a_1, a_2, ... étant des séries entières en x.

Si nous cherchons, comme précédemment, à déterminer une fonction

$$\varphi=y\varphi_1(x)+y^2\varphi_2(x)+\ldots+y^n\varphi_n(x)+\ldots$$

vérifiant l'équation

$$x\varphi'_x-y(\lambda+a)\varphi'_y+\lambda\varphi=0, \tag{22}$$

nous aurons $\varphi_1=1$ et nous déterminerons sans difficulté φ_2, φ_3, ..., φ_q, séries entières en x; mais nous serons en général arrêtés par une impossibilité, si nous voulons obtenir φ_{q+1} sous forme d'une série entière. Nous aurons en effet, en désignant par $\alpha_q(x)$ une série entière déjà connue,

$$x\varphi'_{q+1}-q\lambda\varphi_{q+1}=\alpha_q(x),\qquad q\lambda=p,$$

$$\varphi_{q+1}=\mathrm{C}x^p+x^p\int\frac{\alpha_q(x)\,dx}{x^{p+1}}.$$

Si $\alpha_q(x)$ contient un terme $c_1 x^p$, l'expression de φ_{q+1} contiendra un terme $c_1 x^p \mathrm{L}x$ et φ_{q+1} ne pourra être une série entière. Nous éviterons cette impossibilité en considérant, au lieu de l'équation (22), l'équation

$$x\varphi'_x - y(\lambda + a)\varphi'_y + \lambda\varphi = c_1 x^p \varphi^{q+1}.$$

Nous aurons les mêmes expressions qu'au n° **12** pour les φ_i, si l'on a $i < q+1$, mais on aura

$$x\varphi'_{q+1} - p\varphi_{q+1} = \alpha_q(x) - c_1 x^p.$$

φ_{q+1} sera donc une série entière où le coefficient de x^p pourra être pris arbitrairement. On verrait de même que l'on pourra éviter les impossibilités qui peuvent se présenter dans la détermination des termes φ_{2q+1}, φ_{3q+1}, φ_{mq+1} en considérant au lieu de l'équation (22) une équation de la forme

$$(23) \quad x\varphi'_x - y(\lambda + a)\varphi'_y + \lambda\varphi = \varphi(c_1 x^p \varphi^q + c_2 x^{2p}\varphi^{2q} + \ldots + c_m x^{mq}\varphi^{mq}),$$

$c_1, c_2, \ldots, c_m$ étant des constantes qui peuvent être nulles.

Nous conviendrons, pour fixer les idées, de prendre égal à zéro le coefficient du terme en x^{in} qui reste arbitraire dans φ_{iq+1} pour $i = 1, 2, \ldots, m$.

Si nous supposons que l'on prenne m tel que l'on ait

$$mq + 1 \leqq s < (m+1)q$$

et si nous raisonnons comme au n° **12**, nous voyons que, si l'on désigne par η une série entière en x et y convenablement choisie, on peut déterminer une fonction

$$f = y + y^2\varphi_2(x) + y^3\varphi_3(x) + \ldots + y^s\varphi_s(x),$$

qui vérifie une équation de la forme

$$(24) \qquad x f'_x - y(\lambda + a)f'_y + \lambda f = y^{s+1}\eta + \sum_{i=1}^{i=m} c_i f^{iq+1} x^{ip}.$$

Si l'on pose $\varphi = f + \psi$ et que l'on remplace φ par cette expression dans l'équation (23), on est conduit à considérer une fonction $\psi(x, y)$ vérifiant l'équation

$$x\psi'_x - y(\lambda + a)\psi'_y + \lambda\psi + y^{s+1}\eta + \sum c_i f^{iq+1} x^{ip} = \sum_{i=1}^{i=m} c_i x^{ip}(f + \psi)^{iq+1}.$$

Cherchons à déterminer une solution de la forme

$$\psi = \psi_0 + x\psi_1 + x^2\psi_2 s \ldots,$$

ψ_0, ψ_1, ψ_2, ... étant des fonctions de y seul. On voit que si l'on pose $a(o, y) = \beta(y)$, $\psi_n(y)$ est déterminé par une équation de la forme

$$(n+\lambda)\psi_n - y[\lambda + \beta(y)]\psi'_n + y^{s+1}\gamma_n(y) = o.$$

On voit immédiatement que, pour $i = o$: 1° $\gamma_i(y)$ est une série entière en y ; 2° $\psi_i(y)$ est une série entière en y contenant y^{s+1} en facteur. Il en résulte que si la première propriété est vraie pour $i = o, 1, 2, \ldots, n-1$, elle est également vraie pour $i = n$. Nous en concluons que $\gamma_n(y)$ est une série entière. Examinons si ψ_0, ψ_1. ..., ψ_{n-1} étant des séries entières en y, contenant y^{s+1} en facteur, il en sera de même de ψ_n. L'équation qui vérifie ψ_n se met sous la forme

$$y\psi'_n - \left[\frac{n}{\lambda} + 1 + y\alpha'(y)\right]\psi_n = y^{s+1}\eta_n(y),$$

$\alpha'(y)$ étant la dérivée d'une série entière en y. La fonction η_n est également une série entière. On a donc

$$\psi_n = Cy^{\frac{n}{\lambda}+1}e^{\alpha} + y^{\frac{n}{\lambda}+1}e^{\alpha}\int y^{s-1-\frac{n}{\lambda}}\eta_n(y)\,e^{-\alpha}\,dy.$$

On obtiendra pour ψ_n une série entière, en prenant $C = o$, si l'intégration n'introduit pas de terme en Lx. Un pareil terme ne s'introduira que si les deux conditions suivantes sont vérifiées : 1° $\frac{n}{\lambda} = \frac{nq}{p}$ est un entier. Ceci exige que l'on ait $n = kp$, k étant un entier. 2° Le développement en série de $y^{s-\frac{n}{\lambda}}\eta_n(y)e^{-\alpha}$ suivant les puissances croissantes de y contient un terme constant. Ceci exige que l'on ait $s - \frac{n}{\lambda} \leqq o$, d'où $n \geqq \frac{sp}{q}$. Puisque nous avons d'autre part $s \geqq mq + 1$, nous aurons $n \geqq mp + \frac{p}{q}$. Il résulte des deux conditions trouvées que l'on a $n \geqq (m+1)p$.

Si nous prenons un entier r tel que l'on ait

$$r \leqq (m+1)p,$$

ψ_0, ψ_1, ..., ψ_{r-1} seront des séries entières. On peut, en faisant

$C = 0$ dans l'expression de ψ_n, supposer que ces séries contiennent toutes y^{s+1} en facteur. On le voit immédiatement en intégrant la série qui représente la quantité sous le signe $\int$. Posons

$$g = \psi_0(y) + x\psi_1(y) + \ldots + x^{r-1}\psi_{r-1}(y),$$

on aura

$$(25) \quad \begin{aligned} & xg'_x - y(\lambda + a)g'_y + \lambda g + y^{s+1}\eta \\ & + \Sigma c_i f^{iq+1} x^{ip} - \Sigma c_i(f+g)^{iq+1} x^{ip} = x^r y^{s+1} h(x, y), \end{aligned}$$

$h(x, y)$ étant une série entière en x et y.

Si nous ajoutons les équations (24) et (25), nous voyons que $K(x, y) \equiv f + g$ est solution de l'équation

$$x\varphi'_x - y(\lambda + a)\varphi'_y + \lambda\varphi = \Sigma c_i \varphi^{iq+1} x^{ip} + x^r y^{s+1} h(x, y).$$

Il en résulte, en raisonnant comme au n° **12**, que si l'on substitue à y la variable v définie par

$$v = K(x, y),$$

l'équation (14) devient

$$x\,dv + v[\lambda - \Sigma c_i x^{ip} v^{iq} - x^r v^s b(x, v)]\,dx = 0.$$

Dans la somme Σ le nombre i prend les valeurs $1, 2, \ldots, m$.

La série $b(x, v)$ peut être supposée convergente pour $|x| \leqq 1$, $|v| \leqq 1$, ainsi que nous l'avons dit (n° **12**, remarque I).

14. Forme de l'intégrale générale de l'équation différentielle dans le voisinage d'un col. — Nous écrirons l'équation (14) sous la forme

$$(26) \qquad x\,dy + y[\lambda - x^r(x, y)]\,dx = 0;$$

en désignant par $a_s, a_{s+1}, \ldots$ des séries entières en x, nous avons

$$a = a_s(x)y^s + a_{s+1}(x)y^{s+1} + \ldots.$$

Le cas que nous considérons habituellement sera celui où l'on a $r = 0$, $s = 1$; mais il nous sera utile de déterminer la forme de l'intégrale générale pour r et s quelconques. Nous supposons que la fonction $a(x, y)$ vérifie les conditions $\lambda - A > 0$ (n° **7**) et que, par suite, il existe des nombres fixes A_i tels que pour x variant de 0 à $+1$ on ait $|a_i(x)| \leqq A_i$.

Cherchons à déterminer une intégrale générale de l'équation (26) de la forme

$$f(x, y) \equiv y f_1(x) + y^2 f_2(x) + \ldots = \text{const.}$$

La fonction f vérifie la relation

$$x f'_x - \lambda y f'_y = - y x^r a(x, y) f'_y.$$

Achevons de déterminer cette fonction f en supposant que $f(x, 1)$ se réduit à y. On a

$$x f'_1 - \lambda f_1 = 0,$$

d'où $f_1 = x^\lambda$, puisque, pour $x = 1$, on a $f_1 = 1$. On a ensuite

$$(27) \qquad x f'_n - n\lambda f_n = - x^r (a_{n-1} f_1 + a_{n-2} f_2 + \ldots + a_s f_{n-s}),$$

$$(28) \qquad f_n = x^{n\lambda} \int_x^1 \frac{a_{n-1} f_1 + \ldots + a_s f_{n-s}}{x^{n\lambda - r + 1}} dx.$$

On voit que l'on peut déterminer successivement f_2, f_3, ..., et que toutes ces fonctions restent finies, lorsque x varie de 0 à 1. On obtient pour $n > 1$ des dominantes F_n des fonctions f_n, en considérant des fonctions F_n positives ou nulles pour $x = 1$ et vérifiant les équations

$$x F'_n - n\lambda F_n = - x^r (A_{n-1} F_1 + A_{n-2} F_2 + \ldots + A_s F_{n-s}).$$

Nous n'avons pour le montrer qu'à nous servir successivement pour $n = 2, 3, \ldots$ de l'expression (28) des fonctions f_n.

Cherchons les conditions de convergence et la forme de la fonction

$$F = y F_1(x) + y^2 F^2(x) + \ldots.$$

Cette fonction F vérifie la relation

$$x F'_x - \lambda y F'_y = - y x^r A(y) F'_y,$$
$$A(y) = A_0 y^s + A_{s+1} y^{s+1} + \ldots.$$

Distinguons maintenant les deux cas dont nous avons parlé :

1° *On a* $s = 1$, $r = 0$. La fonction F fournit l'intégrale générale de l'équation

$$(29) \qquad x\,dy + y(\lambda - A_1 y - A_2 y^2 - \ldots)\,dx = 0.$$

On peut poser

$$\frac{1}{\lambda - A_1 y - A_2 y^2 + \ldots} = \frac{1 + y\alpha'(y)}{\lambda}, \tag{30}$$

α' étant la dérivée d'une série entière $\alpha(y)$, que l'on supposera sans terme constant. Cette série $\alpha(y)$ a ses coefficients tous positifs, elle est convergente pour $|y| < 1$, puisque le dénominateur dans le premier membre de (30) n'est pas nul pour $|y| \leqq 1$. L'équation (29) admettra donc pour intégrale générale

$$F(x, y) \equiv y x^\lambda e^{\alpha(y)} = \text{const.}$$

Les termes du développement de cette fonction F suivant les puissances de y remplissent bien les conditions voulues pour être les dominantes des termes correspondants du développement de f. On suppose dans tout ce qui précède que x est réel et varie de 0 à 1.

La série F étant convergente pour $|y| \leqq 1$, la série f, considérée comme série en y, série convergente pour $|y| < 1$ et x variant de 0 à 1. On peut écrire

$$f \equiv y x^\lambda [1 + y g_1(x) + y^2 g_2(x) + \ldots],$$
$$F \equiv y x^\lambda [1 + y G_1 + y^2 G_2 + \ldots]$$

en désignant par $1 + y G_1 + y^2 G_2 + \ldots$ le développement de $e^{\alpha(y)}$. On a

$$|g_n(x)| \leqq G_n.$$

La série $1 + y g_1(x) + y^2 g_2(x) + \ldots$ sera donc convergente dans les mêmes conditions que la série f et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si $a(x, y)$ vérifie les conditions $\lambda - A > 0$, l'équation différentielle

$$x\,dy + y[\lambda - y a(x, y)]\,dx = 0 \tag{31}$$

admet pour $|y| \leqq 1$ et x réel variant de 0 à 1 une interpole générale de la forme

$$y x^\lambda [1 + y g_1(x) y^2 g_2(x) + \ldots] = \text{const.},$$

g_1, g_2, ... étant des fonctions de x seul, qui restent finies lorsque x varie de 0 à 1.

2° *r et s sont quelconques*. Nous avons

$$F_1 = x^\lambda, \qquad F_2 = F_3 = \ldots = F_s = 0.$$

Posons

$$F(x, y) \equiv y x^\lambda + x^{r+\lambda} K(x, y),$$
$$K(x, y) \equiv y^{s+1} K_{s+1}(x) + y^{s+2} K_{s+2}(x) + \ldots.$$

K_{s+1}, K_{s+2}, ... sont des fonctions de x seul qui se réduisent à zéro pour $x = 1$. La fonction K vérifie l'équation

$$(r + \lambda) K + x K'_x - \lambda y K'_y = -y A(y) - y x^r A(y) K'_y.$$

Les fonctions K_n étant fournies par des égalités de même forme que les équations (27), fournissant les fonctions f_n, nous obtiendrons des fonctions G_n dominantes des K_n, pour x compris entre 0 et 1, en considérant des fonctions $G_n(x)$ positives ou nulles, pour $x = 1$, telles que la fonction

$$G(x, y) \equiv y^{s+1} G_{s+1}(x) + y^{s+2} G_{s+2}(x) + \ldots$$

vérifie l'équation

$$(32) \qquad (r + \lambda) G + x G'_x - \lambda y G'_y = -y A(y) - y A(y) G'_y.$$

En effet, nous avons remplacé x^r par 1 dans l'équation que vérifie K; nous aurons donc, d'après le lemme du n° 9, augmenté les fonctions G_n.

Si nous cherchons, pour l'équation (32), une solution G ne dépendant pas de x, cette solution vérifie l'équation

$$y[\lambda - A(y)] \frac{dG}{dy} - (r + \lambda) G = y A(y).$$

Cette équation est une équation de la forme étudiée au n° 8. On peut supposer que r et s sont tels que l'on ait $s\lambda > r$. Cette équation admet alors une solution

$$G(y) = c_{s+1} y^{s+1} + c_{s+2} y^{s+2} + \ldots$$

convergente pour $y = 1$ et ayant tous ses coefficients c_i positifs. Ces coefficients étant des dominantes des fonctions K_i, F_i, f_i, toutes les séries que nous avons introduites seront convergentes pour $|y| < 1$ et x réel compris entre 0 et 1. Les fonctions $f_2, f_3, \ldots, f_s$ sont identiquement nulles, puisqu'elles admettent pour dominantes

F_2, F_3, $\dots$, F_s, qui sont nulles. On voit également qu'il en est ainsi d'après les formules (28).

On peut donc écrire

$$f \equiv yx^\lambda[1 + x^r y^s g_{s+1}(x) + x^r y^{s+2} g_{s+2}(x) \dots],$$
$$F \equiv yx^\lambda[1 + x^r y^s K_{s+1}(x) + x^r y^{s+2} K_{s+2} + \dots],$$
$$|g_n(x)| < K_n(x) < c_n,$$

et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Une équation différentielle de la forme

$$(33) \qquad x\,dy + y[\lambda + x^r y^s a(x, y)]\,dx = 0,$$

où $a(x, y)$ satisfait aux conditions $\lambda - A > 0$, admet une intégrale générale de la forme

$$yx^\lambda[1 + x^r y^s g_s(x) + x^r y^{s+1} g_{s+1}(x) + \dots] = \text{const.}$$

La série entre crochets est convergente pour $|y| < 1$ et x réel variant de 0 à 1. Lorsque x varie de 0 à 1, y compris 0, les quantités $g_n(x)$, qui sont des fonctions de x seul, restent finies.

15. Étude d'une équation particulière dans le cas où λ est rationnel. — Pour étudier l'intégrale générale de l'équation (32) dans le cas où $\lambda = \frac{p}{q}$ est rationnel, nous étudierons d'abord le cas particulier de l'équation

$$(34) \qquad x\,dy + y\left[\frac{p}{q}\, x^{mp} y^{mq} c(x^p y^q)\right] dx = 0,$$
$$c(x^p y^q) = c_0 + c_1 x^p y^q + c^2 x^{2p} y^{2r} + \dots;$$

m est un entier, en général égal à 1; c_0, c_1, c_2 sont des constantes. Il nous suffirait de considérer le cas où c est un polynome en $x^p y^q$, mais rien n'est changé aux raisonnements, si c est une série entière. Nous supposons que la condition $\lambda - C > 0$ est satisfaite, c'est-à-dire que l'on a $\frac{p}{q} - |c_0| c_1| - | - \dots > 0$.

Nous savons (n° 14) que cette équation admet une intégrale générale de la forme

$$g(x, y) \equiv yx^{\frac{p}{q}}[1 + yg_1(x) + y^2 g_2(x) + \dots] = \text{const.}$$

Nous allons chercher la forme analytique des fonctions $g_n(x)$. Posons

$$u = yx^{\frac{p}{q}}, \qquad t = -\mathrm{L}x.$$

L'équation (34) devient

$$du + u^{mq+1} c(u^q)\, dt = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation sera donnée par une relation de la forme

$$f(u, t) \equiv u + tf_1(u) + t^2 f_2(u) + \ldots = \text{const.},$$

la fonction $f(u, t)$ vérifiant l'équation

$$f'_t = u^{mq+1} c(u^q) f'_u.$$

On sait, en effet, d'après les théorèmes généraux d'existence, que cette équation admet une solution $f(u, t)$ se réduisant à u pour $t = 0$. Cette solution est représentée par une série entière en u et t, convergente pour u et t voisins de zéro. On a

$$(n+1) f_{n+1}(u) = u^{mq+1} c(u^q) f'_n(u).$$

En faisant $n = 0$, on voit que f_1 contient u^{mq+1} en facteur. On voit ensuite, par le raisonnement habituel de récurrence, que f_n contient u^{mnq+1} en facteur. $f(u, t)$ sera donc de la forme

$$f \equiv u[1 + tu^{mq} \mathrm{R}_1(u^q) + t^2 u^{2mq} \mathrm{R}_2(u^q) + \ldots + t^n u^{mnq} \mathrm{R}_n(u^q) + \ldots],$$

$\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \ldots, \mathrm{R}_n, \ldots$ étant, suivant que b est un polynome ou une série, des polynomes ou des séries en u^q. On peut ordonner f suivant les puissances de u. On aura

$$f \equiv u[1 + u^{mq} \mathrm{P}_1(t) + u^{2mq} \mathrm{P}_2(t) + \ldots + u^{mnq} \mathrm{P}_n(t) + \ldots],$$

$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n, \ldots$ étant des polynomes en t, de degré au plus égal à l'indice et contenant tous t en facteur.

Si dans f on remplace u par $yx^{\frac{p}{q}}$ et t par $-\mathrm{L}x$, l'intégrale f devient identique à l'intégrale g, puisque toutes les deux se réduisent à y pour $x = 1$. Nous avons donc

$$g(x, y) \equiv y x^{\frac{p}{q}} [1 + x^p y^q P_1(Lx) + x^{2p} y^{2q} P_2(Lx) + \ldots + x^{np} y^{nq} P_n(Lx) + \ldots],$$

P_n étant un polynome en Lx de degré au plus égal à n.

16. Forme de l'intégrale dans le cas où λ est rationnel. — Considérons l'équation

$$(35) \qquad x\,dy + y\left[\frac{p}{q} - c(x^p y^q) - x^r y^s a(x, y)\right] dx = 0,$$

où l'on a

$$c(x^p y^q) = c_1 x^p y^q) + c_2 x^{2p} y^{2q} + \ldots + c_{m'} x^{m'p} y^{m'q},$$
$$a(x, y) = a_{s+1}(x) + y a_{s+2}(x) + \ldots;$$

$c_1, c_2, \ldots, c_{m'}$ sont des constantes; $a_{s+1}, a_{s+2}, \ldots$ des fonctions de x seul. Nous supposons $r > m'p$, $s > m'q$. Nous posons

$$C_i = |c_i|, \qquad A_i > |a_i(x)|, \qquad A(y) = A_{s+1} + y A_{s+2} + \ldots,$$
$$C = C_1 y^q + C_2 y^{2q} + \ldots + c_{m'} y^{m'q};$$

A_i est un nombre positif supérieur à $|a_i(x)|$ pour x réel et variant de 0 à 1. Nous supposons enfin que la fonction $c(x^p y^q) + a(x, y)$ satisfait aux conditions $\frac{p}{q} - C - A > 0$.

L'intégrale générale de l'équation (35) est, comme nous l'avons vu (n° **14**), de la forme

$$f(x, y) \equiv y x^{\frac{p}{q}} [1 + y f(x) + y^2 f_2(x) + \ldots] = \text{const.},$$

f vérifiant l'équation

$$x f'_x - y\left[\frac{p}{q} - c(x^p q^q) - x^r y^s a(x, y)\right] f'_y = 0.$$

Nous connaissons (n° **15**) une fonction $g(x, y)$

$$g(x, y) \equiv x^\lambda \gamma(x, y) \equiv y[1 + y g_1(x) + y^2 g_2(x) + \ldots]$$

qui vérifie l'équation

$$x g'_x - y[\lambda - c(x^p y^q)] g'_y = 0, \qquad \lambda = \frac{p}{q}.$$

Posons

$$f(x, y) = g(x, y) + x^{\lambda+r}\varphi(x, y).$$

La fonction φ vérifie l'équation

$$(\lambda + r)\varphi + x\varphi'_x - \lambda y\varphi'_y = -(c + x^r y^s a)y\varphi'_y - y^{s+1}a\gamma'_y.$$

On peut obtenir la fonction φ sous la forme

$$\varphi \equiv y\varphi_1 + y^2\varphi_2 + y^3\varphi_3 + \ldots,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ étant des fonctions de x seul, nulles pour $x = 1$. Les fonctions φ_n sont fournies par des équations de la forme

$$x\varphi'_n - (n\lambda - \lambda - r)\varphi_n = -\psi_n,$$

où ψ_n est une fonction linéaire d'une part des fonctions φ_i et g_i, d'autre part des fonctions a_i pour lesquelles on a $i < n$. Nous obtiendrons donc des dominantes Φ_n des fonctions φ_n en remplaçant les a_i, g_i, ainsi que les constantes c_i, par des dominantes. Nous sommes ainsi amenés à considérer une fonction

$$G(y) = y(1 + G_1 y + G_2 y^2 + \ldots),$$

où les constantes G_i sont des dominantes de $g_i(x)$ pour x variant de 0 à 1. Nous avons démontré (n° **14**) l'existence de cette fonction G. Nous considérons la fonction

$$\Phi \equiv y\Phi_1(x) + y^2\Phi_2(x) + \ldots,$$

$\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ étant des fonctions de x nulles ou positives pour $x = 1$ et Φ vérifiant l'équation

$$(\lambda + r)\Phi + x\Phi'_x - \lambda y\Phi'_y = -(G + y^s A)y\Phi'_y - y^{s+1}AG'_y.$$

Cette équation est de la même forme que l'équation (32). Les raisonnements faits pour l'équation (32) s'appliquent.

La série représentant la fonction φ sera donc convergente pour $|y| < 1$ et x réel variant de 0 à 1. Nous pouvons remarquer que pour $n < s + 1$ les fonctions Φ_n sont nulles, comme les fonctions $F_2, F_3, \ldots, F_s$ du n° **14**. Les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_s$ sont par conséquent nulles.

Nous arrivons donc à une conclusion analogue à celle du n° **14**, qui, rapprochée de ce que nous savons (n° **15**) sur la forme de $g(x, y)$, nous donne l'énoncé suivant :

L'équation

$$(35)\qquad x\,dy + \left[\frac{p}{q} - c(x^p y^q) - x^r y^s a(x, y)\right] dx = 0,$$

où c est un polynome de degré m' par rapport à l'expression $x^p y^q$, où l'on a $r > m'p$, $s > m'q$, où la fonction $c(x^p y^q) + x^r y^s a(x, y)$ satisfait aux conditions $\frac{p}{q} - \mathrm{C} - \mathrm{A} > 0$, admet une intégrale générale de la forme

$$x^{\frac{p}{q}} y[1 + x^p y^q \mathrm{P}_1(\mathrm{L}x) + \ldots + x^{m'p} y^{m'q} \mathrm{P}_{m'}(\mathrm{L}x) + x^r y^s h(x, y)] = \text{const.},$$

dans laquelle P_1, P_2, $\mathrm{P}_{m'}$ sont des polynomes en $\mathrm{L}x$ de degré au plus égal à l'indice. $h(x, y)$ se présente sous la forme

$$h(x, y) = h_0(x) + y h_1(x) + y^2 h_2(x) + \ldots;$$

h_0, h_1, h_2, ... sont des fonctions de x seul et cette série h est convergente pour $|y| < 1$ et x réel varient de 0 à 1.

17. Forme de l'intégrale générale pour λ irrationnel. — Les diverses formes que nous pouvons donner à l'équation (14) vont nous permettre de déterminer les propriétés du développement fournissant l'intégrale générale de l'équation, ainsi que la forme des différents termes de ce développement.

Nous avons vu que l'équation

$$(36)\qquad x\,dy + y[\lambda + y a(x, y)]\,dx = 0$$

admet l'intégrale générale

$$(37)\qquad f \equiv x^\lambda[1 + y f_1(x) + y^2 f_2(x) + \ldots] = \text{const.},$$

f se réduisant à y pour $x = 1$. Si l'on fait le changement de variable convenablement choisi (n° **12**)

$$v = y[1 + l(x, y)],$$

cette équation (36) devient l'équation

$$x\,dv + v[\lambda + x^r v^s b(x, v)]\,dx = 0$$

qui admet pour intégrale générale

$$G(x, y) \equiv x^\lambda v[1 + x^r v^s g(x, v)] = \text{const.}$$

Si dans G nous remplaçons v par $y[1 + l(x, y)]$, nous obtenons une fonction $K(x, y)$ qui, égalée à une constante, fournit l'intégrale générale de (36). Soit

$$y + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3 + \ldots$$

ce que devient cette intégrale pour $x = 1$. La fonction $\varphi(x, y)$ définie par la relation

$$\varphi + \alpha_2 \varphi^2 + \alpha_3 \varphi^3 + \ldots = K(x, y)$$

sera de la forme

$$(38) \qquad \varphi(x, y) \equiv K(x, y) + \beta_2 K^2(x, y) + \beta_3 K^3(x, y) + \ldots,$$

les quantités α_i et β_i étant des constantes. D'après la façon dont φ vient d'être définie, cette fonction fournira une intégrale de (36) se réduisant à y pour $x = 1$. La fonction $\varphi(x, y)$ sera donc identique à f. Nous tirons de là les conséquences suivantes :

1° Les termes de f contenant y à une puissance inférieure à $s + 1$ s'obtiendront en considérant, dans G, le seul terme $x^\lambda v$, et en remplaçant, dans (38), $K(x, y)$ par $yx^\lambda[1 + E(x, y)]$, l'expression

$$E(x, y) \equiv y e_1(x) + y^2 e_2(x) + \ldots + y_{s-1} e_{s-1}(x)$$

désignant l'ensemble des termes de $l(x, y)$ qui ne contiennent pas y^s en facteur; $e_1, e_2, \ldots, e_{s-1}$ sont des séries entières en x. Nous n'avons de plus à considérer dans (38) que les termes ne contenant pas K^{s+1} en facteur. Les termes de f contenant y à une puissance inférieure à $s + 1$ sont identiques aux termes correspondants de

$$yx^\lambda(1 + E) + \beta_2 y^2 x^{2\lambda}(1 + E)^2 + \ldots + \beta_s y^s x^{\lambda s}(1 + E)^s.$$

Il en résulte que, pour $n < s$, le coefficient f_n sera un polynome en x^λ, de degré au plus égal à n. Les coefficients de ce polynome seront des séries entières en x. Le nombre s pouvant être pris aussi grand que l'on veut, cette propriété est vraie quel que soit n. *Les fonctions $f_i(x)$ sont des polynomes en x^λ de degré au plus* *égal à i; les coefficients de ces polynomes sont des séries entières en x.*

2° Cherchons les termes de f où x figure avec un exposant ne dépassant pas un nombre σ. Supposons que nous ayons pris r et s tels que l'on ait

$$\sigma < r, \qquad \sigma < (s+1)\lambda.$$

Les termes considérés proviennent encore de l'expression (38) où nous ne considérons que les termes qui ne contiennent pas K^{s+1} en facteur, et où nous remplaçons K par $yx^\lambda[1+M(x,y)]$. L'expression

$$M(x,y) \equiv m_0(y) + x m_1(y) + \ldots + x^{r-1} m_{r-1}(y),$$

où les m_i sont des séries entières en y, désigne l'ensemble des termes de $l(x,y)$ qui ne contiennent pas x^r en facteur. On voit que l'ensemble des termes considérés est de la forme $P_\sigma(x, x^\lambda, y)$, P étant un polynome en x et x^λ, ayant pour coefficients des séries entières en y. On peut écrire

$$f(x,y) \equiv P_\sigma(x, x^\lambda, y) + x^\sigma R_\sigma(x,y);$$

$R_\sigma(x,y)$ est un développement de forme analogue à f. Cette fonction $R^\sigma(x,y)$ reste finie pour $|y|<1$ et x variant de 0 à 1. De plus elle tend vers zéro avec x. En effet, les termes qui restent dans l'expression

$$K + \beta_2 K^2 + \ldots + \beta_s K^s$$

lorsqu'on a enlevé les termes qui font partie de $P_\sigma(x, x^\lambda, y)$ contiennent en facteur une puissance de x supérieure à σ et leur quotient par x^σ reste fini dans le domaine considéré, puisqu'il s'exprime au moyen de séries convergentes dans ce domaine. Il en est de même des termes de f qui proviennent de

$$\beta_{s+1} K^{s+1} + \beta_{s+2} K^{s+2} + \ldots.$$

Ces termes, contenant en facteur $s^{(s+1)\lambda}$, tendent vers zéro avec x lorsqu'on les divise par x^σ puisque l'on a pris s tel que l'on ait $(s+1)\lambda$. Le nombre σ étant quelconque, nous voyons que $f(x,y)$, *considéré comme fonction de x, est une fonction semi-régulière pour $x=0$* (n° 10).

18. Propriétés de l'intégrale générale lorsque λ est rationnel. — L'équation (36) qui admet l'intégrale (37) fournit (n° **13**) par un changement de variable l'équation

$$x\,dv + v[\lambda - c(x^p v^q) - x^r v^s a(x, v)]\,dx = 0, \quad \lambda = \frac{p}{q}$$

admettant (n° **16**) une intégrale de la forme

$$G(x, v) \equiv x^\lambda v[1 + H(x^p v^q, x^p v^q Lx) + x^r v^s h(x, v)] = \text{const.},$$

où H est un polynome de degré m par rapport à chacune des deux expressions $x^p v^q$ et $x^p v^q Lx$. On suppose $s > mq$, $r > pm$.

Raisonnons comme au n° **17**. Si nous remplaçons dans G la variable v par $y(1 + l)$, nous obtenons une intégrale de l'équation (36) que nous désignerons par $K(x, v)$ et l'intégrale (37) sera de la forme

$$f(x, y) \equiv K(x, y) + \beta_2 K^2(x, y) + \beta_3 K^3(x, y) + \ldots.$$

Nous en tirerons les conséquences suivantes :

1° Les termes de f qui contiennent y à une puissance inférieure à $s+1$ s'obtiennent de la façon suivante, en conservant les notations du n° **17** : nous considérons dans G les seuls termes de $x^\lambda v(1+H)$, nous remplaçons dans cette expression v par $y(1+E)$, en ne conservant que les termes ne contenant pas y^{s+1}, nous substituons enfin l'expression ainsi obtenue à K, dans l'expression

$$K + \beta_2 K^2 + \ldots + \beta_s K^s. \tag{39}$$

Il en résulte que pour $n < s$ le coefficient f_n dans l'intégrale (37) sera un polynome en x^λ et $x^p Lx$. Les coefficients de ce polynome sont des séries entières en x; le degré de ce polynome est au plus égal à n par rapport à x^λ et au plus de degré $\frac{n}{q}$ par rapport à $x^p Lx$. Ces propriétés sont vraies quel que soit n, puisque s peut être choisi aussi grand que l'on veut.

2° Cherchons les termes de f où x figure à une puissance ne dépassant pas σ. Prenons r et s tels que r et $(s+1)\lambda$ soient supérieurs à σ. Les termes considérés proviennent de l'expression (39) où nous remplacerons K par $vx^\lambda(1+H)$ et v par $y(1+M)$. Les termes cherchés sont donc de la forme $P_\sigma(x, x^\lambda, x^p y^q Lx, y)$, P_σ étant un polynome en x, x^λ, $x^p y^q Lx$. Les coefficients de ce polynome sont des séries entières en y. Il en résulte comme précédemment que l'on a

$$f \equiv P_\sigma(x, x^\lambda, x^q y^q Lx, y) + x^\sigma R_\sigma(x, y);$$

$R_\sigma(x, y)$ est une fonction de x et de y qui reste finie pour $|y| < 1$, lorsque x varie de o à 1, et qui tend vers zéro en même temps que x.

$f(x, y)$ est une fonction semi-régulière de x pour $x = 0$.

19. Loi de correspondance dans le voisinage d'une caractéristique traversant un col. — Considérons un col P de coordonnées x_0, y_0; à ce point aboutissent quatre arcs de caractéristiques tangents deux à deux à la même droite. Ces arcs $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ sont des séparatrices et divisent la région voisine de P en quatre secteurs. Les caractéristiques situées dans chacun de ces secteurs forment quatre groupes absolument distincts dans le voisinage P. Nous pouvons étudier séparément les caractéristiques de chacun de ces secteurs.

Soient R l'un d'eux et Γ_1 et Γ_2 les séparatrices limitant ce secteur. Γ_1 et Γ_2 n'ont pas même tangente en P. Supposons qu'en parcourant Γ_1 de manière à se rapprocher de P, on ait R à sa droite, Γ_2 sera le prolongement à droite de Γ_1. Une caractéristique G, voisine de L_1, deviendra voisine de Γ_2, si on la parcourt dans le sens indiqué pour Γ_1.

L'ensemble de Γ_1 et de Γ_2 forme une caractéristique C_0 présentant en P un point anguleux (n° **3**). Ce seront uniquement des caractéristiques situées dans la région R que nous pourrons considérer comme des caractéristiques voisines de C_0.

Nous savons (n° **12**) que l'équation différentielle peut, dans le voisinage de P, se mettre sous la forme

$$u\,dv + v[\lambda - v\alpha(v, u)]\,du = 0 \tag{36}$$

au moyen d'un changement de variables de la forme

$$u = a(x - x_0) + b(y - y_0) + \ldots, \qquad v = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) \tag{40}$$

qui, résolu par rapport à $x - x_0$ et $y - y_0$, donnera

$$(41) \qquad x - x_0 = Au + Bv + \ldots, \qquad y - y_0 = A_1 u + B_1 v + \ldots;$$

a, b, α, β, A, B, A_1, B_1 désignent des constantes; les seconds membres de ces formules sont des séries entières, dont nous n'avons écrit que les termes du premier degré.

Les quatre demi-droites, limitées par l'origine sur les droites $u = 0$, $v = 0$ dans le plan des variables réelles u et v, correspondent aux quatre arcs de caractéristiques Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 du plan des xy. A chacune des quatre régions déterminées dans le plan des uv par les deux axes $u = 0$, $v = 0$ correspond un des quatre secteurs limités par Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4.

Nous pouvons toujours supposer que la région R du plan des xy, que nous voulons considérer, correspond à la région du plan des uv pour laquelle on a $u > 0$, $v > 0$. Nous pouvons enfin supposer que les variables u et v sont telles que les changements de variables (40) et (41) ainsi que l'intégrale générale de l'équation (36)

$$(42) \qquad vu^{\lambda}[1 + vf_1(u) + v^2 f_2(u) + \ldots) = \text{const.}$$

soit variable pour toutes les valeurs réelles de u et de v compris entre 0 et 1 (n° 12, remarque I et n° 14). On sait que f_1, f_2, ... sont des fonctions de u nulles pour $u = 0$.

Considérons dans le plan des variables uv le carré O'A'D'B', dont les côtés ont respectivement pour équations : O'A', $v = 0$; O'B', $u = 0$; A'D', $u = 1$; B'D', $v = 1$. Une caractéristique C' de l'équation en u et v, qui coupera en N' le côté B'D' de ce carré, pénétrera dans le carré et en ressortira en coupant A'D' en Q', puisqu'elle ne peut ni rester à l'intérieur du carré, ni couper les côtés O'A', O'B', ni couper de nouveau A'D', ni aboutir au point singulier $u = 0$, $v = 0$. Soient 1 et v les coordonnées de Q'; u et 1 les coordonnées de N'. L'intégrale (42) valable pour tous les points du carré O'A'D'B' nous donne immédiatement la relation

$$v = u^{\lambda}[1 + f(u)],$$
$$f(u) = 1 + f_1(u) + f_2(u) + \ldots.$$

Si nous considérons, dans le plan des variables x et y, les arcs de courbe AD et BD, qui correspondent, au moyen des formules (41), aux segments $A'D'$ et $B'D'$, ces deux arcs de courbe joueront le rôle que jouaient au n° 2 les courbes S et S'. Les quantités u et v, définissant la position de N' et Q', définissent, d'après les formules (41), la position des points N et P d'intersection d'une caractéristique C de l'équation en x et y avec les arcs de courbe AD et BD. La caractéristique C_0 formée de deux arcs de Γ_1 et Γ_2, correspondant aux segments O'A' et O'B' du plan des uv, joue exactement le rôle que jouait l'arc $M_0 M'_0$ de la caractéristique C_0 au n° 2.

Nous avons donc la loi de correspondance entre les points d'intersection d'une caractéristique C, voisine de C_0, avec deux arcs de courbe AB et BD découpant sur C_0 un arc BPA contenant un col P.

Cette loi de correspondance $v = u^\lambda[1+f(u)]$ n'est pas en général holomorphe, mais les propriétés que nous avons établies (n^{os} 17 et 18) nous permettront d'utiliser la fonction $f(u)$, semi-régulière pour $u=0$, de la même manière qu'on emploie les séries entières.

Remarque. — Considérons deux arcs S et S' coupant, en dehors des arcs PA et PB, Γ_1 et Γ_2 en des points M_0 et M'_0 tels que sur l'arc AM_0 de Γ_1 il n'y ait aucun point singulier et qu'il en soit de même de l'arc BM'_0 de Γ_2. Il est facile d'avoir la forme de la loi de correspondance entre les points M et M' intersections de S et S' avec une caractéristique C' voisine de C_0. Nous faisons sur les arcs de courbe S et S' et sur leurs positions par rapport à C_0 les hypothèses 1°, 2° et 3° et remarques énoncées au n° 2. En particulier les coordonnées d'un point M de S sont des fonctions d'un paramètre t. Ces fonctions sont holomorphes pour la valeur $t=0$ correspondant au point M_0. Les coordonnées d'un point M' de S' sont des fonctions d'un paramètre t', holomorphes pour $t'=0$, correspondant au point M'_0.

Supposons qu'une caractéristique C, voisine de C_0, suivie dans le sens $M_0PM'_0$, rencontre : 1° S en M, de paramètre t; 2° l'arc AD en N, de paramètre u; 3° BD en Q, de paramètre v; 4 S' en N, de paramètre t'. Les arcs M_0A et BM' de C_0 ne contenant aucun point singulier, nous aurons les relations

$$t' = av[1+h(v)], \qquad u = bt[1+g(t)],$$

a et b sont des constantes différentes de zéro; $h(v)$ est holomorphe et nul pour $v = 0$; $g(t)$ est holomorphe et nul pour $t = 0$. En nous servant de la relation

$$v = u^\lambda[1 + f(u)],$$

nous avons

$$v = b^\lambda t^\lambda[1 + \mathrm{H}(t)], \qquad t' = ab^\lambda t^\lambda[1 + \mathrm{G}(t)],$$
$$t' = ct^\lambda[1 + \mathrm{G}(t)],$$

c désigne une constante différente de zéro, $\mathrm{H}(t)$ et $\mathrm{G}(t)$ sont des fonctions de t qui, d'après le n° 10, sont *semi-régulières* et nulles pour $t = 0$, puisque $f(u)$ est *semi-régulière* et nulle pour $u = 0$. Cette relation entre t et t' est valable si t est assez petit. On établirait facilement, comme au n° 2, que, si M est suffisamment voisin de M_0, la caractéristique passant par un point M de S va couper S′ en un point M′ voisin de M'_0. Ce résultat peut du reste s'établir sans avoir recours aux relations dont nous nous sommes servis. Il suffit d'employer des raisonnements analogues à ceux donnés par M. Bendixson, page 19.

La relation entre t et t' peut être résolue par rapport à t sous la forme

$$t = c' t'^{\lambda'}[1 + \mathrm{K}(t')]$$

avec $cc' = 1$, $\lambda\lambda' = 1$. La fonction $\mathrm{K}(t')$ est semi-régulière et nulle pour $t' = 0$. Pour obtenir la relation entre t et t' sous cette forme, il suffit de raisonner comme nous l'avons fait, mais en supposant C_0 et C′ parcourus en sens inverse du sens adopté.

20. Caractéristiques voisines d'un cycle passant par un col. — Considérons un cycle singulier C_0 passant par un col P, et ne passant par aucun autre point singulier. Ce cycle est formé, d'après ce que nous avons vu (n$^{\text{os}}$ 3 et 19), d'une boucle présentant un point anguleux en P. D'après ce que nous avons dit, au début du n° 19, les caractéristiques voisines de C_0 seront uniquement des caractéristiques situées dans la région R, intérieure à la boucle formée par C_0. Nous pouvons toujours supposer que cette région R correspond, dans le voisinage de P, à la portion du plan des uv voisine de $u = 0$, $v = 0$, pour laquelle u et v sont positifs. Nous nous proposons de chercher, s'il y a, dans R, des caractéristiques fermées voisines de C_0.

Employons les mêmes notations qu'au numéro précédent. Soit S l'arc de courbe BD correspondant au segment B′D′. Soit S′ l'arc de courbe AD correspondant au segment A′D′. Le cycle C_0 coupe S et S′ en A et B qui déterminent sur C_0 deux arcs : l'arc APB et l'arc BIA. Parcourons une caractéristique C, voisine de C_0, en allant toujours dans le même sens : BPAIB. Cette caractéristique C coupe S au point N de paramètre u, S′ au point Q de paramètre v, et vient recouper S′ en un point N_1 de paramètre $u = u_1$. D'après (19), nous avons la relation

$$v = u^\lambda[1 + f(u)]. \tag{43}$$

D'après le n° 2, nous avons la relation

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_1^2 + \ldots,$$

le second membre étant une série entière en u_1.

En effet, l'arc AIB de C_0 ne contient pas de points singuliers et, ni S, ni S′ ne sont tangents en B et A à C_0. Nous avons donc

$$a_1 u_1 + a_2 u_1^2 + \ldots = u^\lambda[1 + f(u)].$$

Cette relation, qu'on obtiendrait facilement sous forme résolue par rapport à u ou à u_1, nous donne la *loi de conséquence*, relation entre les paramètres de deux points consécutifs d'intersection de S avec C.

Pour que C soit un cycle, il faut et il suffit que N et N_1 coïncident; c'est-à-dire que l'on ait $u = u_1$,

$$a_1 u + a_2 u^2 + \ldots = u^\lambda[1 + f(u)]. \tag{44}$$

On voit que *si l'on a* $\lambda \neq 1$, cette relation ne peut être vérifiée pour aucune valeur de u voisine de zéro.

Il n'y a pas de caractéristique fermée voisine de C_0.

Si l'on a $\lambda = 1$, deux cas peuvent se présenter :

1° *Le point* P *présente les caractères analytiques d'un centre* (1) : c'est-à-dire qu'au moyen d'un changement conve-

(1) *Voir* au sujet de l'emploi de ces dénominations de centre et de foyer, dans le cas d'un col, le Mémoire que j'ai publié dans le *Journal de l'École Polytechnique*, 1904, p. 21 et 22.

nable de variables (41), l'équation en u et v peut s'écrire

$$u\,dv + v\,du = 0.$$

Nous avons dans ce cas $f(u) \equiv 0$. La relation (43) devient $u = v$ et la relation (44) devient

$$a_1 u + a_2 u^2 + \ldots = u.$$

Si l'on a

$$a_1 = 1 \quad \text{et} \quad 0 = a_2 = a_3 = a_4 = \ldots,$$

toutes les caractéristiques voisines de C_0 *sont des cycles. Si ces conditions ne sont pas vérifiées, aucune caractéristique voisine de* C_0 *n'est un cycle.*

2° *Le point* P *présente les caractères analytiques d'un foyer.* Ceci revient à dire que dans l'intégrale (42) les expressions $f_i(u)$ contiennent des termes en Lu. Nous allons montrer que dans ce cas il n'y a jamais de caractéristiques fermées voisines de C_0.

Nous pouvons (n° 18), en désignant par σ un nombre positif quelconque, mettre l'équation (44) sous la forme

$$P_\sigma(u,\, uLu) + u^\sigma R_\sigma(u) = 0, \tag{45}$$

où P_σ est un polynome en u et uLu, dont tous les termes sont, par rapport à u, de degré infinitésimal ne dépassant pas σ; $R_\sigma(u)$ est une fonction qui tend vers zéro avec u.

Nous montrerons ci-après qu'il existe un entier ν tel que, pour $\sigma < \nu$, le polynome P_σ soit identiquement nul et que P_ν ne soit pas identiquement nul.

Ceci admis, le polynome P_ν sera de la forme $u^\nu P(Lu)$, P étant un polynome en Lu, et l'équation (45) se présentera pour $\sigma = \nu$, sous la forme

$$P(Lu) - R_\nu(u) = 0,$$

Équation qui n'admet pas de solution pour u voisin de zéro. *Il n'y a donc pas de cycles voisins de* C_0.

Il est à peu près évident que l'on peut trouver un nombre ν tel que P_ν ne soit pas nul. En effet, si quel que soit σ le polynome P_σ était nul, les termes des deux membres de (44) dont le degré ne dépasse pas σ seraient identiques. Ceci exigerait que le second membre ne contienne pas de termes en Lu.

Ce second membre a été obtenu en faisant $v = 1$ dans l'intégrale (42). Cette valeur $v = 1$ ne joue aucun rôle particulier dans la détermination de cette intégrale, en remplaçant v par cv dans l'équation différentielle (36), $v = 1$ correspondra à une valeur de v absolument quelconque et par suite les termes en Lu ne peuvent disparaître pour $v = 1$.

Donnons une seconde démonstration permettant de déterminer ν.

Si l'on n'est pas dans le cas 1°, examiné plus haut, les constantes $c_1, c_2, \ldots$, déterminées au n° 13, ne sont pas toutes nulles.

Soit $c_m = \gamma$ la première de ces constantes qui n'est pas nulle.

L'équation (34) considérée au n° 15 devient pour $\lambda = p = q = 1$

$$x\,dy + y(1 - \gamma x^m y^m)\,dx = 0$$

et l'intégrale $g(x, y)$ du n° 15 est

$$g(x, y) \equiv xy(1 + m\gamma x^m y^m \,\mathrm{L}x)^{-\frac{1}{m}}.$$

Si nous prenons l'équation différentielle (36) sous la forme employée au n° 16, avec $m' = m$, $r > m$, $s > m$, u et v remplaçant x et y, nous avons dans l'intégrale (42) le terme vu^λ, terme qui pour $\lambda = 1$, $v = 1$ disparaît dans (44) si $a_1 = 1$.

Ce terme mis à part, le seul terme de l'intégrale (42) dont le degré par rapport à u soit inférieur à $m + 2$ est le terme

$$-\gamma v^{m+1} u^{m+1} \,\mathrm{L}u.$$

Par conséquent, si l'on a $a_1 \neq 1$, on aura $\nu = 1$; si l'on a $a_1 = 1$, on aura $\nu = m + 1$.

Il résulte de la discussion précédente que : *On peut toujours déterminer à l'intérieur de* R *une région annulaire* A *limitée d'un côté par* C_0 *et telle que l'on soit dans l'un des deux cas suivants :*

1° *Aucune des caractéristiques passant dans la région* A *n'est un cycle ;*

2° *Toutes les caractéristiques passant dans la région* A *sont des cycles.*

Le premier cas est le cas général. Pour que l'on soit dans le second cas, il faut que l'on ait $\lambda = 1$, que le point P présente les caractères analytiques d'un centre (constantes c_i du n° **13** toutes nulles) et qu'en outre une infinité d'autres conditions soient vérifiées.

21. Cycles singuliers passant par plusieurs cols. — Considérons un cycle singulier C_0 passant par plusieurs cols. Supposons que nous rencontrions successivement les cols

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, P_1,$$

lorsque nous parcourons C_0 dans un certain sens. C_0 est formé d'arcs de séparatrices allant d'un col P_i à un col P_{i+1}. D'après ce que nous avons dit (nos **3** et **19**), le cycle C_0 présente un point anguleux en chacun des points P_i, et la seule région voisine de P_i dans laquelle il est possible de considérer des caractéristiques C voisines de C_0 est parfaitement déterminée : c'est le secteur d'angle inférieur à π limité par les deux arcs de C_0 allant de P_i à P_{i-1} et à P_{i+1}. On ne devra donc considérer que des cycles C_0 tels que l'une des régions R limitée par C_0 contienne tous ces secteurs relatifs aux divers cols traversés par C_0. Ce seront uniquement des caractéristiques situées dans cette région R que nous pourrons considérer comme voisines de C_0.

Si un cycle singulier C_0 présente un point double (*fig.* 1), nous devons le parcourir de manière que les arcs parcourus ne se traversent pas. On devra parcourir le cycle PA'APBB', et non le cycle PA'APB'BP. Un pareil cycle ou *polycycle* détermine dans le plan un nombre de régions supérieur à 2. L'étude des caractéristiques relatives à chacune de ces régions pourra présenter des circonstances bien différentes suivant la région.

Par exemple, dans la figure 1, nous avons les régions numérotées 1, 2, 3. L'étude des caractéristiques situées dans les régions 1 et 2 et qui sont voisines respectivement des cycles PBP et PAP résulte de ce qui a été dit n° **19**.

L'étude des caractéristiques situées dans la région 3, et voisines du polycycle PA'APBB'P, doit être faite comme l'étude des caractéristiques passant dans le voisinage de deux cols. En effet, ces caractéristiques passant deux fois dans le voisinage du col P, ce col doit compter deux fois.

Dans la figure 2 comprenant quatre cols : P_1, P_2, P_3, P_4, que nous supposons réunis par les arcs des caractéristiques tracées sur la figure, il y aura à considérer les régions numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6 et des cycles en nombre égal, à savoir :

(I)	$P_1P_2P_3BB'P_3P_4GP_1$,	(II)	$P_1P_2A'AP_2P_3P_4EP_1$,
(III)	$P_1EP_4FP_1$,	(IV)	$P_1FP_4GP_1$,
(V)	$P_2AA'P_2$,	(VI)	$P_3BB'P_3$.

Les caractéristiques de la région 1 voisines du cycle I devront

Fig. 1

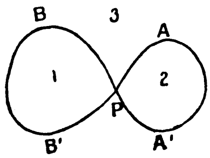
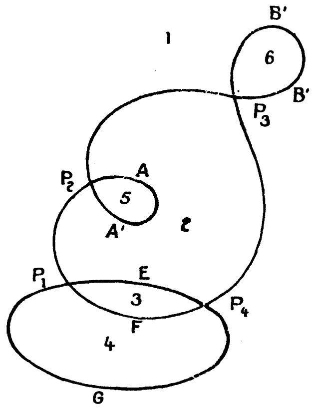


Fig. 2.



être considérées comme passant dans le voisinage des cinq cols P_1, P_2, P_3, P_3, P_4 ; le col P_3 comptant deux fois. De même pour les caractéristiques de la région 2 voisines du cycle II, le col P_2 comptera deux fois. Les caractéristiques situées dans les régions 3 et 4 et voisines respectivement des cycles III et IV passent dans le voisinage des deux cols P_1 et P_4. Les caractéristiques situées dans les régions 5 et 6 et voisines respectivement des cycles V et VI passent dans le voisinage d'un seul col.

22. Caractéristiques voisines d'un cycle singulier passant par plusieurs cols. — Soit un cycle singulier C_0, passant successivement par les cols P_1, P_2, ..., P_n, lorsqu'on le parcourt dans un certain sens. Certains de ces cols peuvent coïncider, ainsi que nous venons de l'expliquer à propos des figures 1 et 2. Ces cols, dans le voisinage desquels une caractéristique C voisine de C_0 passe deux fois, sont affectés de deux indices différents.

A chaque col P_i traversé dans un sens déterminé, $P_{i-1}P_iP_{i+1}$, correspond un exposant λ_i dont la valeur s'obtient en ramenant l'équation différentielle à la forme

$$u\,dv + v\,[\lambda_i + va(v_1 u)]\,du = 0$$

par un changement de variables de la forme (40), l'arc $P_{i-1}P_i$ correspondant dans le plan des uv à la partie positive de l'axe $u=0$, et P_iP_{i+1} correspond à la partie positive de l'axe $v=0$. Si le même col est affecté de deux indices et noté P_i et P_j, on a $\lambda_i = \lambda_j$.

Sur chacun des arcs P_iP_{i+1} prenons un point M_i et menons un arc de courbe S_i coupant C_0 en M_i. On peut prendre pour S_i des droites, en particulier des parallèles aux axes. Soit z_i la valeur du paramètre fixant sur S_i la position d'un point N_i, t_i devenant nul lorsque N_i coïncide avec M_i. Le point M_n sera situé entre P_n et P_1.

Considérons une caractéristique C voisine de C_0, partant d'un point N de paramètre t situé sur S_n. Nous savons que si N est suffisamment voisin de M_n cette caractéristique suivie dans le sens $P_nP_1P_2, \ldots, P_{n-1}P_n$ va rencontrer successivement toutes les courbes S_i en des points N_i de paramètres t_i et en particulier viendra recouper S_n en N_n de paramètre t_n. Nous avons (n° 19, remarque) les relations

$$(46)\qquad \begin{cases} t_n = c_n t_{n-1}^{\lambda_n}[1+F_n(t_{n-1})], \\ t_{n-1} = c_{n-1} t_{n-2}^{\lambda_{n-1}}[1+F_{n-1}(t_{n-2})], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t_2 = c_2 t_1^{\lambda_2}[1+F_2(t_1)], \\ t_1 = c_1 t^{\lambda_1}[1+F_1(t)], \end{cases}$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant des constantes dont aucune n'est nulle et $F_i(t_{i-1})$ une fonction de t_{i-1} semi-régulière et nulle pour $t_{i-1}=0$. Élevons les deux membres de la deuxième équation à la puissance λ_n; les deux membres de la troisième à la puissance $\lambda_n\lambda_{n-1}$ et ainsi de suite, jusqu'à l'avant-dernière que nous élevons à la puissance $\lambda_n\lambda_{n-1}\ldots\lambda_3$ et à la dernière que nous élevons à la puissance $\lambda_n\lambda_{n-1}\ldots\lambda_3\lambda_2$. Multiplions membre à membre les équations ainsi obtenues et posons

$$(47)\qquad \nu_i = \lambda_n \lambda_{n-1} \ldots \lambda_i, \qquad \nu_n = \lambda_n, \qquad \nu_1 = \lambda_n \lambda_{n-1} \ldots \lambda_2 \lambda_1;$$

$$(48)\qquad C_1 = c_n c_{n-1}^{\nu_n} c_{n-2}^{\nu_{n-1}} \ldots c_1^{\nu_2}, \qquad C_i = c_n c_{n-1}^{\nu_1} \ldots c_i^{\nu_{i+1}},$$

nous obtenons

$$(49)\qquad t_n = C_1 t^{\nu_1} [1 + F_n(t_{n-1})] [1 + F_{n-1}(t_{n-2})] \ldots [1 + F_1(t)].$$

Pour que la caractéristique C considérée soit un couple, il faut que l'on ait $t_n = t$. Faisons $t_n = t$ dans (49) et divisons les deux membres par t. Si nous remarquons que $F_n(t_{n-1}), F_n(t_{n-2}, \ldots, F_1(t)$ tendent vers zéro en même temps que t, nous voyons qu'on ne peut avoir $t_n = t$ pour t voisin de zéro que si l'on a

$$(50)\qquad \nu = 1, \qquad C_1 = 1.$$

Nous avons ainsi deux conditions nécessaires pour qu'il y ait un cycle dans le voisinage de C_0. La première condition est algébrique, car les nombres λ_i peuvent se calculer algébriquement. Il n'en est pas de même pour la condition $C_1 = 0$, car les nombres c_i ne s'obtiennent pas par un calcul algébrique. Si nous considérons, par exemple, le cycle singulier C_0 représenté, dans la figure 1, par PA'APBB'P, qui traverse deux fois le col P, d'exposant λ, nous avons : $n = 2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Pour que des caractéristiques voisines de C_0 soient des cycles, il faut que l'on ait $\lambda^2 = 1$, c'est-à-dire $\lambda = 1$.

D'après ce qui précède, nous pouvons dire que, en général, dans une région annulaire limitée par le cycle C_0, traversant un nombre quelconque de cols, il ne passe aucun cycle. Nous allons faire une étude plus complète de la question et montrer qu'on arrive à la même conclusion qu'au n° **20**.

23. Étude de la relation de conséquence entre t et t_n. — Cherchons sous quelle forme se présente la relation établie entre t et t_n par l'intermédiaire des égalités (46). Nous emploierons les notations (47) et (48).

En remplaçant t_{n-1} dans la première des équations (46) par sa valeur tirée de la seconde équation, on a

$$t_n = C_{n-1} t_{n-2}^{\nu_{n-1}} [1 + K_{n1-1}(t_{n-2})].$$

En remplaçant de même t_{n-2} en fonction de t_{n-3}, on a

$$t_n = C_{n-2} t_{n-3}^{\nu_{n-2}} [1 + K_{n-2}(t_{n-3})];$$

en continuant ainsi, nous arrivons à

$$(51) \qquad t_n = C_1 t^{\nu_1} [1 + K_1(t)].$$

D'après ce que nous avons vu (n° 10), toutes les fonctions K_i sont des fonctions de t_{i-1}, semi-régulières et nulles pour $t_{i-1} = 0$; K_1 est une fonction de t_1 semi-régulière et nulle pour $t = 0$. La propriété se vérifie en effet successivement pour $i = n-1, n-2, \ldots$, puisque nous substituons toujours une fonction semi-régulière à la variable qui figure dans une fonction semi-régulière.

La relation fondamentale $v = u^\lambda [1 + f(u)]$, démontrée n° 19 et qui a servi de point de départ à nos raisonnements, est valable pour u variant de 0 à 1. Les substitutions successives faites avant d'arriver à la formule (51) peuvent restreindre l'intervalle t, dans lequel peut varier t pour que la formule (51) soit valable, mais cet intervalle ne se réduit pas à zéro : il existe un nombre positif ε tel que la formule (51) puisse être appliquée pour t variant de 0 à ε. La complexité de plus en plus grande des expressions des fonctions K_i, à mesure que leur indice diminue, ne doit pas nous gêner pour l'emploi de ces fonctions dans nos raisonnements. En effet, d'après la définition des fonctions semi-régulières, nous pouvons en quelque sorte ordonner une fonction $K_i(u)$ suivant les puissances de u, en cherchant d'abord les termes dont l'ordre infinitésimal ne dépasse pas 1, ensuite ceux dont l'ordre ne dépasse pas 2, et ainsi de suite.

Il est facile de nous rendre compte des expressions qui figurent dans $K_i(u)$. Posons

$$\nu_j^i = \lambda_j \lambda_{j+1} \ldots \lambda_{i-1} \lambda_i, \qquad 1 \leqq j \leqq i \leqq n, \qquad \nu_1^i = \lambda_i.$$

Les termes de $K_{n-1}(u)$ ne contiennent que des puissances de u et de u^ν, ν prenant les deux valeurs λ_{n-1} et $\lambda_{n-1}\lambda_n$.

Il faut y ajouter des puissances de $u^\nu Lu$, si λ_{n-1} ou λ_n sont rationnels. Il est donc établi que, pour $j = n-1$, $K_j(u)$ ne contient que des puissances de u, de u^ν et peut-être de $u^\nu Lu$ où ν prend toutes les valeurs

$$(52) \qquad \nu = \nu_j^i, \qquad i = j, \qquad i = j+1, \qquad i = n.$$

Montrons que $K_{j-1}(u')$ ne contient que des puissances de u', de $u'^{\nu'}$ et peut-être de $u'^{\nu'} L u'$, ν' prenant les valeurs

$$(53) \quad \nu' = \nu_{j-1}^{i}, \qquad i = j-1, \qquad i = j, \qquad i = j+1, \qquad \ldots, \qquad i = n.$$

En effet, nous avons, en prenant u_{j-1}, $u_{j-2} — u'$,

$$(54) \qquad t = C_j u^{\nu_j}[1 + K_j(u)],$$

$$(55) \qquad u = c_{j-1} u'^{\lambda_{j-1}}[1 + K_{j-1}(u')].$$

En remplaçant u dans (54) par son expression (55), nous obtiendrons

$$u = C_{j-1} u'^{\nu_{j-1}}[1 + K_{j-1}(u')].$$

Considérons l'une des expressions u^ν qui figurent dans K_j, en donnant à ν l'une des valeurs (52). Cette expression u^ν donnera des termes en u', ne contenant que des puissances de $u^{\nu'}$, avec $\nu' = \nu\lambda_{j-1}$. Ce sont bien les valeurs de ν' données par (53). La présence de termes en $u^\nu L u$ dans (54) et de termes en $u'\lambda_{j-1} L u'$ dans (55) introduit simplement des termes en $u'^{\nu'} L u'$ dans $K_{j-1}(u')$.

Nous pouvons, à l'aide de la relation (51), étudier dans quel cas une caractéristique voisine d'un cycle singulier C_0 sera un cycle. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait $t_n = t$. Nous retrouvons les deux conditions nécessaires (50) déjà obtenues.

Si ces conditions sont satisfaites, il faut et il suffit de plus que l'on ait

$$(56) \qquad K_1(t) = 0.$$

Montrons que si $K_1(t)$ n'est pas identiquement nul, il existe un nombre positif η, tel que l'équation (56) n'ait aucune racine comprise entre 0 et η.

La fonction K_1 étant semi-régulière pour $t = 0$, on peut trouver un entier σ tel que l'on ait

$$K_1(t) = P_\sigma(t) + u^\sigma R_\sigma(t),$$

P_σ étant un polynome, qui n'est pas identiquement nul, qui ne contient que des termes dont l'ordre infinitésimal, par rapport à t, est supérieur à $\sigma - 1$ et ne dépasse pas σ. Comme toujours $R_\sigma(t)$ tend vers zéro avec t. Prenons, parmi les termes en nombre fini de P_σ, ceux dont l'ordre infinitésimal est le plus faible. Ces termes peuvent s'écrire $t^{\sigma'}B$. Nous désignons par B en général une constante qui est différente de zéro et dans le cas le plus compliqué un polynome en Lt. On peut écrire B sous la forme $B(Lt)$. En divisant par $t^{\sigma'}$ les deux membres de (56), cette équation s'écrira

$$B(Lt) + S(t) = 0,$$

$S(t)$ tendant vers zéro avec u. Cette équation n'a donc pas de racines pour u voisin de zéro.

On peut toujours trouver dans la région voisine de C_0 *que l'on considère une région annulaire* A *limitée d'un côté par le cycle singulier* C_0, *telle que l'on soit dans l'un des deux cas suivants :*

1° *Aucune des caractéristiques passant dans la région* A *n'est un cycle;*

2° *Toutes les caractéristiques passant dans la région* A *sont des cycles.*

DEUXIÈME PARTIE.

CYCLES PASSANT DANS LE VOISINAGE DE POINTS EXCEPTIONNELS.

24. Forme de l'équation différentielle dans le voisinage d'un point exceptionnel. — Nous avons dit qu'un point singulier est un point exceptionnel lorsque, en transportant l'origine en ce point, et choisissant convenablement les axes, l'équation différentielle se met sous la forme

$$X_2(x, y)\,dy + [y + Y_2(x, y)]\,dx = 0, \tag{57}$$

X_2 et Y_2 étant des polynomes ou des séries entières ne contenant que des termes de degré supérieur à 1 en x et y.

J'ai démontré (*Journal de l'École Polytechnique*, 1904, p. 59) qu'un changement de variables de la forme

$$x = x_1 + F_2(x_1, y_1), \qquad y = y_1 + G_2(x_1, y_1),$$

où F_2 et G_2 sont des séries entières ne contenant que des termes de degré supérieur à 1 en x et y, permet de mettre l'équation sous la forme

$$(58) \qquad x_1^{n+1}\,dy_1 + [\alpha y_1 + x_1 y_1 A(x_1) + y_1^2 B(y_1) \\ + C(x_1) + x_1 y_1^2 \Phi(x_1, y_1)]\,dx_1 = 0,$$

où α est une constante différente de zéro, n un entier; ABC, Φ des séries entières; $C(0) = 0$. Montrons qu'un changement de variable permet toujours de supposer que $C(x_1)$ contient x_1^{n+1} en facteur. Désignons par $\varphi_n(x_1)$ les termes de degré inférieur à $n+1$ dans le développement suivant les puissances de x_1 de la fonction $y_1(x_1)$ définie en égalant à zéro le coefficient de dx_1 dans l'équation (58). Faisons le changement de variable

$$y_1 = \varphi_n(x_1) + z_1,$$

on aura l'équation

$$x_1^{n+1}\,dz_1 + [\alpha z_1 + x_1 z_1 A_1(x_1) + z_1^2 B(z_1) + C_1(z_1) + x_1 z_1^2 \Phi_1(x_1 z_1)]\,dx_1 = 0$$

où $C_1(x_1)$ contient x_1^{n+1} en facteur.

Il nous sera utile pour des démonstrations ultérieures de montrer que l'on peut, au moyen de changements de variables, obtenir les simplifications suivantes de l'équation (58) :

1° On peut ramener $B(y_1)$ à être identiquement nul;

2° On peut ramener $x_1 A(x_1)$ à se réduire à bx_1^n, b étant une constante qui peut être nulle.

1° Pour ramener $B(y_1)$ à être identiquement nul, écrivons l'équation (58) sous la forme

$$(59) \qquad \frac{x_1^{n+1}\,dy_1}{\alpha y_1 + y_1^2 B(y_1)} + \left[1 + \frac{x_1 y_1 A(x_1) + C(x_1) + x y_1^2 \Phi(x_1, y_1)}{\alpha y_1 + y_1^2 B(y_1)}\right] dx_1.$$

Considérons une fonction $z(y_1)$, telle que l'on ait

$$\frac{dy_1}{\alpha y_1 + y_1^2 B(y_1)} = \frac{dz}{\alpha z}.$$

Cette équation admet une infinité de solutions $z(y_1)$ holomorphes et nulles pour $y_1 = 0$. Parmi ces solutions, on peut prendre la solution de la forme

$$(60) \qquad z = y_1 + y_1^2 f(y_1),$$

f étant une série entière. En faisant le changement de variable (60) l'équation (59) devient

$$\frac{x_1^{n+1}}{\alpha z}\,dz + dx_1 + \frac{x_1 z \mathrm{A}(x_1) + \mathrm{C}(x_1) + x_1 z^2 \Phi_1(x_1, z)}{\alpha z[1 + z h(z)]}\,dx_1 = 0,$$

$h(z)$ étant holomorphe et nul pour $z = 0$. En multipliant les deux membres par αz on obtient

$$x_1^{n+1}\,dz + [\alpha z + x_1 z \mathrm{A}(x_1) + \mathrm{C}(x_1) + x_1 z^2 \Phi_2(x_1, z)]\,dx_1 = 0.$$

2° Pour simplifier $\mathrm{A}(x_1)$ considérons l'équation

$$\frac{\alpha + x_1 \mathrm{A}(x_1)}{x_1^{n+1}}\,dx_1 = \frac{\alpha + b x_2^n}{x_2^{n+1}}\,dx_2.$$

Montrons qu'en déterminant convenablement la valeur de la constante b, cette équation admet une solution $x_2 = f(x_1)$, holomorphe et nulle pour $x_1 = 0$. Posons

$$(61) \qquad x_2 = w x_1 + x_1.$$

Nous avons l'équation

$$[\alpha + b x_1^n (1 + w)^n][x_1\,dw + (1 + w)\,dx_1] = (w + 1)^n [\alpha + x_1 \mathrm{A}(x_1)]\,dx_1,$$

qui peut s'écrire

$$x_1(\alpha + b x_1^n + \ldots)\,dw = (n\alpha w + \mathrm{C}_1 x_1 + \ldots + b x_1^n + \ldots)\,dx_1$$

en n'écrivant que les termes de moindre degré soit parmi les termes contenant b, soit parmi les termes indépendants de b. Si nous cherchons à déterminer w sous la forme

$$w = a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \ldots,$$

le coefficient a_q sera déterminé par une égalité de la forme

$$(62) \qquad (q - n)\alpha a_q = \mathrm{P}_q,$$

P_q est un polynome bien déterminé qui contient les coefficients a_i pour lesquels on a $i < q$ et des coefficients de $\mathrm{A}(x_1)$. Aucune difficulté ne se présente dans la détermination de a_q, si l'on a $q < n$. La constante b n'intervient pas dans la détermination de cette première série de coefficients a_q. Pour $q = n$, la relation (62) prend la forme

$$0 = \mathrm{P}_n + b.$$

Aucune impossibilité ne se présentera donc en prenant $b = -P_n$, et l'on pourra prendre arbitrairement a_n. En prenant, par exemple, $a_n = 0$, les coefficients a_q se détermineront sans difficulté, pour $q > n$. On sait que le développement w obtenu est convergent pour x_1 suffisamment petit.

En faisant le changement de variable défini par (61), l'équation (58) devient

$$(63) \qquad x_2^{n+1}\, dz + [\alpha z + b z x_2^n + H(x_2) + x_2 z^2 F(x_2, z)]\, dx_2 = 0.$$

En résumé, en partant de (57), nous arrivons à l'équation (63) par une suite de changements de variables

$$x = x_1 + F_2(x_1, y_1), \qquad y = y_1 + G_2(x_1, y_1),$$
$$z = y_1 + y_1^2 f(y), \qquad x_2 = x_1[1 + w(x_1)].$$

La série $w(x_1)$ ne contenant pas de terme constant, il est évident que cette suite de changements de variables revient à

$$x_2 = x + Q_2(x, y), \qquad z = y + R_2(x, y),$$

Q_2 et R_2 étant des séries entières sans termes constants, ni termes du premier degré.

25. Étude des caractéristiques dans le champ réel voisin d'un point exceptionnel. — Pour étudier les caractéristiques de l'équation (57), dans le voisinage de $x = 0$, $y = 0$, il suffira d'étudier les caractéristiques de (58), dans le voisinage de $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. En supprimant les indices, nous écrirons cette équation

$$(64) \quad x^{n+1}\, dy + [\alpha y + xy\, A(x) + y^2\, B(y) + C(x) + xy^2 \Phi(x, y)]\, dx = 0.$$

On sait (Bendixson, p. 45) que si l'on considère les diverses caractéristiques passant par un point voisin de l'origine et *situées dans la région pour laquelle on a $x > 0$*, deux cas se présentent :

1° Si l'on a $\alpha < 0$, y tend vers zéro avec x pour chacune de ces caractéristiques. Toutes ces caractéristiques passent par l'origine;

2° Si l'on a $\alpha > 0$, il y a, en dehors de $x = 0$, une seule caractéristique passant par l'origine. Désignons par $y = \varphi(x)$ la solution de l'équation (64) représentée par cette caractéristique.

Dans les deux cas toute caractéristique, autre que $x = 0$, aboutissant à l'origine est tangente en ce point à la droite $y = 0$. On sait en effet que toutes les caractéristiques aboutissant à l'origine admettent en ce point une tangente bien déterminée. Pour trouver cette tangente, posons $x = ty$. L'équation (64) devient

$$(65) \qquad [\alpha + y h(t, y)](y\, dt + t\, dy) + t^{n+1} y^n\, dy = 0.$$

Si t tendait vers une limite finie, lorsque y tend vers zéro, cette limite ne pourrait être, d'après la forme de (65), que $t = 0$. Ceci est impossible, car dans le plan des variables t et y, le point $t=0$, $y = 0$ est un col de l'équation (65). Les seules caractéristiques passant par ce point sont $t = 0$, $y = 0$. Fournissant l'une et l'autre $x = 0$ comme caractéristique correspondante dans le plan des xy elles ne peuvent correspondre à l'une des caractéristiques considérées. Il résulte de là que t devient infini, lorsque x et y tendent vers zéro.

On sait que, dans le cas où l'on a $\alpha > 0$, la fonction $y = \varphi(x)$ correspondant à la caractéristique aboutissant à l'origine n'est pas en général une série entière. C'est une fonction semi-régulière pour $x = 0$. Quel que soit s, on peut écrire

$$\varphi(x) = P_s(x) + x^s R_s(x),$$

P_s est un polynome de degré s et $R(x)$ tend vers zéro avec x.

Si, comme nous pouvons le supposer (n° 24), $C(x)$ contient x^{n+1} en facteur, il en sera de même de $P_s(x)$, pour $s > n+1$. On étudierait de même les caractéristiques voisines de l'origine et situées dans la région pour laquelle on a $x < 0$. Il suffira, pour être ramené au cas de $x > 0$, de changer x en $-x$. On voit que l'on a les quatre cas suivants, si l'on considère *les caractéristiques voisines de l'origine :*

1° $\alpha < 0$, *n pair*. — Toutes les caractéristiques aboutissent à l'origine O;

2° $\alpha < 0$, *n impair*. — Les caractéristiques de la région $x > 0$ aboutissent à O. Une seule caractéristique située dans la région $x < 0$ aboutit à O. Elle limite avec les deux portions de Oy deux secteurs répulsifs;

3° $\alpha > 0$, *n pair*. — Quatre arcs de caractéristiques aboutissent à O. Deux d'entre eux sont formés par les deux portions de Oy. Les deux autres, tangents à Ox, sont situés l'un du côté des x positifs, l'autre du côté des x négatifs. Ces caractéristiques limitent quatre secteurs répulsifs;

4° $\alpha > 0$, *n impair*. — Toutes les caractéristiques situées du côté des x négatifs aboutissent à O. Une seule caractéristique située dans la région $x > 0$ aboutit à O. Elle limite avec les deux portions de Oy deux secteurs répulsifs.

De ce qui précède, et de ce que nous avons vu (nos 3 et 4), il résulte que tout cycle singulier passant par le point exceptionnel comprendra une portion de l'axe Oy, et l'un de ses prolongements au delà de O. Nous pouvons toujours supposer, en changeant le sens positif des axes, que la portion de Oy qui appartient au cycle singulier est située du côté des y positifs et que son prolongement est situé du côté des x positifs. Nous pouvons donc considérer uniquement les cas 3° et 4°, c'est-à-dire supposer $\alpha > 0$, et étudier les caractéristiques situées dans la région des x positifs au-dessus de la caractéristique tangente à Ox en O.

26. Simplification de l'équation différentielle dans le domaine réel voisin d'un point exceptionnel. — Nous utiliserons tout d'abord les simplifications du n° **24** et nous écrirons l'équation (63) sous la forme

$$(66)\qquad x_2^{n+1}\,dz + [z(\alpha + bx_2^n) + \mathrm{H}(x_2) + \Sigma\, z^{i+1}\alpha_i(x_2)]\,dx_2 = 0;$$

α est positif, H contient x_2^{n+1} en facteur et la somme Σ s'étend à toutes les valeurs entières de i, de $i = 1$ à l'infini. Soit $z = \varphi(x_2)$ l'unique solution pour laquelle z tend vers zéro, lorsque x_2 tend vers zéro par valeurs réelles et positives. Faisons le changement de variable

$$z = \varphi(x_2) + w.$$

L'équation (66) prendra la forme

$$x_2^{n+1}\,dw + w[\alpha + bx_2^n + \Sigma(i+1)\varphi^{i+1}(x_2)\alpha_i(x_2) + \Sigma\, w^i b_i(x_2)]\,dx_2 = 0,$$

les fonctions $b_i(x_2)$ sont semi-régulières pour $x_2 = 0$.

Montrons qu'en posant

$$w = z_1\lambda(x_2),$$

on peut déterminer $\lambda(x_2)$ de manière que l'équation prenne la forme

$$(67) \qquad x_2^{n+1}\,dz_1 + z_1[\alpha + bx_2^n + \Sigma z_1^i\,\beta_i(x_2)]\,dx_2 = 0,$$

les fonctions β_i étant, comme les b_i, semi-régulières et nulles pour $x_2 = 0$. Il suffit pour obtenir l'équation (67) que l'on ait

$$x_2^{n+1}\frac{\lambda'(x_2)}{\lambda(x_2)} + \alpha + bx_2^n + \Sigma(i+1)\varphi^{i+1}(x_2)\alpha_i(x_2) = \alpha + bx_2^n,$$

$\varphi(x_2)$ contient en facteur x_2^{n+1} parce qu'il en est ainsi de $H(x_2)$.

L'équation différentielle ci-dessus entre λ et x_2 se présente donc sous la forme $\lambda' = \lambda g(x_2)$. On peut prendre

$$\lambda = e^{\int_0^{x_2} g(t)\,dt} = 1 + G(x_2),$$

$G(x_2)$ étant une fonction de x_2 semi-régulière et nulle pour $x_2 = 0$, ainsi qu'il est facile de le montrer.

Précisons le domaine dans lequel l'équation (67) est valable. Nous pouvons supposer que dans l'équation (66), $\Sigma z^{i+1}\alpha_i(x_2)$ est une série convergente pour $|z| \leqq \varepsilon$ et $|x_2| \leqq \varepsilon'$ et que de plus dans ce domaine le module de cette expression est inférieur à un nombre M.

Les divers termes de l'expression Σ sont alors pour $|x_2| < \varepsilon'$, inférieurs en module, aux termes du même degré en z de l'expression

$$\zeta = \frac{M\varepsilon}{\varepsilon - z}.$$

Nous avons remplacé z par l'expression

$$(68) \qquad z = \varphi(x_2) + [1 + G(x_2)]z_1,$$

l'expression ζ devient

$$\zeta = \frac{M\varepsilon}{\varepsilon - \varphi(x_2) - [1 + G(x_2)]z} = \frac{M\varepsilon}{\varepsilon - \varphi(x_2)}\,\frac{1}{1 - \dfrac{[1 + G(x_2)]z_1}{\varepsilon - \varphi(x_2)}}.$$

Nous pouvons supposer ε' assez petit pour que $H(x_2)$ et $\varphi(x_2)$ soient définis pour x_2 compris entre 0 et ε', et que, pour ces valeurs de x_2, on ait

$$|\varphi(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |1 + G(x_2)| < 2,$$

$$(69) \qquad \alpha + b\varepsilon'^n > 0.$$

Les divers termes du développement de ζ, suivant les puissances de z_1, seront donc inférieurs en module aux termes de même degré du développement de $\frac{2M\varepsilon}{\varepsilon - 2z_1|1+G|}$.

Les termes qui contiennent z_1^2 en facteur seront inférieurs en module aux termes de même degré de

$$\xi = \frac{2^3 M |1 + G|^2 z_1^2}{\varepsilon(\varepsilon - 2z_1|1+G|)}.$$

Les termes de $\Sigma z_1^i \beta_i(x_2)$ se déduisent des termes de $\Sigma z^{i+1}\alpha_i(x_2)$, en remplaçant z par l'expression (68), ne conservant que les termes du second degré au moins en z_1 et en les divisant par $z_1(1+G)$. Les termes de $\Sigma z_1^i \beta_i(x_2)$ seront donc inférieurs en module aux termes correspondants de

$$\frac{2^4 M z_1}{\varepsilon(\varepsilon - 4z_1)}.$$

Si nous posons

$$(70) \qquad x_2 = \varepsilon' u, \qquad na = \frac{\alpha}{\varepsilon'^n}, \qquad k_i(u) = \frac{\beta_i(\varepsilon' u)}{\varepsilon'^n},$$

l'équation (67) deviendra

$$u^{n+1}\,dz_1 + z_1[na + bu^n + \Sigma z_1^i k_i(u)]\,du = 0.$$

Si u varie de 0 à 1 les termes de $\Sigma h_i(u)$ seront inférieurs en module aux termes de même degré de

$$(71) \qquad \frac{2^4 M z_1}{\varepsilon'^n \varepsilon(\varepsilon - 4z_1)}.$$

On aura également, pour u variant de 0 à 1,

$$na + bu^n > nc,$$

c étant d'après (69) un nombre positif. Il résulte de ces inégalités que les valeurs de z_1 pour lesquelles, u étant compris entre 0 et 1, l'expression $na + bu^n + \Sigma z_1^i k_i(u)$ pourra s'annuler seront supérieures en module à la valeur de z_1 vérifiant l'équation

$$nc - \frac{2^4 M z_1}{\varepsilon'^n \varepsilon(\varepsilon - 4 z_1)} = 0.$$

Soit η cette valeur *qui est inférieure à* $\frac{\varepsilon}{4}$. Nous avons

$$(72) \qquad \frac{2^4 M}{\varepsilon'^n \varepsilon} = \frac{nc(\varepsilon - 4\eta)}{\eta}.$$

Si nous posons

$$(73) \qquad z_1 = \eta v, \qquad h_i(u) = \frac{k_i(u)}{\eta^i},$$

nous obtiendrons l'équation

$$(74) \qquad u^{n+1}\, dv + v[na + bu^n + \Sigma v^i h_i(u)]\, du = 0.$$

Les coefficients de $\Sigma v^i h_i(u)$ seront, pour toutes les valeurs de u comprises entre 0 et 1, inférieurs en module aux termes correspondants de l'expression (71) où z_1 est remplacé par ηv. Remplaçons en même temps dans cette expression M par sa valeur tirée de (72) nous obtenons $\frac{nc(\varepsilon - 4\eta)v}{\varepsilon - 4\eta v}$, qui en posant $\theta = \frac{4\eta}{\varepsilon}$ devient

$$(75) \qquad \frac{nc(1-\theta)v}{1-\theta v},$$

dont le développement suivant les puissances de v fournit des dominantes des fonctions $h_i(u)$.

L'équation (74) qui sera exclusivement employée dans la suite est valable pour u variant de 0 à 1 et v variant de 0 à $\frac{1}{\theta}$. Cette dernière quantité étant supérieure à 1, nous pouvons faire varier v de 0 à 1. Dans ces conditions, le coefficient de du dans (74) est positif car $na + bu^n$ est supérieur à nc tandis que, d'après l'expression (75), la somme des valeurs absolues des termes de $\Sigma v^i h_i(u)$ est au plus égale à nc.

27. Forme réduite de l'équation différentielle. — Pour mettre l'équation différentielle (74) sous une forme plus simple, je supposerai, comme on peut toujours le faire (n° 24, 1°), que dans l'équation (58) $B(y_1)$ est identiquement nul, ou ce qui revient au même que dans (67) ou (74) on ait, pour toutes les valeurs de i, $\beta_i(0) = 0$, $h_i(0) = 0$. Désignons par s un nombre entier quelconque. Les $\beta_i(u)$ étant des fonctions semi-régulières pour $u=0$, on peut écrire l'équation (74) sous la forme

$$(76)\qquad u^{n+1}\,dv + \mathrm{U}\,du = 0,$$

$$\mathrm{U} = (na + bu^n)v + v^2\sum^{s} u^i f_i(v) + u^s v^2 \mathrm{F}(u, v),$$

la somme $\sum^{s}$ ne s'étendant qu'aux valeurs 1, 2, ..., $s-1$ de l'indice i. Les $f_i(v)$ sont des séries entières en v, $\mathrm{F}(u, v)$ est une série entière en v dont les coefficients sont des fonctions de u semi-régulières et nulles pour $u=0$.

Montrons que l'on peut faire un changement de variable

$$(77)\qquad z = \mathrm{K}(u, v),$$

tel que l'équation différentielle prenne la forme

$$(78)\qquad u^{n+1}\,dz + z[na + bu^n + zu^s m(u, z)]\,du = 0;$$

m est une série entière en z, dont les coefficients sont des *fonctions semi-régulières* pour $u=0$.

En faisant le ehangement de variable (77), l'équation (78) devient

$$u^{n+1}\,dz + (\mathrm{U}\mathrm{K}'_v - u^{n+1}\mathrm{K}'_u)\,du = 0.$$

Pour que cette équation prenne la forme (78), lorsqu'on remplace v en fonction de z dans K'_v et K'_u, il suffit que l'on ait

$$\mathrm{U}\mathrm{K}'_v - u^{n+1}\mathrm{K}'_u \equiv (a + bu^n)z + zu^s \mathrm{M}(u, z).$$

Il suffit pour cela que l'expression

$$\mathrm{N} = \left[(a + bu^n)v + v^2\sum^{s} u^i f_i(v)\right]\mathrm{K}'_v - u^{n+1}\mathrm{K}'_u - (a + bu^n)\mathrm{K}$$

ne contienne pas de termes où u figure à une puissance inférieure à s. Cherchons à déterminer $\mathrm{K}(u, v)$ sous la forme

$$\mathrm{K}(u, v) \equiv k_0(v) + uk_1(v) + \ldots + u^{s-1}k_{s-1}(v) + u^s k_s(v).$$

Nous allons déterminer k_0, k_1, ..., k_{s-1} en écrivant que les termes de N où u figure à une puissance inférieure à s sont nuls. Nous désignerons par k'_i la dérivée de $k_i(v)$. On a

$$vk'_0 - k_0 = 0, \qquad k_0 = v.$$

Supposons $q > n$, et égalons à zéro le terme en u^q de N. On a

$$a(vk'_q - k_q) + v^2(f_1 k'_{q-1} + f_2 k'_{q-2} + \ldots + f_q k'_0) = 0.$$

Parmi les intégrales de cette équation considérons la solution

$$k_q = -\frac{v}{a}\int_0^v (f_1 k'_{q-1} + f_2 k'_{q-2} + \ldots + f_q k'_0)\, dv.$$

En appliquant cette formule, pour $q = 1$, on voit que $k_1(v)$ est une série entière, contenant v^2 en facteur. Le raisonnement habituel montre qu'il en est de même pour $q = 2, 3, \ldots, n-1$. Pour $q \geqq n$, on a

$$(79)\quad a(vk'_q - k_q) + bvk'_{q-n} - (b+q-n)k_{q-n} + v^2(f_1 k'_{q-1} + \ldots + f_q k'_0) = 0.$$

En particulier, pour $q = n$, on a

$$a(vk'_n - k_n) + v^2(f_1 k'_{q-1} + \ldots + f_q k'_0) = 0.$$

On voit, comme tout à l'heure, que l'on peut prendre pour k_n une série entière contenant v^2 en facteur. Il résulte alors de l'équation (79) qu'il en est de même pour k_q, pour $q > n$.

Nous déterminerons enfin $k_s(v)$ en écrivant que, pour $u = 1$, $K(1, v)$ se réduit à v; $k_s(v)$ sera une série entière contenant v^2 en facteur. Nous concluons de ce qui précède que : Il existe un changement de variable de la forme

$$(80)\qquad z = v + uv^2 P(u, v)$$

où P est un polynome de degré $s-1$ par rapport à u, se réduisant à zéro pour $u = 1$, ayant pour coefficients des séries entières en v, convergentes pour $|v| < 1$. En faisant ce changement de variable (80), l'équation (74) prend la forme (78).

28. Intégrale générale de l'équation différentielle (74). — Cherchons une intégrale générale de l'équation (74), sous la forme

$$\Gamma(u, v) \equiv v\gamma(u) + v^2\gamma_2(u) + v^3\gamma_3(u) + \ldots = \text{const.},$$

$\gamma(u)$, $\gamma_i(u)$ étant des fonctions de u dont nous désignerons les dérivées par γ', γ'_i. Ces fonctions vérifient la relation

$$u^{n+1}(v\gamma' + v^2\gamma'_2 + \ldots) = (v\gamma + 2v^2\gamma^2 + \ldots)[na + bu^n + \Sigma v^i h_i(u)].$$

On a

$$u^{n+1}\gamma' = (na + bu^n)\gamma, \qquad \gamma(u) = u^b e^{-\frac{a}{u^n}},$$
$$u^{n+1}\gamma'_q = q(na + bu^n)\gamma_q + \gamma_{q-1}h_1 + \gamma_{q-2}h_2 + \ldots + \gamma_2 h_{q-2} + \gamma h_{q-1}.$$

Nous achèverons de déterminer les fonctions $\gamma_q(u)$ en supposant que, pour $u = 1$, on a $\gamma_q(1) = 0$. On obtient

$$\gamma_q(u) = \gamma^q \int_1^x \frac{\gamma_{q-1}h_1 + \gamma_{q-2}h_2 + \ldots + \gamma_2 h_{q-2} + \gamma h_{q-1}}{u^{n+1}\gamma^q}\,du.$$

Les fonctions γ_q se déterminent donc sans difficulté, en faisant successivement $q = 2, 3, \ldots$. Montrons que la série $\Gamma(u, v)$ est convergente, lorsque u et v sont compris entre 0 et 1.

D'après le n° 9 et ce que nous avons dit à la fin du n° 26, nous obtiendrons pour u variant de 0 à 1 des dominantes des fonctions γ_i, si nous remplaçons $na + bu^n$ par nc et si nous remplaçons les fonctions $h_i(u)$ par les coefficients correspondants du développement suivant les puissances de v de l'expression $-\frac{nc(1-\theta)v}{1-\theta v}$, coefficients qui sont tous négatifs. Trouver ces dominantes $\Gamma(u)$, $\Gamma_i(u)$, des fonctions $\gamma(u)$, $\gamma_i(u)$ revient à chercher sous la forme

$$G(u, v) \equiv v\Gamma(u) + v^2\Gamma_2(u) + \ldots = \text{const.}$$

l'intégrale générale de l'équation

$$u^{n+1}\,dv + \frac{ncv(1-v)}{1-\theta v}\,du = 0, \tag{81}$$

en supposant que $\Gamma, \Gamma_i, \ldots$ soient positives ou nulles pour $u = 1$ et que l'on ait $\Gamma(1) \geqq e^{-a}$.

En intégrant (81), on obtient l'intégrale générale

$$e^{c-a}v\,e^{-\frac{c}{u^n}}(1-v)^{\theta-1} = \text{const.},$$

qui, développée suivant les puissances de v, a tous ses coefficients positifs pour $u = 1$. Il en résulte que la série $\Gamma(u, v)$ sera convergente pour u et v compris entre 0 et 1. Donnons une autre démonstration qui fournira une propriété de $\Gamma(u, v)$. Nous obtiendrons des dominantes des fonctions γ_q en remplaçant, d'après le n° 9, les fonctions $-h_i$ par des fonctions dominantes;

nous avons pris dans la démonstration précédente pour ces dominantes les coefficients du développement de $\frac{nc(1-\theta)v}{1-\theta v}$ suivant les puissances de v. Si, dans cette expression, nous remplaçons nc par l'expression $na+bu^n$ qui est toujours supérieure à nc, nous augmenterons encore les dominantes de h_i. Nous sommes donc ramenés à considérer pour l'équation

$$u^{n+1}\,dv + \frac{(na+bu^n)\,v(1-v)}{1-\theta v}\,du = 0$$

l'intégrale générale qui se réduit à e^{-a} pour $u=1$. Cette intégrale générale est

$$vu^b e^{-\frac{a}{u^n}}(1-v)^{\theta-1} = \text{const.}$$

Les termes du développement du premier membre suivant les puissances de v sont positifs pour $u=1$ et fournissent donc des dominantes des termes correspondants de $\Gamma(u, v)$. Si l'on écrit

$$\Gamma(u, v) = vu^b e^{-\frac{a}{u^n}}[1 + vf_2(u) + v^2 f_3(u) + \ldots],$$

les divers termes de la série entre crochets admettent pour dominantes les termes correspondants du développement de $(1-v)^{\theta-1}$ suivant les puissances de v. Cette série est donc convergente pour $|v|<1$.

Nous pouvons énoncer le théorème suivant : *L'équation*

$$u^{n+1}\,dv + v\,[na + bu^n + vn(u, v)]\,du = 0,$$

où $h(u, v)$ est une série entière en v ayant pour coefficients des fonctions semi-régulières pour $u=0$, et satisfaisant aux conditions $na-|b|-\mathrm{H}>0$ (n° 7), *admet pour $|v|<1$ et u réel, variant de* 0 *à* 1, *une intégrale générale de la forme*

$$(82) \qquad vu^b e^{-\frac{a}{u^n}}[1 + vf_2(u) + v^2 f_3(u) + \ldots] = \text{const.},$$

f_2, f_3 étant des fonctions de u qui restent finies lorsque x varie de 0 *à* 1.

29. Intégrale générale lorsque l'équation différentielle est sous forme réduite. — Supposons que l'équation (74) ait été mise

sous la forme (78)

$$u^{n+1}\,dv + v\,[na + bu^n + vu^s m(u, v)]\,du = 0,$$
$$vm(u, v) = vm_1(u) + v^2 m_2(u) + \ldots,$$

les $m_i(v)$ définis pour u réel, variant de 0 à 1, sont *des fonctions semi-régulières* pour $u = 0$. Montrons que l'intégrale générale (82) peut se mettre sous la forme

$$(83)\qquad \Gamma(u, v) \equiv vu^b c^{-\frac{a}{u^n}}[1 + u^s(vg_2 + v^3 g_3 + \ldots)] = \text{const.}$$

$g_2, g_3, \ldots$ étant des fonctions de u seul qui restent finies, lorsque u varie de 0 à 1, extrémités comprises.

Il est évident que ces fonctions restent finies pour les valeurs considérées de u autres que $u = 0$, car $g_i = \frac{f_i}{u^s}$. Pour voir ce qu'elles deviennent, lorsque u tend vers zéro, considérons l'équation

$$u^{n+1}\Gamma'_u = v\,\Gamma'_v[na + bu^n + vu^s m(u, v)]\,du$$

que vérifie la fonction $\Gamma(u, v)$. Désignons, comme précédemment, par $\gamma(u)$ l'expression $u^b e^{-\frac{a}{u^n}}$ et posons

$$\Gamma(u, v) = v\gamma(u) + u^s \gamma(u)\, g(u, v),$$
$$g(u, v) = v^2 g_2(u) + v^3 g_3(u) + \ldots,$$

$g(u, v)$ vérifie l'équation

$$u^{n+1} g'_u + (na + bu^n + su^n)g - (na + bu^n)vg'_v = (v^2 + vg'_v)\,m(u, v).$$

Il en résulte que $g_q(u)$ vérifie l'équation différentielle

$$u^{n+1} g'_q - [na(q-1) + u_n(bq - b - s)]\,g_q$$
$$= m_{q-1} + u^s(m_1 g_{q-1} + \ldots + m_{q-2} g_2).$$

Supposons démontré, pour $q = 2, 3, \ldots, p-1$, que g_q reste fini pour $u = 0$, montrons qu'il en sera de même pour $q = p$.

Si nous posons $g_q = y$, $u = x$, la fonction $y(x)$ vérifie une équation différentielle de la forme

$$(84)\qquad x^{n+1}y' - [na(q-1) + x^n(qb - b - s)]\,y = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction qui reste finie lorsque x varie de 0 à 1, extrémités comprises. Il nous suffit, d'après ce que nous avons dit plus haut, de prouver que y reste fini, lorsque x tend vers zéro. La démonstration s'appliquant immédiatement pour $y = g_2$, il en résultera que la propriété sera vraie pour n'importe laquelle des fonctions $g_q(u)$.

Soit ε un nombre tel que pour $0 < x < \varepsilon$ on ait

$$na(q-1) + (qb - b - s)x^n > 0.$$

Nous pouvons trouver deux nombres A et B, avec $A > B$, et tracer un rectangle limité par $x = 0$, $x = \varepsilon$, $y = A$, $y = B$, tel que, pour x variant de o à ε, la courbe

$$y[na(q-1) + qb - b - s)x^n] + \varphi(x) = 0 \tag{85}$$

soit comprise à l'intérieur de ce rectangle. La région du plan des xy comprise entre $x = 0$ et $x = \varepsilon$ est ainsi divisée en trois régions : la région I pour laquelle on a $y > A$, la région II intérieure au rectangle, la région III pour laquelle on a $y < B$.

Considérons, pour x décroissant de ε jusqu'à o, une caractéristique de l'équation (84). Soit M un point de cette caractéristique, de coordonnées x et y. Si M reste toujours dans la région I, y ira toujours en décroissant et tendra, lorsque x tend vers zéro, vers une limite finie, supérieure ou égale à A. Si M reste toujours dans la région II, y ira toujours en croissant et tendra, pour $x = 0$, vers une limite finie inférieure à B.

Si nous remarquons que toute caractéristique qui passe par un point de l'une des droites $y = A$ ou $y = B$ pénètre dans la région II, lorsque x décroît, nous voyons que toute caractéristique qui ne restera ni dans la région I, ni dans la région III, finira par rester dans la région II et par conséquent y restera fini. Le résultat qui nous est utile est démontré.

On peut établir un résultat plus précis en montrant que, lorsque x tend vers zéro, y tend vers une limite finie qui est l'ordonnée du point d'intersection de Oy avec la courbe (85).

30. Propriétés de l'intégrale générale (82). — Écrivons le changement de variable (80) sous la forme

$$z = v + v\sum_{i=1}^{\infty} v^i[p_i(u) + c_i u^s], \tag{86}$$

p_i désignant un polynome de degré $s-1$ au plus en u; c_i est une constante. On a $p_i(1)+c_i=0$. Si, dans l'intégrale générale (83) de l'équation (78) en z et u, on remplace z par son expression (86), on obtient une intégrale générale de l'équation (74) en v et u. Cette intégrale se réduit, pour $u=1$, à ve^{-a}, comme l'intégrale générale (82) de cette équation. Les deux formes ainsi obtenues pour l'intégrale générale de (74) sont donc identiques et l'on a

$$z[1+u^s(zg_2+z^2g_3+\ldots)]\equiv v(1+vf_2+v^2f_3+\ldots)$$

si l'on remplace z par l'expression (86).

En égalant dans les deux membres les coefficients des mêmes puissances de v, on obtient

$$f_2(u)=p_1(u)+u^sg_2(u),$$
$$f_q(u)=p_{q-1}(u)+u^s\mathrm{P}_q(g_2,\,g_3,\ldots,g_q),$$

P_q étant une expression linéaire par rapport à $g_2, g_3, \ldots, g_q$. L'entier s pouvant être arbitrairement choisi, ces formules nous montrent que les fonctions $f_q(u)$ sont semi-régulières pour $u=0$.

31. Loi de correspondance dans le voisinage d'une caractéristique traversant un point exceptionnel. — Considérons dans le plan des variables u et v un carré O'A'D'B', dont les côtés ont pour équations : O'A', $v=0$; O'B', $u=0$; A'D', $u=1$; B'D', $v=1$. Une caractéristique C' de l'équation différentielle (74) en u et v, qui coupera le côté A'D' en un point Q' ressortira du carré en coupant le côté B'D' en N', car v va en croissant lorsque u décroît de 1 à 0. En effet, d'après ce que nous avons dit à la fin du n° 26, $\frac{dv}{du}$ est négatif pour les valeurs de u et v coordonnées d'un point intérieur au carré O'A'D'B'.

Soient 1 et v les coordonnées de Q'; u et 1 celles de N'. Nous pourrons toujours, en remplaçant v par cv, c étant une constante convenablement choisie, supposer que la forme (82) de l'intégrale générale de (74) est encore valable pour $v=1$. Cette intégrale générale nous donne alors immédiatement la relation entre les paramètres u et v définissant la position des points d'intersection N' et Q' d'une caractéristique C' avec les droites $v=1$

et $u = 1$. On a

$$(87) \qquad ve^{-a} = u^b e^{-\frac{a}{u^n}}[1 + f_2(u) + f_3(u) + \ldots].$$

C'est la loi de correspondance cherchée.

D'après la forme de l'équation (63) que nous avons obtenue, tous les termes $\alpha_i(x_2)$ de l'équation (66) contiennent x_2 en facteur. Il en résulte que dans l'équation (74) tous les coefficients $h_i(u)$ contiennent u en facteur. En appliquant pour $s = 1$ le résultat démontré (n° 29) nous voyons que les fonctions $f_2(u)$, $f_3(u)$, ... sont nulles pour $u = 0$. Nous pourrons donc écrire la relation (87) sous la forme

$$(88) \qquad v = a_1 u^b e^{-\frac{a}{u^n}}[1 + f(u)],$$

a_1 est une constante, $f(u)$ est nul pour $u = 0$.

Si nous remarquons de plus que, d'après la démonstration du n° 30, la série formée en prenant dans $f_2(u), f_3(u)$, ... les parties $p_1(u)$, $p_2(u)$, ..., qui sont des polynomes en u de degré inférieur à s, on obtient une série convergente

$$v + v^2 p_1(u) + v^3 p_3(u),$$

nous voyons que $f(u)$ est une *fonction semi-régulière* et nulle pour $u = 0$.

Considérons dans le plan des xy les deux courbes S et S′ correspondant aux droites $u = 1$ et $v = 1$ du plan des uv. Soient C la caractéristique de l'équation (57) en x et y correspondant à la caractéristique C′ de l'équation (74) et C_0 la caractéristique de (57) traversant le point singulier $x = 0$, $y = 0$ et correspondant aux deux arcs de séparatrices $u = 0$, $v = 0$ limitant la région répulsive où se trouve C. Les courbes S et S′ rencontrent respectivement C_0 en Q_0 et N_0. Les points Q_0 et N_0 sont respectivement voisins des points d'intersection Q et N de S et S′ avec C. Nous avons la loi de correspondance entre Q et N.

Cherchons à nous affranchir du choix particulier que nous avons fait en prenant les deux courbes S et S′ pour établir la loi de correspondance. Prenons sur la partie de C_0 représentée par $v = 0$ un point R_0 et sur la partie de C_0 représentée par $u = 0$ un point P_0, ces points étant tels qu'en parcourant C_0 dans le sens

P_0OR_0 on rencontre successivement P_0, N_0, O, Q_0, R_0 sans traverser un autre point singulier que le point O.

Soient S_1 un arc de courbe coupant C_0 en R_0 et S'_1 un arc de courbe coupant C_0 en P_0. Cherchons la loi de correspondance entre les points d'intersections P et R de S'_1 et S_1 avec la caractéristique C passant par Q et N.

Nous arriverions immédiatement à cette loi, d'après le n° 2 (*voir* n° 19, remarque), si les coordonnées x et y d'un point Q de S étaient des fonctions holomorphes de u et si les coordonnées d'un point N de S étaient des fonctions holomorphes de v. Examinons s'il en est ainsi, en résumant les changements de variables, qui des variables x et y figurant dans l'équation (57) nous ont ramené aux variables u et v figurant dans l'équation (74). Nous avons posé

$$(89) \qquad x_2 = x + Q_2(x, y), \qquad z = y + R_2(x, y),$$

$$(90) \qquad z = \varphi(\varepsilon' u) + [1 + G(\varepsilon' u)]\eta v, \qquad x_2 = \varepsilon' u,$$

$\varphi(\varepsilon' u)$ et $G(\varepsilon' u)$ sont des *fonctions semi-régulières* et nulles pour $u = 0$. Des formules (89) on peut tirer x et y en fonction holomorphe de x_2 et de z. Par conséquent, sur la courbe S représentée par $u = 1$, x et y seront des fonctions holomorphes de v. Si t est le paramètre fixant la position de R sur S_1, et si ce paramètre devient nul lorsque R coïncide avec R_0, nous aurons la relation

$$t = b_1 v + b_2 v^2 + \ldots,$$

où le second membre est une série entière à coefficients constants $b_1, b_2, \ldots$. Il résulte de cette relation et de la relation (88) que nous avons

$$t = a_2 u^b e^{-\frac{a}{u^n}}[1 + F(u)],$$

a_2 est une constante différente de zéro; $F(u)$ une *fonction semi-régulière* et nulle pour $u = 0$.

Nous ne pourrons raisonner de cette façon pour avoir la correspondance entre P sur S'_1 et N sur S'. En effet, d'après la formule (90), on a pour l'arc S' représenté par $v = 1$

$$z = \varphi(\varepsilon' u) + [1 + G(\varepsilon' u)]\eta, \qquad z = \eta + m(u),$$

$m(u)$ étant une fonction semi-régulière et nulle pour $u = 0$.

Les coordonnées x et y d'un point N de S' ne sont pas des fonctions holomorphes de u; ce sont des fonctions semi-régulières.

32. Forme définitive de la loi de correspondance. — Pour trouver la loi de correspondance entre les points d'intersection d'une caractéristique C avec les courbes S' et S'_1, considérons une courbe intermédiaire S'' représentée par $z = \varepsilon$, dans le plan des zu. La constante ε dont il a été question (n° 26) est au plus égale au rayon de convergence de la série entière $\Sigma z^i \alpha_i(x_2)$ qui figure dans l'équation (66). On a $\eta < \varepsilon$. La courbe S'' coupe C_0 en M_0 et C en M. Pour trouver la loi de correspondance entre les points M et N où C rencontre respectivement S et S'', considérons l'équation différentielle (63) entre z et x_2. Écrivons-la sous la forme

$$x_2^{n+1}\,dz + \alpha\,[z + x_2 H_1(x_2, z)\,dx_2 = 0;$$

remplaçons x_2 par $\varepsilon' u$ et α par $na\varepsilon'^n$, nous avons l'équation

$$u^{n+1}\,dz + na\,[z + u K_1(u, z)]\,du = 0, \tag{91}$$

K_1 étant une série entière en u et z sans terme constant. Nous pouvons supposer ε' assez petit pour que, lorsque x_2 varie de 0 à ε', l'arc de courbe $z + x_2 H_1(x_2, z) = 0$ ne rencontre pas les arcs de courbe $z = \varphi(x_2) + [1 + G(x_2)]\eta$ et $z = \varepsilon$ qui correspondent respectivement à S' et à S'' dans le plan des variables z et x_2. Cela revient à dire que, pour u variant de 0 à 1, la courbe $z + u K_1(u, z) = 0$ ne rencontre pas les courbes Σ' et Σ'' représentées dans le plan des variables z et u par $z = \eta + m(u)$ et $z = \varepsilon$ qui correspondent aux courbes S' et S'' du plan des variables x et y. L'expression $z + u K_1(u, z)$ reste positive lorsque u et z sont les coordonnées d'un point situé dans la région limitée par $u = 0$, $u = 1$, Σ' et Σ''. Nous pourrons donc, si nous nous déplaçons sur une caractéristique de l'équation (91), en restant dans cette région, considérer u comme une fonction de z qui ira en décroissant lorsque z croîtra jusqu'à ε. Il en résulte que toute caractéristique C de l'équation (57) coupant S' en un point N de paramètre u coupera S'' en un point M de paramètre u_1. Il suffit de faire la figure pour en conclure que si u_1 est assez petit, toute caractéristique C coupant S″ en un point M coupe S′ en un point N.

Les quantités u et u_1 définissant les positions de M et N s'annulent simultanément, chacune d'elles est une fonction croissante de l'autre. Nous allons montrer que chacune d'elles est une *fonction semi-régulière* de l'autre.

L'arc de caractéristique $u = 0$ de l'équation différentielle en u et v coupe les arcs Σ' et Σ'' aux points P_0 et M_0 d'ordonnées $z = \eta$ et $z = \varepsilon$. Cet arc P_0M_0 ne contenant aucun point singulier, la valeur u_1 que prend pour $z = \varepsilon$ une intégrale $u(z)$ de l'équation (91) qui admet des valeurs initiales $u_0 = u$ et $z_0 = z$ est une fonction holomorphe de u et de z pour $u = 0$ et $z = \eta$. On a

$$u_1 = \mathrm{H}(u, z - \eta).$$

Si ces valeurs initiales u et z sont les coordonnées d'un point de l'arc Σ'' représenté par $z = \eta + m(u)$, nous aurons

$$u_1 = \mathrm{H}[u, m(u)]. \tag{92}$$

Cette formule montre que u_1 est une fonction de u semi-régulière et nulle pour $u = 0$.

La loi de correspondance (92) nous suffirait, si nous n'avions à considérer que des cycles passant par un seul point exceptionnel. Afin de pouvoir considérer tous les cas, nous allons montrer que u est une fonction semi-régulière de u_1. Nous pourrions arriver à ce résultat en étudiant la forme de la fonction H, montrant que le rapport $u_1 : u$ tend vers 1 lorsque u tend vers zéro et que de (92) on peut tirer u en fonction de u_1. Il m'a paru plus simple d'employer la marche suivante.

Considérons une intégrale $u(z)$ de l'équation (91) prenant pour $z = \varepsilon$ la valeur u_1. La valeur que prend cette intégrale pour une valeur z voisine de η sera une fonction holomorphe de u_1 et de z pour u_1 voisin de zéro et z voisin de η. On a

$$u = \Phi(u_1, z - \eta).$$

Si nous considérons le point M où la caractéristique correspondant à cette intégrale vient couper la courbe Σ'' représentée par $z = \eta + m(u)$, on a

$$u = \Phi[u_1, m(u)]. \tag{93}$$

Quel que soit l'entier s on peut écrire

$$m(u) = p(u) + u^s q(u),$$

p étant un polynome de degré s et $q(u)$ tendront vers zéro avec u. Considérons la relation

$$u = \Phi[u_1, p(u)] \tag{94}$$

$\Phi(u_1, z - \eta)$, étant nul pour $u_1 = 0$, contient u_1 en facteur, il en est de même du second membre de (94). On pourra de la relation (94) tirer $u = g(u_1)$, $g(u_1)$ étant une série entière sans terme constant. Posons

$$u = g(u_1) + w. \tag{95}$$

Puisque nous avons montré que u et $g(u_1)$ sont des fonctions de u_1, qui tendent vers zéro en même temps que u_1, il en sera de même de la fonction w. Si nous montrons que $w : u_1^s$ tend vers zéro, nous aurons montré que u est une fonction semi-régulière de u_1. Nous avons

$$\Phi\{u_1, p[g(u_1)]\} = g(u_1),$$
$$\Phi[u_1 m(u)] = \Phi[u_1, p(u)] + u^s R(u, u_1),$$
$$\Phi\{u_1, p[g(u_1) + w]\} = Q\{u_1, p[g(u_1)]\} + wQ(u_1, w).$$

Ajoutons ces trois équations membre à membre, en tenant compte de la relation (93), nous avons

$$u = \Phi[u_1, m(u)] = g(u_1) + u^s R(u, u_1) + wQ(u_1, w).$$

Nous avons donc, d'après (93),

$$w = wQ(u, w) + u^s R(u, u_1),$$

$R(u, u_1)$ est une fonction qui tend vers zéro avec u, comme $Q(u)$. $Q(u_1, w)$ qui contient u_1 en facteur comme $\Phi[u_1, p(u)]$ tendra également vers zéro avec u. Le quotient $w : u^s$ a donc pour limite zéro. Pour montrer qu'il en est de même du quotient : $w : u_1^s$, il suffit de montrer que $\frac{u}{u_1}$ ne devient pas infini lorsque u tend vers zéro.

Nous pourrons écrire dans (95)

$$g(u_1) = cu_1^r(1 + \varepsilon_1),$$

c étant une constante différente de zéro et ε_1 une expression qui tend vers zéro avec u_1. En divisant les deux membres de (95) par u, nous avons

$$(96) \qquad 1 = c\frac{u_1}{u} u_1^{r-1}(1+\varepsilon_1) - \frac{w}{u}.$$

Lorsque u tend vers zéro, $\frac{w}{u}$ tend vers zéro; $u_1^{r-1}(1+\varepsilon_1)$ tend vers 0 ou vers 1, suivant que r est égal ou supérieur à 1. Si le rapport $\frac{u}{u_1}$ devenait infini, $\frac{u_1}{u}$ tendrait vers zéro et l'égalité (96) conduirait à une impossibilité.

Si nous remarquons que, d'après (92), le rapport $\frac{u_1}{u}$ ne peut croître indéfiniment, on voit que pour que l'égalité (96) ne conduise pas à une impossibilité, il faut que l'on ait $r = 1$ et que la limite de $\frac{u}{u_1}$ soit égale à c.

Nous avons donc la relation

$$(97) \qquad u = \frac{u_1}{c}[1 + k(u_1)],$$

$k(u_1)$ étant une *fonction semi-régulière* et nulle pour $u_1 = 0$.

Si nous désignons par t' la valeur du paramètre définissant la position de M sur la courbe S″, t' devenant nul lorsque M vient en M_0, nous avons entre t' et u_1 une relation de la forme

$$u_1 = a_1 t' + a_2 t'^2 + \ldots,$$

le second membre étant une série entière en t'. Nous aurons donc, d'après (97),

$$u = c_1 t'[1 + l(t)],$$

$l(t')$ étant semi-régulière et nulle pour $t' = 0$; c_1 est une constante.

Nous avons, d'autre part, trouvé (n° 31) la relation

$$t = a_2 u^b e^{-\frac{a}{u^n}}[1 + F(u)].$$

En remplaçant u par sa valeur en fonction de t' nous aurons la relation qui existe entre t et t', paramètres définissant la position des points d'intersection R et P d'une caractéristique C voisine de C_0 avec deux courbes quelconques S_1 et S'_1 interceptant sur C_0

un arc ne traversant pas d'autre point singulier que le point exceptionnel O. Pour mettre cette relation sous une forme plus simple, on peut écrire, puisque $l(t')$ est semi-régulière et nulle pour $t' = 0$,

$$\frac{-a}{u^n} = \frac{p(t')}{t'^n} + a_3 + q(t'),$$

a_3 désignant une constante, $p(t')$ un polynome en t' de degré inférieur à n, négatif pour $t' = 0$; $q(t')$ une *fonction semi-régulière* et nulle pour $t' = 0$. On a donc

$$e^{-\frac{a}{u^n}} = \alpha_1 e^{\frac{p(t')}{t'^n}}[1 + Q(t')],$$

$$(98) \qquad t = \beta t'^b e^{\frac{p(t')}{t'^n}}[1 + G(t')].$$

Dans ces formules, α_1, β sont des constantes; $Q(t')$ et $G(t')$ des fonctions de t' semi-régulières et nulles pour $t = 0$.

Telle est la forme définitive que nous donnerons à la loi de correspondance dans le voisinage d'une caractéristique C_0 traversant un point exceptionnel.

Remarque. — Parcourons la caractéristique C_0, à partir de P_0, dans le sens $P_0N_nOQ_0R_0$, et sur le prolongement de l'arc Q_0R_0 prenons un point T_0 tel que l'arc R_0T_0 ne contienne aucun point exceptionnel, mais contienne un nombre quelconque de cols. Soit S''_2 un arc de courbe coupant C_0 en T_0. La caractéristique C suivie dans le sens PNQR viendra couper S''_2 en un point T dont la position sur S_2 est définie par la valeur d'un paramètre θ, nul lorsque T vient en T_0. D'après ce que nous avons vu (n° 21), nous avons entre les paramètres t et θ définissant la position des points R et T la relation

$$\theta = ct^\nu[1 + F(t)];$$

c et ν sont des constantes positives; $F(t)$ est une fonction de t *semi-régulière* et nulle pour $t = 0$. Si dans cette expression de θ nous remplaçons t par sa valeur (98), nous aurons la relation entre les paramètres t' et θ définissant l'intersection de C avec les courbes S'_1 et S_2, nous obtenons

$$\theta = c\beta^\nu t'^{b\nu} e^{\frac{\nu p(t')}{t'^n}}[1 + G(t')]^\nu[1 + F(t)],$$

$$(99) \qquad \theta = \alpha t'^a e^{\frac{q(t')}{t'^n}}[1 + \varphi(t')],$$

en posant

$$\alpha = c\beta^\nu, \quad a = b\nu, \quad q(t') = \nu p(t'), \quad [1 + G(t')]^\nu, \quad [1 + F(t)] = 1 + \varphi(t').$$

La fonction $\varphi(t')$ est une fonction semi-régulière et nulle pour $t' = 0$. En effet, si nous cherchons les termes de $\varphi(t')$ dont le degré par rapport à t' ne dépasse pas un entier s, aucun de ces termes ne sera fourni par $F(t)$ où t est remplacé par l'expression (98). Nous n'aurons à considérer que les termes de degré inférieur à $s+1$ de l'expression $[1 + G(t')]^\nu - 1$. Ces termes, comme les termes analogues de la fonction semi-régulière $G(t')$, forment un polynome $P_s(t')$ en t' et $\varphi(t')$ pourra se mettre sous la forme

$$\varphi(t') = P_s(t') + t'^s Q_s(t'),$$

$Q_s(t')$ est une fonction semi-régulière et nulle pour $t' = 0$.

En changeant légèrement les notations, considérons deux courbes S' et S coupant C_0 en P_0 et T_0. Une caractéristique C, voisine de C_0, coupe S' et S en P et T de paramètres t' et θ nuls, lorsque P et T se confondent avec P_0 et T. Nous aurons entre ces paramètres t' et θ la relation (99) si les conditions suivantes sont satisfaites :

1° L'arc P_0T_0 de C_0 ne contient qu'un point exceptionnel que nous désignons par P' ;

2° L'arc P_0P' de C_0 ne contient, en dehors de P', aucun point singulier ;

3° A cet arc correspond, dans le plan des variables u et v employées dans l'équation (74), la caractéristique $u = 0$. Par suite, à l'arc de caractéristique $v = 0$ de l'équation (74) correspond l'arc $P'T_0$ qui, par conséquent, ne sera pas en général holomorphe au point P';

4° L'arc $P'T_0$ ne contient, en dehors de P', pas d'autres points singuliers que des cols. Ceux-ci peuvent être en nombre quelconque.

33. Caractéristiques voisines d'un cycle singulier passant par un seul point exceptionnel. — Supposons que nous ayons un cycle singulier C_0 passant par un point exceptionnel P' et par un certain nombre de cols. Désignons, comme au n° 31, par S_1 et S'_1

deux arcs de courbes coupant C_0 en R_0 et P_0 tels que l'arc $P_0P'R_0$ ne contienne pas d'autre point singulier que O'. Nous supposons que à l'arc P_0P' corresponde la caractéristique $u = 0$, dans le plan des variables u et v, employées au n° **31**. Nous avons entre les paramètres t et t' définissant la position des points d'intersection R et P d'une caractéristique C avec S_1 et S'_1 la relation (98). Suivons cette caractéristique C_1 voisine de C_0 dans le sens $R_0O'P_0$. D'après ce que nous avons vu au n° **21** sur les caractéristiques voisines d'un cycle C_0 traversant plusieurs cols, C viendra recouper S_1 en un point R_1 de paramètre t_1. D'après le n° **23**, nous aurons entre t' et t_1 une relation de la forme

$$t_1 = C_1 t'^{\nu}[1 + K(t')];$$

C_1 et ν sont des constantes positives, $K(t')$ une fonction semi-régulière et nulle pour $t' = 0$. Pour que C soit un cycle, il faut que les deux points d'intersection consécutifs R et R_1 de C avec S_1 coïncident, c'est-à-dire que t' soit tel que l'on ait $t_1 = t$. On doit donc avoir

$$\alpha t'^{h} e^{\frac{p(t')}{u^n}} [1 + G(t')] = C_1 t'^{\nu}[1 + K(t')].$$

Il est impossible qu'une pareille relation soit satisfaite pour des valeurs de t' voisines de zéro. En divisant les deux membres par $t^{\nu'}$ le premier membre de la relation tend vers zéro avec t', tandis que le second reste fini. *Il n'y a pas de cycles voisins du cycle singulier* C_0.

34. Remarques sur les caractéristiques voisines d'un cycle passant par plusieurs points exceptionnels. — Les paramètres u et v, que nous avons employés (n° **19**) pour obtenir la loi de correspondance dans le voisinage d'une caractéristique passant par un col, peuvent jouer absolument le même rôle. La relation entre u et v garde la même forme si on la résout par rapport à u ou par rapport à v. Il n'en est plus de même pour les variables u et v employées au n° **31** pour obtenir la loi de correspondance dans le voisinage d'une caractéristique traversant un point exceptionnel. La relation (88) change de forme si on la résout par rapport à u.

Considérons un cycle singulier C_0 passant par plusieurs points exceptionnels $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Désignons par u_i, v_i les paramètres correspondant au point P_i et analogues aux paramètres u et v considérés au n° 31. Nous supposerons que les paramètres u_i jouent tous le rôle joué au n° 31 par le paramètre u. Nous ne pourrons plus toujours supposer, comme au n° 22, que l'arc $P_{i-1}P_i$ correspond à la partie positive de $u_i = 0$. Si nous fixons sur le cycle C_0 un sens de parcours, tel que l'on rencontre les divers points exceptionnels dans l'ordre des indices, lorsqu'on part de P_1, nous pourrons rencontrer deux catégories différentes de points exceptionnels P_i : 1° ceux pour lesquels l'arc $P_{i-1}P_i$ correspond à la partie positive de $v_i = 0$; 2° ceux pour lesquels l'arc $P_{i-1}P_i$ correspond à la partie positive de $u_i = 0$.

Si l'on suit une caractéristique C voisine de C_0, en la parcourant dans le sens fixé sur C_0, cette caractéristique C arrivera dans le voisinage d'un point P_i de la première catégorie, en coupant la courbe représentée par $u_i = 1$ en un point de paramètre v_i et sortira du voisinage de P_i en coupant la courbe représentée par $v_i = 1$ en un point de paramètre u_i. Nous dirons que la caractéristique C_0 suivie dans le sens fixé traverse le point P_i dans le sens vu. Pour un point P_i de la seconde catégorie, nous dirons que C_0 traverse P_i dans le sens uv.

Supposons que, parcourant le cycle singulier C_0, nous traversions un point exceptionnel P dans le sens uv et que, après avoir traversé un certain nombre de cols, nous traversions un second point exceptionnel P′ dans le sens vu. Considérons une caractéristique C voisine de C_0. Cherchons la loi de correspondance entre les points d'intersection de C avec deux arcs de courbe S et S′ coupant C_0 en des points M_0 et M'_0 tels qu'en parcourant l'arc $M_0M'_0$ de C_0, à partir de M_0, on rencontre d'abord P_1, ensuite les cols et enfin P'_1, avant d'arriver à M'_0. Nous allons montrer que la loi de correspondance cherchée est d'une forme analogue à celle que l'on rencontrerait si, sur l'arc $M_0M'_0$, il n'existait pas d'autre point singulier qu'un col.

Prenons sur l'arc $M_0M'_0$ un point μ_0 compris entre P et P′ et qui ne soit pas un col. Considérons un arc de courbe Σ coupant C_0 en μ_0. La caractéristique C rencontre respectivement les courbes S, Σ, S′ aux points M, μ, M′ de paramètres t, θ, t'. Nous supposerons que ces paramètres deviennent nuls lorsque C se confond avec C_0. Nous avons, d'après la relation (99) (n° 32, remarque), les relations

$$\theta = \alpha\, t^{a}\, e^{\frac{p(t)}{t^n}}\,[1 + G(t)],$$

$$\theta = \alpha' t'^{a'} e^{\frac{q(t')}{t'^m}}\,[1 + H(t')],$$

α, α', a, a' sont des constantes positives, n et m des entiers, p et q des polynomes de degrés respectivement inférieurs à n et à m. G et H sont semi-régulières et nulles pour la valeur zéro de la variable.

En égalant les deux valeurs de θ et prenant ensuite les logarithmes, nous avons l'égalité

$$\frac{q(t')}{t'^m} + a' \mathrm{L} t' + \mathrm{L}[1 + H(t')] = \mathrm{L}\frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{p(t)}{t^n} + a \mathrm{L} t + \mathrm{L}[1 + G(t)],$$

que nous pouvons écrire en prenant les inverses

$$\frac{t'^m}{q(0) + F(t')} = \frac{t^n}{p(0) + K(t)}.$$

En extrayant la racine m des deux nombres, posant $\nu = \frac{n}{m}$ et désignant par c une constante et par A et B deux fonctions *semi-régulières* et nulles pour la valeur zéro de la variable, on a

$$(100) \qquad t'[1 + A(t')] = c\, t^{\nu}\,[1 + B(t)].$$

Il résulte de (100) que le quotient $t' : t^{\nu}$ a une limite finie lorsque t tend vers zéro. Posons

$$(101) \qquad t' = c\, t^{\nu}(1 + \varphi);$$

φ est une fonction de t qui tend vers zéro avec t; nous allons montrer que c'est une *fonction semi-régulière* pour $t = 0$. Nous avons

$$(102) \qquad \varphi + (1 + \varphi) A(t') = B(t).$$

$A(t')$ étant une fonction semi-régulière pour $t' = 0$, on peut, quel que soit s, écrire

$$A(t') = f_s(t', t'^m \mathrm{L} t') + t'^s g_s(t'),$$

$g_s(t')$ tendant vers zéro lorsque t' tend vers zéro, f_s étant un polynome par rapport aux deux expressions t' et $t'^m \mathrm{L} t'$.

Si nous remplaçons t' par l'expression (101) dans $t'^m Lt'$, nous avons

$$t'^m Lt' = c^m(1+\varphi)^m t^n[Lc + \nu Lt + L(1+\varphi)].$$

Si dans $f_s(t', t'^m Lt')$ nous remplaçons t' par l'expression (101), nous obtenons une fonction $k(t, t^n Lt, \varphi)$. La fonction k est une série entière en φ, les coefficients de cette série sont des polynomes en t et $t^n Lt$. Tous ces coefficients sont nuls pour $t = 0$. On peut écrire

$$A(t') = k(t, t^n Lt, \varphi) + t'^s g_s(t').$$

Considérons la fonction $z(t)$ nulle pour $t = 0$ et vérifiant la relation

$$(103) \qquad z + (1+z)k(t, t^n Lt, z) = B(t)$$

obtenue en supprimant, dans (102), $t'^s g_s(t')$, et remplaçant z par φ. Cette quantité z sera une fonction holomorphe de t, de $t^n Lt$ et de $B(t)$; ce sera, par conséquent, une *fonction semi-régulière* et nulle pour $t = 0$.

Si nous posons

$$\varphi = z + w,$$

nous pouvons écrire

$$(104) \qquad k(t, t^n Lt, z+w) = k(t, t^n Lt, z) + wG(t, t^n Lt, w),$$

G étant une série entière en w dont les coefficients sont des polynomes en t et $t^n Lt$ nuls pour $t = 0$.

En faisant la même substitution en $\varphi = z + w$ dans (102), et tenant compte de (103) et de (104), nous obtenons

$$w + (1+z)[wG + t'^s g_s(t')] + w[k + wG + t'^s g_s(t')] = 0,$$
$$w[1 + G + zG + k + wG + t'^s g_s(t')] = -(1+z)t'^s g_s(t').$$

Cette relation montre que, lorsque t tend vers zéro, w tend également vers zéro comme t', et le quotient $w : t'^s$ tend vers zéro. Il en est donc de même du quotient $w : t^{s\nu}$. La quantité $s\nu$ pouvant être prise aussi grande que l'on veut, il en résulte facilement que $\varphi = z + w$ est une fonction de t *semi-régulière* et nulle pour $t = 0$.

La relation (101) que nous avons obtenue présente bien une forme analogue à celle de la loi de correspondance pour une caractéristique voisine d'un arc $M_0 M'_0$ de caractéristique passant par un seul col (n° 19).

35. Caractéristiques voisines d'un cycle passant par plusieurs points exceptionnels. — Considérons un cycle singulier C_0 passant par des points exceptionnels $P_1, P_2, \ldots, P_n$, et passant en outre par un certain nombre de cols intercalés d'une façon quelconque entre les points P_i. Si nous considérons deux points exceptionnels consécutifs P_i et P_{i+1}, tels qu'ils soient traversés, le premier dans le sens uv, le second dans le sens vu, lorsqu'on parcourt le cycle C_0 dans le sens fixé $P_1, P_2, \ldots, P_n$, le passage d'une caractéristique C voisine de C_0 dans le voisinage des points P_i, P_{i+1} et des cols intercalés équivaut (n° 34), en ce qui concerne la forme de la loi de correspondance, au passage dans le voisinage d'un col fictif unique. Nous pourrons donc supprimer ces deux points exceptionnels et les cols intercalés pour les remplacer par un col fictif. Nous agirons ainsi autant de fois que nous rencontrerons deux points exceptionnels consécutifs traversés le premier dans le sens uv, le second dans le sens vu. La suppression de pareils points exceptionnels peut amener à considérer comme points exceptionnels consécutifs, et par suite à supprimer peut-être des points exceptionnels qui primitivement n'étaient pas consécutifs. Après avoir supprimé, comme nous venons de l'indiquer, autant de couples de points exceptionnels que possible, deux cas peuvent se présenter : 1° tous les points exceptionnels sont supprimés; 2° il subsiste des points exceptionnels.

Dans le premier cas, si nous considérons les valeurs des paramètres t et t' correspondant à deux points d'intersections consécutifs d'une caractéristique C voisine de C_0 avec une courbe S coupant C_0, nous avons entre les valeurs de ces paramètres (nuls lorsque C se confond avec C_0) la relation

$$t' = c\,t^{\nu}\,[1 + F(t)];$$

c et ν sont des constantes positives, $F(t)$ une fonction de t semi-régulière et nulle pour $t = 0$.

Pour que C fût un cycle, il faudrait que l'on ait $t' = t$. Ceci n'est possible pour des valeurs de t voisines de zéro que si l'on a $c = 1$, $\nu = 1$ et si $F(t)$ est identiquement nul. Si toutes ces conditions sont satisfaites, toutes les caractéristiques C voisines de C_0 sont des cycles.

Si les conditions précédentes ne sont pas toutes satisfaites, les caractéristiques C voisines de C_0 ne sont pas des cycles. Nous obtenons les conclusions du n° **23**.

Plaçons-nous maintenant dans le deuxième cas : celui où il subsiste un certain nombre de points exceptionnels. Soient P'_1, P'_2, ..., P'_r ces points exceptionnels subsistant encore. Nous pouvons toujours supposer que nous parcourons le cycle C_0 de telle façon que le point P'_1 soit traversé dans le sens uv et que les autres points P'_i soient rencontrés dans l'ordre des indices. Je dis que tous ces points sont aussi traversés dans le sens uv.

S'il existait des points traversés dans le sens vu, nous pourrions désigner par P_{i+1} le premier des points traversés dans le sens vu. Les deux points consécutifs P_i et P_{i+1} seraient traversés le premier dans le sens uv, le second dans le sens vu, ce qui est contraire à notre hypothèse, puisqu'un pareil couple de points a été supprimé. Tous les points P'_1, P'_2, ..., P'_r sont donc traversés dans le sens uv.

Ceci posé, intercalons sur C_0 entre les points P'_{i-1} et P'_i un point M_i, le point M_1 est entre P'_r et P_1.

Par chacun des points M_i faisons passer un arc de courbe, par exemple une droite, qui ne soit pas tangente à C_0.

Une caractéristique C qui rencontre S_1 en un point N_1 voisin de M_1 coupera chacun des arcs S_i en un point N_i voisin de M_i et viendra recouper S_1 en un point N_{r+1}.

Soit t_i la valeur du paramètre définissant la position de N_i sur S_i, ce paramètre t_i étant nul lorsque N_i coïncide avec M_i.

Entre les valeurs de t_i et de t_{i+1} nous avons (n° **33**, remarque) une relation de la forme

$$t_{i+1} = \alpha_i t_i^{a_i} e^{\frac{p_i(t_i)}{t_i^{n_i}}} [1 + \varphi_i(t_i)];$$

α_i, a_i sont des constantes; $p_i(t_i)$ est un polynome de degré au plus égal à n_i tel que $p_i(\text{o})$ soit négatif; φ_i est une fonction de t_i *semi-régulière* et nulle pour $t_i = \text{o}$.

Pour que la caractéristique C fût un cycle, il faudrait que l'on eût $t_{r+1} = t_1$. Ceci est impossible. En effet, le rapport $t_{i+1} : t_i$ tend vers zéro avec t_i, puisque $p_i(\text{o})$ est négatif. Tous les rapports

$$\frac{t_2}{t_1}, \quad \frac{t_3}{t_2}, \quad \ldots, \quad \frac{t_r}{t_{r-1}}, \quad \frac{t_{r+1}}{t_r}$$

tendent simultanément vers zéro lorsque t_1 tend vers zéro ; il en est de même de leur produit $\frac{t_{r+1}}{t_1}$. On ne peut donc, pour t_1 voisin de zéro, avoir $t_{r+1} = t_1$. *Aucune caractéristique voisine de* C_0 *n'est un cycle.* Nous avons la même conclusion qu'au n° 33. Les conclusions générales de l'étude que nous venons de faire sont celles énoncées n° 23.

TROISIÈME PARTIE.

CYCLES PASSANT DANS LE VOISINAGE DE POINTS SINGULIERS QUELCONQUES.

36. Méthode suivie. — Considérons un point singulier complexe P. En transportant l'origine en ce point, nous mettons l'équation différentielle sous la forme

$$[X_r(x, y) + \ldots]\, dy + [Y_r(x, y) + \ldots]\, dx = 0; \tag{105}$$

X_r et Y_r sont deux polynomes homogènes de degré r en x et y. Les termes non écrits dans les crochets sont des polynomes ou des séries entières ne contenant que des termes de degré supérieur à r. X_r et Y_r sont supposés n'être pas tous les deux identiquement nuls. Nous dirons que le point singulier $x = 0$, $y = 0$ est un *point singulier d'ordre r*. Remarquons que l'on peut avoir $r = 1$ sans que le point singulier considéré soit un point élémentaire.

Pour étudier une caractéristique voisine d'un cycle singulier passant par le point complexe P, nous aurons à déterminer les *séparatrices* passant par ce point P. D'après ce que nous avons dit (n° 3), il n'y a de séparatrices que dans le cas où l'on a des arcs de caractéristiques aboutissant au point P avec une tangente déterminée, et, dans ce cas, toutes les caractéristiques aboutissant à P admettent en ce point une tangente. Nous serons donc conduits à rechercher les caractéristiques aboutissant à P avec une tangente déterminée. Je rappellerai la méthode qui sert à les obtenir. Cette méthode nous conduit à faire une suite de changements de variables et à considérer une suite d'équations différentielles pour arriver toujours à des *équations de forme simple*, c'est-à-dire admettant l'origine comme *point singulier élémentaire* (n° 6). Nous déduirons immédiatement de cette méthode les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un point singulier complexe soit un *foyer* ou un *centre*. Pour faciliter nos raisonnements, nous chercherons la forme la plus simple que nous puissions donner aux changements de variables dont nous avons parlé et nous étudierons les particularités qui se présentent dans la recherche des séparatrices.

Ces préliminaires sont destinés à faciliter la détermination de la loi de correspondance pour une caractéristique passant dans le voisinage de P. Nous utiliserons en effet, pour la détermination de cette loi, les équations différentielles formées pour la recherche des séparatrices. Nous étudierons cette loi de correspondance, d'abord dans des cas particuliers, qui nous serviront à traiter ensuite le cas général. Nous arriverons à conclure que le passage d'une caractéristique C dans le voisinage d'un point singulier complexe est équivalent, en ce qui concerne la loi de correspondance, au passage de C dans le voisinage de plusieurs points singuliers élémentaires.

37. Point dicritique. — Considérons d'abord le cas où le point $x = 0, y = 0$ est un point dicritique, c'est-à-dire celui où, pour l'équation (105), la quantité

$$R(x, y) \equiv y X_r(x, y) + x Y_r(x, y) \tag{106}$$

est identiquement nulle. Nous pourrons alors, en désignant par $P(x, y)$ un polynome homogène de degré $r - 1$, écrire l'équation (105) sous la forme

$$\begin{aligned}[x P(x, y) + A_{r+1}(x, y) + \ldots]\, dy \\ + [-y P(x, y) + B_{r+1}(x, y) + \ldots]\, dx = 0;\end{aligned} \tag{107}$$

A_{r+1} et B_{r+1} sont des polynomes homogènes de degré $r + 1$.

Si nous posons $y = zx$, la quantité z devra tendre vers une limite finie pour toute caractéristique aboutissant au point O avec une tangente différente de Oy. Par ce changement de variable, l'équation (107) devient

$$[P(1, z) + \ldots + \ldots]\, dz + [z A_{r+1}(1, z) + B_{r+1}(1, z) + \ldots]\, dx = 0. \tag{108}$$

Les termes qui ne sont pas écrits dans les crochets contiennent tous x en facteur. Nous désignerons par Γ une caractéristique de l'équation (108), en x et z, et par C la caractéristique correspondante de l'équation en x et y.

Si nous avons une valeur $z = a$ telle que l'on ait à la fois

$$(109) \qquad P(1, a) = 0, \qquad a A_{r+1}(1, a) + B_{r+1}(1, a) = 0,$$

nous dirons que la direction $y = ax$ est une *direction singulière*, et, pour étudier les caractéristiques tangentes à cette droite au point O, nous serons ramenés à étudier les caractéristiques Γ passant par le point singulier $x = 0$, $z = a$ de (108). Laissons pour le moment ce cas de côté.

Si a ne vérifie pas les deux conditions (109), il y a une caractéristique Γ et une seule passant par $x = 0$, $z = a$. Il lui correspond une caractéristique C. Si l'on n'a pas $P(1, a) = 0$, ni Γ ni C ne présentent de particularité intéressante. Γ coupe $x = 0$ au point $x = 0$, $z = a$. Il n'en est pas toujours de même si $z = a$ est racine d'ordre n de $P(1, z) = 0$. En effet, en posant $z = a + t$, l'équation (108) donne

$$x = \alpha t^{n+1}(1 + \varepsilon),$$

où α est une constante qui n'est pas nulle et ε une fonction de t qui tend vers zéro avec t. On a donc

$$y = zx = ax + tx, \qquad y - ax = \alpha t^{n+2}(1 + \varepsilon), \qquad x = \alpha t^{n+1}(1 + \varepsilon).$$

Si n est pair, la caractéristique Γ, représentée par $z = a + t$, $x = \alpha t^{n+1}(1 + \varepsilon)$, traverse $x = 0$ au point $x = 0$, $z = a$. La caractéristique C tangente à $y = ax$ au point O présente en ce point la disposition ordinaire d'une courbe dans le voisinage d'un point régulier. Si n est impair, la caractéristique Γ, qui est tangente à $x = 0$, ne traverse pas $x = 0$ au point de contact $x = 0$, $z = a$. La caractéristique C présente en O un point de rebroussement.

On obtiendrait de même les caractéristiques C de (107), qui sont tangentes en O à $x = 0$, en posant $x = uy$ et considérant les caractéristiques Γ passant par $y = 0$, $u = 0$ et vérifiant l'équation

$$[-P(u, 1) + \ldots]\, du + [u B_{r+1}(u, 1) + A_{r+1}(u, 1) + \ldots]\, dy = 0.$$

Si l'on a

$$P(0, 1) = 0 \qquad \text{et} \qquad A_{r+1}(0, 1) = 0,$$

la direction $x = 0$ est une *direction singulière* pour le point dicritique.

Ce cas mis de côté, nous avons une caractéristique et une seule passant par $u = 0$, $y = 0$, et par suite une seule caractéristique C passant par $u = 0$, $y = 0$ et tangente à $x = 0$.

Si $u = 0$ est une racine d'ordre impair de $P(u, 1) = 0$, et dans ce cas seulement, Γ, qui est tangente à $u = 0$ au point $u = 0$, $y = 0$, ne traverse pas $u = 0$ en ce point, et C présente un point de rebroussement en O avec tangOy.

Si nous appelons *direction singulière* une direction vérifiant simultanément les deux équations

$$P(x, y) = 0, \qquad y A_{r+1}(x, y) + x B_{r+1}(x, y) = 0,$$

et *direction remarquable* une direction non singulière obtenue en égalant à zéro un facteur linéaire d'ordre impair de $P(x, y)$, nous avons les conclusions suivantes :

Il y a une caractéristique C *et une seule tangente en un point dicritique* P *à une direction* D *non singulière. Cette caractéristique ne présente pas de rebroussement en* P, *si* D *n'est pas une direction remarquable.* C *présente en* P *un rebroussement de première espèce si* D *est une direction remarquable.*

Remarque. — *La région* R *voisine du point* O *et comprise entre les deux branches d'une caractéristique* C *ayant un rebroussement en* O *est une région répulsive pour le point dicritique.*

En effet, considérons, comme on peut toujours le faire, le cas où la tangente de rebroussement n'est pas Oy. Nous avons dit que la caractéristique Γ correspondant à C dans le plan des variables z et x ne traverse pas $x = 0$ dans le voisinage de $x = 0$, $z = a$. Supposons qu'elle reste à droite de $x = 0$ par exemple. Les caractéristiques Γ' voisines de Γ et situées à droite de Γ ne couperont pas la droite $x = 0$. La transformation $y = zx$ leur fait correspondre des caractéristiques C' situées dans la région R aussi voisines que l'on veut de C, et pour lesquelles x et y ne peuvent tendre simultanément vers zéro, puisque x ne devient pas nul lorsqu'on parcourt Γ'.

38. Caractéristiques aboutissant a un point singulier avec une tangente déterminée. — Si nous posons $y = zx$, z devra tendre vers une limite pour toute caractéristique C aboutissant à O avec une tangente distincte de $x = 0$. En employant la notation (106) l'équation (105) devient

$$(110) \qquad x[X_r(1, z) + \ldots]\,dy + [R(1, z) + \ldots]\,dx = 0.$$

Si z tend vers une limite a lorsque x tend vers zéro, cette limite doit vérifier l'équation $R(1, z) = 0$. En posant

$$(111) \qquad z = a + y_1, \qquad y = (a + y_1)x,$$

nous obtenons une équation en x et y, que nous appellerons *équation transformée* de (105). Nous désignerons par Γ une caractéristique de cette *équation transformée* correspondant à C. Le point $x = 0$, $y_1 = 0$ sera dit l'origine O_1 relative au plan des variables x et y_1. Si $z = a$ est racine simple de $R(1, z) = 0$ ou si $z = 0$ ne vérifie pas l'équation $X_2(1, z) = 0$, l'équation en x et y_1 sera une *équation de forme simple* pour laquelle $x = 0$, $y_1 = 0$ sera un *point élémentaire*. Nous savons que, dans ce cas, il y a au moins une caractéristique Γ passant par $x = 0$, $y = 0$ et différente de $x = 0$. Il y a donc au moins une caractéristique C passant par $x = 0$, $y = 0$ et tangente à $y = ax$.

Pour rechercher s'il y a des caractéristiques C passant par O et tangentes en ce point à $x = 0$, nous posons

$$(112) \qquad x = uy$$

et nous cherchons si l'*équation transformée*

$$(113) \qquad y[Y_r(u, 1) + \ldots]\,du + [R(u, 1) + \ldots]\,dy = 0$$

admet des caractéristiques Γ passant par $y = 0$, $u = 0$ et différentes de $y = 0$. Ces caractéristiques ne peuvent exister que si $u = 0$ est racine de $R(u, 1) = 0$, et nous ne sommes pour le moment assurés de leur existence que dans les deux cas suivants : 1° cette racine est une racine simple; 2° cette racine étant multiple n'annule pas $Y_r(u, 1)$.

Nous arrivons à la conclusion générale suivante :

Les seules directions possibles de tangentes en O à une caractéristique passant par ce point s'obtiennent en égalant à zéro les facteurs linéaires réels de $R(x, y)$.

Si l'on considère un de ces facteurs, les caractéristiques C tangentes à la droite correspondante s'obtiennent en considérant une équation transformée obtenue, suivant le cas, par l'un ou l'autre des changements de variables (111) ou (112). Si le facteur linéaire considéré est un facteur simple de $R(x, y)$, ou n'est pas en même temps facteur de $Y_r(x, y)$ et de $X_r(x, y)$, l'équation transformée est de forme simple et il y a au moins une caractéristique C tangente à la direction considérée. Si le facteur linéaire considéré est à la fois facteur multiple de $R(x, y)$, ainsi que facteur de $Y_r(x, y)$ et de $X_r(x, y)$, l'équation transformée n'est pas de forme simple. Dans ce dernier cas, nous sommes amenés, pour trouver les caractéristiques C, à étudier pour l'équation transformée les caractéristiques Γ passant par l'origine relative à cette équation.

Considérons par exemple l'équation en x et y_1, que nous écrirons

$$x[A(x, y_1) + \ldots]\, dy_1 + [B(x, y_1) + \ldots]\, dx = 0, \tag{114}$$

en désignant par A et B deux polynomes homogènes de degré r_1 en x et y_1, les termes non écrits étant de degré supérieur à r_1. Nous sommes ramenés à étudier les caractéristiques de (114) passant par $x = 0$, $y_1 = 0$.

Remarque I. — L'équation (114) admettant la caractéristique $x = 0$, qui aboutit à l'origine avec une tangente déterminée, toutes les caractéristiques Γ aboutissant à $x = 0$, $y = 0$, auront en ce point une tangente déterminée. Par conséquent, nous ne laisserons de côté aucune caractéristique Γ aboutissant à $x = 0$, $y_1 = 0$ en cherchant les caractéristiques aboutissant à ce point avec une tangente. La même remarque s'applique à l'équation (113).

Remarque II. — La solution $x = 0$ de l'équation (114) ne fournit aucune caractéristique C. Pour distinguer cette solution des solutions de (114), fournissant des caractéristiques C, nous dirons que $x = 0$ est une *solution introduite* par la transformation $y = (a + y_1)x$. De même l'équation (113) admet la solution $y = 0$, qui sera dite *solution introduite*.

39. Équations transformées successives. — Si l'équation (114)

est une équation à point dicritique, nous appliquerons les résultats du n° 37. Si dans (114) $x=0$, $y_1=0$ n'est pas un point dicritique, nous sommes, d'après ce qui vient d'être dit (n° 38, remarque I), ramenés à chercher les caractéristiques Γ ayant en $x=0$, $y_1=0$ une tangente. Nous raisonnerons comme nous l'avons fait pour (105). Nous formons les équations différentielles transformées de (114) relatives aux diverses directions possibles de tangentes en $x=0$, $y_1=0$. Nous pourrons appeler ces équations des *transformées secondes* de (105).

Si ces transformées secondes sont toutes des équations de forme simple, le problème de la recherche des caractéristiques Γ est résolu, puisque nous savons étudier les caractéristiques d'une équation de forme simple. Si certaines de ces transformées secondes ne sont pas de forme simple, nous raisonnerons de nouveau sur elles comme sur l'équation (114), et ainsi de suite.

Nous sommes ainsi conduits à faire une suite de changements de variables de la forme (111) ou de la forme (112). La suite d'un nombre quelconque de ces changements de variables revient toujours à exprimer x et y en fonction de deux variables u et v au moyen de polynomes en u et v. Une de ces variables u et v peut, au moins dans certains cas, coïncider avec x ou y. On considère pour les équations transformées successives que l'on obtient les caractéristiques γ aboutissant à $u=0$, $v=0$ avec une tangente déterminée. A ces caractéristiques γ correspondent les caractéristiques C, que nous voulons considérer pour l'équation en x et y.

On sait (Bendixson, p. 72 et 75) qu'une suite de changements de variables, du genre de ceux que nous employons, conduit au bout d'un nombre fini d'opérations à une équation en u et v, pour laquelle $u=0$, $v=0$ est, soit un point singulier élémentaire, soit un point ordinaire.

Si dans la suite des équations transformées que nous obtenons on ne rencontre aucune équation admettant l'origine pour point dicritique, toutes les équations transformées admettront l'origine pour point singulier et nous arriverons à des équations de forme simple. C'est-à-dire de l'une des formes

$$(115) \qquad [u + X_2(u, v)]\, dv + [\lambda u + \alpha v + Y_2(u, v)]\, du = 0,$$

$$(116) \qquad X_2(u, v)\, dv + [v + Y_2(u, v)]\, du = 0,$$

où λ et α sont des constantes. X_2 et Y_2 des séries entières dont tous les termes sont de degré supérieur à 1 en u et v. Les équations transformées de forme simple auxquelles nous arrivons admettent toujours soit la solution $u = 0$, soit la solution $v = 0$. Si dans la suite des équations transformées que nous obtenons on rencontre une équation admettant l'origine pour point dicritique, nous considérerons pour chacune des droites passant par le point l'équation transformée correspondante. Si la droite n'a pas une direction singulière, nous obtenons une équation pour laquelle $u=0$, $v = 0$ est un point ordinaire, équation que l'on peut mettre sous la forme

$$dv = F(u, v)\,du, \tag{117}$$

F étant une série entière en u et v.

Si la droite a une direction singulière, l'équation transformée admet l'origine pour point singulier, mais n'admet en général, comme on le voit par l'équation (108), ni la solution $u = 0$, ni la solution $v = 0$, contrairement à ce qui se passe pour toute transformée d'une équation qui n'est pas à point dicritique. Nous étudierons les caractéristiques de cette équation transformée en raisonnant comme sur l'équation (105).

Remarque I. — Nous appelons (nº 38, remarque II) *solution introduite* ou *caractéristique introduite* d'une équation transformée une solution ou caractéristique de cette équation à laquelle ne correspond pas de caractéristique de l'équation donnée. Cette solution est, soit $u = 0$, soit $v = 0$, si les variables de l'équation transformée sont u et v. Il peut se faire que la nouvelle équation transformée relative à la direction de la caractéristique introduite soit de forme simple et n'admette comme caractéristiques passant par l'origine que des caractéristiques introduites.

Cette équation de forme simple ne fournira, dans ce cas, aucune caractéristique C.

Considérons par exemple, pour l'équation (114), la solution introduite $x = 0$. Posons

$$x = uy_1, \qquad A(0, 1) + B(0, 1) = \alpha, \qquad B(0, 1) = \beta.$$

Supposons que l'une au moins des constantes α et β ne soit pas nulle. On obtient l'équation

$$y_1(B + \dots)\,du + u\,(\alpha + \dots)\,dy_1 = 0$$

où les termes non écrits sont nuls pour $u = 0$, $y_1 = 0$. Si l'on a $\alpha\beta > 0$, le point $u = 0$, $y_1 = 0$ est un col. Les seules caractéristiques passant par ce col sont $u = 0$, $y_1 = 0$. Elles ne fournissent ni l'une ni l'autre de caractéristique C de l'équation en x et y.

Remarque II. — Nous avons rappelé (n° 38, remarque I) que l'équation (114) admettant la caractéristique $x = 0$, toutes les caractéristiques aboutissant à $x = 0$, $y_1 = 0$ ont en ce point une tangente déterminée. Il en sera de même pour une équation transformée en u et v, admettant soit la solution $u = 0$, soit $v = 0$. Nous avons vu qu'il n'en est pas en général ainsi pour une transformée d'une équation à point dicritique.

Si cette transformée en u et v d'une équation à point dicritique n'admet ni la solution $u = 0$, ni la solution $v = 0$, nous savons (n° 5), que l'on est toujours dans l'un des cas suivants :

1° *Cette équation admet une caractéristique aboutissant à* $u = 0$, $v = 0$ *avec une tangente déterminée.* Dans ce cas, comme dans le cas considéré n° 38, toutes les caractéristiques aboutissant à $u = 0$, $v = 0$ admettent en ce point une tangente.

2° $u = 0$, $v = 0$ *est un foyer.* Une infinité de caractéristiques aboutissent à ce point sans admettre de tangente.

3° $u = 0$, $v = 0$ *est un centre.* Aucune caractéristique n'aboutit à ce point.

Dans les deux derniers cas (Bendixson, p. 69), les spirales ou les courbes fermées entourant $u = 0$, $v = 0$ fournissent des caractéristiques de l'équation (107) passant par $x = 0$, $y = 0$, mais aucune de ces caractéristiques n'est tangente à la direction $y = ax$ pour laquelle on a formé l'équation transformée. Toutes ces caractéristiques font partie d'une région nodale. Aucune d'elles n'est une séparatrice.

40. Détermination des cas où un point singulier est un foyer

OU UN CENTRE. — Pour que le point singulier O ($x = 0$, $y = 0$) de l'équation (105) soit un *foyer* ou un *centre*, il faut (n° 5) qu'il n'y ait aucune caractéristique C aboutissant en O avec une tangente déterminée. Il résulte de ce qui précède que l'on sait reconnaître s'il en est ainsi. Précisons les cas où il y a *foyer* ou *centre*. En considérant l'équation (105), nous sommes toujours dans l'un des quatre cas suivants :

1° *L'origine* O *est un point dicritique.* C'est le seul cas où il n'existe pas d'équation fournissant les directions possibles des tangentes en O aux caractéristiques aboutissant à ce point.

2° *L'équation* $R(x, y) = 0$ *donnant les directions des tangentes en* O *admet au moins un facteur réel, auquel correspond une équation transformée de forme simple.*

3° *L'équation donnant les directions de tangentes en* O *n'admet aucun facteur réel.*

4° *L'équation donnant les directions de tangentes en* O *admet des facteurs réels, mais à aucun d'eux ne correspond une équation transformée de forme simple.*

Nous avons vu (nos 37 et 38) que, dans les cas 1° et 2°, il y a au moins une caractéristique C ayant une tangente au point O. Dans le cas 3°, il ne peut y avoir de caractéristique C ayant une tangente en O. Dans le cas 4°, il y a doute. Pour lever le doute, formons les transformées relatives aux divers facteurs réels de $R(x, y)$. Considérons l'une de ces transformées. Le cas 3° ne peut se présenter pour elle, car cette équation admet la solution introduite, $x = 0$ ou $y = 0$, suivant le cas. Par contre, le cas 2° peut se présenter sans qu'il y ait de caractéristique C.

En effet, si l'on considère le facteur réel de $R(x, y)$ correspondant à la solution introduite $x = 0$ ou $y = 0$ et si l'on forme la transformée relative à ce facteur, on obtient, d'après ce que nous avons dit (n° 39, remarque I), une équation qui pourra n'admettre que des solutions introduites. Elle ne fournira dans ce cas aucune caractéristique C. Les cas 1°, 2° et 3° peuvent seuls se présenter pour chacune des transformées considérées. Ce que nous avons dit, pour (105), peut se répéter pour chacune des transformées. En continuant ainsi, jusqu'à ce que nous ne rencontrions plus le cas 4°, ainsi que cela finira toujours par se produire, nous voyons que pour que le point O soit un foyer ou un centre, on doit avoir les conditions suivantes :

a. Il faut que les équations donnant les directions des tangentes à l'origine de l'équation donnée et de ses diverses transformées n'admettent, en dehors des facteurs correspondant aux solutions introduites, aucun facteur linéaire réel fournissant une transformée de forme simple.

b. Si un facteur linéaire correspondant à une solution introduite fournit une transformée de forme simple, il faut que cette transformée n'admette que des solutions introduites.

Ces conditions nécessaires sont suffisantes. En effet, nous avons vu (n° 39) que toute caractéristique C ayant une tangente en O correspond par l'intermédiaire d'un nombre fini de changements successifs de variables à une caractéristique Γ' d'une équation différentielle transformée de forme simple, Γ', aboutissant avec une tangente déterminée à l'origine O' relative à cette équation. Les changements de variables en question sont ceux qui fournissent les équations transformées successives que nous venons de considérer. Si les conditions a et b sont vérifiées, les transformées de forme simple auxquelles nous arriverons n'admettront pas de caractéristique Γ' à laquelle corresponde une caractéristique C.

41. Simplification des changements de variables conduisant a des équations de forme simple. — La suite des changements de variables que nous avons considérés pour obtenir les caractéristiques au moyen d'équations de forme simple présente l'inconvénient de ne conserver, tout au moins dans certains cas, aucune des variables primitives x et y. Il sera avantageux, pour la simplification des raisonnements que nous aurons à faire, de montrer que l'on peut conserver, dans la plupart des cas, soit la variable x, soit une variable u liée à x par la relation $u^p = x$, p étant un entier convenablement choisi.

Nous sommes amenés à ne pas conserver la variable x, lorsque nous considérons une caractéristique telle que $y : x$ croisse indéfiniment quand x et y tendent vers zéro, ou plus généralement lorsque nous considérons une caractéristique d'une équation transformée en x et y_s, telle que $y_s : x$ croisse indéfiniment quand x et y_s tendent simultanément vers zéro. Nous posons alors : $x = y_s x_1$, et x_1 tendra vers zéro en même temps que y_s.

Pour prendre immédiatement le cas le plus général, supposons que la caractéristique considérée soit telle que si l'on fait une suite de changements de variables

$$(118) \qquad x_{i-1} = y_s x_i, \qquad (x_0 = x),$$

x_i tende vers zéro, lorsque x_{i-1} et y tendent vers zéro. Deux cas peuvent se produire :

1° *Au bout d'un nombre fini de changements* (118) *on obtiendra, pour* $i = p$, *une équation en* y_s *et* x_p *telle que, pour la caractéristique considérée,* $x_p : y_s$ *ne tende plus vers zéro en même temps que* x_p *et* y_s. Le quotient $y_s : x_p$ tendra vers une limite finie α, qui pourra être nulle. L'équation en x_p et y_s admettra d'ailleurs $x_p = 0$, $y_s = 0$ soit comme point singulier élémentaire, soit comme point singulier complexe.

2° *Si grand que soit* i, *le changement de variable* (118) *fait toujours correspondre aux points de la caractéristique considérée des valeurs de* x_i *tendant vers zéro avec* y_s *et* x_{i-1}. On sait alors que pour une valeur finie $i = q$ (¹), on obtiendra une équation différentielle de forme simple. Cette équation en x_q et y_s admettra une caractéristique jouissant de la propriété suivante : Quel que soit l'entier r, le quotient $x_q : y_s^r$ tendra vers zéro en même temps que x_q et y_s.

Considérons le cas 1°. Par hypothèse $y_s : x_p = t$ aura une limite finie; quand y_s et x_p tendront vers zéro. On a

$$x = y_s^p x_p = \frac{y_s^{p+1}}{t}.$$

Si l'on pose $x = u^{p+1}$, on a $t = y_s^{p+1} : u^{p+1}$ et le quotient $y_s : u$ tendra vers une limite finie, lorsque u et y_s tendront vers zéro. En considérant l'équation en u et y_s, nous sommes donc ramenés au cas général où l'on a une caractéristique qui, dans le

(¹) *Voir* Bendixson, p. 72. *Voir* aussi : Malmquist, *Arkiv för Matematik*, t. 15, Chap. II.

plan des variables y_s et u, n'est pas tangente en $u = 0$, $y_s = 0$ à la droite $u = 0$.

On peut donc, si l'on se trouve dans le cas 1°, éviter de faire des changements de variable de la forme (118), en faisant un changement de variable

$$x = x_1^n, \tag{119}$$

n étant un entier. Nous devons remarquer qu'on arrive à une équation de forme simple par un nombre fini de changements de variables. On n'aura donc qu'à effectuer un nombre fini de changements de variables de la forme (119), $x_i = x_{i+1}^{m_i}$, pour éviter les changements (118).

On peut remplacer l'ensemble de ces changements de la forme (119) par un changement unique $x = u^m$.

Si nous avons une caractéristique C passant par $x = 0$, $y = 0$ telle que $y : x$ tende vers une limite finie lorsque x tend vers zéro et que pour toutes les transformées en x et y_i, que l'on considère dans la recherche de C, le quotient $y_i : x$ tende vers une limite finie, nous dirons que dans la recherche de C nous sommes dans le *cas normal*. En désignant par $\varphi(x)$ un polynome convenablement choisi de degré inférieur à $n + 1$ le changement de variable

$$y = \varphi(x) + x^n v$$

fournit une équation différentielle en x et v de l'une des formes (115), (116) ou (117) et fait correspondre à C une caractéristique de cette équation passant par le point $x = 0$, $v = 0$.

Si dans la recherche de C nous ne sommes pas dans le *cas normal*, mais si nous ne rencontrons pas le cas 2° signalé plus haut, nous dirons que nous sommes dans le *cas réductible*. En désignant par m et n des entiers et par $\varphi(u)$ un polynome convenablement choisi de degré au plus égal à n, le changement de variables

$$x = u^n, \quad y = \varphi(u) + v u^n \tag{120}$$

conduit à une équation différentielle de l'une des formes (115), (116) ou (117) et fait correspondre à C une caractéristique de cette équation, passant par $u = 0$, $v = 0$.

Si enfin, dans la recherche de C, on rencontre le cas 2° signalé plus haut, nous dirons que nous sommes dans le *cas irréductible*. En désignant par m, n et q des entiers et par φ un polynome convenablement choisi, de degré au plus égal à n, le changement de variable

$$x = z^m, \qquad y = \varphi(z) + vz^n, \qquad z = uv^q$$

conduit à une équation différentielle en u et v de l'une des formes (115), (116) ou (117) et fait correspondre à C une caractéristique Γ' de cette équation passant par $u = 0$, $v = 0$. Cette caractéristique Γ' jouit de la propriété suivante : Quel que soit r, le quotient $u : v^2$ tend vers zéro avec u et v. Il en résulte que l'équation en u et v ne peut être ni de la forme (115) ni de la forme (117), elle est de la forme (116); $u = 0$, $v = 0$ est un point exceptionnel.

42. Recherche des séparatrices. — Si parmi les caractéristiques aboutissant à $x = 0$, $y = 0$ il y a des séparatrices, elles admettront en O une tangente et feront partie (n° 5) des caractéristiques que nous avons cherchées (nos 38 et 39). Si dans la recherche d'une séparatrice on ne rencontre pas d'équation à point dicritique, cette séparatrice sera fournie par une équation de la forme (115) ou (116) admettant soit la solution $u = 0$, soit la solution $v = 0$.

Si dans la recherche d'une séparatrice C on rencontre une équation à point dicritique, il est impossible que la caractéristique correspondante Γ' de cette équation soit tangente en ce point dicritique à une direction ordinaire, car Γ' serait intérieure à une région dont toutes les caractéristiques aboutissent au point dicritique et nous verrons qu'il en serait de même de C, ce qui est impossible, puisque C est une séparatrice. Nous sommes donc dans l'un des cas suivants: 1° La caractéristique Γ' est tangente à une direction remarquable. Dans ce cas Γ' et par suite C seront obtenues au moyen d'une équation de la forme (117) admettant $u = 0$, $v = 0$ pour point ordinaire.

2° Γ' est tangente à une direction singulière. La séparatrice C sera alors obtenue, exceptionnellement au moyen d'une équation de la forme (117) et habituellement par une équation de la forme (115) ou (116) pouvant n'admettre ni la solution $v = 0$ ni la solution $u = 0$. Dans tous les cas, on voit qu'il n'y aura qu'un nombre fini d'équations (115), (116) ou (117) pouvant fournir des séparatrices. Pour reconnaître celles de ces équations qui fournissent des séparatrices montrons que, à une séparatrice de l'équation donnée (105) correspondent des séparatrices des diverses équations transformées.

Si nous faisons la transformation $y = zx$, à un point M de coordonnées x et y correspond un point μ de coordonnées x et z. A une courbe C du plan des xy correspond une courbe Γ du plan des xz. Soient C_1 et C_2 deux séparatrices relatives à $x = 0$, $y = 0$ et limitant une région répulsive dont nous considérons la portion R, voisine de $x = 0$, $y = 0$. Supposons que la région R ne soit pas traversée par Oy et que ni C_1 ni C_2 ne soient tangentes à Oy en O. Si l'on fait la transformation $y = zx$, à C_1 et à C_2 correspondent deux caractéristiques Γ_1 et Γ_2 du plan des xz. Ces courbes coupent respectivement $x = 0$ en des points A_1 et A_2 de cote $z = \alpha_1$ et $z = \alpha_2$. A la région R correspond dans le plan des zx une région ρ limitée par Γ_1, et Γ_2 et par $x = 0$, si l'on a $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Aucune caractéristique Γ de l'équation en z et x comprise dans la région ρ ne peut couper le segment $A_1 A_2$ de $x = 0$, car il lui correspondrait une caractéristique C de l'équation en x et y intérieure à R et aboutissant à $x = 0$, $y = 0$. Donc Γ_1 et Γ_2 sont des séparatrices relatives aux points singuliers A_1 et A_2.

Si la région R est traversée par Oy, mais si C_1 n'est pas tangent à Oy, nous considérons une demi-droite OL de coefficient angulaire α, limitant avec C_1 un vecteur R', situé dans la région R et qui ne soit pas traversé par Ox. En appliquant à R' le raisonnement fait pour R, la demi-droite OL prenant le rôle de C_2, on voit que Γ_1 est une séparatrice relative au point singulier $x = 0$, $z = \alpha_1$.

Si C_1 est tangent à Oy en O, nous faisons le changement de variable $x = yz$ et un raisonnement analogue à ceux que nous venons de faire montrera que, à C_1 correspond dans le plan des yz une séparatrice Γ_1 relative au point singulier $x = 0$, $z = 0$.

Nous avons donc établi qu'à une séparatrice C correspond une séparatrice Γ d'une équation transformée. La propriété restant vraie quel que soit le nombre de transformations effectuées, nous arriverons en recherchant une séparatrice C à une équation de l'une des formes (115), (116) et (117) admettant la courbe Γ correspondant à C pour séparatrice relative à $u = 0$, $v = 0$.

Si l'on obtient une équation de la forme (117), il faut (n° 37, remarque), pour que la caractéristique de cette équation passant par $u = 0$, $v = 0$ puisse fournir une séparatrice, que Γ' ne traverse pas $v = 0$, au point $u = 0$, $v = 0$. L'équation (117) est la transformée d'une équation à point dicritique, transformée correspondant à une direction remarquable relative à ce point dicritique.

Si l'on obtient une équation de la forme (115) il faut et il suffit que λ soit positif pour qu'une caractéristique Γ passant par $u = 0$, $v = 0$ soit une séparatrice.

Enfin, si l'on obtient une équation de la forme (116), nous avons facilement, d'après ce que nous avons dit (n^{os} 24 et 25), les conditions pour qu'une caractéristique Γ passant par $u = 0$ soit une séparatrice.

Remarque I. — Le raisonnement que nous avons employé plus haut, dans le cas où la région R est traversée par Oy et où C_1 n'est pas tangent à Oy, sera encore valable si C_1 n'est pas une séparatrice, à condition qu'il n'y ait aucune caractéristique C aboutissant à $x = 0$, $y = 0$ en restant à l'intérieur du secteur R' limité par C_1 et OL. La caractéristique Γ_1 correspondant à C_1 par le changement de variable $y = zx$ sera encore une séparatrice. On voit que si à une caractéristique C_1 correspond, par un changement de variable de la forme employée, une séparatrice Γ_1, la réciproque n'est pas exacte.

Par exemple, l'équation

$$(y + 2x)\,dy - y\,dx = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$y^2 = C(y + x),$$

admet le point singulier $x = 0$, $y = 0$ qui est un *nœud.* En posant $y = zx$, on obtient une équation en z et x admettant le point singulier $x = 0$, $z = 0$ qui est un *col.* $z = 0$ est une séparatrice relative à ce *col* tandis que la caractéristique correspondante, $y = 0$, n'est pas une séparatrice.

Remarque II. — Puisque à une séparatrice d'une équation transformée ne correspond pas nécessairement une séparatrice de l'équation en x et y, il peut être utile d'indiquer comment on reconnaîtra les séparatrices parmi les caractéristiques fournies par une équation de l'une des formes (115), (116), (117).

Si nous désignons par Γ'_0 l'ensemble des deux branches de la caractéristique d'une équation (117) passant par le point $u = 0$, $v = 0$, Γ'_0 ne peut fournir de séparatrice que si (117) est la transformée d'une équation à point dicritique et si la caractéristique Γ_0 de cette équation correspondant à Γ'_0 est tangente en ce point dicritique à une direction remarquable. Les deux branches de Γ_0 forment un rebroussement. Pour que la caractéristique C_0 correspondante de l'équation en x et y fournisse des séparatrices, il faut et il suffit qu'aux caractéristiques Γ de l'équation à point dicritique, comprises entre les deux branches de Γ_0, correspondent des caractéristiques C n'aboutissant pas à $x = 0$, $y = 0$. Il sera facile de reconnaître s'il en est ainsi, en considérant les changements de variables successifs, qui, en partant de l'équation en x et y, ont conduit à l'équation en u et v.

Considérons une caractéristique Γ_1, qui soit une séparatrice relative au point $u = 0$, $v = 0$, d'une équation (115) ou (116). Pour que la caractéristique correspondante C_1 de l'équation en x et y soit une séparatrice relative à $x = 0$, $y = 0$, il faut et il suffit que l'on puisse lui associer au moins une caractéristique C_2 aboutissant à $x = 0$, $y = 0$ et telle que la région comprise entre C_1 et C_2 soit une région répulsive relative à $x = 0$, $y = 0$. Cette seconde séparatrice C_2 ne peut être fournie que par une équation de la forme (115) ou (116). En considérant celles de ces équations qui peuvent fournir des séparatrices et la suite des changements de variables qui ont conduit à chacune de ces équations, on pourra toujours déterminer les deux équations transformées E' et E'' de forme simple (115) ou (116), qui peuvent seules fournir, de part et d'autre de C_1, les caractéristiques les plus voisines de C_1 et seules susceptibles de limiter avec C_1 une région répulsive. Pour reconnaître si E' par exemple fournit une séparatrice C_2 limitant avec C_1 une région répulsive, nous considérons les diverses séparatrices Γ_0 de E' et nous examinons, pour chacune d'elles, si la caractéristique correspondante C_0 de l'équation en x, y limite avec C une région répulsive. En opérant de même avec E', on pourra décider si C_1 limite un ou deux secteurs répulsifs, ou bien si C_1 n'est pas une séparatrice.

43. Remarques sur les circonstances qui se présentent dans la recherche des séparatrices. — Si nous faisons un changement de variables de l'espèce indiquée (n° 39), pour la recherche d'une caractéristique C ayant une tangente en $x = 0$, $y = 0$, nous obtenons une équation transformée E en u et v; à C correspond dans le plan des u, v une caractéristique Γ passant par le point $u = 0$, $v = 0$. Nous dirons qu'une *séparatrice* C *a été isolée* par le changement de variable considéré, lorsque l'équation E est de l'une des formes (115), (116), (117).

Si deux caractéristiques C_1 et C_2 de l'équation en x et y passent par $x = 0$, $y = 0$, mais n'admettent pas en ce point la même tangente, nous dirons que C_1 et C_2 sont *séparées*. S'il n'en est pas ainsi, nous dirons que les deux caractéristiques C_1 *et* C_2 *ont été séparées*, par le changement de variables qui a conduit à l'équation E, si les deux caractéristiques correspondantes Γ_1 et Γ_2 de cette équation passent toutes deux par $u = 0$, $v = 0$, mais n'admettent pas en ce point même tangente.

Nous avons vu (n° 42) qu'une séparatrice C peut toujours *être isolée*. Si l'équation E est de la forme (117), elle n'admet pas d'autre caractéristique que Γ passant par $u = 0$, $v = 0$. Si E est de la forme (115) ou (116), elle admet en dehors de la séparatrice Γ correspondant à C, la caractéristique $u = 0$ ou $v = 0$, qui est en général une solution introduite.

Nous allons montrer que deux séparatrices C_1 et C_2, limitant une région répulsive relative à $x = 0$, $y = 0$, et admettant même tangente, peuvent toujours être séparées.

Nous supposerons d'abord, comme nous le ferons souvent dans la suite, que l'on a remplacé x par x^n, n étant un entier tel que, dans la recherche des séparatrices considérées, on ne rencontre pas le *cas réductible* (n° 41).

Le cas normal ou *le cas irréductible* se présenteront seuls.

Considérons d'abord deux séparatrices C_1 et C_2 telles que dans leur recherche on soit dans le *cas normal*. Soient

$$y = \varphi_1(x) + x^{n_1}v, \qquad y = \varphi_2(x) + x^{n_2}v,$$

les changements de variables isolant chacune de ces séparatrices, φ_1 et φ_2 étant des polynomes de degré n_1 et n_2 au plus. Les termes du premier degré de φ_1 et φ_2 sont identiques, puisque les deux caractéristiques C_1 et C_2 ont même tangente au point O. Les deux polynomes φ_1 et φ_2 ne peuvent être identiques, car s'il en était ainsi et si l'on suppose $n_1 \leqq n_2$, le changement de variables $y = \varphi_1(x) + x^{n_1} v$ ferait correspondre à C_1 et à C_2 deux séparatrices Γ_1 et Γ_2, vérifiant l'équation transformée E_1 isolant C_1, et passant toutes les deux par le point $x = 0$, $v = 0$. L'équation E ne pourrait donc être de la forme (117). Elle ne pourrait être non plus de la forme (115) ou (116). En effet, si C_1 et C_2 qui admettent en O une même tangente différente de Oy, sont situées du même côté de l'axe Oy, celui par exemple des x positifs, Γ_1 et Γ_2, séparatrices correspondantes pour le point singulier $x = 0$, $v = 0$ de l'équation E_1, seront également situées du côté des x positifs. Or l'équation E, de la forme (115) ou (116), obtenue par le changement de variable indiqué, admet la caractéristique $x = 0$, et si une caractéristique située du côté des x positifs est une séparatrice, il n'y a pas d'autre caractéristique située du côté des x positifs. Γ_1 et Γ_2 ne peuvent être séparatrices.

Les deux polynomes φ_1 et φ_2 étant distincts, supposons que leurs termes de degré $r+1$ sont différents, tandis que leurs termes de degré inférieur à $r+1$ sont identiques. Soit $\varphi(x)$ le polynome formé par ces termes identiques. En posant

$$y = \varphi(x) + x^r y_r, \tag{121}$$

nous obtenons une équation transformée E en x et y_r. Aux séparatrices C_1 et C_2 correspondent des caractéristiques Γ_1 et Γ_2 passant par $x = 0$, $y_r = 0$, mais n'admettant pas en ce point même tangente. C_1 *et* C_2 *sont donc ainsi séparées*. Nous voyons que ces deux caractéristiques ont au point $x = 0$, $y = 0$ un contact d'ordre r.

Remarque. — Nous pouvons supposer que l'équation E, en y_r et x, a été obtenue par une suite de changements de variable de la forme

$$y_{i-1} = a_i x + x y_i, \qquad y_0 = y \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

De même, les équations transformées successives que nous formerons, en partant de E, pour isoler par exemple C_1, s'obtiendront par des changements de variable de la même forme, i prenant les valeurs $r+1$, $r+2$, ..., n_1.

Pour $i < r$, les équations transformées peuvent admettre $x=0$, $y_i=0$ comme point dicritique. Il ne peut en être de même pour $i \geqq r$.

En effet, il correspond aux séparatrices C_1 et C_2 des caractéristiques Γ'_1 et Γ'_2 du plan des variables x et y_i, Γ'_1 passera par $x=0$, $y_i=0$, et sera une séparatrice relative à ce point. A la région répulsive du plan xOy, limitée par C_1 et C_2, correspond dans le plan des xy_i une région limitée par Γ'_1 et Γ'_2, si l'on a $i=r$, et limitée par Γ'_1, Γ'_2, et un segment de $x=0$, si l'on a $i > r$. Dans les deux cas, il y a toujours dans cette région une infinité de vecteurs ayant pour origine le point $x=0$, $y_i=0$. Si ce point était un point dicritique, il y aurait une caractéristique Γ' tangente en ce point à chacun des vecteurs considérés et située dans la région en question. A chacune de ces caractéristiques Γ' correspondrait, pour l'équation en x et y, une caractéristique C' aboutissant au point O et située dans la région répulsive comprise entre C_1 et C_2. Ni l'équation E ni les équations transformées qui s'en déduisent ne peuvent admettre leur point origine pour point dicritique. Il en résulte que *toutes les transformées que l'on déduit de* E, *pour isoler* C_1 *ou* C_2, *admettent la caractéristique* $x=0$.

44. Séparatrices dans la recherche desquelles se présente le cas irréductible. — Pour considérer maintenant ces séparatrices, cherchons à déterminer tous les cas où il se présente de telles séparatrices. Soit C une caractéristique dans la recherche de laquelle se présente le *cas irréductible.*

En désignant par s un entier et par $\varphi(x)$ un polynome, nul pour $x=0$, de degré au plus égal à s, le changement de variable

$$y = \varphi(x) + x^s y_s \tag{122}$$

fait correspondre à l'équation donnée une équation E ; à C correspond une caractéristique Γ de E. Cette caractéristique Γ passe par $x=0$, $y_s=0$, si $\varphi(x)$ a été convenablement choisi. Nous devons supposer pour rencontrer un cas irréductible que, pour le point de Γ, le quotient $x : y_s^r$ tend vers zéro en même temps que x, quel que soit r. On peut avoir en particulier $s=0$. Dans ce cas, on a $y_0 = y$ et $\varphi(x)=0$.

Montrons d'abord que pour que le *cas irréductible* se présente, il faut d'abord que l'équation E admette la solution $x = 0$.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, cette équation pourrait s'écrire

$$[x\mathrm{A}(x, y_s) + y^p(a + y_s\mathrm{F})]\,dy_s + \mathrm{B}(x, y_s)\,dx = 0,$$

où a est une constante différente de zéro, p est un entier positif; F, A, B sont des séries entières en x et y_s; la série B est nulle pour $x = 0$, $y_s = 0$.

Posons $x = uy_s^{p+1}$. En divisant pour y_s^p l'équation obtenue, on a

$$[a + \mathrm{D}(u, y_s)]\,dy_s + y_s\mathrm{C}(u, y_s)\,du = 0,$$

C et D sont des séries entières en u et y_s. La série D est nulle pour $u = 0$, $y_s = 0$. Cette équation n'admet pas de solution telle que u tende vers zéro en même temps que y_s. Le *cas irréductible* ne se présente donc pas dans la recherche d'une caractéristique, si l'équation E n'admet pas la solution $x = 0$.

Supposons que l'équation E admette la solution $x = 0$ et supposons que le *cas irréductible* se présente dans la recherche d'une séparatrice relative au point $x = 0$, $y_s = 0$. En faisant le changement de variable

$$x = x_q y_s^q, \tag{123}$$

on obtient (n° 41) une équation de forme simple, si q est suffisamment grand. A la séparatrice Γ de l'équation E correspond une séparatrice relative au point singulier $x_q = 0$, $y_s = 0$ de l'équation de forme simple et cette séparatrice doit être tangente à la droite $x_q = 0$ en ce point, puisqu'on n'est pas dans le cas normal.

Or, si l'on considère les deux cas d'équations de forme simple, on sait que, ou bien il y a une seule caractéristique passant par $x_q = 0$, $y_s = 0$ et tangente à $x_q = 0$, ou bien il y en a une infinité. S'il y en a une seule, cette caractéristique est $x_q = 0$ correspondant à la solution $x = 0$ de l'équation E. S'il y en a une infinité, on sait également que, de chaque côté d'une caractéristique Γ'_1 autre que $x_q = 0$, il y a une infinité de caractéristiques aussi voisines que l'on veut de Γ' et aboutissant à $x_q = 0$, $y_s = 0$. Aucune de ces caractéristiques Γ' ne peut correspondre à la séparatrice Γ. Nous concluons que, à la séparatrice Γ de l'équation E en x et y_0 ne peut correspondre aucune caractéristique autre que $x_q = 0$. Cette caractéristique, $x_q = 0$, ne peut être acceptée comme correspondant à une caractéristique C de l'équation en x et y que si l'on a $s = 0$ et si l'équation en x et y admet la solution $x = 0$. En effet, la relation (123) montre que l'on a $x = 0$, si l'on a $x_q = 0$, et si l'on a $s > 0$, la relation (122) montre que si l'on a $x = 0$, on a en même temps $y = 0$. Ceci n'est pas acceptable pour une caractéristique C. Nous arrivons à la conclusion suivante : *Le cas irréductible ne peut se présenter dans la recherche d'une séparatrice de l'équation* (105) *que si cette séparatrice est* $x = 0$.

Si le *cas irréductible* se présente dans la recherche de deux séparatrices limitant une région répulsive, relative à $x = 0$, $y = 0$, l'une d'elles est $x = 0$, l'autre est tangente à une droite autre que Oy. Ces caractéristiques *sont donc séparées.*

Nous voyons de plus qu'un simple changement de la direction de l'axe Oy permet de supposer que le cas irréductible ne se présente jamais dans la recherche des séparatrices.

45. Équation transformée relative a des intégrales tangentes a $x = 0$. Nous pourrons toujours supposer, en faisant un changement d'axes, que $x = 0$ n'est pas une direction de tangente possible au point $x = 0$, $y = 0$, pour les caractéristiques de l'équation (105) en x et y. Nous ne pouvons faire cette hypothèse pour les transformées de (105), qui admettent en général la solution $x = 0$. Nous aurons à considérer, pour l'étude de la loi de correspondance, les équations transformées relatives aux intégrales réelles ou imaginaires tangentes à $x = 0$, et vérifiant l'une des équations transformées de (105). Considérons une équation

$$(124)\qquad xX(x, y)\,dy + Y(x, y)\,dx = 0,$$

admettant la solution $x = 0$. Pour considérer les intégrales réelles ou imaginaires tangentes à $x = 0$ au point $x = 0$, $y = 0$, nous posons $x = x_1 y$, nous obtenons une transformée admettant les solutions $x_1 = 0$, $y = 0$ et que l'on peut écrire

$$(125)\qquad x_1[A(x_1\, y) + \ldots]\,dy + y[B(x_1, y) + \ldots]\,dx = 0,$$

en désignant par $A(x_1, y)$ et $B(x_1, y)$ deux polynomes homogènes de degré n représentant les termes de degré minimum des coefficients de $x_1\,dy$ et de $y\,dx_1$. Si nous ne faisons aucune hypothèse complémentaire, n peut être un entier quelconque, mais si nous supposons que l'on ait remplacé, dans (124), x par x^p, p étant un entier tel que le *cas réductible* ne se présente pas dans la recherche des intégrales réelles ou *imaginaires* de (124) tangentes à $x=0$, nous allons montrer que l'on a $n=0$, c'est-à-dire que l'équation (125) est une équation de forme simple. Je m'appuierai pour cette démonstration sur les théorèmes suivants (¹), dans les énoncés desquels nous considérerons aussi bien les intégrales imaginaires que les intégrales réelles. Pour les intégrales que nous allons considérer, x_1 aussi bien que y pouvant tendre vers zéro par valeurs imaginaires; le quotient $y : x_1$ pourra tendre vers une valeur réelle ou imaginaire, lorsque x et y tendent vers zéro.

I. *Si* $x=0$, $y=0$ *est un point singulier d'ordre* p, c'est-à-dire si dans l'équation

$$X(x, y)\,dy + Y(x, y)\,dx = 0,$$

les termes de degré minimum des séries X et Y sont de degré p en x et y, *il existe au moins* $p+1$ *intégrales* distinctes passant par $x=0$, $y=0$.

II. *Si* $x=0$, $y=0$ *est un point singulier exceptionnel, c'est-à-dire* si l'équation différentielle en x et y est de la forme (116), *il y a une infinité d'intégrales pour lesquelles* x *et* y *tendent simultanément vers zéro.*

Démontrons que dans l'hypothèse où nous nous plaçons, on a $n=0$. Puisque le cas réductible ne se présente pas, dans la recherche des intégrales de (124) pour lesquelles x_1 et y tendent simultanément vers zéro, on sera dans le *cas irréductible:* si nous faisons les changements de variables successifs

$$x_i = x_{i+1}\,y \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

nous obtiendrons des équations transformées telles que pour aucune intégrale de l'équation en x_i et y, le quotient $y : x_i$ ne

(¹) J'ai démontré le premier de ces théorèmes dans les *Annales de l'Université de Grenoble* (t. XVII, p. 8 et 13). La démonstration du second est donné dans ma thèse (Paris, 1903). *Voir* également le *Journal de l'École Polytechnique* (1904).

tende vers une limite finie ou nulle, lorsque x_i et y tendent vers zéro.

Si nous faisons les changements de variable en question il est impossible que le degré minimum en x_i et y des termes des coefficients de dy et de dx_i des équations en x_i et y reste toujours égal à $n+1$, comme dans l'équation (125), à moins que l'on ait $n=0$. On sait en effet (n° 45, note) que ces changements de variable finissent toujours par conduire à une équation ayant $y=0$, $x_i=0$ pour point singulier du premier ordre. Nous allons montrer, d'autre part, que si le point $x_i=0$, $y=0$ est, pour l'équation en x_i et y, un point singulier d'ordre inférieur à $n+1$, le cas réductible se présente. Il en résultera que l'on a $n=0$ dans l'hypothèse où nous nous plaçons.

Nous pourrons faire notre démonstration en supposant que c'est pour l'équation en x_2 et y que l'ordre du point singulier $x_2=0$, $y=0$ est inférieur à $n+1$. Montrons d'abord que l'on a

$$\text{(126)} \qquad A(x_1, y) + B(x_1, y) \equiv c x_1^n,$$

c étant une constante. En effet, s'il n'en était pas ainsi, le changement de variable $y = t x_1$ fournirait l'équation

$$\text{(127)} \qquad x_1[A(1, t) + \ldots]\, dt + t[A(1, t) + B(1, t) + \ldots]\, dx_1 = 0.$$

L'équation

$$\text{(128)} \qquad A(1, t) + B(1, t) = 0$$

aurait au moins une racine $t=\alpha$. Si nous faisons voir qu'il y aurait au moins une intégrale telle que t tende vers α, lorsque x_1 tend vers zéro, nous aurons montré que, contrairement à notre hypothèse, le cas réductible se présenterait et que, par conséquent, on a bien l'identité (126).

Si l'on a $\alpha \neq 0$ et $A(1, \alpha) \neq 0$, il est évident qn'il y a une intégrale $t(x_1)$ de (127) holomorphe pour $x_1=0$ et égale à α pour $x_1=0$.

Si l'on a $\alpha \neq 0$, $A(1, \alpha) \neq 0$ et si $t=\alpha$ est racine d'ordre q de (128), en posant $z = t - \alpha$ l'équation (127) prend la forme

$$x_1[z h(z) + x_1 H(x_1, z)]\, dz + [z^q g(z) + x_1 G(x_1, z)]\, dx_1 = 0,$$

h et g désignent des polynomes en z. On a $g(0) \neq 0$. H et G désignent des séries entières en x_1 et z. On peut toujours supposer que $x_1 G(x_1, z)$ ne contient que des termes du second degré au moins. S'il n'en était pas ainsi, on serait ramené à ce cas en posant $x_1 = u^2$. Nous n'avons à considérer que les deux cas suivants, pour l'équation différentielle en x_1 et z : 1° *On a* $q = 1$. Le point $x_1 = 0$, $z = 0$ est un point singulier exceptionnel; 2° *On a* $q > 1$. Le point $x_1 = 0$, $z = 0$ est un point singulier d'ordre supérieur à 1. Dans les deux cas, il y a des intégrales $z(x_1)$ tendant vers zéro avec x_1.

Si l'on a $\alpha = 0$, $A(1, 0) \neq 0$ le point $t = 0$, $x_1 = 0$ est un point singulier exceptionnel de (127). Si l'on a $\alpha = 0$, $P(1, 0) = 0$ le point singulier $t = 0$, $x_1 = 0$ est d'ordre supérieur à 1. Il y a encore dans ces deux derniers cas des intégrales $t(x_1)$, autres que $t = 0$, pour lesquelles t tend vers zéro avec x_1.

L'identité (126) est donc démontrée. Il en résulte que si l'on pose $x_1 = x_2 y$, l'équation (125) devient

$$(129)\quad x_2[cx_2^n + y\mathrm{H}(x_2, y)]\,dy + y[x_2^r g(x_2) + y\mathrm{G}(x_2, y)]\,dx_2 = 0,$$

r est un entier égal ou inférieur à n; $g(x_2)$ est un polynome en x_2, qui n'est pas nul pour $x_2 = 0$. H et G sont des séries entières, qui peuvent être nulles pour $x_2 = 0$, $y = 0$.

Puisque nous supposons que $x_2 = 0$, $y = 0$ est un point singulier d'ordre inférieur à $n + 1$, le degré minimum des termes entre crochets sera inférieur à n. Il faut pour cela, ou bien que l'on ait $r < n$, ou bien que l'une des expressions $y\mathrm{H}(x_2, y)$ et $y\mathrm{G}(x_2, y)$ ait des termes de degré inférieur à n. Examinons successivement chacun de ces cas.

Si l'on a $r < n$, faisons le changement de variable $y = v x_2^r$, l'équation (129) devient

$$(130)\quad x_2[cx_2^{n-r} + v\mathrm{H}_1(x_2, v)]\,dv + v[g(x_2) + rcx_2^{n-r} + v\mathrm{G}_1(x_2, v)]\,dx_1 = 0;$$

H_1 et G_1 sont des séries entières. Puisque $g(0)$ n'est pas nul, $x_2 = 0$, $v = 0$ est un point singulier exceptionnel de (130).

Si l'on a $n = r$, mais si le degré minimum des termes de $y\mathrm{H}$ ou de $y\mathrm{G}$ est inférieur à n, nous pourrons, en désignant ces termes respectivement par $y\mathrm{P}(x_2, y)$ et $y\mathrm{Q}(x_2, y)$, écrire l'équation (130) sous la forme

$$x_2[y\mathrm{P}(x_2, y) + \ldots]\,dy + y[y\mathrm{Q}(x_2, y) + \ldots]\,dx_2 = 0.$$

Posons $y = vx_2$, nous obtenons l'équation

$$(131) \quad x_2[vP(1, v) + \ldots] dv + v[vP(1, v) + vQ(1, v) + \ldots] dx_2 = 0,$$

dans laquelle les termes non écrits contiennent x_2 en facteur.

Les termes de chacun des crochets étant au moins du premier degré par rapport à v et x_2, nous avons un point singulier $v = 0$, $x_2 = 0$, d'ordre supérieur à 1. Aussi bien pour l'équation (130) que pour l'équation (131) nous aurions au moins une intégrale autre que $v = 0$ pour laquelle v tendrait vers zéro avec x et le cas réductible x se présenterait. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si le cas réductible ne se présente pas dans la recherche des intégrales réelles ou imaginaires de (124) *passant par* $x = 0$, $y = 0$ *et tangentes à* $x = 0$, *l'équation transformée, par la substitution* $x = x_1 y$, *admet* $x_1 = 0$, $y = 0$ *comme point singulier élémentaire.* Le cas où $x = 0$, $y = 0$ est un point dicritique de (124) est laissé de côté.

46. Loi de correspondance pour une région répulsive limitée uniquement par la caractéristique $x = 0$. — Plaçons-nous dans les conditions suivantes : 1° L'équation différentielle admet la caractéristique $x = 0$, passant par le point singulier complexe, $x = 0$, $y = 0$; 2° d'un côté de cette caractéristique, du côté des x positifs par exemple, il n'existe aucune caractéristique aboutissant à $x = 0$, $y = 0$, sans traverser Oy.

Nous pouvons écrire l'équation différentielle sous la forme

$$(132) \qquad x[P(x, y) + \ldots] dy + [Q(x, y) + \ldots] dx = 0,$$

xP et Q étant des polynomes homogènes de degré n, représentant les termes de moindre degré des coefficients de dy et dx.

Soient l et l' deux nombres positifs tels que l'équation différentielle n'admette, en dehors de $x = 0$, $y = 0$, aucun point singulier situé sur $x = 0$, entre les droites $y = l$ et $y = -l'$. Nous considérons une caractéristique C voisine de $x = 0$ et nous voulons trouver la forme de la relation qui existe entre les x des points d'intersection M et M' de C avec $y = l$ et $y = -l'$.

Lemme. — Les relations, qui nous donneront la loi de correspondance cherchée, montrent que *toute caractéristique* C *coupant* $y = l$ *en un point* M, *suffisamment voisin de* Oy, *coupera* $y = l'$ *en un point* M' *aussi voisin que l'on voudra de* Oy. Démontrons directement cette propriété afin de ne pas être obligés d'introduire dans nos raisonnements des complications destinées à éviter un cercle vicieux. La propriété en question nous sera du reste utile à plusieurs reprises.

On peut toujours trouver un nombre α, tel que, si l'on prend $y = l$, et si l'on fait varier x de o à α, le coefficient $Q(x, y) + \ldots$ de dy dans (132) ne devienne pas nul. Soient M_0 et M'_0 les points d'intersection de $x = 0$ avec $y = l$ et $y = -l'$. Soient A et A' les points d'intersection de $y = l$ et $y = -l'$ avec $x = \alpha$ et R le rectangle $M_0AA'M_0$. Nous pouvons toujours supposer α assez petit pour qu'il n'y ait pas de point singulier de l'équation (132) à l'*intérieur* du rectangle R.

La caractéristique C passant par un point M de M_0A n'est pas tangente à M_0A. Nous la suivrons en pénétrant dans R. Ce rectangle R ne contenant aucun point singulier à son intérieur et C ne pouvant, par hypothèse, aboutir au point O, on sait que C sortira du rectangle en un point M'. Lorsque M se rapproche indéfiniment de M_0, le point M' se déplace toujours dans le même sens, sur le contour de R, et tend par conséquent vers une position limite K'. Montrons que K' est confondu avec M'_0.

En effet, si K' n'est pas confondu avec M'_0, il passe par K' une caractéristique C' qui n'est pas confondue avec Oy. On peut suivre, à partir de K', la caractéristique C' dans un sens tel que l'on pénètre dans R, car s'il n'en était pas ainsi, les caractéristiques C passant par un point M' voisin de K' sur le contour de R ne pénétreraient pas non plus dans R. La caractéristique C', suivie dans le sens indiqué, sortira de R en un point K distinct de M_0. L'arc K'K de C' ne passant par aucun point singulier, une caractéristique C passant par un point M' voisin de K', et suivie dans le même sens que C', sortira de R en un point M voisin de K. Ceci est impossible, puisque M est voisin de M_0 et que K est distinct de M_0.

K' est donc confondu avec M'_0. *La caractéristique* C *coupant* $y = l$ *en un point* M *voisin de* M'_0 *vient couper* $y = -l'$ *en un point* M' *voisin de* M'_0. Le lemme est démontré. Avant de chercher la loi de correspondance entre M et M' faisons une remarque.

Il n'est pas contraire à nos hypothèses de supposer que l'équation (132) admet des solutions réelles ou imaginaires telles que le quotient $x : y$ tende vers zéro en même temps que x et y. Il faut supposer seulement qu'une telle solution ou bien est imaginaire, ou bien n'est réelle que si x tend vers zéro par valeurs négatives. Nous supposerons, pour le moment, que le cas réductible ne se présente pas dans la recherche des intégrales de (132) passant par $x = 0$, $y = 0$ et tangentes à $x = 0$. S'il y a des intégrales telles que $x : y$ tende vers zéro en même temps que x et y, elles sont telles que, quel que soit s, le quotient $x : y^s$ tende vers zéro. Ceci posé, soit η un nombre positif quelconque. Considérons les droites OD et OD', ayant respectivement pour équations $\eta y = x$ et $\eta y + x = 0$. Si M est suffisamment voisin de M_0, M sera au-dessus de OD et M' sera au-dessous de OD'. La caractéristique C coupant $y = l$ et $y = - l'$ en des points d'abscisses x et x' coupera OD et OD' en des points N et N' d'abscisses x_1 et x'_1. En choisissant convenablement η, nous allons montrer qu'on peut trouver : 1° la loi de correspondance entre x et x_1 et de même entre x' et x'_1 ; 2° la loi de correspondance entre x_1 et x'_1.

1° *Loi de correspondance entre x et x_1.* — Si nous posons $x = ty$, l'équation (132) devient

$$t[p(t, 1) + q(t, 1) + \ldots] \, dy + y [q(t, 1) + \ldots] \, dt = 0. \tag{133}$$

Les termes non écrits sont nuls pour $y = 0$. Puisque nous avons supposé que le cas réductible ne se présente pas pour les solutions de (132) passant par $x = 0$, $y = 0$ et tangentes à $x = 0$, nous avons vu (n° 45) que $t = 0$, $y = 0$ est un point singulier élémentaire de (133). On ne peut donc avoir à la fois $P(0, 1) = 0$ et $Q(0, 1) = 0$. L'expression $P(t, 1) + Q(t, 1)$ n'est pas identiquement nulle, car si elle était identiquement nulle, $x = 0$, $y = 0$ serait un point dicritique et la condition 2°, énoncée au début de ce n° 46, ne serait pas satisfaite.

D'après la manière dont les nombres l et l' ont été choisis, l'équation (133) n'admet, en dehors de $t = 0, y = 0$, aucun point singulier situé sur $t = 0$, entre les droites $y = l$ et $y = - l'$. Nous pourrons choisir un nombre η, tel que, lorsque t varie de $- \eta$

à η (extrémités comprises), $P(t, 1) + Q(t, 1)$ ne s'annule pas, sauf peut-être pour $t = 0$ (¹).

La position des points d'intersection M, N, N', M' de C avec les droites $y = l$, $\eta y = x$, $\eta y + x = 0$, $y = -l'$ sera complètement définie par les valeurs x, x_1, x'_1, x' des abscisses de ces points. La relation $x = ty$ fait correspondre à C une caractéristique C_2 de l'équation (133), et fait correspondre aux points M, N, N', M' les points M_2, N_2, N'_2, M'_2 intersections de C_1 avec les droites $y = l$, $\eta t = 1$, $\eta t = -1$, $y = -l'$. Les positions de ces points seront définies par les valeurs de x, x_1, x'_1, x'. Aux points M_0 et M'_0 correspondent dans le plan de y, t les points A_0, $y = l$, $t = 0$; A'_0, $y = -l'$, $t = 0$. Soient enfin dans le plan des y, t les points : O', $t = 0$, $y = 0$; D_0, $t = \eta$, $y = 0$; D'_0, $t = -\eta$, $y = 0$.

La portion de C_2 située dans la région où l'on a $t > 0$, $y > 0$ est voisine de la caractéristique C_0 formée du segment A_0O' de l'axe $t = 0$ et du segment $O'D_0$ de l'axe $y = 0$. Les droites $y = l$, $t = \eta$, qui coupent C_0 en A_0 et D_0 sont normales à C_0. L'arc $A_0O'D_0$ de C_0 ne contient que le point singulier O', qui est un point élémentaire. Nous connaissons donc la forme de la relation entre x et x_1. De même en considérant la portion de C_2 située dans le quadrant pour lequel on a $t < 0$, $y < 0$ nous aurons la forme de la relation entre x'_1 et x'. La forme de ces relations dépendra de la nature du point singulier O' : col ou point exceptionnel.

2° *Loi de correspondance entre x_1 et x'_1.* — Posons $y = zx$. L'équation (132) devient

$$(134)\qquad x[P(1, z) + \ldots]\,dz + [zP(1, z) + Q(1, z) + \ldots]\,dx = 0,$$

où les termes non écrits contiennent x en facteur. Aux droites $x = \pm \eta y$ du plan des xy correspondent les droites $\eta z = \pm 1$ du

(¹) Si l'on a $P(0,1) + Q(0,1) = 0$, le point $t = 0$, $y = 0$ est pour (133) un point exceptionnel et l'on peut montrer que cette équation (133) admet des solutions $y(t)$ telles que lorsque t tend vers zéro suivant un chemin convenablement choisi dans le plan de la variable complexe t, la fonction y et le quotient $y : t$ tendent vers zéro. On peut donc supposer (n° 43) que l'on n'a pas $P(0,1) + Q(0,1)$, puisque le cas réductible ne se présente pas dans la recherche des intégrales de (132) passant par $x = 0$, $y = 0$ et tangentes à Ox.

plan des xz ; à C correspond une caractéristique C_1 coupant les droites $\eta z = 1$ et $\eta z = -1$ aux points N_1 et N'_1 d'abscisses x_1 et x'_1.

Supposons d'abord que l'équation (134) n'admette aucun point singulier situé sur $x = 0$ entre les deux droites $\eta z = \pm 1$. L'expression $zP(1, z) + Q(1, z)$ ne s'annule pas lorsque ηz varie de -1 à $+1$.

Désignons par Δ_0 et Δ'_0 les points d'intersection de $x = 0$ avec les droites $\eta z = \pm 1$. Le segment $\Delta_0 \Delta'_0$ de $x = 0$ est un arc de caractéristique qui ne contient aucun point singulier. La caractéristique C_1 étant voisine de cet arc $\Delta_0 \Delta'_0$, il y a une relation holomorphe entre x_1 et x'_1 abscisses des points d'intersection de C_1 avec $\eta z = \pm 1$. On a

$$x'_1 = x_1 h(x_1),$$

$h(x_1)$ étant holomorphe pour $x = 0$ et l'on a $h(0) \pm 0$.

3° *Loi de correspondance entre x_1, et x'_1, lorsque* (134) *admet des points singuliers situés sur $x = 0$.* Considérons maintenant le cas laissé de côté dans 2°. Nous supposons que l'équation (134) admette un ou plusieurs points singuliers situés sur $x = 0$, entre les droites $\eta z = \pm 1$. Il n'y a aucun point singulier de (134) situé sur $x = 0$ en dehors de ce segment $\Delta_0 \Delta'_0$ compris entre les droites $\eta z = \pm 1$. Divisons le segment $\Delta_0 \Delta'_0$ en autant de segments qu'il contient de points singuliers, chaque segment ne contenant qu'un seul de ces points. Soient $z = \alpha_i + l_i$ et $z = \alpha_i - l'_i$ les droites perpendiculaires à $x = 0$, limitant le segment contenant le point singulier $x = 0$, $z = \alpha_i$. La relation qui existe entre x_1 et x'_1 résultera des relations entre les x des points d'intersection de C_1 avec les diverses droites $z = \alpha_i + l_i$, $z = \alpha_i - l'_i$, en donnant à i les valeurs $1, 2, \ldots, p$ correspondant aux p points singuliers de (134) situés sur $x = 0$. Nous aurons la forme de ces relations en remarquant que $x = 0$, $z = \alpha_i$ est un point singulier de même espèce que le point $x = 0$, $y = 0$ de l'équation (132).

Si l'on pose $z = \alpha_i + y_1$, l'équation en x et y_1 n'admet aucune caractéristique située du côté des x positifs et aboutissant à $x = 0$, $y_1 = 0$, car une telle caractéristique fournirait une caractéristique de (132) aboutissant à $x = 0$, $y_1 = 0$. L'équation en x et y_1 admet de plus, comme (132), la solution $x = 0$. Pour établir la relation qui existe, dans le plan des x, y_1 entre les x des points d'intersection d'une caractéristique avec les droites $y_1 = l_i$ et $y_1 = -l'_i$, nous raisonnerons donc comme nous avons raisonné sur l'équation en x et y, pour obtenir la relation entre les x des points d'intersection de C avec $y = l$ et $y = -l'$.

Si en posant $y_1 = z_1 x$, l'équation différentielle en x et z_1 n'admet aucun point singulier *à distance finie* situé sur la droite $x = 0$, nous aurons, d'après ce qui a été dit dans 2°, la forme de la relation entre le x des points considérés. Si nous sommes dans le cas où l'équation en x et z admet des points singuliers à distance finie situés sur $x = 0$, nous raisonnerons sur cette équation comme nous avons raisonné dans 3°.

En continuant ainsi, nous arriverons certainement à une équation en x et z_q, n'admettant plus de point singulier à distance finie sur $x = 0$. En effet les équations successives que nous formons de cette manière sont les transformées fournissant les solutions $y(x)$ (imaginaires si x est positif) telles que $y : x$ tende vers une limite finie, ainsi que $y_1 : x$; $y_2 : x$, ..., lorsque x tend vers zéro [1]. On sait que la suite de transformations ainsi effectuées conduit à un point singulier élémentaire, à moins qu'on ne soit arrêté à une équation en x et z_q n'admettant pas de point singulier sur $x = 0$. C'est le cas qui se produira toujours, car si l'on arrivait à une équation en x et y_n, admettant $x = 0, y_n$, comme point singulier élémentaire, cette équation admettrait au moins une caractéristique, située du côté des x positifs, aboutissant à $x = 0, y_n = 0$. A cette caractéristique correspondrait une caractéristique C située du côté des x positifs et aboutissant à $x = 0$, $y = 0$, ce qui est contraire à nos hypothèses. Nous serons donc nécessairement ramenés à des équations pour lesquelles le raisonnement fait dans le cas 2° s'applique.

Nous arriverons donc certainement par la méthode indiquée à trouver la relation entre x_1 et x'_1. Au lieu d'avoir, comme dans 2°, une relation holomorphe entre x_1 et x'_1, nous serons amenés à con-

(1) Les limites finies que nous considérons pour $y : x$, $y_1 : x$, $y_2 : x$, ... sont réelles, puisque nous ne considérons que les points singuliers réels situés sur $x = 0$, mais les solutions $y(x)$ correspondant à ces limites sont nécessairement imaginaires pour x positif, puisqu'il n'y a pas de caractéristique située du côté des x positifs et aboutissant à $x = 0$, $y = 0$.

sidérer une série de paramètres intermédiaires x_i ($i=2, 3, \ldots, q$), qui sont les abscisses des points d'intersection de C avec des courbes passant par $x=0, y=0$, comprises dans l'angle formé par les droites $\eta y = \pm x$. En posant $x_{q+1} = x'_1$, nous aurons une série de relations entre deux valeurs consécutives x_i et x_{i+1}, l'entier i prenant les valeurs $1, 2, \ldots, q$. Ces relations seront, ou bien des relations holomorphes, ou bien des relations correspondant au passage d'une caractéristique dans le voisinage d'un point singulier élémentaire.

Conclusion. — Nous voyons que, soit dans le cas où le raisonnement fait dans 2° s'applique directement à l'équation (134), soit dans le cas où nous sommes obligés de considérer les relations auxquelles conduisent les raisonnements de 3°, *le passage d'une caractéristique* C *dans le voisinage du point singulier considéré est équivalent, en ce qui concerne la loi de correspondance, au passage d'une caractéristique successivement dans le voisinage d'un certain nombre de points singuliers élémentaires.*

Si, par exemple, nous supposons pour l'équation (133) que le point $t=0, y=0$ soit un col et que, pour l'équation (134), il n'y ait pas de point singulier sur $x=0$, nous avons les relations

$$x = a x_1^{\lambda}[1+F(x_1)], \qquad x'_1 = b x'^{\lambda'}[1+G(x')], \qquad x_1 = c x'_1[1+H(x'_1)],$$

a, b, c, λ, λ' sont des constantes. On a $\lambda\lambda' = 1$. F et G sont *semi-régulières et nulles* pour la valeur zéro de la variable, H est holomorphe et nulle pour $x'_1 = 0$. En éliminant successivement x'_1 et x_1, entre ces relations, nous obtenons

$$x = k x'[1+K(x')],$$

k est une constante, $K(x')$ est une *fonction semi-régulière* et nulle pour $x'=0$. Dans des cas particuliers, K pourra être une série entière en x', mais, en général, K sera une fonction semi-régulière dépendant de puissances de x', x'^{λ}, $x'^{\lambda'}$, et même de $x' \mathrm{L} x'$, si λ est rationnel. Si tous les points singuliers élémentaires que nous rencontrons en appliquant à l'équation (134) la méthode indiquée dans 3° sont des cols, et s'il en est de même pour le point singulier $t=0, y=0$ de (133), la relation entre x et x' sera encore de la forme $x = kx'[1 + K(x')]$, la fonction $K(x')$ étant semi-régulière et nulle pour $x' = 0$. Cette conclusion ne me paraît pouvoir s'étendre qu'avec des restrictions au cas où certains des points élémentaires considérés sont des points exceptionnels. Nous pouvons cependant remarquer que, si nous traversons l'un de ces points exceptionnels dans le sens uv, nous traverserons un autre point exceptionnel dans le sens vu (n° 34).

Remarque. — La méthode que nous venons de suivre pour trouver la loi de correspondance, dans le cas du point singulier considéré, s'appliquerait en particulier au cas d'un point semi-singulier (n° 5). Si les deux arcs de caractéristiques aboutissant au point semi-singulier $x = 0$, $y = 0$ sont les deux branches d'une courbe admettant $x = 0$, $y = 0$ comme point régulier, nous prendrons, au moyen d'un changement de variable, cette courbe pour axe $x = 0$ et nous serons exactement ramenés au cas que nous venons de considérer.

Si les deux arcs de caractéristiques aboutissant à $x = 0$, $y = 0$ ne forment pas une courbe admettant $x = 0$, $y = 0$ comme point régulier, nous appliquerons la méthode qui sera indiquée plus loin pour le cas d'un point singulier quelconque.

47. Modifications a introduire dans les raisonnements lorsque le cas réductible se présente. — Nous avons à diverses reprises supposé dans le n° 46 que le cas réductible ne se présentait pas dans la recherche des intégrales de (132) passant par $x = 0$, $y = 0$. Nous avons fait ensuite implicitement la même hypothèse dans 3°, pour les intégrales passant par les points origine des diverses équations transformées que nous avons été amenés à considérer.

Pour lever la restriction ainsi faite nous pouvons choisir r de manière qu'en faisant le changement de variable $x = u^r$, on déduise de (132) une équation différentielle en u et y telle que le cas réductible ne se présente pour aucune des intégrales passant par $u = 0$, $y = 0$. Il me paraît préférable de faire le changement de variable $x = u^r$, en choisissant r de manière que, dans l'équation u et y, le cas réductible ne se présente pour aucune des intégrales telles que pour l'intégrale correspondante de l'équation en x et y, $x : y$ tende vers zéro en même temps que x et y. En considérant l'équation différentielle en u et y, le cas réductible ne se présentera pour aucune des intégrales telles que $y : u^r$ croisse indéfiniment, lorsque y et u tendent vers zéro. Le changement de variable $x = u^r$ fait correspondre à la caractéristique C, du plan des x, y, une caractéristique Γ, du plan des u, y. L'équation (132) devient

$$(135) \qquad u[A(u, y) + \ldots]\, dy + [B(u, y) + \ldots]\, du = 0,$$

en désignant par uA et par B des polynomes homogènes de même degré, représentant les termes d'ordre minimum des coefficients de dy et de du. Si nous obtenons la relation entre les valeurs de u, correspondant aux points d'intersection de la caractéristique Γ avec $y = l$ et avec une courbe $y = l' u^r$, l' étant une constante, il en résultera la relation entre les valeurs de x correspondant aux points d'intersection de C avec les droites $y = l$ et $y = l' x$. Nous nous serons ainsi affranchis de l'hypothèse restrictive que nous avions faite au n° **46**, dans 1°, pour établir la relation entre les valeurs x et x_1.

Si nous posons $u = ty$, l'équation (135) devient

$$(136) \qquad t[A(t, 1) + B(t, 1) + \ldots]\, dy + [B(t, 1) + \ldots]\, du = 0,$$

les termes non écrits étant nuls pour $u = 0$. Par hypothèse, le cas réductible ne se présente pas pour les intégrales de (135) passant par $u = 0, y = 0$, et tangentes à $u = 0$. Nous savons donc (n° **45**) que $t = 0, y = 0$ est un point singulier élémentaire de (136). Nous raisonnerons sur (136) comme nous l'avons fait pour (133). Nous pourrons trouver un nombre η_1 tel que $A(t, 1) + B(t, 1)$ ne soit pas nul, lorsque t varie de $-\eta_1$ à $+\eta_1$, sauf peut-être pour $t = 0$. Considérons dans le plan des t, y, la caractéristique Γ' correspondant à C. Cette caractéristique Γ' coupera $y = l$ en un point de paramètre u et $t = \eta_1$ en un point de paramètre u_1, nous connaîtrons la forme de la relation entre u et u_1 d'après la nature du point singulier élémentaire $t = 0$, $y = 0$. Nous aurons donc la forme de la relation entre les abscisses n des points d'intersection de Γ avec les droites $y = l$ et $\eta_1 y = u$.

Posons maintenant $y = y_1 u$, nous obtenons l'équation

$$(137) \qquad u[A(1, y_1) + \ldots]\, dy_1 + y_1 A(1, y_1) + B(1, y_1) + \ldots]\, du = 0.$$

Si cette équation admet des points singuliers situés sur $u=0$ et d'ordonnée y_1 positive, désignons par l_1 un nombre positif inférieur aux ordonnées de tous ces points. Soit Γ_1 la caractéristique de (137) correspondant à Γ. En raisonnant sur l'équation (137), comme nous avons raisonné sur l'équation (134) (n° 46, 3°), nous aurons une série de relations établissant une correspondance entre les valeurs de u correspondant aux points d'intersection de Γ_1 avec les droites $\eta_1 y_1 = 1$ et $y_1 = l_1$. Nous aurons, par suite, une série de relations établissant une correspondance entre les valeurs de u correspondant aux points d'intersection de Γ avec $y=l$ et $y=l_1 u$. Si l'équation (137) n'admet pas de point singulier d'ordonnée positive situé sur $u=0$, nous posons $\eta l_1 = 1$ et nous avons la relation entre les valeurs u et u_1 correspondant aux points d'intersection de Γ avec $y=l$ et $y=l_1 u$.

Considérons maintenant l'équation (137) et raisonnons sur elle comme nous avons raisonné sur (135), nous établirons la relation entre les valeurs de u correspondant aux points d'intersection de Γ_1 avec $y_1 = l_1$ et avec $y_1 = l_2 u$, le nombre l_2 étant choisi de manière à jouer le rôle que jouait l_1 pour (137). Nous avons ainsi les relations entre les points d'intersection successifs de Γ avec les courbes $y=l$, $y=l_1 u$, $y=l_2 u^2$, ... En continuant de même, nous arriverons à une série de relations entre les points d'intersection successifs de Γ avec $y=l, y=l_1 u, y=l_2 u^2, \ldots, y=l_{r-1} u^{r-1}, y=l_r u^r$.

Si dans ces relations, nous remplaçons u par $x^{\frac{1}{r}}$, nous aurons, par leur intermédiaire, la correspondance entre les valeurs de x, abscisses des points d'intersection de la caractéristique C de l'équation (132) avec les droites $y=l$ et $y=l'x$, en posant $l_r = l'$.

Passons en revue les diverses formes de relations que, en appliquant les méthodes du n° 46, nous pouvons obtenir entre les valeurs u et u' correspondant aux points d'intersection de Γ avec deux courbes consécutives $y=l_i u$, $y=l_{i+1} u$. Voyons ce que deviennent ces relations, lorsqu'on remplace u par $x^{\frac{1}{r}}$ et u' par $x'^{\frac{1}{r}}$.

Si nous avons une relation

$$u' = a u^{\lambda}[1+F(u)],$$

où a et λ sont des constantes positives et $F(u)$ une fonction *semi-*

régulière et nulle pour $u = 0$, nous aurons

$$u'^r = a^r u^{\lambda r}[1 + F(u)]^r, \qquad x' = \alpha x^\lambda [1 + \varphi(x)],$$

α étant une constante et $\varphi(x)$ une fonction *semi-régulière* et nulle pour $x = 0$.

Si nous avons une relation

$$u' = a u^b e^{\frac{p(u)}{u^n}}[1 + F(u)],$$

où a est une constante positive, b une constante, n un entier, $p(u)$ un polynome de degré inférieur à n, nous aurons

$$x' = \alpha x^b e^{\frac{r p\left(x^{\frac{1}{r}}\right)}{x^{\frac{n}{r}}}} [1 + \varphi(x)],$$

$\varphi(x)$ étant comme $F(u)$ semi-régulière et nulle pour la valeur zéro de la variable.

Ces relations peuvent être employées dans nos démonstrations de la même façon que les relations utilisées précédemment pour les lois de correspondance. En particulier, subsiste la propriété établie au n° 34 pour une caractéristique passant successivement dans le voisinage de deux points exceptionnels traversés l'un dans le sens uv, l'autre dans le sens vu.

48. Loi de correspondance dans un cas particulier. — Nous allons étudier la loi de correspondance pour une région répulsive relative à un point singulier complexe dans les hypothèses suivantes :

1° L'équation admet $x = 0$, $y = 0$ comme point singulier. A ce point aboutissent, entre autres caractéristiques, $x = 0$ et un arc de caractéristique Γ aboutissant au point O tangentiellement à la partie positive de Ox.

2° Γ et la partie positive de l'axe Oy limitent un secteur répulsif R relatif au point O. Il n'y a dans la région située à droite de Oy et au-dessus de Γ aucune caractéristique aboutissant au point O.

3° Si l'on pose $y = y_n x^n$, en désignant par n un entier positif, y_n tend vers zéro en même temps que x, si l'on se déplace sur Γ, en se rapprochant indéfiniment de O. De plus, l'équation différentielle en x et y_n admet $x = 0$, $y_n = 0$ comme point singulier élémentaire.

Nous écrirons l'équation différentielle considérée sous la forme déjà employée (132) :

$$(138) \qquad x[P(x, y) + \ldots]\,dy + [Q(x, y) + \ldots]\,dx = 0.$$

Prenons sur la partie positive de Oy un point M_0 et sur Γ un point M'_0, tels que les arcs de caractéristiques M_0O et OM'_0 dont nous désignerons l'ensemble par C_0 ne contiennent, en dehors de O, aucun point singulier. Par M_0 faisons passer une droite S, par exemple $y = l_0$. Par M'_0 faisons passer une droite S', par exemple $x = l'$. Soit C une caractéristique de (138) passant par un point M situé sur S et d'abscisse x. On montre facilement, en raisonnant comme dans le lemme du n° 46, moyennant certaines restrictions provisoires sur la position de M_0 et M'_0, que, si x_0 est suffisamment petit, la caractéristique C suivie dans un sens convenable à partir de M va couper $x = l'$ en un point M', aussi voisin que l'on veut de M'_0.

Ce résultat s'établit également par le raisonnement employé par M. Bendixson (p. 23). Soit v la longueur M'_0M' définissant la position du point M'.

L'expression $yP(x, y) + Q(x, y)$ ne peut être identiquement nulle, car $x = 0$, $y = 0$ ne peut être un point dicritique. Parmi les droites réelles ou imaginaires représentées par l'équation obtenue en égalant cette expression à zéro, il peut y avoir un certain nombre de droites à coefficient angulaire positif.

Soient a, b, c, ..., k ces coefficients angulaires rangés en décroissant. Désignons par OD_1, OD_2, ..., OD_i, ..., OD_q des demi-droites situées du côté des x positifs et admettant pour coefficients angulaires les quantités positives a_1, b_1, c_1, ..., k_1, l_1 telles que l'on ait

$$0 < l_1 < k < k_1 < \ldots < b_1 < a < a_1.$$

Dans un secteur compris entre deux demi-droites consécutives, OD_i et OD_{i+1}, il n'y a qu'une seule demi-droite $y = mx$ dont le coefficient angulaire vérifie la relation $P(1, m) + Q(1, m) = 0$.

Si x_0 est suffisamment petit, le point M_0 sera au-dessus de OD_1 et le point M' sera au-dessous de OD_q. Il suffit de faire la figure pour voir que l'arc MM' de C rencontrera toutes les droites OD_i. Soit x_i l'abscisse du point M_i d'intersection de C avec OD_i. Pour trouver la relation entre les paramètres x_0 et v définissant la position des points M et M', nous allons chercher :

1° La relation entre x_i et x_{i+1};
2° La relation entre x_0 et x_1;
3° La relation entre x_q et v.

1° *Relation entre x_i et x_{i+1}*. — Cherchons, par exemple, la forme de la relation entre x_1 et x_2. Posons $y=(a+z)x$. D'après les hypothèses faites, nous avons les propriétés suivantes du point singulier $x=0$, $z=0$ de l'équation différentielle en x et z_1 :

a. L'équation admet la caractéristique $x=0$;

b. L'équation n'admet pas de caractéristique située du côté des x positifs et aboutissant à $x=0$, $z=0$.

Nous sommes donc dans le cas du n° 46. Si nous désignons par C' la caractéristique de l'équation en x et z correspondant à C, les valeurs x_1 et x_2 sont les abscisses des points d'intersection de C' avec les deux droites $z=a_1-a$ et $z=b_1-a$. L'arc de caractéristique $x=0$ compris entre ces deux droites ne contient pas d'autre point singulier que $x=0$, $z=0$. Nous connaissons donc, d'après le n° 47, la forme de la relation entre x_1 et x_2 et plus généralement entre x_i et x_{i+1}.

2° *Relation entre x_0 et x_1*. — Posons $x=ty$, nous obtenons une équation déjà obtenue (133) :

$$(139)\qquad t[B(t,1)+Q(t,1)+\ldots]\,dy+y[Q(t,1)+\ldots]\,dt=0.$$

Considérons d'abord le cas où $y=0$, $t=0$ est un point singulier élémentaire.

Soit C'' la caractéristique de (139) qui dans le plan des t, y correspond à la caractéristique C de (138). Les valeurs x_0 et x_1, abscisses des points d'intersection de C avec $y=l_0$ et $y=a_1x$, déterminent la position des points d'intersection correspondants de C'' avec $y=l_0$ et $a_1t=1$. L'équation (139) admet les deux caractéristiques $t = 0$ et $y = 0$. L'ensemble des portions de ces deux arcs de caractéristiques compris entre $y = l_0$ et $a_1 t = 1$ ne contient que le seul point singulier $y = 0$, $t = 0$ qui est un point élémentaire. Nous connaissons donc la forme de la relation entre x_0 et x_1.

Pour nous affranchir de l'hypothèse faite en supposant que $t = 0$, $y = 0$ est un point singulier élémentaire de (139), nous n'avons qu'à raisonner comme au n° 47.

3° *Relation entre x_q et v.* — Posons $y = y_1 x$. Nous obtenons l'équation

$$(140) \quad x[P(1, y_1) + \ldots] dy_1 + [y_1 P(1, y_1) + Q(1, y_1) + \ldots] dx = 0,$$

admettant le point singulier $x = 0$, $y_1 = 0$. Par ce point passent la caractéristique $x = 0$ et un arc de caractéristique Γ_1 correspondant à l'arc Γ de caractéristique de (134). La région située à droite de $x = 0$ et au-dessus de Γ_1 est une région répulsive. A la caractéristique C de (138) correspond une caractéristique C_1 de (140). C coupe la droite $y = l_1 x$ en un point M_q d'abscisse x_q et la droite $x = l'$ au point M' défini par $M'_0 M_0 = v$. Ces paramètres déterminent la position des points d'intersection de C_1 avec les droites $y_1 = l_1$ et $x = l'$ du plan des xy_1. Nous aurons immédiatement la relation entre v et x_q, si $x = 0$, $y_1 = 0$ est un point singulier élémentaire de (140). En effet, sur l'ensemble des arcs des caractéristiques formés : 1° par le segment de $x = 0$ compris entre $y_1 = l_1$ et $y = 0$, 2° par l'arc de Γ_1 compris entre $x = 0$ et $x = l'$, il n'y a pas d'autre point singulier que $x = 0$, $y_1 = 0$.

Supposons maintenant que $x = 0$, $y_1 = 0$ ne soit pas un point singulier élémentaire. L'équation (140) jouit de toutes les propriétés énoncées au début de ce n° 47 en remplaçant dans leur énoncé Γ par Γ_1, y par y_1 et x^n par x^{n-1}. Nous pouvons donc raisonner sur l'équation (140) comme nous avons raisonné sur l'équation (138). Désignons par l_2 un nombre qui jouera pour (140) le rôle joué par l_1 pour (138). Nous aurons la forme de la relation entre les x des points d'intersection de C_1 avec les droites $y_1 = l_1$ et $y_1 = l_2 x$. En continuant de même, posant $y_{q-1} = xy_q$ et désignant par C_q la caractéristique, qui, dans le plan des xy_q, correspond à C, nous aurons la forme de la relation entre les x

des points d'intersection de C_q avec les droites $y_q = l_q$ et $y_q = l_{q+1} x$. Cette suite d'opérations revient à trouver les relations de correspondance des points d'intersection de C avec les courbes successives $y = l_q x^q$ du plan des xy $(q = 0, 1, 2, \ldots)$. Lorsque nous serons arrivés à l'équation en x et y_n, cette équation admettra, par hypothèse, $x = 0$, $y_n = 0$ comme point singulier élémentaire et nous fournira par conséquent la relation entre l'abscisse du point d'intersection de C avec la courbe $y = l_n x^n$ et le paramètre v définissant la position du point d'intersection de C avec $x = l$.

Conclusion. — La correspondance entre les valeurs x_0 et v_1, définissant les points d'intersection de C avec les deux courbes S et S′ que nous avons considérées, résulte des diverses relations que nous avons établies dans 1°, 2° et 3°. Ces relations sont de la forme de celles que l'on rencontre en considérant une caractéristique passant dans le voisinage de points singuliers élémentaires. Nous en concluons que *le passage d'une caractéristique dans le voisinage du point singulier considéré équivaut, en ce qui concerne la loi de correspondance, au passage d'une caractéristique successivement dans le voisinage de plusieurs points singuliers élémentaires.*

Remarque. — Nous avons obtenu la forme de la loi de correspondance entre les points d'intersection de C avec les droites $y = l_0$ et $x = l'$. La forme de cette loi serait absolument la même, si l'on remplaçait la droite $y = l_0$ par une courbe S, représentée par $y = \varphi(x)$ coupant $x = 0$ en un point tel que sur la portion de $x = 0$ comprise entre S et $y = l_0$ il n'y ait aucun point singulier de (138). Nous supposons $\varphi(x)$ holomorphe pour $x = 0$. En effet, entre les abscisses x_0 et x'_0 des points d'intersection de C avec $y = l_0$ et S, il y a une relation holomorphe

$$x'_0 = a x_0 [1 + h(x_0)],$$

a désignant une constante et $h(x_0)$ une fraction holomorphe et nulle pour $x = 0$.

49. Loi de correspondance pour une région répulsive relative a un point singulier quelconque. — Soient C_1 et C_2 deux arcs de caractéristique aboutissant à un point singulier O et limitant un secteur répulsif relatif à ce point O.

Soient OT_1 et OT_2 les demi-droites tangentes en O à C_1 et C_2. S'il existe un segment OD, tel que OD soit tout entier dans le secteur répulsif considéré, nous appellerons *angle de ce secteur* le plus petit angle dont il faut faire tourner OT_1 pour l'amener à coïncider avec OT_2, après avoir coïncidé avec OD. Cet angle peut être égal à 2π, si OT_1 et OT_2 coïncident.

S'il n'existe aucun segment OD répondant à la condition indiquée, *l'angle du secteur sera dit égal à zéro.* Il en est ainsi, lorsque la région répulsive est comprise entre deux arcs de caractéristique formant un point de rebroussement.

Si l'angle du secteur répulsif est inférieur à π, on peut toujours supposer, au moyen d'un changement de l'axe Oy, que cet angle ne contient à son intérieur aucun point de Oy et que ni OT_1, ni OT_2 ne coïncident avec Oy. Nous pouvons également supposer que ce secteur est situé dans la région des x positifs. Si l'angle du secteur est supérieur à π nous pourrons toujours supposer que les deux demi-tangentes OT_1 et OT_2 sont situées dans la région des x positifs.

Considérons une droite $x = l$ *coupant* C_1 et C_2 en M_1 et M_2.

Nous supposons que, sur les arcs OM_1 et OM_2 de C_1 et de C_2, il n'existe aucun point singulier autre que O. Une caractéristique C suffisamment voisine de C_1 et de C_2 rencontre $x = l$ en des points N_1 et N_2 respectivement voisins de M_1 et M_2.

Nous voulons trouver la loi de correspondance entre N_1 et N_2, c'est-à-dire la forme de la relation des distances $M_1N_1 = v_1$ et $M_2N_2 = v_2$.

Écrivons l'équation différentielle, admettant le point singulier $x = 0$, $y = 0$, sous la forme

$$(141) \qquad [A(x, y) + \ldots]\, dy + [B(x, y) + \ldots]\, dx = 0,$$

A et B désignant deux polynomes homogènes de degré n, représentant les termes de moindre degré des coefficients de dy et de dx. Soit

$$R(x, y) \equiv yA(x, y) + xB(x, y).$$

Laissons, pour le moment, de côté le cas où $R(x, y)$ étant identiquement nul, le point $x = 0$, $y = 0$ est un point dicritique. Pour trouver la loi de correspondance nous allons considérer différents cas :

1° *L'angle du secteur répulsif est inférieur à π et supérieur à O.* — Considérons toutes les demi-droites vérifiant l'équation homogène $R(x, y) = 0$ et situées à l'intérieur de l'angle du secteur répulsif. Soient OT'_i ces demi-droites que nous numérotons dans l'ordre où nous les rencontrons, en partant de OT_1 et décrivant l'angle du secteur répulsif. L'indice i prendra les valeurs $1, 2, \ldots, q-1$. A l'intérieur de chacun des angles $T_1OT'_1$, $T'_iOT'_{i+1}$, $T'_{q-1}OT_2$ intercalons une demi-droite. Soient OD_i ces demi-droites que nous numérotons de la même façon que les droites OT'_i. Désignons par α_i le coefficient angulaire de OD_i. L'indice i prendra les valeurs $1, 2, \ldots, q$.

Un raisonnement analogue à celui fait pour le lemme du n° 46 montrera que si une caractéristique C passant dans la région répulsive considérée rencontre $x = l$ en un point N_1 suffisamment voisin de M_1, elle rencontrera chacune des droites OD_i en un point Q_i. La position de ce point sera déterminée par un abscisse x_i.

Pour établir les relations de correspondance entre ces quantités x_i, posons $y = zx$. L'équation (141) devient

$$(142) \qquad x\,[A(1, z) + \ldots]\,dz + [R(1, z) + \ldots]\,dx = 0,$$

les termes non écrits étant nuls pour $x = 0$; à C correspond, dans le plan des zx, une caractéristique C; à une droite OD_i correspond une droite $z = \alpha_i$. Au secteur compris entre deux demi-droites OD_i et OD_{i+1} correspond, dans la région des x positifs, la portion du plan des zx comprise entre $z = \alpha_i$ et $z = \alpha_{i+1}$. L'équation (142) admet la caractéristique $x = 0$. Il n'y a sur $x = 0$ entre les droites $z = \alpha_i$ et $z = \alpha_{i+1}$ qu'un seul point singulier. Aucune caractéristique située du côté des x positifs n'aboutit à ce point singulier. Nous sommes donc dans le cas étudié au n° 46. Nous savons trouver la forme de la relation qui existe entre les abscisses x_i et x_{i+1} des points d'intersection de C′ avec $z = \alpha_i$ et $z = \alpha_{i+1}$. Le lemme du n° 46 montre que si l'un de ces points d'intersection existe, il en est de même de l'autre.

Pour obtenir la loi de correspondance relative à la région M_1MO_2 il suffit de trouver la loi de correspondance entre les points N_1 et Q_1 où C rencontre $x = l$ et OD_1, puisque la loi de correspondance entre N_2 et Q_q intersections de C avec $x = l$ et OD_q s'obtiendra de la même manière. Employons encore le changement de variable, $y = zx$. A la séparatrice C_1 correspond, dans le plan des zx, une séparatrice C'_1 coupant $x = l$ au point M'_1 et coupant $x = 0$ en un point A_1, dont le z est égal au coefficient angulaire de OT_1 ; à OD_1 correspond $z = \alpha_1$. La caractéristique C' correspondant à C coupe $x = l$ et $z = \alpha_1$ en des points N'_1 et Q'_1 correspondant à N_1 et Q_1. Si A_1, qui est un point singulier de l'équation (142) est un point élémentaire, comme c'est en général le cas, nous aurons la forme de la relation entre x_1 abscisse de Q_1 et la longueur $v_1 = M'_1N'_1 = M_1N_1$. Nous aurons la loi de correspondance entre Q_1 et N_1.

Si A_1 n'est pas un point élémentaire nous supposerons, pour commencer, que, dans la recherche de la séparatrice C_1, on est dans le cas normal (n° 41) et nous ferons un changement de variable pour être ramenés au cas considéré au n° 48.

D'après ce que nous avons dit (n° 41) nous savons qu'il existe un entier m et un polynome $g(x)$ de degré au plus égal à m, tel que si l'on fait le changement de variable

$$z = g(x) + y_m x^m,$$

les conditions suivantes soient vérifiées :

a. y_m et x tendent simultanément vers zéro, lorsqu'on se déplace sur C'_1 en se rapprochant indéfiniment de A_1 ;

b. L'équation en x et y_m admet $x = 0$, $y_m = 0$ comme point singulier élémentaire.

Il résulte de là que, si l'on pose

$$z = g(x) + y_0,$$

on obtient une équation différentielle en x et y_0 admettant $x = 0$, $y_0 = 0$ comme point singulier, tel que les trois hypothèses faites au début du n° 48 soient vérifiées. Nous aurons donc, en utilisant également la remarque du n° 48, la forme de la relation entre v et x_1.

La loi de correspondance entre N_1 et N_2 résultera des diverses relations que nous venons d'établir.

Examinons maintenant les divers cas que nous avons laissés de côté :

2° *L'angle du secteur répulsif étant encore compris entre* O *et* π, *supposons que le point* A_1, *considéré dans* 1°, *ne soit pas un point élémentaire et que l'on ne soit pas dans le cas normal dans la recherche de la séparatrice* C_1. — Puisque C_1 est une séparatrice différente de $x = 0$, nous savons (n° 44) que si le cas normal ne se présente pas dans la recherche de C_1, nous serons dans le cas réductible. Il existe un entier r tel qu'en posant $x = u^r$, on soit dans le cas normal, lorsqu'on recherche la caractéristique Γ_1 du plan des uy correspondant à C_1.

A C correspond dans le plan des uy une caractéristique Γ. Nous savons obtenir (n° 49, 1°, et n° 47) la relation entre le paramètre v_1 définissant l'intersection de Γ avec $u = l^{\frac{1}{r}}$ et le paramètre u' définissant l'intersection de Γ avec $y = \alpha_1 x$. En remplaçant, dans la relation obtenue, u par $x^{\frac{1}{r}}$, nous aurons la loi de correspondance entre Q_1 et N_1.

3° *L'angle du secteur répulsif est nul.* — Les deux demi-tangentes OT_1 et OT_2 sont confondues et situées dans la région des x positifs, comme la région répulsive considérée.

Nous savons (n° 43) qu'on peut *séparer* les deux caractéristiques C_1 et C_2 au moyen d'un changement de variable

$$y = \varphi(x) + y_2 x^2,$$

qui fera correspondre à C une caractéristique Γ et à C_1 et C_2 des séparatrices Γ_1 et Γ_2, limitant, dans le plan des variables x et y_2, une région répulsive relative au point singulier $x = 0$, $y_2 = 0$. En raisonnant comme nous venons de le faire dans 1° et 2°, nous établirons la loi de correspondance entre les points d'intersection ν_1 et ν_2 de Γ avec $x = l$. Nous aurons ainsi la relation entre les paramètres v_1 et v_2 égaux respectivement aux longueurs M_1N_1 et M_2N_2.

4° *L'angle du secteur répulsif est supérieur à* π. — Les deux demi-droites OT_1 et OT_2 peuvent coïncider et l'angle du secteur être égal à 2π, sans que cela modifie les raisonnements. Nous adjoignons aux demi-droites vérifiant l'équation $R(x, y) = 0$ et situées dans l'angle du secteur les deux demi-droites limitées par le point O et portées par Oy. Nous intercalons, comme dans 1°, entre ces diverses demi-droites, auxquelles on adjoint OT_1 et OT_2, des demi-droites OD_i. Nous conservons toutes les notations employées dans 1°. Pour avoir la loi de correspondance entre N_1 et N_2, il suffit d'utiliser ce que nous avons dit dans 1° et de le compléter en montrant comment on obtiendra la loi de correspondance entre les points d'intersection de C avec deux demi-droites OD_s et OD_{s+1} limitant un secteur contenant une portion de Oy. Soient $x - \alpha y = 0$ et $x + \beta y = 0$ les équations de OD_s et OD_{s+1}, α et β étant positifs. Posons $x = ty$. Nous obtiendrons une équation différentielle en t et y, admettant la caractéristique $y = 0$

$$[R(t, 1) + \ldots]\,dy + y\,[B(t, 1) + \ldots]\,dx = 0. \tag{143}$$

Si l'on a $R(0, 1) \neq 0$, cette équation (143) n'admet aucun point singulier situé sur $y = 0$ entre $t = \alpha$ et $t + \beta = 0$ correspondant à OD_s et à OD_{s+1} ; à C correspond, dans le plan des yt, une caractéristique C′ coupant $t - \alpha = 0$ et $t + \beta = 0$ en des points Q'_s et Q'_{s+1} correspondant à Q_s et Q_{s+1}. Nous avons donc une correspondance holomorphe entre les coordonnées y_s et y_{s+1} de Q_s et Q_{s+1}, En posant $\rho_i = OQ_i$ nous aurons donc une relation holomorphe $\rho_{s+1} = a\rho_s[1 + h(\rho_s)]$ entre ρ_s et ρ_{s+1}. Si l'on a $R(0, 1) = 0$, le point $t = 0$, $y = 0$ est un point singulier de (143). A ce point n'aboutit, en dehors de $y = 0$, aucune caractéristique. Nous sommes donc dans un cas identique à celui considéré (n° 46). Nous savons trouver la loi de correspondance entre ρ_s et ρ_{s+1}.

En employant les paramètres ρ_i au lieu des paramètres x_i considérés dans 1° pour exprimer la loi de correspondance entre Q_i et Q_{i+1}, nous évitons d'introduire des paramètres négatifs.

50. Loi de correspondance pour une région répulsive relative a un point dicritique. — Nous avons vu (n° 37, remarque), dans quel cas il y a une région répulsive relative à un point dicritique. Si nous considérons une *direction remarquable*, $y + ax$, relative au point dicritique $x = 0$, $y = 0$, et si nous posons $y = zx$, l'équation différentielle en z et x admet le point A ($x = 0$, $z = a$) comme point ordinaire. Par ce point passe une caractéristique Γ_0 tangente à x_0 en A et ne traversant pas $x = 0$ en ce point. Les caractéristiques Γ voisines de Γ_0 et situées dans celles des régions limitées par Γ_0, qui ne contient pas de points de $x = 0$ voisins de A, ne couperont pas Ox, dans le voisinage de A; à Γ_0 correspond une caractéristique C_0 de l'équation en x et y. Les deux branches de C_0 aboutissant à $x = 0$, $y = 0$ forment un point de rebroussement. Aux caractéristiques Γ correspondent des caractéristiques C, comprises entre les deux branches de C_0 formant un rebroussement. Ces caractéristiques C voisines de C_0 n'aboutissent pas au point O. La région comprise entre les deux branches de C_0 est une région répulsive.

Considérons la droite $x = l$, *coupant* les deux branches de C_0 en des points M_1 et M_2, tels que sur l'arc M_1OM_2 de C_0 il n'y ait, en dehors de O, aucun point singulier. Une caractéristique C *coupe* $x = l$ aux points N_1 et N_2. Nous aurons la loi de correspondance entre N_1 et N_2 en considérant, dans le plan des zx, les points correspondants N'_1 et N'_2, qui sont à l'intersection de Γ avec $x = l$. Cette droite $x = l$ *coupe* Γ_0 en des points M'_1 et M'_2, tels que l'arc $M'_1AM'_2$ ne contienne aucun point singulier. Nous aurons donc une relation holomorphe entre les paramètres $v_1 = M'_1N'_1$ et $v_2 = M'_2N'_2$. Il y a donc une correspondance holomorphe entre les longueurs M_1N_1 et M_2N_2 proportionnelles à v_1 et v_2.

51. Caractéristiques voisines d'un cycle passant par des points singuliers complexes. — En résumé, étant donnée une région répulsive limitée par deux séparatrices C_1 et C_2 aboutissant à un point singulier complexe et par une droite $x = l$, coupant C_1 et C_2 en M_1 et M_2, nous avons considéré une caractéristique C coupant $x = l$ en des points N_1 et N_2. En posant $z_1 = M_1N_1$, $z_2 = M_2N_2$, nous avons établi la forme de la relation ou des relations liant z_1 à z_2. Dans le cas le plus général, nous avons été amenés à considérer, au moyen d'une série de changements de variables, les points d'intersection de C avec une série de courbes S_i, passant par le point singulier et intérieures à la région répulsive. Nous

aurons obtenu les relations liant les points d'intersection de C avec deux courbes consécutives S_i. Certaines de ces relations sont holomorphes. Les autres relations, obtenues en considérant des équations différentielles auxiliaires, dans le voisinage d'un point singulier élémentaire, ont une forme qui dépend de la nature de ce point singulier : *col* ou *point exceptionnel.*

On voit donc que, dans le cas le plus général, le passage d'une caractéristique C dans le voisinage d'un point singulier complexe est équivalent, en ce qui concerne la loi de correspondance, au passage de C dans le voisinage de plusieurs points élémentaires successifs.

Si ces points élémentaires sont tous des cols, la relation entre z_1 et z_2 peut être résolue soit par rapport à z_1, soit par rapport à z_2. On a, par exemple,

$$z_2 = a z_1^{\nu} [1 + F(z_1)],$$

a et ν étant des constantes positives et $F(z_1)$ une fonction semi-régulière et nulle pour $z_1 = 0$. On peut, si l'on ne considère que le terme principal $a z_1^{\nu}$ du second membre, dire que le passage de C dans le voisinage du point singulier complexe est équivalent au passage dans le voisinage d'un col unique.

Des simplifications notables interviennent dans la détermination de l'exposant ν [1] et de la forme de la fonction F.

Si parmi les points élémentaires, qui se présentent dans l'application de la méthode précédente, on rencontre des points exceptionnels, des simplifications pourront encore se présenter. Par exemple, il en sera ainsi (n° 34), si l'on traverse deux points exceptionnels consécutifs l'un dans le sens uv, l'autre dans le sens vu. Nous devons remarquer cependant que les résultats établis ne permettent pas d'affirmer que la relation entre z_1 et z_2 peut être résolue par rapport à z_1 ou par rapport à z_2. La relation entre z_1 et z_2 résulte de relations liant z_1 à z_2 par l'intermédiaire d'autres

---

[1] On peut montrer que l'exposant ν est égal au quotient des exposants relatifs aux séparatrices C_1 et C_2. Ces exposants (*voir* le Mémoire que j'ai publié *Annales de l'Université de Grenoble*, t. XVII, 1905) sont donnés immédiatement par les équations à point singulier élémentaire fournissant respectivement les séparatrices C_1 et C_2.

paramètres définissant l'intersection de C avec les courbes intermédiaires S_i.

Nous concluons de tout ce qui précède, par les raisonnements du n° 35, que les résultats obtenus pour un cycle singulier C_0, ne passant que par des points élémentaires, s'étendent aux cycles singuliers passant par des points singuliers quelconques.

Il existe, dans la région limitée par le cycle C_0, *et dans laquelle nous voulons considérer les caractéristiques voisines de* C_0, *une région annulaire* R *adjacente à* C_0, *telle que l'on soit toujours dans l'un des deux cas suivants :*

1° *Aucune caractéristique passant dans* R *n'est un cycle;*

2° *Toutes les caractéristiques passant dans* R *sont des cycles.*

QUATRIÈME PARTIE.

COMPLÉMENTS ET CONCLUSIONS.

52. Caractéristiques voisines d'un point singulier auquel aucune caractéristique n'aboutit avec une tangente déterminée. — Nous allons montrer que tout se passe comme si ce point singulier O était un cycle singulier réduit à un point. *Si l'on considère les caractéristiques voisines de ce point* O, *ou bien toutes les caractéristiques sont des cycles entourant* O; *ou bien ce sont toutes des spirales qui, suivies dans un sens convenable, se rapprochent indéfiniment de* O.

Pour démontrer ces résultats prenons le point singulier pour origine et l'équation différentielle sous la forme déjà considérée (141)

$$[A(x,y)+\ldots]\,dy+[B(x,y)+\ldots]\,dx=0. \tag{144}$$

L'expression

$$R(x,y)\equiv yA(x,y)+xB(x,y)$$

peut, comme au n° 49, admettre des facteurs linéaires réels $ax+by$, mais il n'y a aucune caractéristique passant par O et tangente en ce point à $ax+by=0$.

Considérons, comme au n° 49, les diverses demi-droites vérifiant l'équation $R(x, y) = 0$, en y adjoignant les deux demi-droites limitées par O, sur $x = 0$. Soient OT_i ces demi-droites, numérotées en partant de l'une quelconque d'entre elles, et tournant dans le sens direct. L'indice i prendra les valeurs $1, 2, \ldots, r-1$. Intercalons entre deux demi-droites consécutives OT_i des demi-droites $OD_1, OD_2, \ldots, OD_{r-1}, OD_r$; la demi-droite OD_2 étant identique à OD_1. Si nous posons $y = zx$ et si nous considérons l'équation (142), ainsi que la caractéristique Γ de cette équation correspondant à une caractéristique C de l'équation (144), le raisonnement du lemme du n° 46 montre que, si C rencontre la droite OD_i en un point M_i, suffisamment voisin de O, la caractéristique C rencontrera OD_{i+1} en un point M_{i+1}, aussi voisin que l'on voudra de O. Une caractéristique C coupant OD_1 en M_1 viendra recouper OD_r confondu avec OD_1 en un point M_r. Les caractéristiques voisines de O seront des cycles si M_r est confondu avec M_1 et des spirales si M_1 et M_2 sont distincts.

Pour préciser la circonstance qui se présente, remarquons que les raisonnements du n° 49, en particulier ceux de 4°, nous ont donné la forme de la relation entre ρ_i et ρ_{i+1} en posant $\rho_i = OM_i$. D'après ce que nous avons vu, il y aura entre ρ_1 et ρ_r, déterminant la position de deux points d'intersection consécutifs M_1 et M_r de C avec OD_1, une relation absolument de même nature que celle qui se présente entre les valeurs du paramètre définissant la position de deux points d'intersection consécutifs d'une courbe S avec une caractéristique C voisine d'un cycle singulier C_0. La conclusion obtenue au n° 51 s'applique ici. *En général, les caractéristiques* C *voisines de* O *sont des spirales qui, suivies dans un sens convenable, se rapprochent indéfiniment de* O. *Si certaines conditions, les unes algébriques, les autres transcendantes, sont vérifiées, toutes les caractéristiques voisines de* O *sont des cycles entourant* O. Étant donné un cercle de centre O et de rayon aussi petit que l'on veut, on peut trouver une infinité de cycles intérieurs à ce cercle. *Dans le premier cas, le point* O *est un foyer. Dans le second cas,* O *est un centre.*

53. Points a l'infini. — Bien que les expressions « cycles » et « courbes fermées » semblent exclure l'étude des caractéristiques ayant des branches infinies, il y a lieu d'étendre les considérations

des Chapitres précédents aux caractéristiques qui ont des points à l'infini. En effet, on peut, par une transformation homographique, faire correspondre à ces caractéristiques des courbes n'ayant pas de point à l'infini. L'étude des caractéristiques ayant des points à l'infini n'est donc pas distincte des caractéristiques qui restent à distance finie. Ce n'est point du reste en vue d'une simple généralisation que nous considérons les points à l'infini. Pour montrer que le nombre des cycles limites est fini, lorsque l'on a une équation

$$X(x, y)\,dy + Y(x, y)\,dx = 0, \tag{145}$$

où X et Y sont des polynomes en x et y, nous aurons besoin de considérer des caractéristiques passant par des points à l'infini.

Ainsi que nous venons de le dire, nous considérerons exclusivement ici le cas où X et Y sont des polynomes de degré n en x et y. Nous désignerons leurs termes de degré n et de degré $n-1$ respectivement par $X_n(x, y)$, $Y_n(x, y)$ et $X_{n-1}(x, y)$, $Y_{n-1}(x, y)$. Posons

$$R(x, y) = yX_n(x, y) + xY_n(x, y).$$

Pour étudier un point à l'infini dans la direction de Oy, nous poserons

$$y = \frac{1}{u}, \qquad x = \frac{v}{u}.$$

L'équation (145) devient

$$u[Y_n(v, 1) + \ldots]\,dv = [R(v, 1) + \ldots]\,du, \tag{146}$$

les termes non écrits étant nuls pour $y = 0$. Nous étudierons à l'aide de cette équation le point $u = 0$, $v = 0$.

Pour étudier un point à l'infini, dans une direction autre que Oy, nous poserons

$$x = \frac{1}{u}, \qquad y = \frac{z}{u}$$

L'équation (145) devient

$$u[X_n(1, z) + \ldots]\,dz = [R(1, z) + \ldots]\,du, \tag{147}$$

les termes non écrits étant encore nuls pour $u = 0$. Pour étudier un point à l'infini dans la direction $y = ax$, nous poserons

$$z = a + v,$$

et nous étudierons le point $u = 0$, $v = 0$.

Les deux formes d'équations (146) et (147) ne conviennent que si $R(x, y)$ n'est pas identiquement nul. Si l'on a

$$R(x, y) \equiv 0,$$

nous poserons

$$X_n(x, y) = xA(x, y), \qquad Y_n(x, y) = -xA(x, y),$$
$$B(x, y) = yX_{n-1}(x, y) + xY_{n-1}(x, y);$$

les équations (146) et (147) deviennent, en n'écrivant que les termes qui ne sont pas nuls pour $u = 0$,

$$(148) \qquad [-A(v, 1) + \ldots]\, dv = [B(v, 1) + \ldots]\, du,$$
$$(149) \qquad [\;\, A(1, z) + \ldots]\, dz = [B(1, z) + \ldots]\, du.$$

Un point à l'infini sera dit un « point ordinaire », un « point singulier », un « col », un « nœud », etc., suivant que le point correspondant $u = 0$, $v = 0$, que nous étudions à l'aide des équations (146), (148) ou de l'équation déduite de (147) ou (149), admet $u = 0$, $v = 0$ comme point ordinaire, point singulier, col, etc.

On voit que, si $R(x, y)$ n'est pas identiquement nul, l'équation en u et v admet la caractéristique $u = 0$. Un point à l'infini sera, ou bien un point ordinaire, par lequel passera la seule caractéristique $u = 0$, ou bien un point singulier, qui ne sera ni un centre ni un foyer. Pour qu'un point à l'infini dans la direction $\beta x - \alpha y = 0$ soit un point singulier, il faut et il suffit que l'on ait $R(\alpha, \beta) = 0$.

Si $R(x, y)$ est identiquement nul, les équations (148) et (149) montrent que, pour que le point à l'infini dans la direction $\beta x - \alpha y = 0$ soit un point singulier, il faut et il suffit que l'on ait

$$A(\alpha, \beta) = 0, \qquad B(\alpha, \beta) = 0.$$

Ce ne sera donc que tout à fait exceptionnellement qu'un point à l'infini sera, dans ce cas, un point singulier. Ce point singulier ne présentera aucune particularité à signaler.

Considérons l'équation en u et v, au moyen de laquelle nous étudions un point à l'infini en considérant le point $u=0$, $v=0$. Soient Γ_1 et Γ_2 deux arcs de caractéristique aboutissant à $u=0$, $v=0$ et formant ou bien les deux branches d'une caractéristique Γ passant par le point ordinaire $u=0$, $v=0$, ou bien limitant une région répulsive relative au point singulier $u=0$, $v=0$. Γ_1 et Γ_2 sont dans les deux cas le prolongement l'une de l'autre. A ces deux caractéristiques Γ_1 et Γ_2 correspondent, dans le plan des xy, deux branches infinies C_1 et C_2 de caractéristiques que nous considérerons naturellement comme le prolongement l'une de l'autre et comme formant les deux branches d'une même caractéristique C.

Supposons d'abord que le point $u=0$, $v=0$, que nous désignerons par ω, soit un point ordinaire. Prenons dans le plan des variables u et v deux arcs de courbes Σ_1 et Σ_2, coupant Γ_1 et Γ_2 respectivement en μ_1 et μ_2, ces points étant tels que l'arc $\mu_1\omega\mu_2$ de Γ ne contienne aucun point singulier. On pourra toujours prendre pour Σ_1 et Σ_2 des droites $v=\pm l$ ou $u=\pm l'$. Si nous considérons, dans le plan des uv, une caractéristique Γ' voisine de Γ_0, il y aura une correspondance holomorphe entre les points de rencontre μ'_1 et μ'_2 de Γ' avec les arcs Σ_1 et Σ_2. A Γ' correspond dans le plan des xy une caractéristique C', que nous appellerons « caractéristique voisine de C »; à Σ_1 et Σ_2 correspondent des courbes S_1 et S_2; à μ'_1 et μ'_2 des points M'_1 et M'_2. Les paramètres qui définissent la position de μ'_1 et μ'_2, et par suite de M'_1 et M'_2, étant liés par une relation holomorphe, nous dirons qu'il y a une correspondance holomorphe entre les points d'intersection de C' avec S_1 et S_2. Si la caractéristique Γ n'est pas tangente en ω à la droite $u=0$, ou si, lui étant tangente en ω, elle traverse en ce point $u=0$, la courbe C' présentera deux branches infinies.

Si Γ est tangente en ω à $u=0$ et ne traverse pas en ce point $u=0$, les caractéristiques C' situées d'un côté de C admettront deux branches infinies, et les caractéristiques C' situées de l'autre côté de C n'admettront pas de branche infinie voisine des branches infinies de C.

Supposons maintenant que $u=0$, $v=0$ soit un point singulier. Γ_1 et Γ_2 sont deux séparatrices limitant une région répulsive relative à ω. Considérons une caractéristique Γ' voisine de Γ et située dans la région répulsive limitée par Γ. Traçons comme plus haut deux courbes Σ_1 et Σ_2 *coupant* Γ_1 et Γ_2 en des points μ_1 et μ_2 tels que, sur l'arc $\mu_1 \omega \mu_2$ de Γ, il n'y ait pas d'autre point singulier que ω. Nous savons trouver la forme de la relation entre les paramètres définissant la position des points d'intersection μ'_1 et μ'_2 de Γ' avec Σ_1 et Σ_2. En considérant, dans le plan des xy, la caractéristique C' correspondant à Γ', nous aurons la loi de correspondance entre les points d'intersection M'_1 et M'_2 de C' avec les courbes S_1 et S_2 correspondant à Σ_1 et Σ_2.

Il résulte de ce qui précède que nous pourrons appeler « cycle » une caractéristique possédant des branches infinies lorsque, en s'éloignant à l'infini sur une branche de la courbe et suivant ensuite à partir de l'infini la caractéristique qui est le prolongement de cette branche infinie, et marchant toujours dans le même sens, on revient au point de départ, sans traverser une région nodale relative à un point singulier.

En particulier, nous pouvons considérer des cycles singuliers ayant des points à l'infini. Ces points à l'infini peuvent être soit des points ordinaires, soit des points singuliers. Dans ce dernier cas, le cycle pourra comprendre une portion de la droite de l'infini.

Si l'on considère un cycle singulier C_0, une caractéristique C voisine de C_0 et une courbe S coupée en M_0 par C_0 et coupée successivement en M et M' par C, la relation de correspondance entre les paramètres définissant la position des points d'intersection consécutifs M et M' de C avec S est, d'après ce qui précède, de la même forme lorsque C_0 a des points à l'infini et lorsque C_0 est entièrement à distance finie. Il résulte de là que toutes les conclusions des Chapitres précédents s'appliquent à la généralisation de la notion de cycle dont il vient d'être question.

54. Les cycles limites sont en nombre fini. — Nous savons (Bendixson, p. 16) que tout cycle contient à son intérieur au moins un point singulier. D'autre part, le nombre des points singuliers de l'équation (145), où X et Y sont des polynômes, est fini. Pour montrer que le nombre des cycles limites est fini, il suffira de montrer qu'il y a un nombre fini de cycles limites entourant un point singulier P.

Menons par P une droite PZ ne rencontrant, à distance finie ou infinie, aucun point singulier autre que P. S'il y a une infinité de cycles limites entourant P, leurs points d'intersection avec PZ admettent au moins un point limite M, à distance finie ou infinie. Il existe donc un segment MM_1 de PZ tel que, par des points M' aussi voisins que l'on veut de M et situés sur MM_1, passent des cycles limites. Montrons que cela est impossible.

Désignons par C la caractéristique issue de M et suivie dans un certain sens, choisi arbitrairement. On sait (Bendixson, p. 17) que les cas suivants sont seuls possibles :

1° C *est un cycle ne passant par aucun point singulier;*

2° C *s'approche indéfiniment d'une courbe fermée* K, *sans passer par un point singulier;*

3° C *aboutit à un point singulier et les caractéristiques issues des points du segment* MM_1 *voisins de* M *aboutissent également à ce point singulier;*

4° C *aboutit à un point singulier et les caractéristiques issues des points du segment* MM_1 *voisins de* M *n'aboutissent pas à ce point singulier.*

Considérons successivement chacun de ces cas.

1° C *est un cycle.* — Si l'on considère une caractéristique C′ passant par un point M′ de MM_1 suffisamment voisin de M, cette caractéristique C′ viendra recouper la demi-droite PM en un point M″ voisin de M et il y aura une relation holomorphe entre les longueurs MM′ et MM″. Il en résulte que, ou bien toutes les caractéristiques C′ sont des cycles, ou bien aucune d'elles n'est un cycle. Dans les deux cas, *aucune d'elles n'est un cycle limite.*

Pour lever l'objection que soulèverait notre raisonnement si la droite PM était tangente en M à C, il suffirait de remarquer (Bendixson, p. 11) que l'on peut décrire, autour de M comme centre, un cercle de rayon assez petit pour que toute caractéristique C passant par un point intérieur à ce cercle coupe la normale MN_1 élevée en M à C. Toute caractéristique C′ passant par un point M′, suffisamment voisin de M, coupera la normale en N′. Aucune objection ne se présentera en raisonnant sur le point N′ de MN_1, comme nous avons raisonné sur le point M de MM_1.

2° C *est une spirale qui se rapproche indéfiniment d'une* *courbe fermée* K. — On sait (Bendixson, p. 15) que l'on peut toujours entourer M d'un cercle de rayon assez petit pour qu'une caractéristique passant par un point intérieur à ce cercle soit une spirale se rapprochant indéfiniment de K. Ce cercle renfermant les points de MM_1 voisins de M, il est impossible que, par ces points, passent des cycles, et en particulier des cycles limites.

3° Puisque les caractéristiques C′ issues des points M′ de MM_1 voisins de M aboutissent, comme C, à un point singulier, il est impossible que, parmi ces caractéristiques C′, il y ait des cycles limites.

4° On sait [1] que, si C aboutit à un point singulier P_1, et si les caractéristiques C′ passant par un point M′, voisin de M sur MM_1, n'aboutissent pas à P_1, on peut prolonger C au delà de P_1 par un arc de caractéristique C_1 tel que les caractéristiques C′ restent voisines de C. Nous pouvons raisonner sur l'ensemble des caractéristiques C et C_1 comme nous avons raisonné sur C. Si les cas 2° et 3° se présentent, il est démontré qu'il n'y a pas de caractéristique C′ formant un cycle limite. Si le cas 4° se présente pour C_1, nous considérons l'arc de caractéristique C_2 qui prolonge C_1 au delà du point singulier P_2 auquel aboutit C_1 et nous continuerons de même.

Si les cas 2° ou 3° se présentent, il est démontré qu'il n'y a pas de cycles limites rencontrant MM_1. Le cas 4° ne peut se présenter indéfiniment, car le nombre des points singuliers ainsi que celui des séparatrices étant fini, nous reviendrons nécessairement au point de départ M, si les cas 2° ou 3° ne se présentent pas. C et ses prolongements successifs C_1, C_2, ... formeront un cycle singulier. Nous avons vu que, dans ce cas, toutes les caractéristiques C′ passant par des points M′ voisins de M sur MM_1, ou bien sont toutes des cycles, ou bien ne sont jamais des cycles. Dans tous les cas, aucune d'elles n'est un cycle limite.

Nos raisonnements sont valables en s'appuyant sur le n° 53, dans le cas où le point limite M est à l'infini sur PZ. Nous pouvons toujours supposer, pour éviter l'objection signalée dans 1°, que la droite PZ

---

[1] *Voir* n° 3 ce que j'ai dit au sujet des séparatrices, en rappelant les résultats énoncés par M. Bendixson (p. 23).

n'est pas tangente en M à la caractéristique C passant par le point à l'infini M.

Nos raisonnements ne sont pas valables si le point limite M est confondu avec P. Nous aurons alors les deux cas suivants :

1° *Il y a au moins une caractéristique aboutissant à* P *avec une tangente déterminée;*

2° A*ucune caractéristique n'aboutit à* P *avec une tangente déterminée.*

Dans le premier cas, il est évidemment impossible qu'il y ait des cycles passant par un point voisin de P et entourant P. Dans le second cas, nous avons montré (n° 52) que les caractéristiques C′ passant par un point M′ voisin de P, ou bien sont toutes des cycles, ou bien ne sont jamais des cycles. Dans aucun cas, *une caractéristique* C′ *n'est un cycle limite.*

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Une équation

$$X(x, y)\,dy + Y(x, y)\,dx = 0, \tag{150}$$

où X *et* Y *sont des polynomes, admet un nombre fini* (qui peut être nul) *de cycles limites.*

L'hypothèse que X et Y sont des polynomes est intervenue de trois façons différentes dans nos raisonnements, pour nous permettre d'affirmer que :

1° On peut étudier les points singuliers à distance finie de l'équation en supposant que X et Y sont holomorphes dans le voisinage de chacun de ces points;

2° On peut (n° 53) étudier chacun des points à l'infini, et en particulier chacun des points singuliers à l'infini, en ramenant cette étude au cas d'une équation $P(u, v)\,dv + Q(u, v)\,du = 0$, où P et Q sont holomorphes dans le voisinage de $u = 0$, $v = 0$;

3° Le nombre des points singuliers à distance finie ou infinie est fini.

Nos conclusions s'appliqueraient au cas où X et Y sont des fonctions continues de x et y, si ces fonctions sont telles que les trois propriétés ci-dessus subsistent. S'il n'en est pas ainsi, les conclusions s'appliqueraient aux cycles, et en particulier aux cycles limites entièrement contenus dans une région R du plan, ne contenant à son intérieur ou sur son contour qu'un nombre fini de points singuliers, à condition que, dans le voisinage de chacun des points de R ou de son contour, X et Y soient holomorphes, ou bien encore que l'étude des caractéristiques de (150), dans le voisinage de chacun des points de R ou de son contour, puisse se ramener à l'étude, dans le voisinage de $u = 0$, $v = 0$, des caractéristiques d'une équation $P(u, v)\, dv + Q(u, v)\, dv = 0$, où P et Q sont holomorphes pour $u = 0$, $v = 0$.