BULLETIN DE LA S. M. F.

K. POPOFF

Sur le développement d'une fonction holomorphe en série de polynômes et de fractions rationnelles

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 532-536
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__532_1>

SUR LE DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION HOLOMORPHE EN SÉRIE DE POLYNOMES ET DE FRACTIONS RATIONNELLES;

PAR M. KYRILLE POPOFF.

(Sofia.)

La démonstration qui va suivre peut être considérée comme une généralisation de la démonstration de M. Painlevé dans le cas d'un contour convexe. Elle a l'avantage de résoudre la question dans le cas d'un contour simple quelconque sans faire appel à la théorie du potentiel ou de la représentation conforme et sans se servir du procédé de M. Runge. Elle a l'avantage de pouvoir être appliquée aussi dans le cas d'un domaine multiplement connexe.

Cas d'un domaine simplement connexe. — Soit D un domaine quelconque simplement connexe, dont le contour C admet une tangente. Nous admettons seulement que C ne présente pas des pointes tournées vers l'intérieur du domaine. (Les difficultés qui proviennent de telles singularités peuvent être tournées par des procédés d'un usage courant, en se servant des indications ci-dessous.) Pour simplifier l'écriture nous admettons que l'origine est à l'intérieur du domaine et nous désignerons par C_1 un cercle décrit autour de l'origine et qui contient le domaine.

Nous désignerons par $\alpha(z)$ le point de la normale extérieure au point z du contour et à une distance $d_1(z)$ de ce point, où $d_1(z)$ est une fonction positive et continue en général et choisie de manière que le cercle de centre $\alpha(z)$ et de rayon $d_1(z)$ ne coupe nulle part le contour C. Soit C_α le lieu géométrique du point $\alpha(z)$. Cette courbe qui correspond en général point par point à la courbe C pourra avoir même des points isolés, comme cela peut arriver dans le cas d'un lacet.

Il peut arriver que la courbe C_α, qui est à l'extérieur de C, est aussi à l'extérieur du cercle C_1. Si ce n'est pas le cas nous construisons la courbe C_β qui satisfait à la condition unique de correspondre point par point à la courbe C_α de manière que le cercle qui passe par le point $\alpha(z)$ de C_α et qui a pour centre le point correspondant $\beta(z)$ de C_β ne coupe pas le contour C. (Pour simplifier nous pouvons supposer que la courbe C_β ne présente pas des pointes, mais cela n'est pas nécessaire pour ce qui suit. De même les courbes C_β et C_α peuvent se couper en des points qui ne se correspondent pas. Elles peuvent avoir aussi des arcs communs.) Si la courbe C_β est tout entière à l'extérieur du cercle C_1, nous nous arrêtons à cette courbe, sinon, nous construisons la courbe C_γ, qui correspond point par point à la courbe C_β et satisfait à la condition unique que le cercle qui passe par le point $\beta(z)$ de C_β et qui a pour centre le point correspondant $\gamma(z)$ de C_γ ne coupe pas le contour C. Si la courbe n'est pas à l'extérieur de C_1, on construit la courbe C_δ, ... Il est facile à voir qu'on peut s'arranger toujours de façon qu'avec un choix convenable des courbes C_α, C_β C_γ, ... en nombre fini on arrive à une courbe C_ν qui est tout entière à l'extérieur de C_1. Pour simplifier nous supposons que ce soit la courbe C_β.

Considérons maintenant l'intégrale de Cauchy

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz,$$

où $f(z)$ est une fonction holomorphe de z à l'intérieur de D et continue sur C. Soit x une valeur de z du domaine D_1 qui est à l'intérieur de D et dont le contour n'a pas de point commun avec le contour C. Puisque, dans ce cas, z étant un point du contour C,

$$|\alpha(z) - z| < |\alpha(z) - x|,$$

on aura

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)\,dz}{z-\alpha+\alpha-x} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \sum_{p=0}^{n} \frac{f(z)[\alpha - z]^p}{[\alpha-x]^{p+1}}\,dz + R_n \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} P_n\left(\frac{1}{\alpha - x}\right) dz + R_n \text{ (1)} \end{aligned}$$

(1) Nous écrivons α, β au lieu de $\alpha(z)$, $\beta(z)$.

et l'on peut prendre n assez grand pour que $|R_n| < \frac{\varepsilon_1}{3}$ pour toute valeur de x à l'intérieur de D_1.

De même puisque $\int_{(C)} P_n\, dz$ est la somme d'un nombre fini de termes de la forme

$$\int_{(C)} \frac{f(z)\,(\alpha - z)^p}{(\alpha - x)^{p+1}}\,dz = \int_{(C)} \frac{f(z)(\alpha - z)^p}{(\alpha - \beta + \beta - x)^{p+1}}\,dz$$

et puisque pour tout point x de D_1 on a

$$|\beta(z) - \alpha(z)| < |\beta(z) - x|,$$

on peut choisir un m assez grand pour qu'on ait

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} P_n\left(\frac{1}{\alpha - x}\right) dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} Q_{nm}\left(\frac{1}{\beta - x}\right) dz + R_{nm}$$

avec $|R_{nm}| < \frac{\varepsilon_1}{3}$ pour toute valeur de x à l'intérieur de D_1. Ici $Q_{nm}\left(\frac{1}{\beta - x}\right)$ est la somme d'un nombre fini de termes

$$C^q_{-(p+1)}\,\frac{f(z)(\alpha - z)^p(\alpha - \beta)^q}{(\beta - x)^{p+q+1}}.$$

Par conséquent Q_{nm} est une fonction holomorphe de x pour $|x| < |\beta(z)|$ qu'on peut développer en série de puissances entières et positives de x pour toute valeur de x du domaine D_1. On obtient ainsi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} Q_{nm}\left(\frac{1}{\beta - x}\right) dz = \Pi_1(x) + R_{nmr},$$

où $\Pi_1(x)$ est un polynome de x et $|R_{nmr}| < \frac{\varepsilon_1}{3}$ pour toute valeur de x du domaine D_1.

Soit maintenant une suite de domaines $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ qui s'englobent et qui tendent vers D; faisons correspondre à ces domaines les nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ qui tendent vers zéro. Au domaine D_n et au nombre ε_n correspond un polynome Π_n tel que la série $\Pi_1 + (\Pi_2 - \Pi_1) + \ldots + (\Pi_n - \Pi_{n-1}) + \ldots$ tend absolument et uniformément vers $f(x)$ dans chaque domaine intérieur à D.

Cas d'un domaine multiplement connexe. — La généralisation que nous avons apportée à la démonstration de M. Painlevé nous permet aussi de traiter la question du développement d'une fonction holomorphe dans un domaine multiplement connexe.

Soient par exemple D un domaine doublement connexe et $f(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur de D et continue sur le contour intérieur C_0 aussi bien que sur le contour extérieur C. Nous porterons sur la normale extérieure de C_0 par rapport à D le point $\alpha_0(z)$ à une distance $d(z)$ du point correspondant z du contour C_0. On peut choisir $d(z)$ de façon que la courbe C_{α_0}, lieu géométrique de $\alpha_0(z)$, soit toute à l'intérieur de C_0 et que le cercle de rayon $d(z)$ décrit autour du point $\alpha_0(z)$ ne coupe pas C_0. (Ici encore nous supposons que C_0 ne présente pas des pointes tournées vers l'intérieur du domaine D.) Si la courbe C_{α_0} ainsi obtenue est à l'intérieur d'un cercle qui, lui aussi est à l'intérieur de C_0, nous nous arrêtons là ; si cela n'est pas le cas, nous choisirons une courbe C_{β_0} à l'intérieur de C_{α_0}, qui correspond point par point à la courbe C_{α_0} et qui satisfait à la condition unique que le cercle qui passe par le point $\alpha_0(z)$ de C_{α_0} et dont le centre est le point correspondant $\beta_0(z)$ de C_{β_0} ne coupe pas le contour C_0. A la courbe C_{β_0} on fait correspondre point par point la courbe C_{γ_0} intérieure à C_{β_0} et telle que le cercle qui passe par le point $\beta_0(z)$ et dont le centre est au point correspondant $\gamma_0(z)$ de C_{γ_0} ne coupe pas le contour C_0, ... Il est facile de voir qu'en choisissant convenablement les courbes C_{α_0}, C_{β_0}, C_{γ_0}, ..., on arrive après un nombre fini de telles opérations à une courbe qui est à l'intérieur d'un cercle qui lui aussi est à l'intérieur de C_0. Soient pour simplifier l'écriture C_{α_0} cette courbe et c le centre du cercle qui la contient et qui est contenu dans C_0.

Soit D_i un domaine intérieur à D et qui converge vers D quand i croît indéfiniment. On a pour un point x de D_i

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \frac{1}{2\pi i}\int_{(C_0)} \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

L'intégrale sur C nous donnera une série de polynomes de x. Quant à l'intégrale sur C_0 on peut l'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{(C_0)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(C_0)} \frac{f(z)\,dz}{z-\alpha_0+\alpha_0-x}\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(C_0)} \sum_{p=0}^{n} \frac{f(z)(\alpha_0-z)^p}{(\alpha_0-x)^{p+1}}\,dz + R_n\\ &= \int_{(C_0)} P_n\left(\frac{1}{\alpha_0-x}\right)dz + R_n\end{aligned}$$

avec $|R_n| < \frac{\varepsilon_i}{2}$, puisque $|\alpha_0 - z| < |\alpha_0 - x|$. Ici $P_n\left(\frac{1}{\alpha_0 - x}\right)$ est un polynome en $\frac{1}{\alpha_0 - x}$.

On a d'autre part

$$\int_{(C_0)} \frac{f(z)(\alpha_0 - z)^p}{(\alpha_0 - x)^{p+1}} dz = \int_{(C_0)} \frac{f(z)(\alpha_0 - z)^p}{(\alpha_0 - c + c - x)^{p+1}} dz,$$

où $|\alpha_0 - c| < |x - c|$ et par conséquent on peut écrire

$$\int_{(C_0)} P_n\left(\frac{1}{\alpha_0 - x}\right) dz = \int_{(C_0)} Q_{nm}\left(\frac{1}{c - x}\right) dz + R_{nm}$$

avec $|R_{nm}| < \frac{\varepsilon_i}{2}$ quel que soit x à l'intérieur de D_i et où $Q_{nm}\left(\frac{1}{c - x}\right)$ est un polynome en $\frac{1}{c - x}$.

On obtient ainsi pour x du domaine D_i

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(C_0)} \frac{f(z)}{z - x} dz = \Pi_i\left(\frac{1}{c - x}\right) + R_i$$

avec $|R_i| < \varepsilon_i$ et où $\Pi_i\left(\frac{1}{c - x}\right)$ est un polynome en $\frac{1}{c - x}$.

A chaque contour intérieur correspond un point intérieur c et une série de polynomes en $\frac{1}{c - x}$, c'est ce qui démontre le théorème bien connu de M. Runge, qu'une fonction holomorphe dans un domaine multiplement connexe peut être développée en série de fractions rationnelles.

La méthode que nous employons donne tout de suite les beaux résultats de MM. Mittag-Leffler et Borel sur le développement des fonctions holomorphes en séries.