Bulletin de la S. M. F.

Grumeau

Sur un nouveau mode de génération du complexe linéaire et du complexe parabolique

Bulletin de la S. M. F., tome 51 (1923), p. 239-244
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1923__51__239_0>

SUR UN NOUVEAU MODE DE GÉNÉRATION DU COMPLEXE LINÉAIRE ET DU COMPLEXE PARABOLIQUE;

PAR M^lle GRUMEAU.

1. Donner un complexe linéaire revient, Chasles l'a montré, à définir une certaine correspondance entre un plan et un point de ce plan. On peut réaliser cette correspondance :

1° En considérant, dans un solide en mouvement, le champ des vitesses à un instant donné et associant à chaque point le plan perpendiculaire à la vitesse de ce point (¹);

2° En prenant, avec M. Appell (²), une cubique gauche, et en associant, à chaque point M, le plan P des points de contact des trois plans osculateurs issus de P (il est bien connu que ce plan P contient le point M).

Dans le présent article, nous nous proposons de faire connaître un mode très simple de génération du complexe linéaire et du complexe parabolique que nous avons obtenu en 1916, à l'occasion d'un diplôme d'E. S. soutenu devant la Faculté des Sciences de Poitiers.

Plaçons-nous d'abord au point de vue métrique : ces deux complexes ont en commun la propriété suivante : ils sont invariants par rapport à ce sous-groupe des déplacements qui comprend :

1° Les rotations autour d'un axe fixe;
2° Les translations parallèles à cet axe.

L'axe en question s'appelle *axe du complexe*. Quand nous voudrons raisonner analytiquement nous supposerons que le trièdre des coordonnées est trirectangle et que Oz est confondu avec l'axe du complexe. Tout cylindre de révolution d'axe Oz est invariant par le même sous-groupe. Il est donc naturel de chercher à réaliser la correspondance de Chasles, en faisant intervenir un tel cylindre.

(¹) On peut aussi avoir recours à la réduction des forces appliquées à un solide les deux méthodes n'ont entre elles qu'une différence d' « objet ».
(²) *Annales de l'École Normale*, 1876.

2. Partons de la définition classique des complexes cités, déduite de la considération d'un solide en mouvement. L'état des vitesses sera le même que pour un certain mouvement hélicoïdal, dont l'axe, conformément à ce qui précède, sera pris pour axe Oz. Désignons par ω la rotation, et par τ la translation de ce mouvement. La vitesse d'un point $M(x, y, z)$ a pour composantes

$$-\omega y, \quad \omega x, \quad \tau.$$

Le plan P perpendiculaire à cette vitesse, mené par M, a pour équation

$$\omega(xY - yX) + \tau(Z - z) = 0 \tag{1}$$

en appelant X, Y, Z les coordonnées courantes. Si l'on imagine que ce plan soit lié au solide, on obtiendra sa caractéristique, en cherchant les points X, Y, Z, dont la vitesse est dans ce plan : elle sera donc définie par l'équation (1) et par la suivante :

$$\omega^2(xX + yY) + \tau^2 = 0. \tag{2}$$

Le complexe linéaire est alors le complexe des droites menées par chaque point M, dans le plan P associé; le complexe parabolique, celui des droites, caractéristiques des plans P.

3. L'équation (2) représente le plan polaire du point $M(x, y, z)$ par rapport au cylindre de révolution imaginaire

$$\omega^2(X^2 + Y^2) + \tau^2 = 0. \tag{3}$$

Considérons la section de ce cylindre par le plan P. Nous allons établir le résultat fondamental suivant :

Le point M *est foyer de cette section; la droite* Δ, *définie par les équations* (1) *et* (2), *est la directrice correspondante.*

En effet, considérons la sphère de rayon nul

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = 0.$$

Elle coupe le plan P suivant les droites isotropes issues de M. Leurs projections sur le plan xOy sont représentées par l'équation

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}(xY - yX)^2 = 0$$

qui s'écrit encore

$$[\omega^2(x^2+y^2)+\tau^2][\omega^2(X^2+Y^2)+\tau^2]-[\omega^2(xX+yY)+\tau^2]^2=0$$

et représente par suite l'ensemble des plans tangents menés du point x, y, z au cylindre (3). Donc, dans le plan P, les tangentes menées de M à la section de ce cylindre sont les droites isotropes. Le point M est bien foyer de la section. La directrice correspondante est dans le plan polaire de M par rapport au cylindre : c'est donc la droite (1), (2).

Remarque. — Dans le mouvement précédent, le cylindre (3) n'est autre que le lieu des points de vitesse nulle.

4. Inversement, considérons un cylindre imaginaire tel que

$$X^2+Y^2+R^2=0.$$

Chaque plan P y détermine une section elliptique imaginaire, qui possède deux foyers réels, situés sur la droite de ce plan rencontrant orthogonalement Oz et symétriques par rapport à Oz. Associant au plan P un de ces foyers, on obtient une correspondance de Chasles, c'est-à-dire un complexe linéaire. Le complexe des directrices correspondantes est le complexe parabolique, relatif au même torseur.

La méthode nous donne simultanément deux complexes linéaires à chacun desquels on peut associer un mouvement hélicoïdal, dextrorsum pour l'un, sinistrorsum pour l'autre, et de pas

$$\frac{\tau}{\omega}=\pm R.$$

Remarque. — On n'obtiendrait rien d'analogue par les foyers réels d'un cylindre réel. La correspondance de point à plan qui en dérive n'est pas linéaire, car elle impose au point M, foyer d'une section, une frontière infranchissable : le cylindre. On ne saurait, dans de telles conditions, obtenir une correspondance de Chasles.

5. On peut généraliser les résultats précédents et les mieux dominer en se plaçant au point de vue projectif et dualistique. Au n° 1, notre point de départ a été la considération du sous-groupe des déplacements qui conservent un complexe linéaire donné. Ce

sous-groupe est aussi un sous-groupe du groupe projectif. On l'y distingue à l'aide des propriétés suivantes : chacune de ses transformations possède deux points doubles confondus, rejetés à l'infin sur l'axe du complexe, et deux points doubles d'ordre 1, qui sont les points cycliques de tout plan orthogonal de l'axe. L'ensemble des deux points doubles confondus équivaut à un de ces points et à une droite passant par ce point (cette droite est l'axe du complexe, et le double point double en est le point à l'infini).

Cela posé, toute transformation homographique conservant le complexe appartient, dans le groupe projectif, à un sous-groupe homologue du précédent. Une de ces transformations comporte donc :

1° Deux points doubles, isolés en général, A et B (homologues des points cycliques précités);

2° Deux points doubles confondus, dont l'ensemble équivaut à un point C, et à une droite $(\mathcal{D})$ issue de C [1].

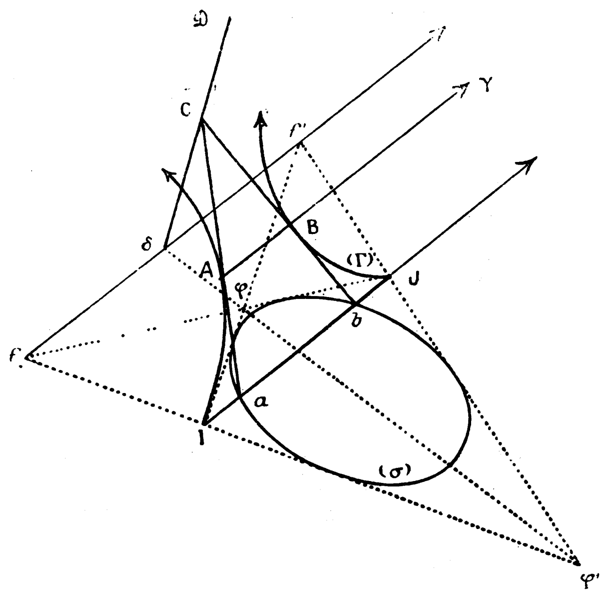
La droite $(\mathcal{D})$ et la droite AB sont d'ailleurs conjuguées par rapport au complexe.

6. Ceci posé, bornons-nous pour le moment à transposer le résultat relatif à la génération du complexe linéaire en géométrie métrique. Le cylindre de révolution devient un cône de sommet C, et de génératrices CA et CB; soit $(\mathcal{C})$ ce cône. Le plan CAB (transformé du plan de l'infini) sera le plan polaire de $(\mathcal{D})$. Le cercle de l'infini se transforme en une conique, du plan CAB, tangente en A et B aux droites CA et CB : soit (Γ) cette conique. Notons le caractère dualistique du système $(\mathcal{C}, \Gamma)$: le cône et la conique sont des éléments corrélatifs, le plan de la conique contient le sommet du cône.

Cela posé, soit (σ) la section $(\mathcal{C})$ par un plan P. Soient I et J (homologues des points cycliques) les points où (Γ) perce ce plan.

[1] Une transformation, conservant le complexe, ne peut avoir un véritable tétraèdre de points doubles ABCD. Sinon, on pourrait se ramener au cas où le plan ABC est l'infini, D étant à distance finie, et où A et B sont les points cycliques de tout plan orthogonal à DC. La transformation serait alors une similitude, produit d'une homothétie de centre D et d'une rotation autour de DC. Elle ne peut conserver un complexe (non spécial) que si le rapport d'homothétie est l'unité.

Par I et J menons les tangentes à σ. Leurs points de rencontre φ, φ', f, f', se partagent en deux couples : chacune des droites $\varphi\varphi'$ et ff' passe par la trace d de $(\mathcal{D})$ sur le plan P : une seule d'entre elles ff' coïncide avec la droite joignant le point d à la trace de AB sur le plan P. En associant au plan P l'un des points f ou f', on engendre une correspondance de Chasles, et par suite un complexe linéaire. Ce complexe admet $\mathcal{D}$ et AB comme couple de droites conjuguées. En déterminant un autre couple de droites conjuguées, il serait facile de construire son axe, en s'appuyant sur la propriété classique suivante :



AB, ff', IJ, concourantes en un point situé hors les limites du dessin.

L'axe est rencontré orthogonalement par la perpendiculaire commune à deux droites conjuguées.

7. Tous les systèmes $(\mathcal{C}, \Gamma)$, susceptibles d'engendrer un complexe linéaire donné, se déduisent du système particulier formé de son cylindre fondamental et du cercle imaginaire de l'infini par l'une des transformations homographiques laissant le complexe invariant. Ces transformations dépendent de neuf paramètres et forment un groupe. Mais on peut définir un groupe plus général

laissant le complexe invariant, et comprenant à la fois des transformations homographiques et des transformations dualistiques. On obtiendra ce groupe en adjoignant au précédent la corrélation qui associe à un plan son pôle relatif au complexe. Les transformations de ce nouveau groupe font passer d'un système ($\mathcal{C}$, Γ) à un système ($\mathcal{C}'$, Γ'), et font correspondre les cônes entre eux, les courbes entre elles, si elles sont ponctuelles, un cône à une courbe si elles sont dualistiques.

Remarquons enfin que *les deux éléments* ($\mathcal{C}$) *et* (Γ) *se correspondent l'un à l'autre par la corrélation même du complexe.*

8. On peut rattacher à cette remarque les résultats qui ont été obtenus jusqu'à présent. En vertu du caractère de dualité qui vient d'être mis en lumière, il est impossible à une droite du complexe d'être tangente au cône ($\mathcal{C}$), sans s'appuyer sur la conique (Γ). On peut se donner arbitrairement le cône ($\mathcal{C}$), on en déduit (Γ) par la corrélation du complexe. Tout plan P coupe alors ($\mathcal{C}$) suivant une conique (σ), et (Γ) en deux points I et J. Les droites du complexe qui passent par I et J dans le plan Ps ont nécessairement tangentes (1) à (σ) : alors, se trouve justifiée, d'unc façon naturelle, et sans calcul, la manière dont nous avons réalisé la correspondance de Chasles.

---

(1) Le pôle de P sera un point de concours de ces tangentes assujetti à la condition d'être sur la droite (génératrice du complexe) qui joint les traces des droites conjuguées ($\mathcal{D}$) et AB, sur le plan P. (D'après ce qui a été vu, $\mathcal{D}$ est l'intersection des plan tangents à $\mathcal{C}$ le long de ses génératrices CA, CB situées dans le plan polaire de C.)