BULLETIN DE LA S. M. F.

P. FATOU

Sur un théorème de M. Picard

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 468-484
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__468_0>

SUR UN THÉORÈME DE M. PICARD;

PAR M. P. FATOU.

Rappelons quelques définitions et propriétés connues qui se rapportent à l'étude des groupes des équations linéaires du second ordre. Étant donnée une surface de Riemann de genre p nous considérons, avec Poincaré et Klein, les fonctions d'un point analytique (x, y) de cette surface qui possèdent les propriétés suivantes.

Au voisinage d'un point (x_0, y_0) de la surface supposé à distance finie et distinct des points de ramification, nous posons

$$\tau = x - x_0.$$

Les points à l'infini dans chacun des feuillets de la surface étant distincts des points de ramification, nous posons, dans le domaine de l'un de ces points,

$$\tau = \frac{1}{x}.$$

Enfin dans le voisinage d'un point de ramification d'ordre ν, ce point étant à distance finie, nous posons

$$\tau = (x - x_0)^{\frac{1}{\nu}}.$$

1° En un point de la surface distinct de n points $e_1, e_2, \ldots, e_n$ donnés à l'avance et qui ne coïncident pas avec des points de ramification, nous admettons qu'il existe une transformée homographique de la fonction considérée $z(x, y)$ qui est représentable par une série entière convergente de la forme

$$(1) \qquad \tau + \alpha_1\tau + \alpha_2\tau^2 + \ldots.$$

2° Dans le voisinage de l'un des points e_i nous admettrons qu'il existe une transformée homographique de la fonction z représentable, soit par le développement convergent

$$(2) \qquad \tau^{\frac{1}{l}}(1 + \beta_1\tau + \beta_2\tau^2 + \ldots),$$

où l désigne un entier positif supérieur à l'unité, soit encore par le développement convergent

$$\log \tau + \gamma_1 \tau + \gamma_2 \tau^2 = \ldots \tag{3}$$

3° Toutes les déterminations de la fonction $z(x, y)$ en un point analytique arbitraire sont des transformées homographiques de l'une d'entre elles, ce qu'on exprime en disant que z est une fonction *linéairement polymorphe* sur la surface de Riemann. Les conditions 1° et 2° sont des conditions nécessaires mais non suffisantes pour que x et y s'expriment en fonctions uniformes de z, z étant une fonction linéairement polymorphe qui admet sur la surface les n points critiques $e_1, e_2, \ldots, e_n$, mais qui possède en tout autre point le caractère d'une fonction rationnelle.

Toute fonction z ainsi définie est l'intégrale d'une équation différentielle algébrique de la forme

$$[z]_x = 2\,R(x, y) \tag{4}$$

dont le premier membre désigne l'invariant différentiel de Lagrange et Schwarz :

$$\frac{\frac{d^3z}{dx^3}}{\frac{dz}{dx}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{\frac{dz}{dx}}\right)^2$$

tandis que le second membre désigne une fonction rationnelle du point (x, y) sur la surface de Riemann, dépendant rationnellement d'un certain nombre de paramètres. Ces paramètres sont les suivants : tout d'abord ceux qui servent à définir la surface de Riemann et les n points critiques de la fonction z ; comme on peut effectuer sur (x, y) une transformation birationnelle arbitraire sans modifier les propriétés de la fonction $z(x, y)$, on peut supposer que la relation algébrique entre x et y a été ramenée à une forme canonique, celle de Clebsch par exemple, et contient ainsi des paramètres en nombre égal à celui des modules d'une surface de Riemann de genre p, c'est-à-dire

$$3p - 3 + \rho$$

avec $\rho = 0$ pour $p > 1$, $\rho = 1$ pour $p = 1$, $\rho = 3$ pour $p = 0$; mais la surface admettant des transformations birationnelles en elle-même qui dépendent de ρ paramètres, on peut supposer que parmi les points e_i il y en a ρ dont la coordonnée x possède une valeur purement numérique, de sorte que les e_i dépendent de $n - \rho$ paramètres, si $n \geqq \rho$; on obtient donc ainsi en général

$$n + 3p - 3$$

paramètres, ce nombre devenant égal à l'unité pour $p = 1$, $n = 0$. D'autre part la surface de Riemann étant donnée ainsi que les points e_i et les entiers l_i [on suppose $l_i = \infty$ dans le cas d'un développement de la forme (3)], la fonction R (x, y) n'est pas déterminée, mais dépend d'une manière linéaire et entière de constantes arbitraires en nombre égal à celui des paramètres précédents, c'est-à-dire encore

$$n + 3p - 3$$

ou l'unité pour $n = 0$, $p = 1$. A un système de valeurs de ces divers paramètres correspond une équation (4) dont l'intégrale générale est de la forme $\frac{Az + B}{Cz + D}$, A, B, C, D étant des constantes arbitraires ; si l'on munit la surface d'un système canonique de rétrosections passant par un même point O ; (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_p, b_p) et de coupures joignant le point O aux points $e_1, e_2, \ldots, e_n$, une branche quelconque de la fonction linéairement polymorphe fait la représentation conforme de la surface Σ munie de ce système de coupures sur un polygone canonique P_0 du plan z, possédant d'une part $4p + n$ sommets formant un seul cycle et qui correspondent au point O de Σ, la somme des angles de P_0 en ces sommets étant égale à 2π, d'autre part n sommets formant chacun un cycle qui correspondent respectivement aux points $e_1, e_2, \ldots, e_n$, les angles de P_0 en ces sommets ayant pour valeurs $\frac{2\pi}{l_1}, \frac{2\pi}{l_2}, \ldots, \frac{2\pi}{l_n}$. Deux côtés de P_0 qui correspondent aux deux bords d'une même coupure a_k ou b_k sont liés par une substitution linéaire T_{a_k} ou T_{b_k} ; deux côtés issus d'un même sommet, image d'un point e_i, sont liés par une substitution T_i, elliptique ou parabolique ; ces diverses substitutions, génératrices du groupe de monodromie de z, sont liées par les relations

$$T_1^{l_1} = 1, \qquad T_2^{l_2} = 1, \qquad \ldots, \qquad T_n^{l_n} = 1,$$

$$(T_{a_p}^{-1} T_{b_p} T_{a_p} T_{b_p}^{-1}) \ldots (T_{a_2}^{-1} T_{b_2} T_{a_2} T_{b_2}^{-1})(T_{a_1}^{-1} T_{b_1} T_{a_1} T_{b_1}^{-1})(T_n \ldots T_2 T_1) = 1.$$

Le polygone P_0 peut se recouvrir partiellement lui-même et constitue ainsi un morceau de surface de Riemann à un nombre fini de feuillets, mais dépourvu de points de ramification.

Le groupe G de monodromie de z dépend donc, abstraction faite des constantes arbitraires A, B, C, D, des paramètres précédemment énumérés au nombre de

$$2(n+3p-3).$$

On démontre que les coefficients des substitutions génératrices supposées ramenées à une forme canonique par un choix convenable des constantes A, B, C, D, sont des fonctions analytiques des paramètres et varient par suite d'une manière continue avec ceux-ci, du moins tant que deux points e_i ou deux points de ramification de la surface ne viennent pas à se confondre. Les groupes G forment ainsi un continuum dépendant de $2n+6p-6$ paramètres complexes; on démontre en effet que ces paramètres sont essentiels, c'est-à-dire qu'à deux systèmes de valeurs infiniment voisins mais distincts des paramètres correspondent deux groupes G distincts. Rappelons enfin que G est le *groupe projectif de monodromie* de l'équation linéaire du second ordre :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + v\,R(x, y) = 0.$$

Tels sont les principaux faits qu'il était nécessaire de rappeler ici et dont on trouvera les démonstrations, du moins dans leurs traits essentiels dans les mémoires de Poincaré sur les fonctions fuchsiennes (*Acta matematica*, t. I), et sur les groupes des équations linéaires (*Ibid.*, t. IV), ainsi qu'au Tome III des Œuvres de F. Klein.

Ces préliminaires étant rappelés, passons à l'énoncé du théorème de M. Picard, démontré par lui dans son mémoire : *Sur les fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (*Journal de Mathématiques*, 1889) et dans son Traité d'Analyse (t. III, chap. IV, *sur certaines classes d'équations différentielles*). Ce théorème peut s'énoncer comme il suit. Désignons par

$$\mathfrak{L}(p, n; l_1, l_2, \ldots, l_n)$$

ou, plus brièvement, quand aucune ambiguïté n'est à craindre, par $\mathfrak{L}$ la classe des fonctions linéairement polymorphes que nous venons de définir : *les fonctions* $\mathfrak{L}$ *dont le groupe de monodromie ne renferme que des substitutions entières*

$$(z;\ az+b)$$

n'existent que pour $p=0$ *et* $p=1$, z *ou* $\log z$ *s'exprimant alors par une intégrale abélienne.*

On se rendra compte aisément que l'énoncé de M. Picard ne diffère que par la forme de celui qui précède ; la démonstration qu'on va lire a l'avantage d'être tout à fait intuitive et de situer ce théorème dans l'étude des groupes automorphes et des équations linéaires du second ordre, suggérant ainsi diverses extensions.

Le polygone P_0 a ses côtés liés deux à deux par des substitutions de la forme $(z;\ Az+B)$ qui transforment les droites en droites ; comme l'un des côtés de chaque paire peut être arbitrairement modifié, ses deux extrémités restant fixes, on peut le supposer rectiligne et il en sera de même du côté conjugué. On peut donc par un choix convenable des coupures tracées sur la surface de Riemann supposer rectiligne le polygone P_0 ; or la somme des angles aux $4p+n$ sommets de P_0 qui forment un seul cycle a pour valeur 2π, puisque $\frac{dz}{dx}$ est régulière et non nulle au point O de la surface qui correspond à ces sommets ; d'autre part les angles aux n sommets elliptiques ou paraboliques qui correspondent aux points e_i ont pour valeur $\frac{2\pi}{l_1}, \ldots, \frac{2\pi}{l_n}$; en vertu de la formule qui fait connaître la somme des angles d'un polygone rectiligne, on aura donc

$$2\pi\left(1+\sum\frac{1}{l_i}\right)=(4p+2n-2)\pi$$

ou

$$1+\sum\frac{1}{l_i}=2p+n-1.$$

Comme on a

$$\sum\frac{1}{l_i}\leqq\frac{n}{2}$$

l'égalité qui précède n'est possible que pour $p=1$ ou $p=0$. La première hypothèse entraîne $n=0$. La seconde donne :

$$n=2+\sum\frac{1}{l_i},$$

$$\frac{n}{2}\leqq 2,\qquad n\leqq 4.$$

On peut laisser de côté le cas de $n = 2$ qui conduit à des fonctions élémentaires ; pour $n = 3$ on a

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} = 1$$

et, pour $n = 4$,

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} + \frac{1}{l_4} = 2.$$

La résolution de ces équations en nombres entiers est facile et bien connue ; elle conduit à un nombre très restreint de solutions, les fonctions $z(x)$ correspondantes sont étudiées dans les cours d'analyse et il n'y a pas lieu d'y insister. L'hypothèse $n = 0$, $p = 1$ conduit à poser

$$\frac{Az + B}{Cz + D} = \frac{e^{\lambda I} - 1}{\lambda},$$

I étant l'intégrale elliptique de première espèce ; pour $\lambda = 0$ on obtient $z = I$. Les fonctions linéairement polymorphes ainsi obtenues vérifient l'équation différentielle

$$[z]_x = \frac{1}{P^2}\left[\frac{3}{18}\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}P\frac{d^2P}{dx^2} - \frac{\lambda^2 P}{2}\right]$$

en posant

$$I = \int_x^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{P}},$$

P étant un polynome du quatrième degré ; dans ce cas les deux paramètres dont dépend le groupe G sont d'une part le module, c'est-à-dire l'invariant absolu de la forme biquadratique $x'^4\, P\left(\frac{x}{x'}\right)$, et d'autre part le paramètre *accessoire* λ^2. Les substitutions génératrices de G sont alors en prenant

$$z = e^{\lambda I}$$

toutes deux multiplicatives et définies par les équations

$$z' = e^{\lambda\omega_1} z,$$
$$z' = e^{\lambda\omega_2} z,$$

ω_1 et ω_2 étant un couple de périodes primitives de I.

Remarque. — Au raisonnement géométrique qui précède on peut faire l'objection suivante : pour qu'il soit permis de déformer le polygone P_0 en remplaçant l'un de ses côtés curvilignes par le segment de droite de mêmes extrémités, il faut que ce segment ne traverse qu'un nombre fini de polygones du réseau initial construits de proche en proche et il n'est pas certain, *a priori*, que cette condition soit remplie. Mais on peut toujours remplacer un côté par une ligne formée d'un nombre fini de segments de droite et le côté conjugué par la ligne brisée transformée de la première ; cela revient à introduire, outre les $4p + 2n$ sommets de P_0 qui sont seuls essentiels, des cycles de deux sommets adventifs pour chacun desquels la somme des angles est égale à 2π, et il n'y a pas à en tenir compte dans la formule relative à la somme des angles de P_0 puisque les termes introduits se détruisent d'eux-mêmes. Enfin la formule qui exprime cette somme d'angles n'est établie, dans les cours de géométrie élémentaire que pour les polygones simples ; mais P_0 étant un morceau de surface de Riemann à un nombre fini de feuillets et dépourvu de points de ramification pourra être décomposé en un nombre fini de polygones simples par des transversales et en appliquant la formule à chacun des polygones partiels on constate immédiatement qu'elle s'applique, toutes réductions faites, au polygone total.

La même démonstration conduit à cette conséquence que le groupe G d'une fonction $\mathfrak{L}$ ne peut jamais être, pour $p \geqq 1$, un groupe de mouvements du plan elliptique (ou de la sphère), c'est-à-dire être contenu dans le groupe des substitutions linéaires qui transforment en lui-même un cercle de centre réel et de rayon purement imaginaire.

Il est bien facile d'étendre ces résultats par des considérations très simples de continuité. Supposons par exemple $n = 0$, $p > 1$. Le groupe G d'une fonction de la classe $\mathfrak{L}(p, 0)$ dépend *essentiellement*, comme nous le savons, de $6p - 6$ paramètres complexes et possède ainsi le même degré de généralité qu'un groupe dérivé de $2p$ substitutions données *à priori* et assujetties seulement à vérifier la relation fondamentale

$$(5) \qquad T_{a_p}^{-1} T_{b_p} T_{a_p} T_{b_p}^{-1} \ldots T_{b_i}^{-1} = 1.$$

Mais il résulte des théorèmes précédents qu'un groupe ainsi construit ne pourra pas toujours être identifié avec le groupe de monodromie d'une fonction de la classe $\mathfrak{L}(p, 0)$. Considérons par exemple le groupe dérivé de $2p$ substitutions de la forme

$$(z;\ A_i z + B_i)$$

vérifiant la relation fondamentale précédente. On constate que ce groupe dépend de $4p - 3$ paramètres, car nous avons $2p$ substitutions dépendant chacune de deux paramètres, ce qui fait $4p$ paramètres, dont le nombre doit être diminué de deux unités d'une part, parce que l'on peut effectuer sur z le changement de variable $(z;\ \lambda z + \mu)$ où λ et μ sont arbitraires, puis encore d'une unité en tenant compte de la relation fondamentale dont le premier membre représente ici une substitution parabolique $(z;\ z + \omega)$, ce qui conduit à la seule relation $\omega = 0$. Mais, d'après le théorème de M. Picard, ce groupe n'est jamais identique pour $p > 1$ à celui d'une fonction $\mathfrak{L}(p, 0)$.

Supposons plus généralement que pour chacune des $2p$ substitutions génératrices $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ de ce groupe de monodromie, le coefficient γ soit infiniment petit et que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Remplaçons tous ces coefficients γ par zéro ; il suffira de faire varier infiniment peu l'un des coefficients β ou δ pour que la relation fondamentale soit toujours vérifiée (¹). Les substitutions génératrices étant ainsi modifiées, laissons fixe l'un des sommets A_1 du polygone canonique P_0 à $4p$ sommets image de la surface Σ ; les autres sommets A_2, A_3, ... éprouveront des déplacements infiniment petits et viendront en A'_2, A'_3, ... Le côté $A_1 A_2$ pourra être remplacé par $A_1 A'_2$ déduit du premier par la substitution infinitésimale $(z;\ \lambda z + \mu)$ qui change A_1 en lui-même et A_2 en A'_2 ; le côté $A'_3 A'_4$, conjugué de $A_1 A'_2$, est alors complètement déterminé ; on pourra remplacer de même $A_2 A_3$ par $A'_2 A'_3$, transformé du premier par similitude, le côté $A'_4 A'_5$, conjugué de $A'_2 A'_3$ étant alors déterminé, et ainsi de suite. P_0 est ainsi remplacé par P'_0, infiniment voisin de P_0, chaque côté de P'_0 se déduisant d'un côté de P_0 par une substitution linéaire infinitésimale. Les angles de P'_0 sont alors infiniment voisins de ceux de P_0. Mais P'_0 ayant ses côtés liés deux à deux par des substitutions linéaires entières, la somme de ses angles a pour valeur $(4p - 2)\pi$, tandis que la somme des angles de P_0 est égale

(¹) On suppose que les coefficients α, β, δ ne sont pas infiniment grands.

à 2π; il y a incompatibilité pour $p > 1$, et P_0 ne peut pas être l'image de Σ fournie par une fonction de la classe $\mathfrak{L}(p, 0)$ [1].

Représentons le groupe G de monodromie d'une fonction de cette classe, lequel dépend essentiellement des $6p - 6$ paramètres complexes qui sont les $(3p - 3)$ modules de la surface de Riemann et les $(3p - 3)$ paramètres accessoires, par un point M de l'hyperespace à $12p - 12$ dimensions; voici comment on pourra faire cette représentation. Écrivons la relation fondamentale sous la forme

$$T_{b_1} T_{a_1}^{-1} T_{b_1}^{-1} T_{a_1} = \Theta, \tag{6}$$

Θ étant une combinaison de substitutions T_{a_2}, T_{b_2}, ... et de leurs inverses. Supposons T_{b_1} ramenée à la forme canonique $(z; \sigma z)$ et soient λ, μ, ν, ρ les coefficients de T_{a_1}. On dispose encore d'une constante arbitraire permettant d'établir une relation homogène entre λ, μ, ν, ρ, puisqu'on peut transformer les substitutions du groupe par $(z; hz)$ où h est arbitraire.

La relation (6) équivaut à la suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma\lambda\rho - \sigma^2\mu\nu & \mu\rho(\sigma - \sigma^2) \\ (\sigma - 1)\lambda\nu & \sigma\lambda\rho - \mu\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

A, B, C, D étant des fonctions rationnelles des coefficients de T_{a_2}, T_{b_2}, ... On déduit de là :

$$\mu\nu : \lambda\rho : \mu\rho : \lambda\nu = \frac{A - D}{1 - \sigma^2} : \frac{A - \sigma^2 D}{\sigma - \sigma^3} : \frac{B}{\sigma - \sigma^2} : \frac{C}{\sigma - 1},$$

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{D - A}{C(1 + \sigma)} = \frac{B(1 + \sigma)}{A - \sigma^2 D},$$

d'où l'on déduit une équation du second degré en σ déterminant cette quantité :

$$\sigma = \frac{BC \pm (A - D)\sqrt{AD - BC}}{AD - BC - D^2}.$$

Si l'on désigne par $\begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha'_i & \beta'_i \\ \gamma'_i & \delta'_i \end{pmatrix}$ les coefficients des substitutions T_{a_i} et T_{b_i} pour $i = 2, 3, \ldots, p$, on obtient ainsi les

---

[1] Si une équation linéaire du second ordre admet un tel groupe comme groupe projectif de monodromie, elle possède des points à apparence singulière.

coefficients des substitutions génératrices exprimées au moyen de $6(p-1)$ paramètres puisque les coefficients d'une même substitution ne sont déterminés qu'à un facteur près; les A, B, C, D sont évidemment homogènes par rapport aux quatre variables d'un même système, par exemple α_2, β_2, γ_2, δ_2, de sorte que σ est homogène et de degré zéro par rapport à ces variables; il en est de même de $\frac{\mu}{\lambda}$ et $\frac{\nu}{\rho}$ et par suite de $\lambda:\mu:\nu:\rho$. Ces $6(p-1)$ quantités complexes peuvent être ainsi regardées comme les *coordonnées* du groupe G; mais si G est le groupe de monodromie d'une fonction de la classe $\mathfrak{L}(p, 0)$, les coordonnées ne vérifieront jamais les relations

$$\gamma_2 = \gamma'_2 = \ldots = \gamma'_{2p} = \nu = 0.$$

Si tous les γ sont nuls on a $C=0$, $\sigma = \pm\sqrt{\frac{A}{D}}$; si de plus $\nu = 0$ on en déduit $A = D$ et réciproquement; les points représentatifs des groupes G ne seront donc jamais situés sur la variété

$$\gamma_2 = \gamma'_2 = \gamma_3 = \ldots = \gamma'_{2p} = 0.$$
$$A = D.$$

Il résulte des considérations de continuité qui précèdent que ces points ne seront pas non plus dans le voisinage d'un point de cette variété; le domaine des valeurs des quantités $\alpha_i:\delta_i$, $\beta_i:\delta_i$, $\ldots$, $\gamma'_i:\delta'_i$, regardées comme fonctions des modules et des paramètres accessoires, présente donc des *espaces lacunaires*, et comme leur jacobien n'est pas identiquement nul, il en résulte que ces fonctions qui sont analytiques sont des fonctions transcendantes. Il n'est guère douteux qu'elles ne soient transcendantes par rapport aux paramètres accessoires considérés comme seuls variables, puisqu'il en est ainsi pour $p=1$; mais nous n'en avons pas de preuve rigoureuse.

Le mode de représentation que nous avons adopté pour les groupes considérés présente cet inconvénient que la quantité σ n'est pas déterminée d'une manière univoque en fonction de nos coordonnées, mais est susceptible de deux déterminations.

Si l'on suppose tous les déterminants $\alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i$ égaux à $+1$, il en sera de même de $AD - BC$ et l'on n'aura plus d'irrationalité dans l'expression de σ; on peut choisir l'une ou l'autre détermination de σ, ce qui donne toujours le même continuum de groupes; ces deux valeurs se déduisent l'une de l'autre en changeant les signes de A et D. Enfin on pourra profiter de l'indétermination qui subsiste dans l'expression de λ, μ, ν, ρ de manière à obtenir ces quantités en fonction rationnelle de A, B, C, D, le déterminant $\lambda\rho - \mu\nu$ étant égal à 1 ; on trouve ainsi :

$$\lambda = \frac{AC}{BC + (A-1)^2}, \qquad \mu = \frac{BC - (A-1)}{BC + (A-1)^2},$$
$$\mu = A - 1, \qquad \rho = B,$$

D étant égal à $\dfrac{1+BC}{A}$.

Remarquons que dans le cas de $p = 1$, les considérations que nous venons de développer ne sont plus applicables, mais l'étude directe des groupes G est alors bien facile; on doit prendre pour coordonnées les deux quantités k et k', multiplicateurs des deux substitutions génératrices qui s'expriment, comme nous l'avons vu, au moyen des périodes de l'intégrale elliptique de première espèce et du paramètre accessoire λ^2 par les formules

$$k = e^{\lambda\omega_1}, \qquad k' = e^{\lambda\omega_2},$$

d'où

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\log k}{\log k'}.$$

Quand le module ou invariant absolu J varie en évitant la valeur critique qui correspond au sommet

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = +i\infty$$

du quadrilatère fondamental du groupe modulaire, la partie imaginaire de $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ conserve un signe constant, par exemple le signe + et l'on a par suite, en posant $k = Re^{i\theta}$ et $k' = R'e^{i\theta'}$,

$$R'^{\theta} > R^{\theta'},$$

mais cette inégalité n'implique pas l'existence d'un espace lacunaire dans l'espace E_4 représentatif du point (k, k'); k et k' peuvent prendre indépendamment toutes les valeurs finies et différentes de zéro, en exceptant seulement les couples de valeurs telles que

$$|k| = |k'| = 1.$$

Marquons en effet dans le plan de Cauchy les deux points

$$\begin{aligned} \log k &= \log R + i\theta = \rho + i\theta \\ \log k' &= \log R' + i\theta' = \rho' + i\theta' \end{aligned} \qquad (\theta\rho' - \theta'\rho > 0).$$

Si l'on joint le second à l'origine par une droite Δ', le premier doit rester toujours d'un même côté de Δ'. Soient alors m et m_1 deux points représentatifs de valeurs de $\log k$; si $\rho' \neq 0$, Δ' ne coïncide pas avec l'axe imaginaire et l'on peut toujours ajouter ou retrancher aux ordonnées θ et θ_1 des deux points m et m_1 des multiples de 2π, de manière que les deux nouveaux points obtenus l et l_1 soient d'un même côté de Δ', celui qui est défini par $\theta\rho' - \theta'\rho > 0$; si l'on fait varier k dans son plan sur l'arc de spirale, correspondant au segment de droite ll_1 du plan $(\log k)$, et qui a pour extrémité deux points qui peuvent être pris arbitrairement, le rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ conservera une partie imaginaire positive; J variera donc d'une manière continue en évitant la valeur critique, et $\lambda = \frac{1}{\omega_1}\log k$ variera aussi d'une manière continue. On pourra donc inversement, en faisant varier λ et J, atteindre tous les couples de valeurs de k et k', sauf ceux que nous avons désignés plus haut. Les points M représentatifs de G dans E_4 le remplissent donc entièrement, sauf certaines variétés à deux dimensions qui correspondent à des cas de dégénérescence. Il n'y a pas d'espace lacunaire comme pour $p > 1$.

Nous avons fait correspondre à tout système de $2p$ substitutions fondamentales liées par la relation (5) et ramenées à une certaine forme canonique un point de l'hyperespace complexe à $6(p-1)$ coordonnées; mais il est clair qu'à un même groupe correspondent une infinité de points, tandis qu'à un point correspondent seulement deux groupes. On peut en effet modifier d'une infinité de manières le choix des substitutions génératrices de manière que le nouveau groupe obtenu soit composé des mêmes substitutions que le groupe initial.

Plaçons-nous d'abord dans un cas simple, celui où $p = 1$. Nous pouvons modifier le système des deux coupures (a, b) de la surface de Riemann, ce qui revient à effectuer sur ω_1 et ω_2 une substitution linéaire quelconque à coefficients entiers de déterminant ± 1 et par suite à effectuer sur k et k' la substitution birationnelle

$$\begin{aligned} K &= k^p k'^q \\ K' &= k^r k'^s \end{aligned} \qquad (ps - qr = \pm 1).$$

En faisant varier les entiers p, q, r, s, on obtient un groupe Γ de substitutions birationnelles, ne contenant par de substitutions infinitésimales, isomorphe au groupe des substitutions linéaires $\begin{pmatrix} pq \\ rs \end{pmatrix}$ et qui transforme un point $M(k, k')$ en des points correspondant au même groupe G. Arrêtons-nous un instant sur l'étude de ce groupe qui, comme nous allons le voir, n'est pas proprement discontinu. Employons les notations X et Y, x et y au lieu de K et K', k et k', et soit :

$$\begin{aligned} X &= x^p y^q, \\ Y &= x^r y^s. \end{aligned}$$

Considérons dans l'espace hypercomplexe (x, y) un domaine, une hypersphère par exemple de rayon aussi petit que l'on veut, et soit un point à l'intérieur de ce domaine tel que le rapport $\frac{-\log|y|}{\log|x|}$ soit fini et différent de zéro. Si $\frac{p}{q}$ désigne une fraction irréductible différant infiniment peu de ce rapport, il est clair qu'en substituant au point choisi un point infiniment voisin, on aura

$$p \log|x| + q \log|y| = 0,$$

cette égalité étant vérifiée en tous les points d'une certaine variété qui traverse le domaine. Si l'on associe à p et q deux entiers r et s tels que $ps - qr = 1$, et que l'on effectue la substitution $\begin{pmatrix} pq \\ rs \end{pmatrix}$ de Γ, on obtiendra un domaine traversé par la variété $|X| = 1$; nous pouvons donc choisir dans ce nouveau domaine un point (X, Y) tel que $|X| = 1$ et que l'argument θ de X soit incommensurable à 2π. Effectuons sur ce point la transformation de Γ :

$$\begin{aligned} X' &= X, \\ Y' &= X^n Y, \end{aligned}$$

nous aurons

$$\begin{aligned} |X'| &= |X| = 1, \\ |Y'| &= |Y| \end{aligned}$$

et l'argument de Y' sera, en désignant par φ celui de Y,

$$n\theta + \varphi.$$

Or il existe une infinité de couples d'entiers n et m tels que

$$n\theta - 2m\pi$$

soit aussi petit que l'on veut; n et m étant ainsi choisis, le point (X', Y') sera infiniment voisin de (X, Y). Il suit de là que tout domaine renferme une infinité de points équivalents à l'un des points M de ce domaine, M étant choisi sur certaines variétés en infinité dénombrable à trois dimensions. Par suite Γ n'admet pas de domaine de discontinuité.

En revanche les sous-groupes cycliques de Γ sont proprement discontinus dans certaines régions. Considérons par exemple une transformation de Γ correspondant à une substitution linéaire $\begin{pmatrix} pq \\ rs \end{pmatrix}$ hyperbolique; soient α et β les deux points doubles de cette substitution et μ son multiplicateur supposé > 1 ; on aura

$$p = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\mu^{-\frac{1}{2}} - \frac{\beta}{\alpha-\beta}\mu^{\frac{1}{2}},$$
$$q = \frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}\left(\mu^{\frac{1}{2}} - \mu^{-\frac{1}{2}}\right),$$
$$r = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\mu^{-\frac{1}{2}} - \mu^{\frac{1}{2}}\right),$$
$$s = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\mu^{\frac{1}{2}} - \frac{\beta}{\alpha-\beta}\mu^{-\frac{1}{2}}$$

et les coefficients p_n, q_n, r_n, s_n de la puissance $n^{\text{ième}}$ de cette dernière s'obtiendront en remplaçant μ par μ^n dans les formules qui précèdent; la substitution correspondante du groupe Γ change (x, y) en (x_n, y_n) et l'on a :

$$\log|x_n| = p_n \log|x| + q_n \log|y|,$$
$$\log|y_n| = r_n \log|x| + s_n \log|y|,$$

c'est-à-dire

$$\log|x_n| = \frac{\beta}{\alpha-\beta}\mu^{\frac{n}{2}}[\alpha \log|y| - \log|x|] + \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\mu^{-\frac{n}{2}}[\log|x| - \beta\log|y|],$$

$$\log|y_n| = \frac{1}{\alpha-\beta}\mu^{\frac{n}{2}}[\alpha \log|y| - \log|x|] + \frac{1}{\alpha-\beta}\mu^{-\frac{n}{2}}[\log|x| - \beta\log|y|]$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient immédiatement les valeurs limites de $|x_n|$ et $|y_n|$; il y a différents cas à distinguer suivant les signes de α, β, $\alpha-\beta$. Par exemple si

$$\alpha > \beta > 0,$$

on a

$$\lim_{n=\infty} |x_n| = \lim_{n=\infty} |y_n| = \infty \quad \text{si} \quad |y|^\alpha > |x|$$

et

$$\lim_{n=\infty} |x_n| = \lim_{n=\infty} |y_n| = 0 \quad \text{si} \quad |y|^\alpha < |x|.$$

Si le point (x, y) est sur la variété $|y^\alpha| = |x|$, il en est de même du point (x_n, y_n) et l'on a

$$\lim |x_n| = \lim |y_n| = 1.$$

En faisant tendre n vers $-\infty$ on obtient

$$\begin{aligned} \lim |x_n| &= \lim |y_n| = \infty \quad &\text{si} \quad &|x| > |y|^\beta, \\ \lim |x_n| &= \lim |y_n| = 0 \quad &\text{si} \quad &|x| < |y|^\beta, \\ \lim |x_n| &= \lim |y_n| = 1 \quad &\text{si} \quad &|x| = |y|^\beta. \end{aligned}$$

On obtient des résultats analogues quand α, β ou $\alpha-\beta$ sont négatifs. Les groupes cycliques considérés sont donc proprement discontinus, sauf sur certaines variétés à trois dimensions de l'hyperespace complexe. Nous sommes en outre dans l'un des cas très rares où l'itération d'une substitution birationnelle conduit à une division de l'espace en deux régions faciles à déterminer dans chacune desquelles les conséquents d'un point tendent vers un point limite unique.

Après cette digression revenons au cas de $p > 1$. Si G est le groupe de monodromie d'une fonction linéairement polymorphe de la classe $\mathfrak{L}(p, 0)$, nous pouvons encore d'une infinité de manières modifier le tracé des $2p$ coupures (a_k, b_k) qui rendent simplement connexe la surface de Riemann; à deux systèmes de coupures qui ne se ramènent pas l'un à l'autre par déformation continue correspondent deux systèmes distincts de $2p$ substitutions, génératrices du même groupe, et liées par la relation fondamentale. Il est aisé de se rendre compte de la nature des transformations correspondantes des coordonnées du groupe. Plaçons-nous d'abord dans le cas particulier où les coupures a_1 et b_1, et par suite les substitutions T_{a_1} et T_{b_1} ne sont pas modifiées;

les substitutions T_{a_i} et T_{b_i}, pour $i \geqq 2$, seront alors remplacées par des combinaisons de ces substitutions de sorte que le produit désigné tout à l'heure par le symbole Θ reste invariant. Par exemple, si $p = 2$ nous pouvons poser :

$$T'_{a_2} = T_{a_2},$$
$$T'_{b_2} = T_{b_2} T_{a_2}^{\pm n},$$

d'où

$$T'^{-1}_{a_2} T'_{b_2} T'_{a_2} T'^{-1}_{b_2} = T_{a_2}^{-1} T_{b_2} T_{a_2} T_{b_2}^{-1} = \Theta.$$

Cela revient à effectuer une substitution birationnelle sur les variables

$$\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ \alpha'_2,\ \beta_2,\ \gamma'_2.$$

On peut de même changer T_{a_2} en $T_{b_2}^{\pm n} T_{a_2}$, sans changer T_{b_2}, ce qui équivaut à une transformation analogue sur les coordonnées du groupe. Mais si la substitution T_{a_1} se trouve modifiée on devra réduire à la forme canonique $(z;\ kz)$ la nouvelle substitution qui la remplace, ce qui exigera l'extraction d'une racine carrée; il en résultera une transformation qui sera toujours algébrique mais pas nécessairement birationnelle. Si l'on veut n'introduire que des transformations birationnelles, il faut considérer des coordonnées surabondantes égales à des racines carrées de fonctions rationnelles des coordonnées primitives. Pour avoir des formules plus symétriques on pourra considérer, comme le fait Fricke dans la question analogue qui concerne les groupes fuchsiens, les invariants $(\alpha + \delta)$ des substitutions génératrices et de certaines de leurs combinaisons (voir les *Leçons* de Fricke et Klein *Sur les fonctions automorphes*, t. I, p. 389 et suiv.). Le groupe des substitutions birationnelles que nous considérons ici n'est que l'extension à un espace complexe du groupe modulaire, étudié par Poincaré puis par Fricke, dans le domaine réel des variables qui correspond aux groupes fuchsiens.

Pour $p > 1$, le groupe Γ est proprement discontinu dans certaines régions, alors que pour $p = 1$ nous venons de voir que le groupe est, en chaque point, improprement discontinu; la raison en est que pour $p > 1$ il existe des régions où G est le groupe d'une fonction uniforme et kleinéenne, tandis que pour $p = 1$, G ne peut être le groupe d'une fonction automorphe que s'il existe une relation entre les coordonnées k et k', de la forme $k^m k'^n = 1$

(m, n, entiers). Les $3p-3$ modules de la surface de Riemann et les $3p-3$ paramètres accessoires de l'équation (4) deviennent alors des fonctions uniformes des coordonnées de G, pouvant s'exprimer par exemple à l'aide des séries thêtakleinéennes et invariantes par les substitutions de Γ qui transforment G en lui-même.

Remarquons que la région R dans laquelle le groupe G est un groupe kleinéen, générateur de deux réseaux séparés par une courbe limite, n'est qu'une partie de la région R correspondant aux groupes de monodromie des fonctions de la classe $\mathfrak{L}(p, 0)$. Si les coordonnées de G sont extérieures à cette région R, le groupe Γ n'en existe pas moins, G étant toujours isomorphe au groupe d'une fonction $\mathfrak{L}(p, 0)$; mais Γ ne sera proprement discontinu que dans R.

Nous nous bornerons pour l'instant à cet aperçu qui nous montre que les fonctions hypermodulaires de Poincaré peuvent être étendues dans un champ complexe. Mais les considérations qui précèdent demanderaient quelques développements, notamment pour ce qui concerne la convergence uniforme des séries thêtakleinéennes regardées comme fonctions des paramètres dont dépendent les substitutions du groupe, cette convergence uniforme n'ayant été démontrée par Poincaré que dans le cas des groupes fuchsiens.

Remarquons toutefois que le caractère analytique de ces fonctions résulte aisément des théorèmes généraux concernant les solutions des équations différentielles du second ordre considérées comme fonctions des paramètres qui figurent dans ces équations. Nous renverrons sur ce point au Tome III des Œuvres de Klein.