BULLETIN DE LA S. M. F.

E. KOGBETLIANTZ

Sur la sommabilité de la série ultrasphérique à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$ par la méthode des moyennes arithmétiques

Bulletin de la S. M. F., tome 51 (1923), p. 244-295
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1923__51__244_1>

SUR LA SOMMABILITÉ DE LA SÉRIE ULTRASPHÉRIQUE A L'INTÉRIEUR DE L'INTERVALLE $(-1, +1)$ PAR LA MÉTHODE DES MOYENNES ARITHMÉTIQUES;

PAR M. E. KOGBETLIANTZ.

Les polynomes ultrasphériques $P_n^{(\lambda)}(x)$, qu'on définit par la fonction génératrice

$$(1) \qquad T^{-\lambda} = (1 - 2xz + z^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n^{(\lambda)}(x) \qquad (\lambda > 0),$$

et qui sont orthogonaux dans l'intervalle $(-1, +1)$

$$(2)\cdot\quad \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}(n+\lambda) \times \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(n+2\lambda)}\int_{-1}^{+1}\frac{P_m^{(\lambda)}(x)\,P_n^{(\lambda)}(x)\,dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ 1 & (m = n), \end{cases}$$

généralisent les polynomes de Legendre $\left(\text{cas}\,\lambda = \frac{1}{2}\right)$ et les relient aux fonctions trigonométriques, puisqu'on a pour $\lambda \to 0$

$$\lim_{\lambda=0}\frac{1}{\lambda}P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{2\cos n\theta}{n} \qquad (x = \cos\theta)$$

ainsi que pour $\lambda = 1$

$$\sin\theta\, P_n^{(1)}(\cos\theta) = \sin(n+1)\theta.$$

La série de Legendre

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)P_n(x)\int_{-1}^{+1}f(u)\,P_n(u)\,du \qquad (|x| \leqq 1)$$

n'est que le cas particulier pour $\lambda = \frac{1}{2}$ du développement de $f(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ en série des polynomes ultrasphériques

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} f(x) \sim \dfrac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \\ \qquad \times \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(n+2\lambda)}P_n^{(\lambda)}(x)\int_{-1}^{+1}\frac{f(u)\,P_n^{(\lambda)}(u)\,du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} \\ \qquad\qquad (|x| \leqq 1,\ \lambda > 0) \end{cases}$$

qui résulte des formules (2) et qui se réduit dans les cas particuliers $\lambda = 1$ et $\lambda \to 0$ aux développements trigonométriques des fonctions $f(x)\sqrt{1-x^2} \equiv \sin\theta f(\cos\theta)$ et $f(\cos\theta)$ dans l'intervalle $(0, \pi)$ en séries de sinus et cosinus respectivement. La série (I) est à son tour le cas particulier pour $F(\theta, \varphi) \equiv f(\cos\theta) = f(x)$ du développement ultrasphérique de la fonction $F(\theta, \varphi)$ sur la sphère S

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} F(\theta, \varphi) \sim \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)\int\!\!\int_S \frac{F(\theta', \varphi')\,P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)\,d\sigma'}{[\sin^2\theta'\,\sin^2(\varphi-\varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}} \qquad (\lambda > 0) \\ \qquad [\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')] \end{cases}$$

qui généralise la série de Laplace et qui se réduit à la dernière pour $\lambda = \frac{1}{2}$. Les questions de convergence ou de la sommabilité de la série (I) par une quelconque des méthodes de sommation des séries divergentes peuvent être traitées, en l'envisageant comme le cas particulier de la série (II), mais en ce qui concerne les points intérieurs $|x| < 1$ l'application des théorèmes généraux, relatifs à la série (II), donne des résultats beaucoup moins précis que ceux qu'on obtient, en étudiant la série (I) elle-même pour $|x| < 1$.

Ce travail est consacré à l'étude directe de la sommabilité $(C, \delta > 0)$ de la série (I) en points intérieurs $|x| < 1$ de l'intervalle $(-1, +1)$ (1). Sous la méthode (C, δ) de sommation des séries divergentes nous entendons la méthode des moyennes arithmétiques d'ordre δ, qui représente la généralisation la plus naturelle de la sommation ordinaire d'une série convergente.

Par définition la série $\sum_{0}^{\infty} u_n$ est dite sommable (C, δ) avec la somme s, s'il existe la limite pour $n \to \infty$ de la moyenne arithmétique $s_n^{(\delta)}$ d'ordre δ

$$\begin{aligned} s = \lim_{n=\infty} s_n^{(\delta)} &= \lim_{n=\infty} \left\{ u_0 + \sum_{m=1}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{(n+\delta)(n-1+\delta)\ldots(n-m+1+\delta)} u_m \right\} \\ &= \lim_{n=\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(n+\delta+1)} \left\{ \sum_{m=0}^{n} \frac{\Gamma(n-m+1+\delta)}{\Gamma(n-m+1)\Gamma(\delta+1)} u_m \right\}, \end{aligned}$$

et l'on voit que la convergence n'est que la sommabilité $(C, \delta = 0)$, $s_n^{(0)}$ étant la somme partielle s_n des $n + 1$ premiers termes de la série.

Nous démontrons (§ III) l'existence des fonctions continues dans tout intervalle $(-1, +1)$, les séries ultrasphériques (I) desquelles néanmoins divergent en un point donné x $(-1 < x < +1)$ de l'intervalle $(-1, +1)$; par conséquent on peut poser le problème de la sommabilité $(C, \delta > 0)$ de la série (I) à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$.

---

(1) Tous les résultats ont été exposés dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 164, 1917, p. 778-780.

Dans le cas particulier $\lambda = \frac{1}{2}$ (la série de Legendre) cette question a été traitée par MM. Haar [1], Chapman [2] et Gronwall [3]. Les résultats de MM. Haar et Chapman n'ont à présent que l'intérêt historique : le théorème de M. Harr établit la sommabilité (C, 1) en un point intérieur, où existe la valeur moyenne de la fonction developpée, de la série de Legendre d'une fonction absolument intégrable dans $(-1, +1)$ et le théorème de Chapman — sa sommabilité $\left(C, \delta < \frac{1}{2}\right)$ pour $\delta > 2\gamma - \frac{3}{2} \geqq 0$, où $1 > \gamma \geqq \frac{3}{4}$ et $f(x) = (1-x^2)^{-\gamma} g(x)$ pour $|x| \geqq 1 - \varepsilon (\varepsilon > 0)$, $g(x)$ étant à variation bornée dans un intervalle aussi petit qu'on veut, entourant le point considéré $x = x_0 (-1 < x_0 < +1)$.

Le théorème de M. Gronwall, qu'on peut énoncer ainsi :

La série de Legendre d'une fonction $f(x)$, qui est absolument intégrable ainsi que le produit $(1-x^2)^{\frac{\delta}{2}-\frac{1}{4}} f(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$, est sommable $(C, \delta > 0)$ en tout point intérieur x de cet intervalle où existe la valeur moyenne $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$ et a pour somme cette valeur moyenne,

montre que la série de Legendre d'une fonction absolument intégrable dans $(-1, +1)$ est en tout cas sommable $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ à l'intérieur de $(-1, +1)$ avec la valeur moyenne de la fonction développée pour somme et l'est $\left(C, \delta < \frac{1}{2}\right)$ pour $\delta > 2\gamma - \frac{3}{2}\left(1 > \gamma \geqq \frac{3}{4}\right)$, si $f(x) = (1-x^2)^{-\gamma} g(x)$ pour $|x| \geqq 1 - \varepsilon$, $g(x)$ étant bornée, sans supposer que $g(x)$ et $f(x)$ sont à variation bornée. Nous allons démontrer le théorème analogue pour la série la plus générale I avec λ quelconque $(\lambda > 0)$, à savoir le théorème :

La série ultrasphérique (I) *d'une fonction $f(x)$ est sommable (C, λ) en tout point intérieur x de l'intervalle $(-1, +1)$, où existe la valeur moyenne $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$, et a pour*

---

(1) *Ueber die Legendresche Reihe* (*Rendiconti di Palermo*, t. 32, 1911, p. 132-142).

(2) *Mathem. Annalen*, B. 72, 1912, p. 220-226.

(3) *Mathem. Annalen*, B. 75, 1914, p. 321-375.

somme cette valeur moyenne, si le produit $(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}f(x)$ *est absolument intégrable dans l'intervalle* $(-1, +1)$, *et l'est* $\left(C, \delta \substack{\leq \lambda \\ > 0}\right)$, *si le produit* $(1-x^2)^{\frac{\lambda+\delta-1}{2}} f(x)$ *est absolument intégrable dans cet intervalle* $(-1+1)$.

Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, notre théorème se réduit au théorème cité de M. Gronwall. La démonstration du théorème énoncé est basée sur la considération des majorantes de Lebesgue $R_n^{(\delta,\lambda)}(x)$ d'ordre δ de la série (I), qu'on définit ainsi :

$$R_n^{(\delta,\lambda)}(x) = \int_0^\pi |S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi)| \sin^{2\lambda}\varphi \, d\varphi \qquad (x = \cos\theta, \ \lambda > 0).$$

$S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi)$ désigne la moyenne arithmétique d'ordre δ de la série

$$\text{(III)} \quad 0 \sim \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \times \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(n+2\lambda)} P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) P_n^{(\lambda)}(\cos\varphi) \qquad (\lambda > 0),$$

donc

$$(3) \qquad S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi) = \frac{1}{A_n^{(\delta)}} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \times \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta)}(m+\lambda) \frac{P_m^{(\lambda)}(\cos\theta) P_m^{(\lambda)}(\cos\varphi)}{A_m^{(2\lambda-1)}},$$

où $A_n^{(\delta)} = \frac{\Gamma(n+\delta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\delta+1)}$ est le coefficient de z^n dans la série de Taylor de la fonction $(1-z)^{-(\delta+1)}$.

Les majorantes $R_n^{\left(\delta, \frac{1}{2}\right)}(x)$ de la série de Legendre ont été étudiées par MM. Haar et Gronwal. M. Haar a démontré qu'elles restent toutes bornées dans leur ensemble pour $|x| \leqq 1 - \varepsilon (\varepsilon > 0)$, si $\delta \geqq 1$. Il a établi aussi qu'au contraire $R_n^{\left(0, \frac{1}{2}\right)}(0)$ augmente indéfiniment avec $n \to \infty$. M. Gronwall a généralisé le résultat de M. Haar, en démontrant que toutes $R_n^{\left(\delta, \frac{1}{2}\right)}(x)$ pour $|x| \leqq 1 - \varepsilon (\varepsilon > 0)$ restent bornées dans leur ensemble pour chaque $\delta > 0$.

Nous démontrons au paragraphe II que le même fait a lieu quel que soit $\lambda > 0$, c'est-à-dire que l'on a $0 < R_n^{(\delta,\lambda)}(x) \leqq R$ pour $|x| \leqq 1 - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ et $n = 0, 1, 2, \ldots \infty$, pourvu que δ reste positif. La constante R dépend de δ, λ et ε, mais ne dépend ni de n ni de x. Au contraire on a $\lim\limits_{n=\infty} R_n^{(0,\lambda)}(x) = \infty$ quels que soient $\lambda > 0$ et x dans l'intervalle $(-1, +1)$, extrémités exclues, puisqu'on démontre (§ II) qu'on a pour $|x| \leqq 1 - \varepsilon$ et $\lambda > 0$

$$R_n^{(0,\lambda)}(x) = \frac{16}{\pi^2}\log(n+1) + \varphi_n^{(\lambda)}(x),$$

où les fonctions $\varphi_n^{(\lambda)}(x)$ restent bornées dans leur ensemble pour $\lambda > 0$ et $|x| \leqq 1 - \varepsilon$, quel que soit $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$. On démontre ces propriétés des majorantes $R_n^{(\delta,\lambda)}(x)$ à l'aide des formules approximatives et des inégalités pour $S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi)$. On les déduit (§ I) par la méthode de Stieltjes ([1]). Ces inégalités résolvent en quelques mots (§ II) le problème de sommation (C, δ) de la série (III). On voit que la sommabilité $(C, \delta \geqq \lambda)$ en un point intérieur $(|x| < 1)$ de la série (I) d'une fonction $f(x)$ ne dépend pas des valeurs que la fonction développée prend au voisinage des points frontières $x = \pm 1$, si le produit $(1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} f(x)$ reste absolument intégrable dans $(-1, +1)$. Mais la condition suffisante de la sommabilité $(C, \delta < \lambda)$ de la série (I) en un point intérieur, à savoir l'intégrabilité absolue du produit $(1 - x^2)^{\frac{\delta + \lambda - 1}{2}} f(x)$ dans $(-1, +1)$, n'est satisfaite que si l'ordre γ d'infinitude de $f(x)$ en un point frontière est plus petit que $\frac{\delta + \lambda + 1}{2}$:

$$\gamma < \frac{\delta + \lambda + 1}{2}.$$

Il est très intéressant d'observer que déjà M. Darboux, en étudiant la sommabilité $(C, \delta = 0)$ c'est-à-dire la convergence de la série (I), a établi ([2]), qu'elle diverge partout à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$, si l'ordre γ d'infinitude de $f(x)$ en un point frontière est égal ou supérieur à $\frac{\lambda + 1}{2}$: $\gamma \geqq \frac{\lambda + 1}{2}$. De même

---

([1]) *Sur les polynomes de Legendre* (*Annales de Toulouse*, 1re série, t. IV, 1890, p. 1-17.

([2]) *Journal de Liouville*, 3e série, t. IV, 1878, p. 393.

nous démontrons que la condition $\gamma < \frac{\delta+\lambda+1}{2}$ est nécessaire pour la sommabilité $(C, \delta < \lambda)$ de la série (I) en un point intérieur, si dans l'intervalle $(-1, \varepsilon-1)$ — $\varepsilon > 0$ — la fonction développée $f(x)$ a la forme $(1+x)^{-\gamma}\varphi(x)$, où $\varphi(x)$ est régulière au point $x=-1$, et si le produit $(1-x^2)^{\frac{\lambda-1}{2}} f(x)$ est absolument intégrable dans l'intervalle $(\varepsilon-1, 1)$. Par exemple la série (I) d'une fonction $f(x)$, continue dans $(\varepsilon-1, 1)$ et qui a la forme $(1+x)^{-\gamma}\varphi(x)$ pour $-1 \leqq x \leqq \varepsilon - 1$ $(\varepsilon > 0)$, n'est sommable (C, δ) en aucun point intérieur x pour $\delta \leqq 2\gamma - (\lambda+1)$ et l'est pour $\delta > 2\gamma - (\lambda+1)$ avec la valeur $f(x)$ pour somme partout à l'intérieur de $(-1, +1)$ et même uniformément pour $|x| \leqq 1 - \varepsilon$.

§ I.

Tout ce qui suit est basé sur la formule, trouvée par M. Kampé de Feriet [1] et qui nous fournit l'expression de la fonction génératrice correspondant à la série (III)

$$\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \frac{(1-z^2)\,F(\lambda+1, \lambda, 2\lambda, \tau)}{[1-2z\cos(\theta+\varphi)+z^2]^{\lambda+1}} = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) \frac{P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)\,P_n^{(\lambda)}(\cos\varphi)}{A_n^{(2\lambda-1)}} z^n, \tag{4}$$

où

$$\tau = \tau(z) = \frac{4z\sin\theta\sin\varphi}{1-2z\cos(\theta+\varphi)+z^2},$$

et où F est le signe de la fonction hypergéométrique.

On prouve (4) en posant $\cos\gamma = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi\cos\omega$ dans la formule

$$\frac{\lambda(1-z^2)}{[1-2z\cos\gamma+z^2]^{\lambda+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)\, P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)\, z^n$$

en la multipliant ensuite par $(\sin\omega)^{2\lambda-1}\, d\omega$ et en intégrant les

---

[1] *Comptes rendus*, t. 164, 1917, p. 858.

deux membres de zéro à π, puisqu'on a (¹)

$$(5)\qquad \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\,\frac{P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)\,P_n^{(\lambda)}(\cos\varphi)}{A_n^{(2\lambda-1)}}=\int_0^\pi P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)(\sin\omega)^{2\lambda-1}\,d\omega.$$

La relation (5) nous fournit aussi l'expression suivante de la moyenne arithmétique $S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)$

$$(6)\qquad S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi s_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)\,(\sin\omega)^{2\lambda-1}\,d\omega,$$

où $s_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)$ désigne la moyenne arithmétique d'ordre δ de la série

$$(\text{IV})\qquad 0\sim\sum_0^\infty(n+\lambda)\,P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)\qquad(0<\gamma<2\pi).$$

En désignant par $\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)$ l'expression $A_n^{(\delta)}.\ S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)$ et eu égard à (3), nous déduisons de (4), en divisant les deux membres par $(1-z)^{\delta+1}$,

$$\sum_{m=0}^\infty\sigma_m^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)\,z^m=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\,\frac{(1+z)\,F[\lambda+1,\,\lambda,\,2\lambda,\,\tau(z)]}{(1-z)^\delta[1-2z\cos(\theta+\varphi)+z^2]^{\lambda+1}}$$

d'où

$$\begin{aligned}\psi(z)&=\sum_{m=0}^\infty\sigma_m^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)\,z^{n-m-1}\\&=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\,\frac{z^{n+\delta+2\lambda}(1+z)\,F[\lambda+1,\,\lambda,\,2\lambda,\,\tau(z)]}{(z-1)^\delta[1-2z\cos(\theta+\varphi)+z^2]^{\lambda+1}}.\end{aligned}$$

La fonction $f(z)$ n'a que les cinq points singuliers suivants :

$$z_1=e^{-i(\theta+\varphi)},\qquad z_2=e^{-i(\theta-\varphi)},\qquad z_3=1,$$
$$z_4=e^{i(\theta-\varphi)}\qquad\text{et}\qquad z_5=e^{i(\theta+\varphi)}.$$

Nous supposons dans la suite

$$0<\varphi<\theta<\theta+\varphi<\pi,$$

(¹) N. Nielsen, *Théorie des fonctions métasphériques*, Paris, 1911, p. 203, form. (1).

et sous cette hypothèse tous les cinq points singuliers sont distincts.

En désignant par C le chemin d'intégration, composé de cinq lacets consécutifs L_1, L_2, L_3, L_4 et L_5, ayant leur entrée commune à l'origine $z = 0$ et pour centres de leurs cercles les points critiques z_1, z_2, z_3, z_4 et z_5, nous avons

$$(7) \qquad \sigma_n^{(\delta, \lambda)}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \psi(z)\,dz$$
$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{2\pi i\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\int_C \frac{(z+1)\,z^{n+\delta+2\lambda}\,F_\lambda(\tau)\,dz}{(r-1)^\delta\,T^{\lambda+1}}$$
$$= \sum_{i=1}^{5}\int_{L_i},$$

où

$$F_\lambda(\tau) = F[\lambda+1, \lambda, 2\lambda, \tau(z)]$$

et

$$T = T(\theta, \varphi) = 1 - 2z\cos(\theta+\varphi) + z^2.$$

Les branches des fonctions multiformes sont définies par la condition qu'elles deviennent réelles à mi-chemin d'intégration, c'est-à-dire au point $z = 1 + \varepsilon$.

Vu que $\tau = \tau(z) = \frac{4z\sin\theta\sin\varphi}{T}$ tourne autour les points critiques $\tau = \infty$ et $\tau = 1$ de la fonction $F_\lambda(\tau)$, quand z parcourt les cercles des lacets L_1 et L_2 respectivement, nous voyons que la branche de $F_\lambda(\tau)$ est la même au commencement du lacet L_3, qu'au commencement du lacet L_1 ; quant à la fonction $T^{-(\lambda+1)}$ elle devient $e^{-2\lambda\pi i}T^{-(\lambda+1)}$, quand z a tourné autour du point $z_1 = e^{-i(\theta+\varphi)}$; donc nous devons commencer l'intégration le long du lacet L_1 avec la différentielle $e^{2\lambda\pi i}\psi(z)dz$ pour arriver au point $z = 1 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ avec la différentielle réelle.

Au commencement du lacet L_1 nous avons par conséquent

$$\psi_1(z) = e^{2\lambda\pi i}\,\psi(z) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\,\frac{e^{2\lambda\pi i}(z+1)\,z^{n+\delta+\lambda}}{(4\sin\theta\,\sin\varphi)^\lambda(z-1)^\delta T}\,\tau^\lambda F_\lambda(\tau),$$

et la théorie de la fonction hypergéométrique nous enseigne que d'un côté

$$[\tau^\lambda F_\lambda(\tau)]_{z=e^{-i(\theta+\varphi)}} = [\tau^\lambda F_\lambda(\tau)]_{\tau=\infty} = \frac{\Gamma(2\lambda)\,e^{-\lambda\pi i}}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\lambda+1)},$$

et que de l'autre côté la fonction $\tau^\lambda F_\lambda(\tau) = \tau^\lambda F(\lambda+1, \lambda, 2\lambda, \tau)$ augmente de

$$\frac{2\pi i\,\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda-1)}\frac{e^{-(\lambda+1)\pi i}}{\tau}F\left(\lambda+1, 2-\lambda, 2, \frac{1}{\tau}\right)$$

quand z effectue la rotation autour du point $z_1 = e^{-i(\theta+\varphi)}$, puisque alors τ tourne autour du point $\tau = \infty$.

Par conséquent le lacet L_1 fournit la contribution

$$(8)\quad \int_{L_1} = \frac{e^{-i\left[\left(n+\lambda+\frac{\delta+1}{2}\right)(\theta+\varphi)-\left(\lambda+\frac{\delta+1}{2}\right)\pi\right]}}{2\pi\left(2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right)^{\delta+1}(\sin\theta\sin\varphi)^\lambda} + \frac{\lambda(\lambda-1)e^{\lambda\pi i}}{8\pi(\sin\theta\sin\varphi)^{\lambda+1}}$$
$$\times\int_0^{e^{-i(\theta+\varphi)}}\frac{(z+1)z^{n+\delta+\lambda-1}}{(z-1)^\delta}F\left(\lambda+1, 2-\lambda, 2, \frac{1}{\tau}\right)dz.$$

L'intégration le long du lacet L_2 commence avec la branche $\psi_2(z)$ de la fonction multiforme $\psi(z)$:

$$\psi_2(z) = \psi_1(z) - \frac{i\lambda(\lambda-1)e^{\lambda\pi i}}{4(\sin\theta\sin\varphi)^{\lambda+1}}\frac{(z+1)z^{n+\delta+\lambda-1}}{(z-1)^\delta}F\left(\lambda+1, 2-\lambda, 2, \frac{1}{\tau}\right).$$

Après le parcours de deux lacets L_1 et L_2 la branche $\psi_1(z)$ devient égale à $\psi(z) = e^{-2\lambda\pi i}\psi_1(z)$, donc sur le bord gauche du lacet L_2, quand z a déjà effectué la rotation autour du point critique $z_2 = e^{-i(\theta-\varphi)}$, la branche $\psi_2(z)$ est remplacée par la branche $e^{-2\lambda\pi i}\psi_1(z)$. De l'autre côté

$$2\pi i.\lim_{z=e^{-i(\theta-\varphi)}}\left\{[z-e^{-i(\theta-\varphi)}]\psi_2(z)\right\} = \frac{e^{-i\left[\left(n+\frac{\delta+1}{2}+\lambda\right)(\theta-\varphi)-\frac{\delta+1}{2}\pi\right]}}{2\pi(\sin\theta\sin\varphi)^\lambda\left(2\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^{\delta+1}},$$

et par conséquent le lacet L_2 nous fournit la contribution

$$(9)\quad \int_{L_2} = \frac{e^{-i\left[\left(n+\lambda+\frac{\delta+1}{2}\right)(\theta-\varphi)-\frac{\delta+1}{2}\pi\right]}}{2\pi(\sin\theta\sin\varphi)^\lambda\left(2\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^{\delta+1}}$$
$$-\frac{\lambda(\lambda-1)}{2\pi(\sin\theta\sin\varphi)^\lambda}\int_0^{e^{-i(\theta-\varphi)}}\frac{(z+1)z^{n+\delta+\lambda}\tau^\lambda F(\lambda+1, \lambda, 2, 1-\tau)}{(z-1)^\delta[1-2z\cos(\theta+\varphi)+z^2]}dz,$$

comme on le déduit facilement en s'appuyant sur les propriétés élémentaires de la fonction hypergéométrique.

L'intégration le long du lacet L_3 nous fournit

$$(10)\qquad \int_{L_3} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_3}\psi(z)\,dz = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{2\pi i\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\int_{L_3}\frac{(z+1)\,z^{n+\delta+2\lambda}\,F_\lambda(\tau)\,dz}{(z-1)^\delta\,T^{\lambda+1}}.$$

Quant aux valeurs des intégrales $\int_{L_4}$ et $\int_{L_5}$ prises le long des lacets L_4 et L_5, elles sont conjuguées aux valeurs (9) et (8) des intégrales $\int_{L}$ et $\int_{L_1}$, ce qui permet de conclure :

$$(11)\qquad \sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\cos\left[\left(n+\lambda+\frac{\delta+1}{2}\right)(\theta+\varphi)-\left(\lambda+\frac{\delta+1}{2}\right)\pi\right]}{(\sin\theta\sin\varphi)^\lambda\left(2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right)^{\delta+1}} + \frac{1}{\pi}\,\frac{\cos\left[\left(n+\lambda+\frac{\delta+1}{2}\right)(\theta-\varphi)-\frac{\delta+1}{2}\pi\right]}{(\sin\theta\sin\varphi)^\lambda\left(2\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^{\delta+1}} + i_n + j_n,$$

où

$$i_n = \frac{\lambda(\lambda-1)}{4\pi(\sin\theta\sin\varphi)^{\lambda+1}} \times R\left\{e^{-\lambda\pi i}\int_0^{e^{i(\theta+\varphi)}}\frac{z+1}{(z-1)^\delta}z^{n+\delta+\lambda-1}F\left(\lambda+1,\,2-\lambda,\,2,\,\frac{1}{\tau}\right)dz - \int_0^{e^{i(\theta-\varphi)}}\frac{z+1}{(z-1)^\delta}z^{n+\delta+\lambda-1}\tau^{\lambda+1}F(\lambda+1,\,\lambda,\,2,\,1-\tau)\,dz\right\}$$

et

$$j_n = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{2\pi i\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\int_{L_3}\frac{(z+1)\,z^{n+\delta+2\lambda}\,F_\lambda(\tau)\,dz}{(z-1)^\delta\,T^{\lambda+1}}.$$

Le cas $\theta+\varphi=\pi\ \left(\theta>\frac{\pi}{2}>\varphi\right)$ se laisse traiter de la même manière, mais dans ce cas le chemin d'intégration se réduit à quatre lacets, ayant leur entrée commune à l'origine $z=0$ et pour centres de leurs cercles les points critiques $e^{-i(2\theta-\pi)}$, 1, $e^{i(2\theta-\pi)}$, -1 respectivement. On obtient la même formule (11) dans ce cas particulier $\varphi=\pi-\theta$. Elle est par conséquent valable pour $0<\varphi<\theta<\theta+\varphi\leqq\pi$.

Maintenant nous allons déduire de (11) l'inégalité fondamentale pour $S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi)$, qui est valable quels que soient $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi$, $\lambda > 0$ et $\delta > -1$.

L'inégalité

$$(12) \qquad \begin{cases} |P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)| \leqq 2(\sin\theta)^{-\lambda} A_n^{(\lambda-1)} \\ (0 \leqq \theta \leqq \pi,\ \lambda > 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots, \infty) \end{cases}$$

a pour conséquence

$$|\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi)| \leqq \frac{12}{\pi} 4^\lambda (\sin\theta \sin\varphi)^{-\lambda} \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta)} = \frac{12}{\pi} \frac{4^\lambda A_n^{(\delta+1)}}{(\sin\theta \sin\varphi)^\lambda},$$

donc il vient

$$(13) \qquad \begin{cases} |S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi)| = \dfrac{|\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi)|}{A_n^{(\delta)}} \leqq \dfrac{12 . 4^\lambda (n + \delta + 1)}{\pi(1 + \delta)(\sin\theta \sin\varphi)^\lambda} \\ (\lambda > 0,\ \delta > -1;\ 0 \leqq \theta \leqq \pi;\ 0 \leqq \varphi \leqq \pi;\ n = 0, 1, \ldots, \infty). \end{cases}$$

Soit

$$|\theta - \varphi| \leqq \frac{\pi}{n+1};$$

alors

$$\left[(n+1) \sin \frac{|\theta - \varphi|}{2}\right]^{\delta+1} \leqq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\delta+1}$$

et (13) nous fournit l'inégalité

$$(14) \qquad |\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi)| \leqq \frac{12 . 4^\lambda A_n^{(\delta+1)}}{\pi(n+1)^{\delta+1}} \frac{\left[(n+1) \sin \dfrac{|\theta - \varphi|}{2}\right]^{\delta+1}}{(\sin\theta \sin\varphi)^\lambda \left(\sin \dfrac{|\theta - \varphi|}{2}\right)^{\delta+1}}$$

$$< \frac{c_1}{(\sin\theta \sin\varphi)^\lambda \left(\sin \dfrac{|\theta - \varphi|}{2}\right)^{\delta+1}} \qquad \left(|\theta - \varphi| \leqq \frac{\pi}{n+1}\right).$$

Soit maintenant

$$\theta \geqq \varphi + \frac{\pi}{n+1}.$$

Envisageons le dernier terme du second membre de (11), à savoir l'intégrale

$$j_n = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{2\pi i \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)} \int_{L_2} \frac{(z+1) z^{n+\delta+2\lambda} F_\lambda(\tau)\, dz}{(z-1)^\delta T^{\lambda+1}}$$

Elle s'exprime à l'aide de l'intégrale

$$\mathfrak{J}_n(\alpha, \beta, \delta, \lambda) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{2\pi i\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\int_{L_3}\frac{z^{n+\alpha+\beta+\delta+\lambda}\,F_\lambda(\tau)\,dz}{(z-1)^\delta\,T^{\alpha+1}\,\Theta^{\beta-1}},$$

où

$$\Theta = T(\theta, -\varphi) = 1 - 2z\cos(\theta-\varphi) + z^2,$$

ainsi :

$$j_n = \mathfrak{J}_n(\lambda, 1, \delta, \lambda) + \mathfrak{J}_{n-1}(\lambda, 1, \delta, \lambda) \qquad (\alpha = \lambda;\ \beta = 1).$$

Quels que soient $\alpha, \beta, \lambda > 0$ et $\delta > -1$, l'intégrale $\mathfrak{J}_n(\alpha, \beta, \delta, \lambda)$ satisfait à l'inégalité

$$(15)\quad |\mathfrak{J}_n(\alpha, \beta, \delta, \lambda)| < \frac{c_2(n+1)^{\delta-1}}{\left(\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right)^{2\alpha}\left(\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^{2\beta}} \qquad \left(|\theta-\varphi| \geqq \frac{\pi}{n+1}\right)$$

pourvu que l'on ait

$$\theta \geqq \varphi + \frac{\pi}{n+1}.$$

Si $\delta < 1$ on a tout simplement

$$\mathfrak{J}_n(\alpha, \beta, \delta, \lambda) = \frac{\sin\delta\pi}{\pi}\,\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\int_0^1\frac{u^{n+\alpha+\beta+\delta+\lambda}\,F_\lambda[\tau(u)]\,du}{(1-u)^\delta\,T^{\alpha+1}\,\Theta^{\beta-1}},$$

et l'on en déduit (15) vu que

$$T \geqq \sin^2\frac{\theta+\varphi}{2}, \qquad \Theta \geqq \sin^2\frac{\theta-\varphi}{2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\Theta}{T}F_\lambda[\tau(u)] &= \frac{\Theta}{T}\,F(\lambda+1, \lambda, 2\lambda, \tau)\\ &= \frac{\Theta}{T}\,\frac{F(\lambda-1, \lambda, 2\lambda, \tau)}{1-\tau} = F(\lambda-1, \lambda, 2\lambda, \tau) \leqq C_3.\end{aligned}$$

Pour $\delta = 1$ on a aussi

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_n(\alpha, \beta, 1, \lambda) &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\left[\frac{F(\lambda-1, \lambda, 2\lambda, \tau)}{T^\alpha\,\Theta^\beta}\right]_{z=1}\\ &\leqq \frac{C_2}{\left(\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right)^{2\alpha}\left(\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^{2\beta}}.\end{aligned}$$

Donc (15) est établie pour $-1 < \delta \leqq 1$. Pour l'affranchir de la restriction $\delta \leqq 1$ nous envisageons l'identité

$$\delta \frac{z^{n+\alpha+\beta+\delta+\lambda+1} F_\lambda(\tau)}{(z-1)^{\delta+1} T^{\alpha+1} \Theta^{\beta-1}} + \frac{d}{dz}\left\{\frac{z^{n+\alpha+\beta+\delta+\lambda+1} F_\lambda(\tau)}{(z-1)^{\delta} T^{\alpha+1} \Theta^{\beta-1}}\right\}$$
$$= \frac{z^{n+\alpha+\beta+\delta+\lambda}}{(z+1)^{\delta-1} T^{\alpha+1} \Theta^{\beta-1}}$$
$$\times \left\{\frac{(1-\lambda^2)\sin\theta\sin\varphi}{2\lambda+1}\,\frac{z(z+1)}{T.\Theta}\left(1-\frac{\Theta}{T}\right) F_{\lambda+1}(\tau)\right.$$
$$+\left[\frac{n+\delta+\lambda+1}{z-1} - \frac{(\alpha+1)(z+1)}{T}\right.$$
$$\left.\left. - \frac{(\beta-1)(z+1)}{\Theta} - \frac{2(\lambda+1)\sin\theta\sin\varphi\, z(z+1)}{T.\Theta}\right] F_\lambda(\tau)\right\}$$

qui est la conséquence des relations

$$T^2 \frac{d\tau}{dz} = 4(1-z^2)\sin\theta\sin\varphi, \qquad 1-\tau = \frac{\Theta}{T},$$
$$z\frac{dT}{dz} = z^2 - 1 + T, \qquad z\frac{d\Theta}{dz} = z^2 - 1 + \Theta$$

et

$$2\frac{dF_\lambda(\tau)}{d\tau} = (\lambda+1)\frac{F_\lambda(\tau)}{1-\tau} + \frac{1-\lambda^2}{2(2\lambda+1)}\,\frac{\tau}{1-\tau} F_{\lambda+1}(\tau).$$

En multipliant cette identité par $\dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\dfrac{dz}{2\pi i}$ et en intégrant ses deux membres le long du lacet L_3, on obtient

$$(16)\quad \delta.\mathfrak{I}_n(\alpha, \beta, \delta+1, \lambda)$$
$$\equiv (n+\lambda+\delta+1)\,\mathfrak{I}_n(\alpha, \beta, \delta, \lambda)$$
$$-(\alpha+1)[\mathfrak{I}_n(\alpha+1, \beta, \delta-1, \lambda) + \mathfrak{I}_{n+1}(\alpha+1, \beta, \delta-1, \lambda)]$$
$$-(\beta-1)[\mathfrak{I}_n(\alpha, \beta+1, \delta-1, \lambda) + \mathfrak{I}_{n+1}(\alpha, \beta+1, \delta-1, \lambda)]$$
$$-2(\lambda+1)\sin\theta\sin\varphi[\mathfrak{I}_n(\alpha+1, \beta+1, \delta-1, \lambda)$$
$$+\mathfrak{I}_{n+1}(\alpha+1, \beta+1, \delta-1, \lambda)]$$
$$+\frac{1-\lambda}{2}\sin\theta\sin\varphi[\mathfrak{I}_{n-1}(\alpha+1, \beta+1, \delta-1, \lambda+1)$$
$$+\mathfrak{I}_n(\alpha+1, \beta+1, \delta-1, \lambda+1)]$$
$$-\frac{1-\lambda}{2}\sin\theta\sin\varphi[\mathfrak{I}_{n-1}(\alpha+2, \beta, \delta-1, \lambda+1)$$
$$+\mathfrak{I}_n(\alpha+2, \beta, \delta-1, \lambda+1)].$$

Supposons maintenant (15) établie pour $\delta \leqq N = E(N)$ et soit $N-1 < \delta \leqq N$. En l'appliquant dans le second membre de (16) on vérifie qu'alors (15) est aussi valable pour $N < \delta \leqq N+1$. On s'appuie dans ce calcul sur l'hypothèse faite

$$\frac{\pi}{2} \geqq \frac{\theta+\varphi}{2} > \frac{\theta-\varphi}{2} \geqq \frac{1}{n+1}\,\frac{\pi}{2}.$$

On voit par conséquent que (15) a lieu pour δ quelconque ($\delta > -1$), d'où l'on déduit pour $\alpha = \lambda$ et $\beta = 1$ l'inégalité à laquelle satisfait l'intégrale j_n :

$$(17)\qquad |j_n| = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{L}_3}\frac{(z+1)\,z^{n+\delta+2\lambda}\,\mathrm{F}_\lambda(\tau)\,dz}{(z-1)^\delta\,\mathrm{T}^{\lambda+1}}\right|$$

$$< \frac{c_5(n+1)^{\delta-1}}{\left(\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right)^{2\lambda}\left(\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^2}\qquad\left(|\theta-\varphi| \geqq \frac{\pi}{n+1}\right).$$

Pour déduire l'inégalité à laquelle satisfait l'avant-dernier terme i_n du second membre de (11) nous le transformons en remplaçant le chemin rectiligne d'intégration, allant de l'origine jusqu'à $e^{i(\theta+\varphi)}$, par le chemin formé de la ligne droite $(0, e^{i\theta})$ et de l'arc de la circonférence du cercle $|z| = 1$, qui lie les points $e^{i\theta}$ et $e^{i(\theta+\varphi)}$; de même l'intégrale suivant le rayon du même cercle, aboutissant au point $e^{i(\theta-\varphi)}$, est égale à l'intégrale suivant le rayon, aboutissant au point $e^{i\theta}$, augmentée de l'intégrale suivant l'arc du cercle $|z| = 1$, qui lie les points $e^{i\theta}$ et $e^{i(\theta-\varphi)}$.

Vu que

$$e^{-\lambda\pi i}\,\mathrm{F}\left(\lambda+1,\, 2-\lambda,\, 2,\, \frac{1}{\tau}\right) - \tau^{\lambda+1}\,\mathrm{F}(\lambda+1,\, \lambda,\, 2,\, 1-\tau)$$
$$= \frac{\sin\lambda\pi}{\pi}\,\frac{\Gamma(\lambda-1)\,\Gamma(\lambda)}{e^{\lambda\pi i}\,\Gamma(2\lambda)}\,\tau^{\lambda+1}\,\mathrm{F}(\lambda+1,\, \lambda,\, 2\lambda,\, \tau),$$

on obtient l'expression suivante pour i_n :

$$i_n = \frac{\lambda(\lambda-1)}{4\pi(\sin\theta\,\sin\varphi)^{\lambda+1}}$$
$$\times\,\mathrm{R}\left\{e^{-\lambda\pi i}\int_{e^{i\theta}}^{e^{i(\theta+\varphi)}}\frac{z+1}{(z-1)^\delta}\,z^{n+\delta+\lambda-1}\,\mathrm{F}\left(\lambda+1,\, 2-\lambda,\, 2,\, \frac{1}{\tau}\right)dz\right.$$
$$-\int_{e^{i\theta}}^{e^{i(\theta-\varphi)}}\frac{z+1}{(z-1)^\delta}\,z^{n+\delta+\lambda-1}\,\tau^{\lambda+1}\,\mathrm{F}(\lambda+1,\, \lambda,\, 2,\, 1-\tau)\,dz$$
$$\left.+\,\frac{\sin\lambda\pi\,\Gamma(\lambda-1)\,\Gamma(\lambda)}{\pi\,e^{\lambda\pi i}\,\Gamma(2\lambda)}\int_0^{e^{i\theta}}\frac{z+1}{(z-1)^\delta}\,z^{n+\delta+\lambda-1}\,\tau^{\lambda+1}\,\mathrm{F}_\lambda(\tau)\,dz\right\}$$
$$= \frac{\lambda(\lambda-1)}{4\pi(\sin\theta\,\sin\varphi)^{\lambda+1}}\,\mathrm{R}[i'_n - i''_n] + \frac{\sin\lambda\pi\,\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\lambda+1)}{4\pi^2\,\Gamma(2\lambda)\,(\sin\theta\,\sin\varphi)^{\lambda+1}}\,\mathrm{R}\,i'''_n.$$

Par conséquent on a

$$(18)\quad |i_n| \leqq \frac{\lambda|\lambda-1|}{4\pi(\sin\theta\sin\varphi)^{\lambda+1}}[|i'_n|+|i''_n|] + \frac{|\sin\lambda\pi|\,\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\lambda+1)}{4\pi^2\,\Gamma(2\lambda)(\sin\theta\sin\varphi)^{\lambda+1}}|i'''_n|.$$

Dans l'intégrale i'_n, $z=e^{i\omega}$, et ω croît de θ à $\theta+\varphi\leqq\pi$; $\tau = \dfrac{2\sin\theta\,\sin\varphi}{\cos\omega-\cos(\theta+\varphi)}$ est réelle et positive; de plus on a

$$\begin{aligned} 0 \leqq \frac{1}{\tau} &= \frac{\cos\omega-\cos(\theta+\varphi)}{2\sin\theta\sin\varphi} \\ &\leqq \frac{\cos\theta-\cos(\theta+\varphi)}{2\sin\theta\sin\varphi} < 1 = \frac{\cos(\theta-\varphi)-\cos(\theta+\varphi)}{2\sin\theta\sin\varphi}, \end{aligned}$$

puisque $0<\varphi<\theta<\pi$; donc dans i'_n

$$\left|F\left(\lambda+1,\,2-\lambda,\,2,\,\frac{1}{\tau}\right)\right| = \frac{\left|F\left(\lambda,\,1-\lambda,\,2,\,\frac{1}{\tau}\right)\right|}{1-\frac{1}{\tau}} \leqq \frac{c_7\tau}{\tau-1}.$$

Or

$$\frac{\tau}{\tau-1} = \frac{2\sin\theta\sin\varphi}{\cos(\theta-\varphi)-\cos\omega},$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} |i'_n| &\leqq c_7\int_\theta^{\theta+\varphi} \frac{2\cos\frac{\omega}{2}\,2\sin\theta\sin\varphi\,d\omega}{[\cos(\theta-\varphi)-\cos\omega]\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta}} \\ &\leqq \frac{c_8\sin\theta\sin\varphi}{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\delta+1}}\int_\theta^{\theta+\varphi}\frac{d\sin\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}-\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}, \end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned} \cos(\theta-\varphi)-\cos\omega &= 2\left[\sin^2\frac{\omega}{2}-\sin^2\frac{\theta-\varphi}{2}\right] \\ &\leqq 2\sin\frac{\omega}{2}\left[\sin\frac{\omega}{2}-\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Vu que

$$0<\int_\theta^{\theta+\varphi}\frac{d\sin\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}-\sin\frac{\theta-\varphi}{2}} = \log\left\{\frac{\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\varphi}{4}\right)\sin\frac{\varphi}{4}}\right\} < \log 2$$

$$(\theta+\varphi\leqq\pi),$$

on obtient définitivement

$$|i'_n| \leqq \frac{c_9 \sin\theta \sin\varphi}{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\delta+1}} < \frac{c_9 \sin\theta \sin\varphi}{\left(\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^{\delta+1}}.$$

Dans l'intégrale i''_n, $z = e^{i\omega}$, ω croît de $\theta - \varphi$ à θ et

$$0 \leqq \frac{\tau - 1}{\tau} = \frac{\cos(\theta-\varphi) - \cos\omega}{2\sin\theta\sin\varphi} < \frac{\cos(\theta-\varphi) - \cos(\theta+\varphi)}{2\sin\theta\sin\varphi} = 1,$$

puisque $\theta < \theta + \varphi \leqq \pi$; donc dans i''_n

$$|\tau^{\lambda} F(\lambda+1, \lambda, 2, 1-\tau)| = \left| F\left(\lambda, 1-\lambda, 2, \frac{1-\tau}{\tau}\right) \right| < c_{10},$$

et il vient

$$|i''_n| = \left| \int_{e^{i(\theta-\varphi)}}^{e^{i\theta}} \frac{z+1}{(z-1)^{\delta}} z^{n+\delta+\lambda-1} \tau^{\lambda+1} F(\lambda+1, \lambda, 2, 1-\tau)\, dz \right|$$

$$< c_{11} \int_{\theta-\varphi}^{\theta} \frac{|\tau| \cos\frac{\omega}{2}\, d\omega}{\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta}},$$

d'où

$$|i''_n| < c_{11} \sin\theta \sin\varphi \int_{\theta-\varphi}^{\theta} \frac{\sin\omega\, d\omega}{\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+1} [\cos\omega - \cos(\theta+\varphi)]}$$

$$< c_{11} \frac{\sin\theta\sin\varphi}{\left(\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^{\delta+1}} \Bigg|_{\theta-\varphi}^{\theta} \log\frac{1}{\cos\omega - \cos(\theta+\varphi)} < \frac{c_{12}\sin\theta\sin\varphi}{\left(\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^{\delta+1}},$$

puisque pour $\theta + \varphi \leqq \pi$ on a

$$\sin\theta\cos\frac{\varphi}{2} \leqq 2\sin\left(\theta + \frac{\varphi}{2}\right)$$

et

$$\Bigg|_{\theta-\varphi}^{\theta} \log\frac{1}{\cos\omega - \cos(\theta+\varphi)} = \log\left\{ \frac{2\sin\theta\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\left(\theta+\frac{\varphi}{2}\right)} \right\} \leqq \log 4$$

Tous ces résultats nous donnent l'inégalité

$$(19) \quad \frac{\lambda|\lambda-1|}{4\pi(\sin\theta\sin\varphi)^{\lambda+1}} \left\{ |i''_n| + |i'_n| \right\} < \frac{c_{13}}{(\sin\theta\sin\varphi)^{\lambda}\left(\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^{\delta+1}}.$$

Envisageons maintenant l'intégrale

$$i_n''' = e^{-\lambda\pi i}\int_0^{e^{i\theta}} \frac{z+1}{(z-1)^{\delta}} z^{n+\delta+\lambda-1}\tau^{\lambda+1}\,F(\lambda+1,\lambda,2\lambda,\tau)\,dz.$$

Dans cette intégrale $z = t\,e^{i\theta}$, t croît de o à 1 et

$$|\tau(z)| = |\tau(t\,e^{i\theta})| = f(t) = \frac{4t\sin\theta\sin\varphi}{\sqrt{1-2t\cos\varphi+t^2}\sqrt{1-2t\cos(2\theta+\varphi)+t^2}}.$$

La fonction $f(t)$ croît de o à $f(1)$ quand t croît de o à 1, donc $|\tau(z)|$ reste toujours plus petite que

$$f(1) = |\tau(e^{i\theta})| = \frac{2\sin\theta\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\left(\theta+\frac{\varphi}{2}\right)} \leqq 4,$$

puisque pour $\theta \leqq \frac{\pi}{2}$ on a

$$\sin\theta\cos\frac{\varphi}{2} \leqq \sin\left(\theta+\frac{\varphi}{2}\right);$$

soit $\theta > \frac{\pi}{2}$, alors, vu que

$$\frac{\theta+\varphi}{2} \leqq \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi}{2} < \theta + \frac{\varphi}{2} \leqq \frac{\pi+\theta}{2},$$

on a

$$\sin\left(\theta+\frac{\varphi}{2}\right) \geqq \sin\frac{\pi+\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2},$$

ce qui nous donne

$$2\sin\left(\theta+\frac{\varphi}{2}\right) \geqq 2\cos\frac{\theta}{2} \geqq 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \sin\theta\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Désignons par t_0 $(0 < t_0 < 1)$ la valeur de t pour laquelle $|\tau(z)| = 1$, c'est-à-dire la racine de l'équation $f(t) = 1$.

Pour $0 \leqq t \leqq t_0$ nous avons $|\tau| \leqq 1$ et

$$|F_\lambda(\tau)| = \frac{|F(\lambda-1,\lambda,2\lambda,\tau)|}{|1-\tau|} < \frac{C_{14}}{|1-\tau|} \qquad (0 \leqq t \leqq t_0).$$

Pour $t_0 \leqq t \leqq 1$, nous exprimons $F_\lambda(\tau) = F(\lambda+1,\lambda,2\lambda,\tau)$ à l'aide des intégrales $\varphi(\tau)$ et $\psi(\tau)$ de l'équation différentielle hypergéométrique aux paramètres $\alpha = \lambda+1$, $\beta = \lambda$ et $\gamma = 2\lambda$, qui forment son système fondamental dans le domaine du point $\tau = \infty$:

$$(20) \quad \frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\lambda-1)}{\Gamma(2\lambda)} F(\lambda+1, \lambda, 2\lambda, \tau) = \varphi(\tau) + \left\{ \frac{2\,\Gamma'(\lambda)}{\Gamma(\lambda)} - 1 - 2\,\Gamma'(1) \right\} \psi(\tau).$$

Or dans le demi-plan supérieur, $R\left(\frac{\tau}{i}\right) > 0$, on a les expressions suivantes de ces intégrales $\varphi(\tau)$ et $\psi(\tau)$:

$$\psi(\tau) = -\, e^{\lambda\pi i}\,\tau^{-(\lambda+1)}\, F\left(\lambda+1, 2-\lambda, 2, \frac{1}{\tau}\right),$$

$$\varphi(\tau) = (\pi i - \log\tau)\,\psi(\tau) + e^{\lambda\pi i}\,\tau^{-\lambda}\, K\left(\frac{1}{\tau}\right),$$

où la série $K\left(\frac{1}{\tau}\right) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{\tau^n}$ converge absolument et uniformément pour $|\tau| \geqq 1$. Pour $t_0 \leqq t \leqq 1$ on a $1 \leqq |\tau| \leqq 4$, donc la relation (20) nous fournit pour $t_0 \leqq t \leqq 1$:

$$\frac{\Gamma(\lambda)\,|\,\Gamma(\lambda-1)\,|}{\Gamma(2\lambda)} |\,\tau^\lambda F_\lambda(\tau)\,| \leqq |\,\tau^\lambda \varphi(\tau)\,| + \left| \left\{ \frac{2\,\Gamma'(\lambda)}{\Gamma(\lambda)} - 1 + 2\,\Gamma'(1) \right\} \tau^\lambda \psi(\tau) \right|$$
$$< c_{15} + \frac{c_{16}}{|\tau|} \left| F\left(\lambda+1, 2-\lambda, 2, \frac{1}{\tau}\right) \right| < \frac{c_{17}}{|1-\tau|}.$$

Maintenant on voit que l'on a toujours pour $0 \leqq t \leqq 1$

$$(21) \qquad |\,\tau^{\lambda+1} F_\lambda(\tau)\,| < \frac{c_{18}|\,\tau\,|}{|\,1-\tau\,|} < c_{19}\, t \qquad (z = t\, e^{i\theta};\ 0 \leqq t \leqq 1),$$

puisque

$$\left| \frac{\tau}{1-\tau} \right| = \left| \frac{4z \sin\theta \sin\varphi}{1 - 2z\cos(\theta-\varphi) + z^2} \right|$$
$$= \frac{4t \sin\theta \sin\varphi}{\sqrt{1 - 2t\cos\varphi + t^2}\,\sqrt{1 - 2t\cos(2\theta-\varphi) + t^2}}$$
$$\leqq \frac{4t\sin\theta\sin\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right)} \leqq \frac{4t\sin\theta\sin\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}} = \frac{16t\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\theta-\varphi}{2}} < 16t.$$

L'inégalité (21) nous fournit

$$(22) \qquad |\,i_n'''\,| < 2c_{19}\int_0^1 \frac{t^{n+\delta+\lambda}\,dt}{|\,t\,e^{i\theta} - 1\,|^\delta}$$
$$= 2c_{19}\int_0^1 \frac{t^{n+\delta+\lambda}\,dt}{(1 - 2t\cos\theta + t^2)^{\frac{\delta}{2}}}$$
$$< \frac{c_{20}}{(n+1)\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^\delta} < \frac{c_{20}}{(n+1)\left(\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^\delta},$$

et de (18), (19) et (22) on déduit pour i_n l'inégalité

$$(23)\qquad |i_n| < \frac{c_{13}}{(\sin\theta\sin\varphi)^\lambda\left(\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^{\delta+1}} + \frac{c_{20}}{(n+1)(\sin\theta\sin\varphi)^{\lambda+1}\left(\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^{\delta}}.$$

Vu que $\pi \geqq \theta+\varphi > \theta-\varphi > 0$, on a

$$\sin\frac{\theta-\varphi}{2} < \sin\frac{\theta+\varphi}{2};$$

et par conséquent (11) nous donne, eu égard aux inégalités (17), (23) et (14) :

$$(24)\qquad |\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)| < \frac{c_6(n+1)^{\delta-1}}{\left(\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right)^{2\lambda}\left(\sin\frac{|\theta-\varphi|}{2}\right)^2} + \frac{c_{21}}{(\sin\theta\sin\varphi)^\lambda\left(\sin\frac{|\theta-\varphi|}{2}\right)^{\delta+1}} + \frac{c_{20}}{(n+1)(\sin\theta\sin\varphi)^{\lambda+1}\left(\sin\frac{|\theta-\varphi|}{2}\right)^{\delta}}.$$

L'inégalité (24) est établie sous l'hypothèse $\pi \geqq \theta+\varphi > \theta \geqq \varphi > 0$, mais elle a lieu aussi pour $\pi \geqq \theta+\varphi > \varphi \geqq \theta > 0$ puisque ses deux membres sont symétriques par rapport à θ et φ. Elle est valable aussi pour $\theta+\varphi > \pi$ puisque, en posant $\theta' = \pi-\theta$ et $\varphi' = \pi-\varphi$, nous avons d'un côté

$$\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi) = \sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\pi-\theta',\pi-\varphi') = \sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\theta',\varphi'),$$

et de l'autre côté, en appliquant (24) à $\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\theta',\varphi')$, ce qui est permis puisque

$$\theta'+\varphi' = 2\pi-(\theta+\varphi) < \pi \qquad \text{pour } \theta+\varphi > \pi,$$

nous la justifions pour $\theta+\varphi > \pi$, vu que

$$\sin\theta' = \sin\theta, \qquad \sin\varphi' = \sin\varphi,$$

$$\sin\frac{\theta'+\varphi'}{2} = \sin\frac{\theta+\varphi}{2} \qquad \text{et} \qquad |\theta'-\varphi'| = |\theta-\varphi|.$$

On a supposé $0 < \theta < \pi$ et $0 < \varphi < \pi$, mais il est clair que (24) a lieu aussi pour θ, $\varphi = 0$, π puisque alors $\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)$ reste finie tandis que le second membre devient infiniment grand. En observant enfin que

$$\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi) = A_n^{(\delta)} S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi),$$

on a

$$(25)\quad \begin{aligned} |S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)| \leqq\ & \frac{c_{22}}{(n+1)\left(\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}\right)^{2\lambda}\left(\sin\dfrac{|\theta-\varphi|}{2}\right)^{2}} \\ & + \frac{c_{23}}{(n+1)^{\delta}(\sin\theta\sin\varphi)^{\lambda}\left(\sin\dfrac{|\theta-\varphi|}{2}\right)^{\delta+1}} \\ & + \frac{c_{24}}{(n+1)^{\delta+1}(\sin\theta\sin\varphi)^{\lambda+1}\left(\sin\dfrac{|\theta-\varphi|}{2}\right)^{\delta}} \end{aligned}$$

$$(\lambda > 0;\ \delta \geqq 0;\ n = 0, 1, 2, \ldots, \infty;\ 0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq \pi),$$

d'où pour $\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi - \varepsilon$, $|\theta - \varphi| \geqq \dfrac{\pi}{n+1}$ et $\delta \leqq 1$:

$$(26)\quad (\sin\varphi)^{2\lambda}|S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)| \leqq \frac{c_{25}}{(n+1)^{\delta}}\left\{\frac{1}{|\theta-\varphi|^{\delta+1}} + (\sin\varphi)^{\lambda-1}\right\}$$

$$\left(\lambda > 0;\ 0 \leqq \delta \leqq 1;\ n = 0, 1, \ldots, \infty;\ \varepsilon \leqq \theta \leqq \pi - \varepsilon;\ 0 \leqq \varphi \leqq \pi;\ |\theta - \varphi| \geqq \frac{\pi}{n+1}\right).$$

En appliquant la même méthode de Stieltjes à (1), on justifie facilement l'inégalité (12) et la formule approximative suivante pour $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$:

$$(27)\quad P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{2A_n^{(\lambda-1)}\cos\left[(n+\lambda)\theta - \dfrac{\lambda\pi}{2}\right]}{(2\sin\theta)^{\lambda}} + \frac{p_n^{(\lambda)}(\theta)}{(n+1)^{2-\lambda}(\sin\theta)^{\lambda+1}},$$

où

$$|p_n^{(\lambda)}(\theta)| \leqq c_{26} \qquad \text{pour } \frac{\pi}{n+1} \leqq \theta \leqq \pi - \frac{\pi}{n+1}$$

En s'appuyant sur (27) et sur la formule de Christoffel

$$\begin{aligned} S_n^{(0,\lambda)}(\theta,\varphi) = & \frac{2^{\lambda}\Gamma^2(\lambda)}{4\pi}\,\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+2\lambda)} \\ & \times \frac{P_{n+1}^{(\lambda)}(\cos\theta)P_n^{(\lambda)}(\cos\varphi) - P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)P_{n+1}^{(\lambda)}(\cos\varphi)}{\cos\theta - \cos\varphi}, \end{aligned}$$

on démontre la formule approximative

$$(28)\quad \frac{\pi}{2}(\sin\theta\sin\varphi)^{\lambda}\,\mathrm{S}_n^{(0,\lambda)}(\theta,\varphi)$$
$$=\frac{\sin\left[\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)(\theta-\varphi)\right]}{\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}+\frac{\sin\left[\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)(\theta+\varphi)-\lambda\pi\right]}{\sin\frac{\theta+\varphi}{2}}$$
$$+\frac{q_n^{(\lambda)}(\theta,\varphi)}{(n+1)\sin\theta\sin\varphi\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}},$$

où

$$|\,q_n^{(\lambda)}(\theta,\varphi)\,|\leqq c_{27}$$

pour

$$\frac{\pi}{n+1}\leqq\theta\leqq\pi-\frac{\pi}{n+1}\quad\text{et}\quad\frac{\pi}{n+1}\leqq\varphi\leqq\pi-\frac{\pi}{n+1}.$$

L'inégalité

$$|\,\mathrm{P}_n^{(\lambda)}(\cos\theta)\,|\leqq \mathrm{A}_n^{(2\lambda-1)}$$

nous fournit

$$|\,\sigma_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)\,|\leqq\sum_{m=0}^{n}\mathrm{A}_{n-m}^{(\delta)}(m+\lambda)\frac{|\,\mathrm{P}_m^{(\lambda)}(\cos\theta)\,\mathrm{P}_m^{(\lambda)}(\cos\varphi)\,|}{\mathrm{A}_m^{(2\lambda-1)}}$$
$$<2\lambda\sum_{m=0}^{n}\mathrm{A}_{n-m}^{(\delta)}\,\mathrm{A}_m^{(2\lambda)}=2\lambda\,\mathrm{A}_n^{(\delta+2\lambda+1)},$$

donc

$$(29)\qquad |\,\mathrm{S}_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)\,|<c_{28}(n+1)^{2\lambda+1}.$$

En appliquant la méthode de Stieltjes à la fonction génératrice

$$\frac{\lambda(1+z)}{(1-z)^{\delta}(1-2z\cos\gamma+z^2)^{\lambda+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\rho_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma),$$

où

$$\rho_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)=\sum_{m=0}^{n}\mathrm{A}_{n-m}^{(\delta)}(m+\lambda)\,\mathrm{P}_m^{(\lambda)}(\cos\gamma),$$

nous en déduisons pour $1\geqq\lambda>0$, $\lambda+1\geqq\delta\geqq0$ et $\gamma\geqq\frac{\pi}{n+1}$ l'inégalité

$$(30)\qquad (\sin\gamma)^{\lambda}\,|\,\rho_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)\,|<\frac{c_{29}\,\mathrm{A}_n^{(\lambda)}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}}\qquad(0\leqq\gamma\leqq\pi).$$

Elle a lieu aussi pour $0 \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{n+1}$ puisque la définition de $\rho_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)$ donne, eu égard à (12) :

$$|\rho_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)| < \frac{2\lambda\, A_n^{(\delta+\lambda+1)}}{(\sin\gamma)^\lambda} \qquad (0 \leqq \gamma \leqq \pi),$$

d'où l'on obtient (30) pour $0 \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{n+1}$. Pour ôter la restriction $\lambda \leqq 1$ nous observons que l'on a pour $\lambda' = \lambda + 1 > 1$

$$\begin{aligned}\sum_0 z^n \rho_n^{(\delta,\lambda+1)}(\gamma) &= \frac{1+z}{(1-z)^\delta T}\,\frac{\lambda+1}{T^\lambda}\\ &= (\lambda+1)\left\{\sum_0^\infty z^n \rho_n^{(\delta,1)}(\gamma)\right\}\left\{\sum_0^\infty z^n P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)\right\},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}|(\sin\gamma)^{\lambda+1}\rho_n^{(\delta,\lambda+1)}(\gamma)| &= \left|(\sin\gamma)^{\lambda+1}(\lambda+1)\sum_{m=0}^{n}\rho_{n-m}^{(\delta,1)}(\gamma)\,P_m^{(\lambda)}(\cos\gamma)\right|\\ &\leqq (\lambda+1)\sum_{m=0}^{n}|\sin\gamma\,\rho_{n-m}^{(\delta,1)}(\gamma)|\,|(\sin\gamma)^\lambda P_m^{(\lambda)}(\cos\gamma)|\\ &\leqq c_{29}(\lambda+1)\sum_{m=0}^{n}\frac{2A_{n-m}^{(1)}A_m^{(\lambda-1)}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}} = \frac{c_{30}A_n^{(\lambda+1)}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}},\end{aligned}$$

ce qui nous prouve que (30) a lieu pour $\lambda > 1$ quelconque, si l'on suppose qu'elle est vraie pour $\lambda \leqq 1$. Or nous l'avons établie pour $0 < \lambda \leqq 1$ et $0 \leqq \delta \leqq 1$, donc (30) est vraie pour λ quelconque positif et $0 \leqq \delta \leqq 1$. Mais on a aussi

$$\begin{aligned}\sum_0^\infty z^n \rho_n^{(\delta+1,\lambda+1)}(\gamma) &= \frac{\lambda+1}{\lambda}\,\frac{\lambda(1+z)}{(1-z)T^\lambda}\,\frac{1}{(1-z)T}\\ &= \frac{\lambda+1}{\lambda}\left\{\sum_0^\infty z^n \rho_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)\right\}\left\{\sum_0^\infty z^n\,\frac{\cos\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{2n+3}{2}\gamma}{2\sin\frac{\gamma}{2}\sin\gamma}\right\},\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$(31)\qquad |\rho_n^{(\delta+1,\lambda+1)}(\gamma)| < \frac{\lambda+1}{\lambda\sin\frac{\gamma}{2}\sin\gamma}\sum_{m=}|\rho_m^{(\delta,\lambda)}(\gamma)|.$$

Supposons maintenant qu'on a démontré (30) pour $0 \leqq \delta \leqq \lambda+1$ et $\lambda \leqq N = E(N)$. L'inégalité (31) nous prouve que (30) est alors vraie aussi pour $N < \lambda \leqq N+1$ et $1 \leqq \delta \leqq \lambda+1$. Or pour $0 \leqq \delta \leqq 1$ (30) a été établie quel que soit $\lambda > 0$; donc (30) est valable pour $0 \leqq \delta \leqq \lambda+1$ et $\lambda \leqq N+1$, si elle l'est pour $0 \leqq \delta \leqq \lambda+1$ et $\lambda \leqq N$. Mais elle a été établie pour $0 \leqq \delta \leqq \lambda+1$ et $\lambda \leqq 1$, donc (30) a lieu pour $0 \leqq \delta \leqq \lambda+1$ quel que soit $\lambda > 0$.

En désignant la moyenne arithmétique d'ordre δ de la série

$$\sum_{0}^{\infty} (n+\lambda)\, P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)$$

par $s_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)$, nous en déduisons l'inégalité

$$(32) \qquad |s_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)| = \frac{|\rho_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)|}{A_n^{(\delta)}} < \frac{c_{31}(n+1)^{\lambda-\delta}}{(\sin\gamma)^\lambda \left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}}$$

$$(0 \leqq \delta \leqq \lambda+1,\ \lambda > 0,\ 0 \leqq \gamma \leqq \pi).$$

En la substituant dans la formule (6) on obtient

$$|S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi)| < \frac{c_{31}}{\pi}(n+1)^{\lambda-\delta} \int_0^\pi \frac{(\sin\omega)^{2\lambda-1}\, d\omega}{(\sin\gamma)^\lambda \left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}},$$

où

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi\cos\omega,$$

ce qui donne

$$\sin\gamma \geqq \sin\theta \,.\, \sin\omega$$

ainsi que

$$\sin\frac{\gamma}{2} \geqq \sin\frac{|\theta-\varphi|}{2} \qquad \text{et} \qquad \cos\frac{\gamma}{2} \geqq \left|\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\right|,$$

d'où

$$(33) \qquad |S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi)| < \frac{c_{32}(n+1)^{\lambda-\delta}}{(\sin\theta)^\lambda \left(\sin\frac{|\theta-\varphi|}{2}\right)^{\delta+1}}$$

$$(0 \leqq \delta \leqq \lambda+1,\ \lambda > 0,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq \pi).$$

Pour $\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi - \varepsilon$, cette inégalité se réduit à

$$(34) \qquad |S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi)| < \frac{c_{33}(n+1)^{\lambda-\delta}}{|\theta-\varphi|^{\delta+1}}$$

$$(0 \leqq \delta \leqq \lambda+1,\ \lambda > 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq \pi,\ \varepsilon \leqq \theta \leqq \pi-\varepsilon).$$

De même l'inégalité

$$|s_n^{(\delta,\lambda)}(\gamma)| < \frac{c_{34}(n+1)^{2\lambda-\delta}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}} \qquad (\lambda > 0,\ \delta > -1,\ 0 \leqq \gamma \leqq \pi),$$

que nous avons déduite ailleurs [1] aussi par la méthode de Stieltjes, nous fournit l'inégalité correspondante pour $S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)$:

$$(35) \qquad |S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)| < \frac{c_{35}(n+1)^{2\lambda-\delta}}{\left(\sin\frac{|\theta-\varphi|}{2}\right)^{\delta+1}}$$

$$(\lambda > 0,\ \delta > -1,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq \pi).$$

En ce qui concerne $S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)$ pour $\delta \geqq 2\lambda+1$ le fait démontré ailleurs [2] que $s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)$ n'est jamais négative, si $\delta \geqq 2\lambda+1$, nous permet de conclure à l'aide de la formule (6) que l'on a aussi

$$(36) \qquad S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi) \geqq 0$$

$$(\lambda > 0;\ \delta \geqq 2\lambda+1;\ 0 \leqq \theta \leqq \pi;\ 0 \leqq \varphi \leqq \pi;\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty).$$

§ II.

Dans ce paragraphe nous envisageons les majorantes de Lebesgue $R_n^{(\delta,\lambda)}(x)$ d'ordre $\delta < 2\lambda+1$ de la série (III)

$$0 < R_n^{(\delta,\lambda)}(x) = \int_0^\pi |S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)| \sin^{2\lambda}\varphi\, d\varphi$$

$$(x = \cos\theta,\ 0 \leqq \delta < 2\lambda+1).$$

Quant aux majorantes $R_n^{(\delta,\lambda)}(x)$ d'ordres $\delta \geqq 2\lambda+1$ on démontre facilement, en s'appuyant sur (36), que l'on a pour $\delta \geqq 2\lambda+1$ quel que soit θ dans l'intervalle $(0,\pi)$ — $0 \leqq \theta \leqq \pi$ —

$$R_n^{(\delta,\lambda)}(x) = \int_0^\pi S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)\sin^{2\lambda}\varphi\, d\varphi = \frac{\lambda\,\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\int_0^\pi \sin^{2\lambda}\varphi\, d\varphi = 1$$

$$(0 \leqq \theta \leqq \pi,\ \delta \geqq 2\lambda+1).$$

La définition de la majorante peut être formulée ainsi : la $n^{\text{ième}}$ moyenne arithmétique d'ordre δ $f_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\theta)$ de la série (I) s'exprime par l'intégrale

$$f_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\theta) = \int_0^\pi S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi) f(\cos\varphi)\sin^{2\lambda}\varphi\, d\varphi$$

---

(1) *Journal de Liouville*, t. III, 1924, p. 139, form. (37).
(2) *Ibid.*, § 6. p. 169-179.

et $R_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\theta)$ n'est que la borne supérieure de toutes ces moyennes $f_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\theta)$, si l'on choisit les fonctions $f(\cos\varphi)$ dans la classe des fonctions bornées $|f(\cos\varphi)|\leqq 1$. Par conséquent on obtient pour $\theta=\theta_0$ la borne supérieure $R_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\theta_0)$ en choisissant pour la fonction $f(\cos\varphi)$ la fonction sign $S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta_0,\varphi)$, d'où la définition de la majorante donnée plus haut.

Mais la série (I) est le cas particulier pour $F(\theta,\varphi)\equiv f(\cos\theta)$ de la série (II) et l'on peut envisager la borne supérieure

$$\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\rho_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)$$

de toutes les $n^{\text{ièmes}}$ moyennes arithmétiques

$$F_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_S\int\frac{F(\theta',\varphi')\,s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)\,d\sigma'}{[\sin^2\theta'\sin^2(\varphi-\varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}},$$

si l'on n'envisage que les séries (II) des fonctions bornées $|F(\theta,\varphi)|\leqq 1$. Donc on obtient pour $\theta=\theta_0$ et $\varphi=\varphi_0$ la borne supérieure en prenant

$$F(\theta,\varphi)=\text{sign } S_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma),$$

où

$$\cos\gamma=\cos\theta_0\cos\theta+\sin\theta_0\sin\theta\cos(\varphi-\varphi_0),$$

et l'on a

$$\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\rho_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_S\int\frac{|s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)|\,d\sigma'}{[\sin^2\theta'\sin^2(\varphi-\varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}}.$$

Or

$$\sin\theta'\sin(\varphi-\varphi')=\sin\gamma\sin\psi,\qquad d\sigma'=\sin\gamma\,d\gamma\,d\psi$$

et l'on obtient définitivement le résultat que $\rho_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)$ ne dépend point de θ, φ

$$\rho_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)=\rho_n^{(\delta,\lambda)}=\int_0^\pi|s_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\gamma)|\sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma.$$

On voit que l'on a toujours

$$R_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\theta)\leqq\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\rho_n^{(\delta,\lambda)},$$

puisque l'ensemble des fonctions $f_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\theta)$ est contenu dans l'ensemble des fonctions $F_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)$.

Nous avons établi ailleurs (¹) le résultat

$$\rho_n^{(\delta,\lambda)} < \rho \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty;\ \delta > \lambda),$$

où la constante $\rho = \rho(\delta, \lambda)$ ne dépend que de δ et de λ.

Au contraire pour $\delta \leqq \lambda$ on a

$$\lim_{n=\infty} \rho_n^{(\delta,\lambda)} = +\infty \qquad (\delta \leqq \lambda).$$

Maintenant nous pouvons conclure que, quel que soit θ dans l'intervalle $(0, \pi)$, toutes les fonctions

$$R_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\theta) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

sont bornées dans leur ensemble pourvu que l'on ait $\delta > \lambda$

$$R_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\theta) < R \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty;\ \delta > \lambda;\ 0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

et la constante R ne dépend que de δ et de λ.

D'un autre côté il est facile d'établir que pour

$$\theta = 0, \pi \qquad (x = \pm 1),$$

on a tout simplement

$$R_n^{(\delta,\lambda)}(\pm 1) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \rho_n^{(\delta,\lambda)}.$$

On le démontre en s'appuyant sur les relations

$$S_n^{(\delta,\lambda)}\left(\frac{0}{\pi}, \varphi\right) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} s_n^{(\delta,\lambda)}(\pm\cos\varphi).$$

Par conséquent on a pour $\delta \leqq \lambda$

$$\lim_{n=\infty} R_n^{(\delta,\lambda)}(\pm 1) = +\infty \qquad (\delta \leqq \lambda),$$

et dans le cas $\delta \leqq \lambda$ il ne nous reste qu'à étudier les majorantes $R_n^{(\delta,\lambda)}(x)$ à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$, c'est-à-dire

(¹) *Comptes rendus*, t. 164, 1917, p. 627, ainsi que *Journal de Liouville*, t. III, 1924, p. 145, form. (43).

sous l'hypothèse $\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi - \varepsilon$, où la quantité positive ε est autant petite qu'on veut, mais fixe.

Nous allons démontrer que l'on a pour $\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi - \varepsilon$ et $\delta > 0$

$$(37)\qquad R_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\theta) < R = R^{(\delta,\lambda)}(\varepsilon) \qquad (\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi - \varepsilon,\ \delta > 0),$$

où la constante R ne dépend pas de θ et de $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$:

$$R_n^{(\delta,\lambda)}(x) = \int_0^{\pi} |S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi)| \sin^{2\lambda}\varphi \, d\varphi = \int_0^{\theta - \frac{\pi}{n+1}} + \int_{\theta - \frac{\pi}{n+1}}^{\theta + \frac{\pi}{n+1}} + \int_{\theta + \frac{\pi}{n+1}}^{\pi}$$
$$= \mathfrak{I}'_n + \mathfrak{I}''_n + \mathfrak{I}'''_n.$$

L'inégalité (13) nous donne pour $\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi - \varepsilon$

$$\mathfrak{I}''_n < \frac{c_{36}(n+1)}{(\sin\varepsilon)^{\lambda}} \int_{\theta - \frac{\pi}{n+1}}^{\theta + \frac{\pi}{n+1}} \sin^{\lambda}\varphi \, d\varphi < \frac{2\pi}{(\sin\varepsilon)^{\lambda}} c_{36} = c_{37} \qquad (\delta \geqq 0)$$

Dans les intégrales $\mathfrak{I}'_n$ et $\mathfrak{I}'''_n$ nous appliquons l'inégalité (26), en supposant $\delta \leqq 1$:

$$\mathfrak{I}'_n + \mathfrak{I}'''_n < \frac{c_{25}}{(n+1)^{\delta}} \left\{ \int_0^{\theta - \frac{\pi}{n+1}} \frac{d\varphi}{(\theta - \varphi)^{\delta+1}} + \int_{\theta + \frac{\pi}{n+1}}^{\pi} \frac{d\varphi}{(\varphi - \theta)^{\delta+1}} + \int_0^{\pi} (\sin\varphi)^{\lambda-1} d\varphi \right.$$
$$= \frac{c_{25}}{(n+1)^{\delta}} \left\{ \left|_0^{\theta - \frac{\pi}{n+1}} \frac{1}{\delta(\theta - \varphi)^{\delta}} - \right|_{\theta + \frac{\pi}{n+1}}^{\pi} \frac{1}{\delta(\varphi - \theta)^{\delta}} + c_{38} \right\}$$
$$= \frac{c_{25}}{\delta(n+1)^{\delta}} \left\{ 2\left(\frac{n+1}{\pi}\right)^{\delta} - \frac{1}{\theta^{\delta}} - \frac{1}{(\pi - \theta)^{\delta}} + c_{38} \right\} < \frac{c_{39}}{\delta}.$$

Donc l'inégalité (37) est établie pour $\delta \leqq 1$.

Quant aux majorantes $R_n^{(\delta,\lambda)}(x)$ avec $\delta > 1$, la relation

$$\sigma_n^{(\delta',\lambda)}(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta'-\delta-1)} \sigma_m^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi) \qquad (\delta' > \delta),$$

qu'on peut transcrire ainsi

$$A_n^{(\delta')} S_n^{(\delta',\lambda)}(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta'-\delta-1)} A_m^{(\delta)} S_m^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi) \qquad (\delta' > \delta),$$

nous fournit l'inégalité

$$A_n^{(\delta')} R_n^{(\delta',\lambda)}(x) \leqq \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta'-\delta-1)} A_m^{(\delta)} R_m^{(\delta,\lambda)}(x)$$

$$\leqq \underset{0 \leqq r \leqq n}{\text{maximum}}\, R_r^{(\delta,\lambda)}(x) \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta'-\delta-1)} A_m^{(\delta)}$$

$$= A_n^{(\delta')} \underset{0 \leqq r \leqq n}{\text{maximum}}\, R_r^{(\delta,\lambda)}(x),$$

c'est-à-dire pour $\delta' > \delta$ on a

$$R_n^{(\delta',\lambda)}(x) \leqq \underset{0 \leqq n \leqq m}{\text{maximum}}\, R_m^{(\delta,\lambda)}(x) \qquad (\delta' > \delta).$$

On voit que l'inégalité (37) est démontrée aussi pour $\delta \geqq 1$. Étudions maintenant $R_n^{(\delta,\lambda)}(x)$ pour $\delta = 0$

$$R_n^{(0,\lambda)}(x) = \int_0^{\pi} |\, S_n^{(0,\lambda)}(\theta, \varphi)\,| \sin^{2\lambda}\varphi \, d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} + \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\theta - \frac{\pi}{n+1}} + \int_{\theta - \frac{\pi}{n+1}}^{\theta + \frac{\pi}{n+1}} + \int_{\theta + \frac{\pi}{n+1}}^{\pi - \frac{\pi}{n+1}} + \int_{\pi - \frac{n}{n+1}}^{\pi}$$

$$= \mathfrak{I}_n^{(1)} \quad + \mathfrak{I}_n^{(2)} \quad + \mathfrak{I}_n^{(3)} \quad + \mathfrak{I}_n^{(4)} \quad + \mathfrak{I}_n^{(5)}$$

L'inégalité (29), appliquée aux intégrales $\mathfrak{I}_n^{(1)}$ et $\mathfrak{I}_n^{(5)}$, donne

$$\mathfrak{I}_n^{(1)} + \mathfrak{I}_n^{(5)} < c_{28}(n+1)^{2\lambda+1} \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \varphi^{2\lambda}\, d\varphi = c_{28} \frac{\pi^{2\lambda+1}}{2\lambda+1} = O(1),$$

Quant à l'intégrale $\mathfrak{I}_n^{(3)}$ on a vu plus haut qu'elle est bornée

$$\mathfrak{I}_n^{(3)} < \frac{2\pi}{(\sin\varepsilon)^{\lambda}} c_{36} = c_{37} = O(1),$$

donc on a

$$R_n^{(0,\lambda)}(\cos\theta) = O(1) + \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\theta - \frac{\pi}{n+1}} |\, S_n^{(0,\lambda)}(\theta, \varphi)\,| \sin^{2\lambda}\varphi \, d\varphi$$

$$+ \int_{\theta + \frac{\pi}{n+1}}^{\pi - \frac{\pi}{n+1}} |\, S_n^{(0,\lambda)}(\theta, \varphi)\,| \sin^{2\lambda}\varphi \, d\varphi.$$

Aux intégrales $\mathfrak{I}_n^{(2)}$ et $\mathfrak{I}_n^{(4)}$ nous appliquons la formule approximative (28), qui donne pour $\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi - \varepsilon$

$$\sin^\lambda\varphi \,|\, S_n^{(0,\lambda)}(\theta,\varphi) \,| = \frac{2}{\pi}\,\frac{\left|\sin\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)(\theta-\varphi)\right|}{\sin^\lambda\theta \sin\frac{|\theta-\varphi|}{2}} + \eta_n^{(\lambda)}(\theta,\varphi),$$

où pour

$$\frac{\pi}{n+1} \leqq \varphi \leqq \pi - \frac{\pi}{n+1},$$

$\eta_n^{(\lambda)}(\theta,\varphi)$ satisfait à l'inégalité

$$\eta_n^{(\lambda)}(\theta,\varphi) = O(1) + O\left[\frac{1}{(n+1)\sin\varphi \sin\frac{|\theta-\varphi|}{2}}\right].$$

La contribution dans $\mathfrak{z}_n^{(2)}$ et $\mathfrak{z}_n^{(4)}$ qui provient de $\eta_n^{(\lambda)}(\theta,\varphi)$ est bornée, donc

$$R_n^{(0,\lambda)}(\cos\lambda) = O(1) + \frac{2}{\pi\sin^\lambda\theta}\left(\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\theta-\frac{\pi}{n+1}} + \int_{\theta+\frac{\pi}{n+1}}^{\pi-\frac{\pi}{n+1}}\right) \times \left|\frac{\sin\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)(\theta-\varphi)}{\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}\right| \sin^\lambda\varphi\, d\varphi.$$

En complétant les intervalles d'intégration jusqu'à $(0,\pi)$ on ajoute des quantités bornées et l'on a

$$R_n^{(0,\lambda)}(\cos\theta) = O(1) + \frac{4}{\pi\sin^\lambda\theta}\int_0^\pi \left|\frac{\sin\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)(\theta-\varphi)}{\theta-\varphi}\right| \sin^\lambda\varphi\, d\varphi,$$

puisque le changement de $2\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$ par $\theta-\varphi$ sous le signe somme n'altère l'intégrale que d'une quantité bornée.

Vu que

$$\int_0^\pi \left|\frac{\sin\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)(\theta-\varphi)}{\theta-\varphi}\right| \sin^\lambda\varphi\, d\varphi$$

$$= O(1) + \sin^\lambda\theta \int_0^\pi \left|\frac{\sin\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)(\theta-\varphi)}{\theta-\varphi}\right| d\varphi,$$

on obtient définitivement

$$\begin{aligned}
R_n^{(0,\lambda)}(\cos\theta) &= O(1) + \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\sin\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)(\theta-\varphi)\right| \frac{d\varphi}{|\theta-\varphi|} \\
&= O(1) + \frac{4}{\pi}\int_0^{\theta} \left|\sin\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)u\right| \frac{du}{u} \\
&\quad + \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi-\theta} \left|\sin\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)u\right| \frac{du}{u}.
\end{aligned}$$

Or pour $\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi - \varepsilon$, les intégrales prises de θ à π et de $\pi-\theta$ à π étant bornées on peut écrire

$$R_n^{(0,\lambda)}(\cos\theta) = O(1) + \frac{8}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\sin\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)u\right| \frac{du}{u},$$

et la substitution $v = \left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right) u$ nous fournit

$$R_n^{(0,\lambda)}(\cos\theta) = O(1) + \frac{8}{\pi}\int_{\pi}^{(n+1)\pi} |\sin v| \frac{dv}{v}.$$

On a

$$\int_{\pi}^{(n+1)\pi} |\sin v| \frac{dv}{v} = \frac{2}{\pi}\log(n+1) + O(1),$$

et l'on trouve définitivement

$$R_n^{(0,\lambda)}(\cos\theta) = \frac{16}{\pi^2}\log(n+1) + r_n^{(\lambda)}(\theta),$$

où les fonctions $r_n^{(\lambda)}(\theta)$ restent bornées dans leur ensemble pour $\lambda > 0$ et $\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi - \varepsilon_1$.

Il est donc démontré que $R_n^{(0,\lambda)}(x) \to \infty$ avec $\frac{1}{n}$ et aussi

$$\lim_{n=\infty} \frac{R_n^{(0,\lambda)}(x)}{\log(n+1)} = \frac{16}{\pi^2} \qquad (\lambda > 0,\ |x| \leqq 1-\varepsilon),$$

uniformément dans l'intervalle $(\varepsilon - 1,\ 1-\varepsilon)$.

Les inégalités (25), (34) et (35) résolvent le problème de la sommation (C, δ) de la série ultrasphérique (III)

$$\text{(III)} \quad 0 \sim \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \sum_0^{\infty} (n+\lambda)\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(n+2\lambda)} P_n^{(\lambda)}(x) P_n^{(\lambda)}(y)$$

$$(\lambda > 0).$$

L'inégalité (35) nous montre que cette série est sommable $(C, \delta > 2\lambda)$ pour $x \neq y$, quels que soient x et y, $-1 \leqq x, y \leqq +1$; la sommabilité $(C, \delta > 2\lambda)$ est uniforme pour $|x-y| \geqq \varepsilon > 0$. Pour $x = -y = \pm 1$, la série (III) n'est pas sommable $(C, \delta = 2\lambda)$, puisque alors son terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n \Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}(n+\lambda)\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+1)}$$

ne satisfait pas à la condition nécessaire $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{u_n}{n^{2\lambda}} = 0$ de la sommabilité $(C, \delta = 2\lambda)$. Mais, si l'on n'envisage la série (III) qu'en points intérieurs $|x| < 1$ de l'intervalle $(-1, +1)$, l'ordre de la sommabilité $\delta > 2\lambda$ peut être abaissé jusqu'à $\delta > \lambda$, comme on le démontre, en s'appuyant sur l'inégalité (34). Cette inégalité prouve que la série (III) pour $x \neq y$ est sommable (C, δ) pour $\lambda < \delta \leqq \lambda + 1$, donc *a fortiori* sommable (C, δ) pour chaque $\delta > \lambda$, si $-1 < x < +1$ et $-1 \leqq y \leqq +1$; la sommabilité est uniforme pour $|x| \leqq 1 - \varepsilon_1$ $(\varepsilon_1 > 0)$ et $|x-y| \geqq \varepsilon_2 > 0$. Pour $|y| = 1$ la série (III) n'est pas sommable $(C, \delta = \lambda)$, quel que soit x, puisque alors son terme général

$$u_n = \pm \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}(n+\lambda)\, P_n^{(\lambda)}(x)$$

ne satisfait pas à la condition nécessaire $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{u_n}{n^{\lambda}} = 0$ de la sommabilité $(C, \delta = \lambda)$. Enfin pour $|x| < 1$ et $|y| < 1$, la série (III), est sommable $(C, \delta > 0)$ pour chaque $\delta > 0$, si $x \neq y$; la sommabilité est uniforme pour $|x-y| \geqq \varepsilon_1 > 0$, $|x| \leqq 1 - \varepsilon_2$ $(\varepsilon_2 > 0)$ et $|y| \leqq 1 - \varepsilon_3$ $(\varepsilon_3 > 0)$. On le démontre à l'aide de l'inégalité (25). La formule approximative (28) nous montre que la série (III) diverge toujours, c'est-à-dire n'est jamais sommable $(C, \delta = 0)$. Dans tous les cas de la sommabilité $(C, \delta > 0)$ de la série (III) sa somme est nulle et il est facile de voir que la méthode de sommation par les moyennes arithmétiques ne peut lui assigner que la somme zéro puisque pour chaque série $\sum\limits^{\infty} u_n$, sommable (C, δ) avec la somme s, on a

$$s = \lim_{n=\infty} s_n^{(\delta)} = \lim_{r=1-0} \sum_0 u_n r^n,$$

et la formule (4) nous montre que pour $x \neq y$ la somme s de la série (III) ne peut être que zéro.

§ III.

Le même raisonnement démontre la divergence de la série ultrasphérique (I) de la fonction

$$F(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin\left[\left(2^{m^3} + \lambda + \frac{1}{2}\right) | \theta_0 - \theta |\right] \qquad (0 < \theta_0 < \pi)$$

en un point $\theta = \theta_0$ intérieur à l'intervalle $(0, \pi)$, quoique la fonction développée est continue dans tout intervalle $(0, \pi)$.

La somme partielle — $F_r(\theta)$ — de la série ultrasphérique (I) de F (θ) s'exprime par l'intégrale

$$F_r(\theta) = \int_0^{\pi} F(\varphi)\, S_r(\theta, \varphi) \sin^{2\lambda}\varphi \, d\varphi,$$

où

$$S_r(\theta, \varphi) \equiv S_r^{(0,\lambda)}(\theta, \varphi).$$

En désignant la fonction

$$\sin\left[\left(2^{m^3} + \lambda + \frac{1}{2}\right) | \theta_0 - \theta |\right]$$

par $f^{(\mu)}(\theta)$, où $\mu = \mu(m) = 2^{m^3}$, et la somme partielle de la série (I) de $f^{(\mu)}(\theta)$ par $f_r^{(\mu)}(\theta)$, on obtient

$$F_r(\theta) = \int_0^{\pi} \left[\sum_1^{\infty} \frac{f^{(\mu)}(\varphi)}{m^2}\right] S_r(\theta, \varphi) \sin^{2\lambda}\varphi \, d\varphi = \sum_1^{\infty} \frac{f_r^{(\mu)}(\theta)}{m^2};$$

d'où, en posant $f_r^{(\mu)}(\theta_0) = s_r^{(\mu)}$ et $F_r = F_r(\theta_0)$,

$$F_r(\theta_0) = F_r = \sum_1^{\infty} \frac{s_r^{(\mu)}}{m^2} \qquad (\mu = 2^{m^3})$$

On a

$$s_r^{(\mu)} = f_r^{(\mu)}(\theta_0) = \int_0^{\pi} \sin\left[\left(\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)|\theta_0-\varphi|\right] S_r(\theta_0, \varphi)\sin^{2\lambda}\varphi\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{r+1}} + \int_{\frac{\pi}{r+1}}^{\theta_0-\frac{\pi}{r+1}} + \int_{\theta_0-\frac{\pi}{r+1}}^{\theta_0+\frac{\pi}{r+1}} + \int_{\theta_0+\frac{\pi}{r+1}}^{\pi-\frac{\pi}{r+1}} + \int_{\pi-\frac{\pi}{r+1}}^{\pi}$$

$$= I_1 \quad + I_2 \quad + I_3 \quad + I_4 \quad + I_5.$$

Les inégalités (13) et (29) nous montrent que les intégrales I_1, I_3 et I_5 sont bornées :

$$s_r^{(\mu)} = O(1) + \left(\int_{\frac{\pi}{r+1}}^{\theta-\frac{\pi}{r+1}} + \int_{\theta_0+\frac{\pi}{r+1}}^{\pi-\frac{\pi}{r+1}}\right) \sin\left[\left(\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)|\theta_0-\varphi|\right]$$
$$\times S_r(\theta_0, \varphi)\sin^{2\lambda}\varphi\, d\varphi.$$

La formule (28) pour $0 < \theta_0 < \pi$ donne

$$\sin^{\lambda}\varphi\, Sr(\theta_0, \varphi) = \frac{2}{\pi \sin^{\lambda}\theta_0} \frac{\sin\left[\left(r+\lambda+\frac{1}{2}\right)(\theta_0-\varphi)\right]}{\sin\frac{\theta_0-\varphi}{2}} + \eta_r(\varphi),$$

où

$$\eta_r(\varphi) = O(1) + O\left[\frac{1}{(r+1)\sin\varphi \sin\frac{|\theta_0-\varphi|}{2}}\right]$$

pour

$$\frac{\pi}{r+1} \leqq \varphi \leqq \pi - \frac{\pi}{r+1}.$$

On voit que d'un côté la contribution que donne $\eta_r(\varphi)$ dans I_2 et I_4 est bornée et que de l'autre côté pour $\theta_0 > \varepsilon > \frac{\pi}{r+1}$ on a

$$\left(\int_{\frac{\pi}{r+1}}^{\theta_0-\varepsilon} + \int_{\theta_0+\varepsilon}^{\pi-\frac{\pi}{r+1}}\right) \sin\left[\left(\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)|\theta_0-\varphi|\right]$$
$$\times \frac{\sin\left[\left(r+\lambda+\frac{1}{2}\right)(\theta_0-\varphi)\right]}{\sin\frac{\theta_0-\varphi}{2}} \sin^{\lambda}\varphi\, d\varphi = O(1),$$

où ε est aussi petite qu'on veut, mais fixe. Donc

$$s_r^{(\mu)} = O(1) + \frac{2}{\pi \sin^\lambda \theta_0}\left(\int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0-\frac{\pi}{r+1}} + \int_{\theta_0+\frac{\pi}{r+1}}^{\theta_0+\varepsilon}\right) \sin\left[\left(\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)(\theta_0-\varphi)\right]$$
$$\times \sin\left[\left(r+\lambda+\frac{1}{2}\right)(\theta_0-\varphi)\right] \frac{\sin^\lambda\varphi}{\sin\frac{\theta_0-\varphi}{2}}\,d\varphi.$$

On démontre facilement qu'on peut remplacer sous les signes somme $\sin^\lambda\varphi$ par $\sin^\lambda\theta_0$ puisque l'erreur qui en résulte est toujours bornée, et en décomposant le produit des sinus en une différence des cosinus, il vient

$$\begin{aligned}
s_r^{(\mu)} = O(1) &+ \frac{1}{\pi}\int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0-\frac{\pi}{r+1}} \cos[(r-\mu)(\theta_0-\varphi)]\frac{d\varphi}{\sin\frac{\theta_0-\varphi}{2}} \\
&+ \frac{1}{\pi}\int_{\theta_0+\frac{\pi}{r+1}}^{\theta_0+\varepsilon} \cos[(r-\mu)(\theta_0-\varphi)]\frac{d\varphi}{\sin\frac{\varphi-\theta_0}{2}} \\
&- \frac{1}{\pi}\int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0-\frac{\pi}{r+1}} \cos[(r+\mu+2\lambda+1)(\theta_0-\varphi)]\frac{d\varphi}{\sin\frac{\theta_0-\varphi}{2}} \\
&- \frac{1}{\pi}\int_{\theta_0+\frac{\pi}{r+1}}^{\theta_0+\varepsilon} \cos[(r+\mu+2\lambda+1)(\theta_0-\varphi)]\frac{d\varphi}{\sin\frac{\varphi-\theta_0}{2}} \\
= O(1) &+ \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{r+1}}^{\varepsilon} \cos[(r-\mu)u]\frac{du}{\sin\frac{u}{2}} \\
&- \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{r+1}}^{\varepsilon} \cos[(r+\mu+2\lambda+1)u]\frac{du}{\sin\frac{u}{2}} \\
= O(1) &+ \frac{2}{\pi}\mathfrak{z}_1^{(r)} - \frac{2}{\pi}\mathfrak{z}_2^{(r)}.
\end{aligned}$$

La fonction $\dfrac{1}{\sin\frac{u}{2}}$ étant décroissante, il est facile de prouver que l'on a $\mathfrak{z}_2^{(r)} = O(1)$ en décomposant l'intervalle $\left(\frac{\pi}{r+1}, \varepsilon\right)$ en intervalles partiels dans lesquels $\cos[(r+\mu+2\gamma+1)u]$ est alternativement positif ou négatif.

En appliquant pour $r \neq \mu$ le même raisonnement à l'intégrale $\mathfrak{z}_1^{(r)}$, on établit aussi qu'elle est bornée pour $\frac{r+1}{|r-\mu|} = O(1)$, et il est démontré que les sommes $s_r^{(\mu)}$ sont toutes bornées dans leur ensemble si $r \neq \mu$ et si $\frac{r+1}{|r-\mu|} = O(1)$. Soit maintenant $r = \mu$.

On a

$$s_r^{(r)} = O(1) + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{r+1}}^{\varepsilon} \frac{du}{\sin\frac{u}{2}} = O(1) + \frac{4}{\pi}\int_{\frac{\pi}{r+1}}^{\varepsilon} \frac{du}{u} = \frac{4}{\pi}\log(r+1) + O(1),$$

et par conséquent

$$s_r^{(r)} = \frac{4}{\pi}\log r + O(1).$$

Posons $r = 2^{n^3}$. Vu que $\mu = 2^{m^3}$, on a pour $r \neq \mu$

$$\frac{r+1}{|r-\mu|} = O(1)$$

et l'on obtient

$$\begin{aligned} F_r = F_r(\theta_0) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{s_r^{(\mu)}}{m^2} = \sum_{m \neq n} \frac{s_r^{(\mu)}}{m^2} + \frac{s_r^{(r)}}{n^2} = \sum_{m \neq n} \frac{O(1)}{m^2} + \frac{s_r^{(r)}}{n^2} \\ &= O\left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{m^2}\right) + \frac{4\log 2}{\pi} n + O(1) = \frac{4\log 2}{\pi}(n+1) + O(1). \end{aligned}$$

Ce résultat

$$\lim_{n=\infty} \frac{F_{2^{n^3}}(\theta_0)}{n+1} = \frac{4\log 2}{\pi}$$

prouve que la série ultrasphérique (1) de $F(\theta)$ diverge pour $\theta = \theta_0$, quoique cette fonction est continue dans tout intervalle $(0, \pi)$.

Le second exemple est particulièrement simple : la série ultrasphérique est formée à l'aide de la suite bien connue de Fejér e_1, $e_2, e_3, \ldots, e_n, \ldots$. M. L. Fejér a démontré ([1]) que la série trigonométrique $\sum_1^{\infty} e_n \cos n\theta$ est la série de Fourier d'une fonction continue partout dans $(-\pi, +\pi)$, mais $\sum_1^{\infty} e_n$, c'est-à-dire la série de Fourier pour $\theta = 0$, diverge. Les nombres e_n de M. L. Fejér

---

([1]) L. Fejér. *Sur les singularités, etc.* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. 28, 1911, p. 83).

sont définis ainsi : posons $H_0 = 0$ et pour $r \geqq 1$

$$H_r = 2.\left[2^{1^3} + 2^{2^3} + 2^{3^3} + \ldots + 2^{(r-1)^3} + 2^{r^3}\right];$$

chaque entier n définit alors deux autres entiers r_n et h_n tels que $H_{r_{n-1}} < n \leqq H_{r_n}$ et $n = H_{r_{n-1}} + h_n$, donc $1 \leqq h_n \leqq H_{r_n} - H_{r_{n-1}} = 2.2^{r_n^3}$.

On a par définition

$$e_n = \frac{1}{r_n^2\left[2^{r_n^3} - h_n + e\right]},$$

où $e = 1$ pour $1 \leqq h_n \leqq 2^{r_n^3}$ et $e = 0$ pour $2^{r_n^3} < h_n \leqq 2.2^{r_n^3}$.

M. Gronwall a appliqué avec succès (1) cette suite $e_1, e_2, \ldots e_n, \ldots$ pour former la série de Legendre $\sum_1^\infty e_n . P_n(\cos\theta)$, qui diverge pour $\theta = 0$ quoiqu'elle est la série de Fourier d'une fonction continue partout dans $(0, \pi)$. Cette suite de M. Fejér peut servir dans le cas général de λ quelconque pour former la fonction continue partout dans $(0, \pi)$, dont la série ultrasphérique

$$(38) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n \Gamma(n+1)\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(n+2\lambda)} P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$$
$$= \frac{e_1 P_1^{(\lambda)}(\cos\theta)}{A_1^{(2\lambda-1)}} + \frac{e_2 P_2^{(\lambda)}(\cos\theta)}{A_2^{(2\lambda-1)}} + \ldots + \frac{e_n P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)}{A_n^{(2\lambda-1)}} + \ldots$$

diverge au point $\theta = 0$, converge pour $\theta > 0$ et converge uniformément dans l'intervalle $\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi$ $(\varepsilon > 0)$. La série de M. L. Fejér $\sum_1^\infty e_n . \cos n\theta$ n'est que le cas particulier pour $\lambda \to 0$ de notre série (38).

Tout ce qui suit est basé sur les formules suivantes (2) :

$$(39_1) \quad P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{2^{1-\lambda}(\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}-\lambda}\,\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)\Gamma(n+1)} \int_0^\theta \frac{\cos[(n+\lambda)\omega]\,d\omega}{(\cos\omega - \cos\theta)^{1-\lambda}}$$
$$(n \geqq 0, \quad \lambda > 0).$$

$$(39_2) \quad P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{2^{1-\lambda}(\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}-\lambda}\,\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)\Gamma(n+1)} \int_\theta^\pi \frac{\cos[(n+\lambda)\omega - \lambda\pi]\,d\omega}{(\cos\theta - \cos\omega)^{1-\lambda}}$$
$$(n \geqq 0, \quad \lambda > 0).$$

(1) GRONWALL, *Mathem. Annalen*, t. 74, 1913, p. 230-233.
(2) LETNIKOFF, *Mathem. Zbornik* (Moscou), t. 12, p. 240.

Ces formules généralisent les formules bien connues de Mehler et se réduisent aux dernières pour $\lambda = \frac{1}{2}$.

Désignons par $C^{(\lambda)}_{n,m}(\theta)$ la somme suivante :

$$\begin{aligned} C^{(\lambda)}_{n,m}(\theta) = & \frac{1}{n}\frac{P^{(\lambda)}_{m+1}(\cos\theta)}{A^{(2\lambda-1)}_{m+1}} + \frac{1}{n-1}\frac{P^{(\lambda)}_{m+2}(\cos\theta)}{A^{(2\lambda-1)}_{m+2}} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1}{2}\frac{P^{(\lambda)}_{m+n-1}(\cos\theta)}{A^{(2\lambda-1)}_{m+n-1}} + \frac{P^{(\lambda)}_{m+n}(\cos\theta)}{A^{(2\lambda-1)}_{m+n}} \\ & - \frac{P^{(\lambda)}_{m+n+1}(\cos\theta)}{A^{(2\lambda-1)}_{m+n+1}} - \frac{1}{2}\frac{P^{(\lambda)}_{m+n+2}(\cos\theta)}{A^{(2\lambda-1)}_{m+n+2}} \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & - \frac{1}{n-1}\frac{P^{(\lambda)}_{m+2n-1}(\cos\theta)}{A^{(2\lambda-1)}_{m+2n-1}} - \frac{1}{n}\frac{P^{(\lambda)}_{m+2n}(\cos\theta)}{A^{(2\lambda-1)}_{m+2n}}. \end{aligned}$$

M. L. Fejér a démontré que la somme trigonométrique correspondante

$$\begin{aligned} C^{(0)}_{n,m}(\theta) = \lim_{\lambda=0} C^{(\lambda)}_{n,m}(\theta) = & \frac{\cos(m+1)\theta}{n} + \frac{\cos(m+2)\theta}{n-1} + \ldots + \frac{\cos(m+n)\theta}{1} \\ & - \frac{\cos(m+n+1)\theta}{1} - \frac{\cos(m+n+2)\theta}{2} - \ldots - \frac{\cos(m+2n)\theta}{n} \end{aligned}$$

et la somme analogue $\sum_{k=1}^{n} \frac{(\sin m+k)}{n-k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(m+n+k)\theta}{k}$ restent toujours en valeur absolue plus petites que $\pi+2$. On en déduit que l'on a aussi pour $0 \leqq \theta \leqq \pi$ quel que soit λ

$$\begin{aligned} |A_{n,m}(\theta)| = & \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(m+k+\lambda)\theta}{n-k+1} \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(n+m+k+\lambda)\theta}{k} \right| < 2(\pi+2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |B_{n,m}(\theta)| = & \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos[m+k+\lambda)\theta - \lambda\pi]}{n-k+1} \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos[(n+m+k+\lambda)\theta - \lambda\pi]}{k} \right| < 2(\pi+2). \end{aligned}$$

On prouve maintenant, en s'appuyant sur les formules (39), que l'on a

$$|C_{n,m}^{(\lambda)}(\theta)| = 2^{\lambda+1}(\pi+2) \qquad \begin{pmatrix} n,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty \\ 0 \leqq \theta \leqq \pi \\ \lambda > 0 \end{pmatrix}.$$

Soit d'abord $\theta \leqq \frac{\pi}{2}$. La formule (39_1) nous donne, en posant

$$\sin\frac{\omega}{2} = u.\ \sin\frac{\theta}{2},$$

$$C_{n,m}^{(\lambda)}(\theta)| = \frac{2^{1-\lambda}(\sin\theta)^{1-2\lambda}\Gamma(2\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)}\int_0^\theta \frac{|A_{n,m}(\omega)|\,d\omega}{(\cos\omega - \cos)\theta^{1-\lambda}}$$

$$< \frac{2^{2-\lambda}(\pi+2)\,\Gamma(2\lambda)}{(\sin\theta)^{2\lambda-1}\Gamma^2(\lambda)}\int_0^1 \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\,du}{\left[2\sin^2\frac{\theta}{2}(1-u^2)\right]^{1-\lambda}\sqrt{1-u^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$< \frac{4(\pi+2)\,\Gamma(2\lambda)}{2^{2\lambda-1}\Gamma^2(\lambda)\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2\lambda}}\int_0^1 \frac{du}{(1-u^2)^{1-\lambda}}$$

$$= \frac{2(\pi+2)}{\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2\lambda}} \leqq \frac{2(\pi+2)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2\lambda}} = 2^{\lambda+1}(\pi+2).$$

Pour $\theta \geqq \frac{\pi}{2}$ la formule (39_2) nous fournit la même conclusion

$$|C_{n,m}^{(\lambda)}(\theta)| < \frac{2(\pi+2)}{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2\lambda}} \leqq \frac{2(\pi+2)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2\lambda}} = 2^{\lambda+1}(\pi+2) \quad \left(\theta \geqq \frac{\pi}{2}\right).$$

Revenons maintenant à la série ultrasphérique (38). Posons $2g_r = H_r - H_{r-1}$ $(r \geqq 1)$ et groupons les termes de la série (38), en prenant $2g_r$ termes dans le $r^{\text{ième}}$ groupe. Eu égard aux définitions des nombres e_n et des sommes $C_{n,\,m}^{(\lambda)}(\theta)$, on voit que le $r^{\text{ième}}$ groupe n'est que

$$\frac{1}{r^2}C_{g_r,H_{r-1}}^{(\lambda)}(\theta) \qquad \begin{pmatrix} n = g_r \\ m = H_{r-1} \end{pmatrix};$$

donc la série (38) définit la fonction

$$(40) \qquad F^{(\lambda)}(\cos\theta) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} C_{g_r,H_{r-1}}^{(\lambda)}(\theta).$$

Or $|C_{n,m}^{(\lambda)}(\theta)| < 2^{\lambda+1}(\pi+2)$ et la série (40) converge absolument et uniformément dans $(0,\ \pi)$. Par conséquent $F^{(\lambda)}(\cos\theta)$

est continue dans tout intervalle $(0, \pi)$. Pour calculer les coefficients de la série ultrasphérique (I) de $F^{(\lambda)}(\cos\theta)$ nous pouvons substituer dans les intégrales

$$\int_0^\pi F^{(\lambda)}(\cos\varphi)\, P_n^{(\lambda)}(\cos\varphi)\sin^{2\lambda}\varphi\, d\varphi.$$

la série (40) à la fonction $F^{(\lambda)}(\cos\varphi)$, puisqu'elle converge uniformément; mais $P_n^{(\lambda)}(\cos\varphi)$ n'entre que dans le $r_n^{\text{ième}}$ groupe

$$\frac{1}{r_n^2}\, C^{(\lambda)}_{g r_n, H_{r_n-1}}(\varphi)$$

et l'on obtient définitivement $\dfrac{e_n}{A_n^{(2\lambda-1)}}$ comme coefficient de $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ dans le développement ultrasphérique (I) de $F^{(\lambda)}(\cos\theta)$.

On voit que (38) représente la série ultrasphérique de Fourier de la fonction $F^{(\lambda)}(\cos\theta)$

$$F^{(\lambda)}(\cos\theta) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n\, P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)}{A_n^{(2\lambda-1)}}.$$

Ce développement se réduit pour $\theta = 0$ à la série divergente $\sum\limits_1^\infty e_n$ quoique la fonction développée $F^{(\lambda)}(\cos\theta)$ est continue partout dans $(0, \pi)$.

La série $\sum\limits_1^\infty e_n$ est sommable $(C, \delta > 0)$ avec la somme zéro puisque la série $\sum\limits_1^\infty e_n \cos n\theta$ est la série trigonométrique de Fourier d'une fonction continue partout dans $(-\pi, +\pi)$ et qui s'annule pour $\theta = 0$.

On a aussi

$$F^{(\lambda)}(1) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2}\, C^{(\lambda)}_{gr, H_{r-1}}(0) = 0,$$

puisque $C^{(\lambda)}_{n,m}(0) = 0$. Soit maintenant $\theta > 0$. M. L. Fejér a démontré que l'on a pour $\varepsilon \leqq |\theta| \leqq \pi$ quel que soit N

$$\left| \sum_{m=n}^{N} e_m \frac{\cos}{\sin} m\theta \right| < \frac{4\pi}{\varepsilon}\, \frac{1}{r_n - 1},$$

d'où l'on déduit l'inégalité

$$\left|\sum_{m=n}^{N} e_m \cos[(m+\lambda)\theta - \lambda\pi]\right| < \frac{8\pi}{\varepsilon}\frac{1}{r_n - 1} \qquad (\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi).$$

En appliquant la formule (39_2), on trouve que l'on a pour $\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi$ quel que soit N

$$\left|\sum_{m=n}^{N} e_m \frac{P_m^{(\lambda)}(\cos\theta)}{A_m^{(2\lambda-1)}}\right| < \frac{8\pi}{\varepsilon}\frac{1}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\lambda}}\frac{1}{r_n - 1} \qquad (\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi).$$

Or $r_n \to \infty$ avec $n \to \infty$ et cette inégalité confirme la convergence de la série (38) pour $\theta > 0$ et même la convergence uniforme pour $\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi$.

§ IV.

Envisageons la série (I) d'une fonction $f(x)$ et supposons que le produit $(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} f(x)$ est absolument intégrable dans l'intervalle $(-1, +1)$. Nous allons démontrer que sous cette seule hypothèse la série (I) est sommable (C, λ) en tout point intérieur $x = \cos\theta$, $0 < \theta < \pi$, où existe la valeur moyenne $\frac{1}{2}\left\{f(x-0) + f(x+0)\right\}$ de la fonction développée, et qu'elle a pour somme cette valeur moyenne.

On va voir que la série (I) est sommable (C, δ) déjà pour

$$0 < \delta = \delta_0 < \lambda,$$

si le produit $(1-x^2)^{\frac{\lambda+\delta-1}{2}} f(x)$ est absolument intégrable dans $(-1, +1)$ pour $\delta = \delta_0 > 0$.

Soient donc $0 < \eta \leqq \theta \leqq \pi - \eta < \pi$ et $\varepsilon < \frac{\eta}{2}$. La moyenne arithmétique d'ordre δ — $f_n^{(\delta)}(\cos\theta)$ — de la série (I) au point $x = \cos\theta$ s'exprime par l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} f_n^{(\delta)}(\cos\theta) &= \int_0^\pi f(\cos\varphi)\, S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi) \sin^{2\lambda}\varphi \, d\varphi \\ &= \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^{\theta-\varepsilon_1} + \int_{\theta-\varepsilon_1}^{\theta+\varepsilon_1} + \int_{\theta+\varepsilon_1}^{\pi-\varepsilon} + \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \\ &= \mathfrak{J}_n^{(1)} + \mathfrak{J}_n^{(2)} + \mathfrak{J}_n^{(3)} + \mathfrak{J}_n^{(4)} + \mathfrak{J}_n^{(5)}. \end{aligned}$$

Désignons une quantité positive, aussi petite qu'on veut mais fixe, par α. En choisissant ε_1 suffisamment petit, nous avons sous la supposition de l'existence de $\frac{1}{2}\{f(x-0)+f(x+0)\}$

$$|f(\cos\varphi)-f(x-0)|<\frac{\alpha}{6\,\mathrm{R}} \qquad (x=\cos\theta,\ \theta\leqq\varphi\leqq\theta+\varepsilon_1),$$

$$|f(\cos\varphi)-f(x+0)|<\frac{\alpha}{6\,\mathrm{R}} \qquad (x=\cos\theta,\ \theta-\varepsilon_1\leqq\varphi\leqq\theta),$$

où R est la borne supérieure de toutes les majorantes $\mathrm{R}_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\theta)$ pour $\eta\leqq\theta\leqq\pi-\eta$, $\delta>0$ et $n=0, 1, 2, \ldots\infty$, dont l'existence fut établie au paragraphe II.

On voit que l'on a

$$\left|\int_\theta^{\theta+\varepsilon_1} f(\cos\varphi)\,\mathrm{S}_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)\sin^{2\lambda}\varphi\,d\varphi - f(x-0)\int_\theta^{\theta+\varepsilon_1}\mathrm{S}_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)\sin^{2\lambda}\varphi\,d\varphi\right|$$
$$<\frac{\alpha}{6\,\mathrm{R}}\int_0^\pi|\mathrm{S}_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)|\sin^{2\lambda}\varphi\,d\varphi=\frac{\alpha\,\mathrm{R}_n^{(\delta,\lambda)}(\cos\theta)}{6\,\mathrm{R}}<\frac{\alpha}{6}$$

ainsi que

$$\left|\int_{\theta-\varepsilon_1}^{\theta} f(\cos\varphi)\,\mathrm{S}_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)\sin^{2\lambda}\varphi\,d\varphi - f(x+0)\int_{\theta-\varepsilon_1}^{\theta}\mathrm{S}_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)\sin^{2\lambda}\varphi\,d\varphi\right|<\frac{\alpha}{6}.$$

Or

$$\int_\theta^{\theta\pm\varepsilon_1}\mathrm{S}_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)\sin^{2\lambda}\varphi\,d\varphi=\pm\frac{1}{2}+o(1) \qquad (\delta\geqq 0),$$

comme l'a montré Darboux (¹) pour $\delta=0$, d'où on le conclut *a fortiori* pour $\delta>0$. Donc

$$\left|\int_{\theta-\varepsilon_1}^{\theta+\varepsilon_1} f(\cos\varphi)\,\mathrm{S}_n^{(\delta,\lambda)}(\theta,\varphi)\sin^{2\lambda}\varphi\,d\varphi-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right|$$
$$<\frac{\alpha}{3}+|f(x-0)+f(x+0)|\,o(1),$$

c'est-à-dire

(41) $$\left|\mathfrak{I}_n^{(3)}-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right|<\frac{\alpha}{3}+o(1) \qquad (\delta>0).$$

Dans les intégrales $\mathfrak{I}_n^{(2)}$ et $\mathfrak{I}_n^{(4)}$ on a

$$|\theta-\varphi|\geqq\varepsilon_1, \qquad \eta\leqq\theta\leqq\pi-\eta \qquad \text{et} \qquad \varepsilon\leqq\varphi\leqq\pi-\varepsilon;$$

(¹) *Journal de Liouville*, 3ᵉ série, t. IV, 1878, p. 385.

donc, en appliquant l'inégalité (26) pour $o < \delta \leqq 1$, on obtient

$$|\mathfrak{J}_n^{(2)} + \mathfrak{J}_n^{(4)}| < \frac{c_{25}}{(n+1)^\delta} \left\{ \frac{1}{(\sin \varepsilon)^{2\lambda} \varepsilon_1^{\delta+1}} + \frac{1}{(\sin \varepsilon)^{\lambda+1}} \right\}$$
$$\times \int_0^\pi |f(\cos \varphi)| \sin^{2\lambda} \varphi \, d\varphi < \frac{c_{41}}{(n+1)^\delta} = o(1),$$

puisque le produit $|f(\cos \varphi)| \sin^{2\lambda} \varphi$ est supposé intégrable dans (o, π). On a la même inégalité pour $\delta > 1$ *a fortiori* et par conséquent

(42) $$\mathfrak{J}_n^{(2)} + \mathfrak{J}_n^{(4)} = o(1) \qquad (\delta > o).$$

Dans les intégrales $\mathfrak{J}_n^{(1)}$ et $\mathfrak{J}_n^{(5)}$ nous appliquons l'inégalité (34) :

$$|\mathfrak{J}_n^{(1)}| < c_{33}(n+1)^{\lambda-\delta} \int_0^\varepsilon \frac{|f(\cos\varphi)| \sin^{2\lambda} \varphi \, d\varphi}{(\theta - \varphi)^{\delta+1}} \qquad (\delta \leqq \lambda).$$

Mais $\theta - \varphi \geqq \eta_1 - \varepsilon > \eta_1 - \frac{\eta_1}{2} = \frac{\eta_1}{2}$ et il vient

$$|\mathfrak{J}_n^{(1)}| < c_{42}(n+1)^{\lambda-\delta} \int_0^\varepsilon |f(\cos\varphi)| (\sin\varphi)^{2\lambda} \, d\varphi.$$

De même l'inégalité (34) nous fournit

$$|\mathfrak{J}_n^{(5)}| < C_{42}(n+1)^{\lambda-\delta} \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} |f(\cos\varphi)| (\sin\varphi)^{2\lambda} \, d\varphi \qquad (\delta \leqq \lambda).$$

Grâce à l'intégrabilité supposée du produit $|f(\cos\varphi)| (\sin\varphi)^{2\lambda}$ dans (o, π) les seconds membres de ces inégalités peuvent être rendus pour $\delta = \lambda$ plus petits que $\frac{\alpha}{6}$ en choisissant ε assez petit

(43) $$|\mathfrak{J}_n^{(1)}| < \frac{\alpha}{6}, \qquad |\mathfrak{J}_n^{(5)}| < \frac{\alpha}{6} \qquad (\delta = \lambda).$$

En additionnant (41), (42) et (43), on obtient

$$\left| f_n^{(\lambda)}(\theta) - \frac{f(x-o) + f(x+o)}{2} \right| < \frac{2\alpha}{3} + o(1) \qquad (\delta = \lambda),$$

d'où, pour $n \geqq N = N(\eta_1, \varepsilon, \varepsilon_1) = \overline{N}(\alpha)$,

$$\left| f_n^{(\lambda)}(\theta) - \frac{f(x-o) + f(x+o)}{2} \right| < \alpha,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n=\infty} f_n^{(\lambda)}(\theta) = \frac{f(x-o) + f(x+o)}{2} \qquad \begin{pmatrix} x = \cos\theta \\ \delta = \lambda \end{pmatrix}.$$

On voit que la sommabilité (C, λ) de la série (1) est la conséquence de la seule hypothèse d'intégrabilité absolue du produit $(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} f(x)$ dans $(-1, +1)$, étant donnée l'existence au point considéré x $(-1 < x < +1)$ de la valeur moyenne

$$\frac{1}{2}\left\{f(x-0)+f(x+0)\right\}.$$

Supposons maintenant que non seulement $(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} f(x)$, mais déjà $(1-x^2)^{\frac{\lambda+\delta-1}{2}} f(x)$, où $\delta > 0$ est fixe et plus petit que λ, $\delta < \lambda$, est absolument intégrable dans $(-1, +1)$, c'est-à-dire que l'intégrale

$$\int_0^\pi |f(\cos\varphi)|(\sin\varphi)^{\lambda+\delta}\, d\varphi \qquad (0 < \delta < \lambda)$$

existe. On a pour n suffisamment grand $\frac{\pi}{n+1} < 2\varepsilon$ et

$$\mathfrak{I}_n^{(1)} = \int_0^\varepsilon f(\cos\varphi)\, S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi)(\sin\varphi)^{2\lambda}\, d\varphi = \int_0^{\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon} = i_n^{(1)} + i_n^{(2)}.$$

A l'aide de l'inégalité (34) on obtient

$$|i_n^{(1)}| < c'_{33}\int_0^{\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}} [(n+1)\sin\varphi]^{\lambda-\delta}\,|f(\cos\varphi)|\,(\sin\varphi)^{\lambda+\delta}\, d\varphi$$

$$< c'_{33}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lambda-\delta}\int_0^{\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}} |f(\cos\varphi)|\,(\sin\varphi)^{\lambda+\delta}\, d\varphi,$$

puisque $(n+1)\sin\varphi \leqq (n+1)\varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ et $\lambda - \delta > 0$. Quant à l'intégrale $i_n^{(2)}$ nous avons, en nous appuyant sur l'inégalité (25),

$$|i_n^{(3)}| < \int_{\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon} |f(\cos\varphi)| \left\{ \frac{c'_{22}(\sin\varphi)^{2\lambda}}{n+1} + \frac{c'_{23}(\sin\varphi)^{\lambda+\delta}}{[(n+1)\sin\varphi]^{\delta}} \right.$$

$$\left. + \frac{c'_{24}(\sin\varphi)^{\lambda+\delta}}{[(n+1)\sin\varphi]^{\delta+1}} \right\} d\varphi$$

$$< \int_{\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon} |f(\cos\varphi)|\, O(\sin^{\lambda+\delta}\varphi)\, d\varphi$$

$$< c_{43}\int_{\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon} |f(\cos\varphi)|\,(\sin\varphi)^{\lambda+\delta}\, d\varphi,$$

puisque $\lambda > \delta$ et $\delta > 0$. On voit maintenant que l'on a

$$|\mathfrak{I}_n^{(1)}| \leqq |i_n^{(1)}| + |i_n^{(2)}| < c_{44} \int_0^{\varepsilon} |f(\cos\varphi)|(\sin\varphi)^{\lambda+\delta}\, d\varphi.$$

Le même raisonnement nous donne aussi

$$|\mathfrak{I}_n^{(5)}| < c_{45} \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} |f(\cos\varphi)|(\sin\varphi)^{\lambda+\delta}\, d\varphi.$$

En choisissant ε suffisamment petit, on obtient pour un certain $\delta \gtrless {}^{0}_{\lambda}$, tel que le produit $(1-x^2)^{\frac{\lambda+\delta-1}{2}} f(x)$ est absolument intégrable dans $(-1, +1)$

$$|\mathfrak{I}_n^{(1)}| < \frac{\alpha}{6} \quad \text{et} \quad |\mathfrak{I}_n^{(5)}| < \frac{\alpha}{6}.$$

Eu égard à (41) et à (42) il vient pour $n \geqq N = N(\alpha)$

$$\left| f_n^{(\delta)}(\theta) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \right| < \frac{2\alpha}{3} + o(1) < \alpha,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n=\infty} f_n^{(\delta)}(\theta) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \qquad \begin{pmatrix} 0 < \delta < \lambda \\ x = \cos\theta \end{pmatrix},$$

sous la seule hypothèse d'intégrabilité absolue du produit

$$(1-x^2)^{\frac{\delta+\lambda-1}{2}} . f(x)$$

dans l'intervalle $(-1, +1)$.

Si la fonction $f(x)$, qui est absolument intégrable dans $(\varepsilon - 1, 1-\varepsilon)$ quel que soit $\varepsilon > 0$, devient infinie en points frontières $x = \pm 1$ d'ordres γ_1 et γ_2, le produit $(1-x^2)^{\frac{\lambda+\delta-1}{2}} |f(x)|$ n'est intégrable dans $(-1, +1)$ que pour $\delta > 2\gamma - (\lambda + 1)$, où γ désigne le plus grand de deux nombres γ_1 et γ_2, et la série ultrasphérique (I) de $f(x)$ n'est en ce cas sommable $(C, \delta \gtrless {}^{0}_{\lambda})$ que pour $\delta > 2\gamma - (\lambda + 1)$.

On le prouve sur l'exemple particulier suivant. Supposons que $f(x)$, étant absolument intégrable dans l'intervalle $(\varepsilon - 1, 1-\varepsilon)$, a pour $1 \geqq |x| \geqq 1-\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ la forme

$$f(x) = (1-x^2)^{-\gamma} \varphi(x) \qquad \left(\gamma > \frac{1}{2},\ 1-\varepsilon \leqq |x| \leqq 1\right),$$

où $\gamma > \frac{1}{2}$ et où la fonction $\varphi(x)$ est définie ainsi :

$$\varphi(x) = \sum_{0}^{e} A_k (1-x^2)^k + (1-x^2)^{e+1} \psi(x),$$

la fonction $\psi(x)$ étant bornée et $e = E(\gamma)$. Le cas $\gamma \leqq \frac{1}{2}$ est exclu puisque dans ce cas le produit $(1-x^2)^{\frac{\lambda+\delta-1}{2}} |f(x)|$ est intégrable dans $(-1, +1)$ pour chaque valeur positive de δ et la série (I) de $f(x)$ est sommable (C, δ) pour chaque $\delta > 0$. On voit que notre théorème fournit pour δ la plus petite valeur possible, à savoir $\delta > 2\gamma - (\lambda + 1)$. Revenons à l'exemple cité et supposons $\gamma > \frac{1}{2}$.

La moyenne $f_n^{(\delta)}(x)$ d'ordre δ s'exprime ainsi :

$$f_n^{(\delta)}(x) = \int_{-1}^{+1} (1-y^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} f(y)\, S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi)\, dy = \int_{-1}^{\varepsilon-1} + \int_{\varepsilon-1}^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^{1}$$
$$= \mathfrak{J}'_n + \mathfrak{J}''_n + \mathfrak{J}'''_n$$
$$(x = \cos\theta,\ y = \cos\varphi).$$

On a déduit plus haut pour chaque $\delta > 0$ et $|x| \leqq 1 - \varepsilon$ le résultat

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{J}''_n = \frac{1}{2} \{ f(x-0) + f(x+0) \} \qquad (\delta > 0,\ |x| \leqq 1 - \varepsilon)$$

et pour démontrer que la série (I) de $f(x)$ n'est pas sommable (C, δ) pour $\delta \leqq 2\gamma - (\lambda + 1)$ il suffit de prouver que la somme $\mathfrak{J}'_n + \mathfrak{J}'''_n$ ne tend pas vers la limite déterminée, quand $n \to \infty$, si $\delta \leqq 2\gamma - (\lambda + 1)$. On a pour $|x| \geqq 1 - \varepsilon$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{e} A_k (1-x^2)^{k-\gamma} + \omega(x) = \xi(x) + \omega(x),$$

où la fonction $\omega(x)$ est bornée, et

$$\mathfrak{J}'_n + \mathfrak{J}'''_n = \sum_{0}^{e} A_k \int_{-1}^{\varepsilon-1} + \int_{1-\varepsilon}^{1} (1-y^2)^{\lambda-\frac{1}{2}+k-\gamma} S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi)\, dy$$
$$+ \int_{-1}^{\varepsilon-1} + \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{\omega(y)\, S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi)\, dy}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}$$
$$= \sum_{0}^{e} A_k j_k^{(n)}(x) + j^{(n)}(x).$$

Le produit $|\omega(\cos\varphi)|\sin^{\lambda+\delta}\varphi$ est intégrable dans $(0, \pi)$ et, en choisissant convenablement ε et N, on peut diminuer autant qu'on veut la valeur absolue de l'intégrale $j^{(n)}(x)$ pour $n \geqq N$; c'est-à-dire $j^{(n)}(x) = o(1)$. Pour obtenir la formule approximative pour $j_k^{(n)}(x)$ nous écrivons cette intégrale ainsi :

$$j_k^{(n)}(x) = \int_{-1}^{\varepsilon-1} + \int_{1-\varepsilon}^{1} = \int_{-1}^{+1} - \int_{\varepsilon-1}^{x-\varepsilon} - \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} - \int_{x+\varepsilon}^{1-\varepsilon} = i_k^{(n)} - i'_k - i''_k - i'''_k.$$

La fonction $(1-x^2)^{k-\gamma}$ est continue dans $(\varepsilon-1, 1-\varepsilon)$ et par conséquent on a pour chaque $\delta > 0$

$$\lim_{n=\infty} i'_k = \lim_{n=\infty} i'''_k = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n=\infty} i''_k = (1-x^2)^{k-\gamma} \qquad (\delta > 0),$$

ce qui nous fournit la formule

$$\mathfrak{z}'_n + \mathfrak{z}'''_n = \int_{-1}^{+1} \frac{\xi(y)\, S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi)\, dy}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} - \xi(x) + o(1),$$

où $\xi(x) = \sum_0^e A_k(1-x^2)^{k-\gamma}$ et $e = E(\gamma)$. L'intégrale dans le second membre n'est que la moyenne arithmétique d'ordre δ de la série ultrasphérique (I) de la fonction $\xi(x)$

$$(44) \qquad \xi(x) \sim \sum_0^\infty \xi_n P_n^{(\lambda)}(x).$$

On voit par conséquent que la somme $\mathfrak{z}'_n + \mathfrak{z}'''_n$ tend pour $n \to \infty$ vers la limite zéro, si la série (44) est sommable (C, δ) et tout revient à démontrer que la série (44) n'est pas sommable (C, δ) pour $\delta \leqq 2\gamma - (\lambda + 1)$. Or la condition nécessaire de la sommabilité (C, δ) d'une série $\sum_0^\infty u_n$ s'exprime ainsi

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n}{n^\delta} = 0$$

et notre proposition sera établie, si nous démontrons que la condition

$$\lim_{n=\infty} \frac{\xi_n P_n^{(\lambda)}(x)}{n^\delta} = 0 \qquad (-1 < x < 1)$$

n'est remplie que pour $\delta > 2\gamma - (\lambda + 1)$.

On a d'abord

$$\xi_n = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}(n+\lambda)\frac{1}{A_n^{(2\lambda-1)}}\int_{-1}^{+1}\frac{\xi(x)\,P_n^{(\lambda)}(x)\,dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}$$

et puis

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{2A_n^{(\lambda-1)}\cos\left[(n+\lambda)\theta - \frac{\lambda\pi}{2}\right]}{(2\sin\theta)^{\lambda}} + \frac{\omega_n^{(\lambda)}(\theta)}{(\sin\theta)^{\lambda+1}(n+1)^{2-\lambda}} \qquad (x=\cos\theta),$$

donc il suffit d'établir que

$$\lim_{n=\infty}(n+1)^{1-\lambda-\delta}\int_{-1}^{+1}\frac{\xi(x)\,P_n^{(\lambda)}(x)\,dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} = 0 \tag{45}$$

n'a lieu que pour $\delta > 2\gamma - (\lambda+1)$. En posant

$$v_n^{(\alpha)} = \int_{-1}^{+1}\frac{P_n^{(\lambda)}(x)\,dx}{(1-x^2)^{\alpha+\frac{1}{2}-\lambda}},$$

on a

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\xi(x)\,P_n^{(\lambda)}(x)\,dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} = \sum_{k=0}^{e} A_k\,v_n^{(k-\gamma)}$$

et il s'agit d'exprimer $v_n^{(\alpha)}$ par la formule approximative.

Formons la fonction génératrice $V_\alpha(z)$ de la suite $v_0^{(\alpha)}, v_1^{(\alpha)}, \ldots, v_n^{(\alpha)}, \ldots$

$$V_\alpha(z) = \sum_0^{\infty} v_n^{(\alpha)} z^n = \int_{-1}^{+1}\left[\sum_0^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x)\,z^n\right]\frac{dx}{(1-x^2)^{\alpha+\frac{1}{2}-\lambda}}$$

$$= \int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(1-2xz+z^2)^{\lambda}(1-x^2)^{\alpha+\frac{1}{2}-\lambda}}.$$

On a

$$(1-2xz+z^2)^{-\lambda} = (1-z)^{-2\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\lambda-1)}\left(\frac{1-x}{2}\tau\right)^n,$$

où $\tau = -\frac{4z}{(1-z)^2}$, donc

$$V_\alpha(z) = (1-z)^{-2\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\lambda-1)}\left(\frac{\tau}{2}\right)^n\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x)^n\,dx}{(1-x^2)^{\alpha+\frac{1}{2}-\lambda}}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda-\alpha\right)}{\Gamma(\lambda+1-\alpha)}\,\frac{F\left(\lambda,\,\lambda+\frac{1}{2}-\alpha,\,2\lambda+1-2\alpha,\,\tau\right)}{(1-z)^{2\lambda}},$$

où F est le signe de la fonction hypergéométrique. En appliquant pour $\alpha > \frac{1}{2}$ la méthode de Darboux, nous observons que les propriétés les plus élémentaires de la fonction hypergéométrique nous permettent d'écrire

$$V_\alpha(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda-\alpha\right)}{\Gamma(\lambda+1-\alpha)}\,\frac{F\left(\lambda+1-2\alpha,\ \lambda+\frac{1}{2}-\alpha,\ 2\lambda+1-2\alpha,\ \tau\right)}{(1-z)^{2\lambda+1-2\alpha}(1+z)^{2\alpha-1}}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}-\alpha\right)}{\Gamma(\lambda+1-\alpha)}\,\frac{F\left(\lambda+1-2\alpha,\ \lambda+\frac{1}{2}-\alpha,\ 2\lambda+1-2\alpha,\ \frac{\tau}{\tau-1}\right)}{(1-z)^{2\lambda+1-2\alpha}(1-z)^{2\alpha-1}}.$$

Or $\frac{\tau}{\tau-1} = \frac{4z}{(1+z)^2}$ donc $\tau = 1$ pour $z = -1$ et $\frac{\tau}{\tau-1} = 1$ pour $z = +1$ d'un côté et de l'autre côté

$$F\left(\lambda+1-2\alpha,\ \lambda+\frac{1}{2}-\alpha,\ 2\lambda+1-2\alpha,\ 1\right)$$

existe pour $\alpha > \frac{1}{2}$ et elle est égale à

$$\frac{\Gamma(2\lambda+1-2\alpha)\,\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}-\alpha\right)}.$$

On voit que $V_\alpha(z)$ n'a que deux points singuliers $z = -1$ $(\tau = 1)$, $z = +1$ $(\tau = \infty)$ et y devient infinie d'ordre $2\alpha - 1$. Selon la méthode de Darboux nous devons développer en série de Taylor la fonction auxiliaire

$$D(z) = \frac{A}{(1+z)^{2\alpha-1}} + \frac{B}{(1-z)^{2\alpha-1}},$$

où $A = \lim_{z=-1} \{(1+z)^{2\alpha-1}.\ V_\alpha(z)\}$ et $B = \lim_{z=+1} \{(1-z)^{2\alpha-1}.\ V_\alpha(z)\}$.

On calcule aisément que l'on a

$$A = B = \frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}-\alpha\right)}{2^{2\lambda-2\alpha+1}\,\Gamma(\lambda+1-\alpha)}\,F\left(\lambda+1-2\alpha,\ \lambda+\frac{1}{2}-\alpha,\ 2\lambda+1-2\alpha,\ 1\right)$$

et le premier terme de la formule approximative cherchée est fourni par le coefficient de z^n dans la série de Taylor de D (z) :

$$v_n^{(\alpha)} = A[1 + (-1)^n] \frac{\Gamma(n+2\alpha-1)}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(n+1)} \{1+o(1)\}$$

$$= \frac{1+(-1)^n}{2} \frac{4^{1-\alpha}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}-\alpha\right)}{\Gamma(\alpha)} (n+1)^{2\alpha-2} \{1+o(1)\} \qquad \left(\alpha > \frac{1}{2}\right),$$

d'où la formule cherchée pour $\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} \xi(x) P_n^{(\lambda)}(x)\, dx$:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\xi(x) P_n^{(\lambda)}(x)\, dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} = \frac{1+(-1)^n}{2} \frac{A_0 \Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}-\gamma\right)}{4^{\gamma-1}\Gamma(\gamma)} (n+1)^{2\gamma-2}\{1+o(1)\}$$

$$\left(\gamma > \frac{1}{2}\right)$$

et enfin pour $\gamma > \frac{1}{2}$

$$(n+1)^{1-\lambda-\delta} \int_{-1}^{+1} \frac{\xi(x) P_n^{(\lambda)}(x)\, dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} = \frac{1+(-1)^n}{2} (n+1)^{2\gamma-\lambda-\delta-1} \{C_{46}+o(1)\}.$$

Donc (45) ne peut avoir lieu que pour $\delta > 2\gamma - (\lambda+1)$, ce qui démontre notre proposition.

On voit que *les points frontières* $x = \pm 1$ *n'influent pas sur la sommabilité* (C, $\delta > 0$) *de la série* (I) *à l'intérieur de l'intervalle* (1 —, + 1), *si* $\gamma \leqq \frac{\lambda+1}{2}$, *mais pour* $\gamma > \frac{\lambda+1}{2}$ *leur influence détruit la sommabilité* (C, $\delta \leqq 2\gamma - \lambda - 1$) *partout à l'intérieur de l'intervalle* (— 1, + 1) et l'on ne peut pas par conséquent diminuer la puissance $\frac{\delta+\lambda-1}{2}$ du binome $1 - x^2$ dans l'énoncé du théorème démontré concernant la sommabilité (C, $\delta \leqq \lambda$) de la série (I) pour $|x| < 1$, à savoir :

THÉORÈME. — *La série* (I) *est sommable* (C, $\delta > 0$) *avec la valeur moyenne* $\frac{1}{2}\{f(x-0)+f(x+0)\}$ *pour somme en tout point intérieur* x, *où existe cette valeur moyenne, si le produit* $(1-x^2)^{\frac{\delta+\lambda-1}{2}} f(x)$ *est absolument intégrable dans l'intervalle* $(-1, +1)$.

Le développement (I) d'une fonction continue partout dans (— 1,

$+1$) est sommable (C, δ) vers la valeur de la fonction développée pour chaque $\delta > 0$ partout à l'intérieur de $(-1, +1)$, la sommabilité étant uniforme dans l'intervalle $(\varepsilon - 1, 1 - \varepsilon)$, $(\varepsilon > 0)$.

On sait que la série $\sum_1^\infty u_n$ sommable (C, δ) avec la somme s jouit de la propriété suivante :

$$\lim_{z=1-0} \sum_0^\infty u_n z^n = s = \lim_{n=\infty} s_n^{(\delta)}.$$

En appliquant ce théorème à la série ultrasphérique (I) et en s'appuyant sur la formule (4) de M. Kampé de Fériet, on déduit le corollaire suivant :

Corrolaire. — *En tout point intérieur x, où existe la valeur moyenne de la fonction $f(x) = f(\cos\theta)$, on a, en posant*

$$\tau = \frac{4z \sin\theta \sin\varphi}{1 - 2z\cos(\theta + \varphi) + z^2},$$

$$(46) \quad \lim_{z=1-0} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} (1 - z^2) \int_0^\pi \frac{F(\lambda+1, \lambda, 2\lambda, \tau) f(\cos\varphi) \sin^{2\lambda}\varphi \, d\varphi}{[1 - 2z\cos(\theta+\varphi) + z^2]^{\lambda+1}}$$
$$= \frac{1}{2}\{f(x-0) + f(x+0)\},$$

pourvu que le produit $(1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} . |f(x)|$ *soit intégrable dans l'intervalle* $(-1, +1)$.

Vu que

$$\lim_{\lambda=0} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} F(\lambda+1, \lambda, 2\lambda, \tau) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{1-\tau} = \frac{1 - 2z\cos(\theta+\varphi) + z^2}{1 - 2z\cos(\theta-\varphi) + z^2},$$

le passage à la limite pour $\lambda \to 0$ dans la formule (46) nous fournit l'intégrale de Poisson :

$$\lim_{r=1-0} \frac{1 - r^2}{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(\cos\varphi)\, d\varphi}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2} = \frac{1}{2}\{f(x-0) + f(x+0)\}$$
$$(x = \cos\theta).$$

On voit que (46) généralise l'intégrale de Poisson et la lie à l'intégrale analogue, qu'on déduit de (46) pour $\lambda = \frac{1}{2}$;

$$\lim_{r=1-0} \frac{1-r^2}{\pi} \int_0^\pi \frac{E(\sqrt{\tau}) f(\cos\varphi) \sin\varphi \, d\varphi}{[1 - 2r\cos(\theta-\varphi) + r^2]\sqrt{1 - 2r\cos(\theta+\varphi) + r^2}}$$
$$= \frac{1}{2}\{f(x-0) + f(x+0)\} \qquad \left(\lambda = \frac{1}{2}, (x = \cos\theta\right)$$

et où $E(\sqrt{\tau})$ désigne l'intégrale elliptique de second espèce

$$E(\sqrt{\tau}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \tau\sin^2\psi} \, d\psi. \qquad \left[\tau = \frac{4r\sin\theta\sin\varphi}{1 - 2r\cos(\theta+\varphi) + r^2}\right].$$

Remarquons pour conclure que les moyennes $f_n^{(\lambda}(x)$ de la série (I) d'une fonction bornée pour $\delta \geqq 2\lambda + 1$ sont toujours comprises entre les bornes inférieure et supérieure de la fonction développée $f(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$.

Soit donc pour $-1 \leqq x \leqq +1$

$$m \leqq f(x) \leqq M \qquad (-1 \leqq x \leqq +1).$$

En s'appuyant sur (36) on en déduit pour $\delta \geqq 2\lambda + 1$

$$m \int_0^\pi S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi) \sin^{2\lambda}\varphi \, d\varphi \leqq f_n^{(\delta)}(x) \leqq M \int_0^\pi S_n^{(\delta,\lambda)}(\theta, \varphi) \sin^{2\lambda}\varphi \, d\varphi$$
$$(x = \cos\theta),$$

d'où découlent les inégalités à démontrer :

$$m \leqq f_n^{(\delta)}(x) \leqq M \qquad (-1 \leqq x \leqq +1, \ \delta \geqq 2\lambda + 1).$$