BULLETIN DE LA S. M. F.

W. H. YOUNG

Sur les séries de Fourier restreintes et la convergence presque partout

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 585-595
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__585_1>

SUR LES SÉRIES DE FOURIER RESTREINTES ET LA CONVERGENCE PRESQUE PARTOUT;

Par M. W.-H. Young.

1. En me restreignant comme je le ferai partout dans la suite aux séries de fonctions normales dans un intervalle L ([1]) (*dit intervalle de définition*), c'est-à-dire aux séries de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{n+\infty} c_n F_n(x) \tag{1}$$

([1]) La méthode des séries de Fourier restreintes n'est pas liée à ce genre de fonctions mais exige que les fonctions $F_n(x)$ possèdent une expression asymptotique appropriée.

où les fonctions $F_n(x)$ satisfont aux conditions

$$\int_L F_n(x) F_m(x)\, dx = 0 \qquad (n \neq m), \tag{2}$$

je rappelle qu'une série est dite *du type de Fourier* (ou brièvement *série de Fourier*) si ses coefficients sont exprimables par les formules

$$c_n = \int_L f(x) F_n(x)\, dx \Big/ \int_L [F_n(x)]^2\, dx \tag{3}$$

au moyen des valeurs dans l'intervalle L d'une certaine fonction $f(x)$. Cette fonction $f(x)$ s'appelle alors *une fonction associée de la série* (1).

La désignation par le nom de Fourier des séries de ce genre se justifie par le fait que c'est à Fourier que leur étude doit sa première impulsion effective. Mais en établissant pour le cas de séries trigonométriques ordinaires les formules (3) exprimant la valeur des coefficients — ce qui constitue essentiellement le progrès réalisé par Fourier — il lui était impossible de se rendre compte des restrictions auxquelles ces formules étaient soumises. Il partait implicitement de l'égalité entre la série et la fonction associée, supposée donnée, et l'absence d'une définition précise des termes de *fonction* et d'*intégration* rendait toute discussion illusoire.

Depuis l'époque où un énoncé précis du résultat de Fourier put être formulé, l'extension du concept d'intégration — avec Cauchy, Riemann et, entre autres auteurs plus récents, Lebesgue, — a automatiquement augmenté la portée de la découverte de Fourier et l'on put s'apercevoir que nombreuses classes de séries de fonctions rentraient dans ce que nous appelons *le type de Fourier*. Cependant, l'avance ne laissait pas d'être lente, car on était astreint à imaginer pour chaque série particulière une méthode distincte, et presque toujours compliquée, qui ne conduisait qu'à des résultats isolés dont on ne savait rien tirer.

La discussion de la nature et du mode de conduite de ces séries, qui se faisait en partant d'une connaissance de leur fonction associée, et qui a dû préoccuper plus ou moins longuement tous les auteurs de quelque renom, était en fin de compte restée presque stérile, même en ce qui concerne les séries reconnues comme étant du type de Fourier, exception étant faite pour les séries trigonométriques ordinaires de Fourier, — de la forme

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

— et en une certaine mesure pour les séries du type de Fourier de fonctions de Legendre. Un seul résultat un peu général avait été atteint, dans le cas très restreint de séries du type de Fourier dont les fonctions sont définies par une équation différentielle du second ordre n'ayant aucune singularité (*fonctions de Sturm-Liouville*); on put voir que ces séries ont toutes les propriétés sommatoires des séries trigonométriques de Fourier.

Or c'est bien à l'existence de singularités relativement à l'équation de définition des fonctions (en particulier) de Legendre et de Bessel qu'on doit la difficulté essentielle de l'étude de séries de ces fonctions, et cela par le fait qu'il ne peut suffire de savoir qu'une telle série est du type de Fourier pour être assuré que la série intégrée [1] convergera dans tout l'intervalle de définition vers une intégrale [2].

2. On sait que, lorsqu'une série trigonométrique ordinaire est du type de Fourier, ses coefficients tendent vers zéro et la série intégrée converge vers une intégrale dans tout l'intervalle de périodicité ($-\pi \leqq x \leqq \pi$). De ces deux propriétés, — qui subsistent pour les séries trigonométriques plus générales de la forme

$$\Sigma[a_n \cos(n+q)x + b_n \sin(n+q)x],$$

q étant un nombre quelconque réel, — la première est une conséquence de la seconde, qui fournit la condition nécessaire et suffisante pour qu'une série trigonométrique soit du type de Fourier.

Je prends alors comme propriétés de définition de ce que je

---

[1] Nous designons ainsi la série qui, dérivée terme à terme, devient identique à la série donnée.

[2] Nous employons pour abréger le terme *d'intégrale* (en sous-entendant *au sens de M. Lebesgue*) bien que celui de *fonction absolument continue* paraîtrait préférable.

nomme *série de Fourier restreinte* ou, pour abréger, *série R-F*, les deux propriétés suivantes :

1° La suite de ses termes tend vers zéro;

2° La série intégrée converge dans un intervalle (a, b), ouvert ou fermé, intérieur à l'intervalle de définition (ou encore dans un groupe de tels intervalles) vers l'intégrale d'une fonction $f(x)$. L'intervalle (a, b) s'appelle *intervalle de restriction*.

Il serait commode de réserver à l'expression de ces deux propriétés la relation symbolique

$$(4) \qquad f(x) \sim \Sigma\, c_n \mathrm{F}_n(x) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

(remplaçant, suivant le cas, l'un ou l'autre des signes $\leqq$ par $<$), en convenant d'écrire par exemple

$$(5) \qquad f(x) \sim \Sigma\, c_n \mathrm{F}_n(x) \qquad (a \leqq x \leqq b)(\mathrm{C}k)$$

pour exprimer que la série intégrée de la série de $\Sigma c_n \mathrm{F}_n(x)$ converge $(\mathrm{C}k)$ dans l'intervalle (a, b) fermé, tandis que la quantité $c_n \mathrm{F}_n(x) n^{-k}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Toute série trigonométrique de Fourier est une série de Fourier restreinte dont l'intervalle de restriction est fermé et coïncide avec l'intervalle de définition. L'emploi traditionnel, pour ces séries, de la relation symbolique (4) comme simultanée des formules (3) n'offre donc aucune contradiction.

Une série du type de Fourier de fonctions de Bessel ou de Legendre ne satisfait en général qu'à la relation symbolique (5) où k n'est pas nul.

Dans le cas d'une série trigonométrique $\Sigma(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ pour laquelle on saurait d'avance que $n^{-k} a_n$ et $n^{-k} b_n$ tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$, les deux conditions de définition des séries R-F pourront être remplacées par la condition (nécessaire et suffisante) que l'intégrale de la $n^{\text{ième}}$ moyenne de Cesàro prise sur un ensemble quelconque de points de mesure E, intérieurs à l'intervalle de restriction, tende vers zéro lorsque E et $\frac{1}{n}$ tendent simultanément et indépendamment vers zéro, c'est-à-dire

$$\lim_{(E \to 0,\ n \to \infty)} \int_E f_n(x)\, dx = 0,$$

où $f_n(x)$ est la $n^{\text{ième}}$ moyenne de Cesaro.

J'ai démontré qu'une série de Fourier restreinte d'une classe de fonctions normales possède dans son intervalle de restriction toutes les propriétés sommatoires que possèdent dans leur intervalle de définition les séries de Fourier de la même classe, qu'il s'agisse de convergence ou d'oscillation entre des limites d'indétermination de caractères prescrits, que la sommation soit supposée faite par les méthodes ordinaires ou par les méthodes modernes telles par exemple celles de Cesàro.

L'introduction des séries de Fourier restreintes m'a permis non seulement de rendre susceptibles d'une même étude simple une classe étendue de série de fonctions normales n'appartenant pas nécessairement au type de Fourier, mais encore de fournir une méthode par laquelle il est possible d'étudier simultanément des groupes entiers de ces séries.

Les séries de Fourier restreintes dont j'ai eu presque exclusivement à faire usage dans ce travail sont celles qui rentrent dans la classe de séries trigonométriques de la forme

$$\Sigma[a_n \cos(n+q)x + b_n \sin(n+q)x],$$

le cas de $q = 0$ servant plus particulièrement à l'étude des séries de Legendre et celui de $q \neq 0$ à l'étude des séries de Bessel.

C'est ainsi que j'ai pu démontrer que lorsque la suite des termes d'une série de Fourier-Legendre ou de Fourier-Bessel, de fonction associée $f(x)$, converge vers zéro, la série se comporte, en des points intérieurs au sens étroit à l'intervalle de définition, exactement de la même manière que la série trigonométrique ordinaire de Fourier de fonction associée $f(\cos x)$.

Dans la même hypothèse, pour que la $(1+p)^{-\text{ième}}$ puissance de la fonction associée possède une intégrale (soit sommable) il faut et suffit que l'intégrale

$$\int_a^b |f(x)|^{1+p}\, dx$$

soit bornée.

La nécessité de ces conditions se déduit des faits correspondants du cas des séries de Fourier au moyen du théorème suivant :

Étant donnée une série R-F, *de fonction associée* $f(x)$, *on peut toujours trouver une fonction* $\varphi(x)$, *coïncidant avec* $f(x)$ *dans l'intervalle de restriction, et telle que les différences entre les termes correspondants de la série de Fourier de* $\varphi(x)$ *et de la série* R-F *donnée constituent une série uniformément convergente, et cela dans tout l'intervalle de restriction.*

Pour démontrer la suffisance des conditions énoncées il n'y a, en ce qui concerne la deuxième de nos propositions, rien à changer à la démonstration correspondante de la théorie des séries de Fourier ([1]); pour la première, au lieu des expressions (3) des coefficients, on utilise le fait que la série intégrée est une série de Fourier.

Il n'est pas inutile de remarquer qu'au reste, les méthodes utilisées s'appliquent, sans modification essentielle, à des classes de séries plus générales, comprenant comme cas particuliers les séries p fois dérivées des séries R-F.

En discutant les séries dérivées nous utilisons, par exemple, le théorème analogue à celui que nous avons énoncé ci-dessus pour les séries R-F, que *les différences entre les termes correspondants de la série* p *fois dérivée d'une série* R-F *et de la série* p *fois dérivée d'une certaine série de Fourier constituent une série convergeant uniformément* (Cp).

3. Je vais maintenant montrer l'intérêt, pour la théorie des séries convergentes presque partout, des considérations résumées ci-dessus.

Parmi les résultats obtenus par M. Fatou dans son Mémoire sur les séries trigonométriques et séries de Taylor, résultats basés surtout sur des idées des écoles françaises du commencement du xx^e^ siècle, l'un des plus remarquables est énoncé en ces termes :

Si na_n et nb_n tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$, l'ensemble des points

---

([1]) W.-H. Young et G.-Ch. Young, *On the Theorem of Riesz-Fischer* (*Quart. Journ. of Pure and Applied Math.*, vol. 44, 1912, p. 56-58.

de divergence de la série $\Sigma(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ est de mesure nulle (1).

Dès lors, le problème de la convergence presque partout d'une série de fonctions était posée et en partie résolue dans des cas isolés. Plus tard un étudiant de Goettingue, M. Jerosch, dont une mort prématurée interrompit le travail, et après lui, M. Weyl, s'emparèrent de la question traitée par M. Fatou, et obtinrent un résultat qui comprend, il est vrai, celui de M. Fatou, mais qui satisfait très mal l'esprit (2).

Le résultat équivaut en effet à l'énoncé suivant :

Si l'on divise le $n^{ième}$ terme d'une série de Fourier d'une fonction à carré sommable par $n^{\frac{1}{6}}$, on obtient une série convergente presque partout.

Les méthodes de MM. Jerosch et Weyl étaient plutôt compliquées. Dans une Note aux *Comptes rendus* (3) j'ai démontré d'une manière très simple qu'on *peut prendre comme exposant de l'indice n n'importe quel nombre positif* δ.

A la fin de cette Note j'ai remarqué qu'on peut encore remplacer n^δ par $(\log n)^{1+\delta}$. A peu près à la même époque j'ai publié une autre Note préliminaire (4) où la puissance de n est remplacée par l'expression $l_1(n) l_2^2(n), \ldots, l_{r-1}^2(n)[l_r(n)]^{2+k}$, où $0 < k$, et $l_r(n) = \log l_{r-1}(n)$, $l_1(n) = \log n$.

J'ai remarqué aussi que ce résultat reste vrai si l'on y remplace la série de Fourier $\Sigma(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ par sa série alliée $\Sigma(b_n \cos nx - a_n \sin nx)$. Sur ces entrefaites M. Hardy, auquel avait été soumis l'un de mes manuscrits, s'intéressa à la question. et, comme il le dit du reste lui-même (5) au moment de recevoir une lettre de ma part dans laquelle j'affirme comme presque certain qu'il suffirait, dans le cas de Fourier, de diviser les coefficients par $\log n$, il achevait une démonstration de ce fait et le publia incessamment. A ce résultat, qui n'est pas valable pour la

(1) P. Fatou, *Séries trigonométriques et séries de Taylor* (*Acta math.*, t. XXX, 1906, p. 337).

(2) *Voir* mes remarques, *Proc. Royal Soc.*, (A), t. LXXXVIII, p. 178-179.

(3) *Comptes reudus,* t. 155, p. 1480.

(4) *Proc. Royal Soc.* (*loc. cit.*), p. 179.

(5) *Proc. Lond. Math. Soc.*, 2e série, t. XII, p. 370.

série alliée, les mathématiciens de l'école allemande donnent le nom de « théorème de Hardy ».

Tout de suite je suis allé plus loin en démontrant que (¹) le résultat reste vrai si l'on substitue à la série de Fourier la série plus générale obtenue en dérivant la série de Fourier de n'importe quelle fonction à variation bornée, tandis que pour la série alliée d'une telle série dérivée je trouvai qu'il suffit de diviser par le facteur

$$l_1(n)\,l_2(n)\ldots l_r(n)\,\{l_{r+1}(n)\}^{1+k} \qquad (0 < k).$$

4. *La théorie des séries de Fourier restreintes repose sur le fait que, dans leurs intervalles de restriction, elles se comportent exactement comme les séries de Fourier.*

Cette phrase condense une foule de théorèmes qui n'ont pas tous été énoncés en détail. Nous avons en particulier le lemme suivant :

Lemme. — *Si* $(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *et* $(c_n \cos nx + d_n \sin nx)$ *sont les* $n^{\text{ièmes}}$ *termes de deux séries R-F ayant un intervalle de restriction commun* $(a \leqq x \leqq b)$ *la série des différences de ces deux termes est une nouvelle série R-F, ayant pour fonction associée la différence des fonctions associées de ces deux séries données.*

Corollaire. — *Si deux séries R-F à intervalle de restriction commun ont pour fonctions associées deux fonctions* $f(x)$ *et* $g(x)$ *dont la différence est une intégrale, les deux séries ont les mêmes points de convergence dans l'intervalle de restriction commun.*

Ces lemmes évidents nous permettent d'obtenir le théorème qui suit :

Théorème. — *Si la série trigonométrique*

$$\Sigma(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

est telle que : 1° les coefficients a_n *et* b_n *sont des fonctions bornées de* n; *2° la série intégrée converge partout dans*

(¹) *Proc. Lond. Math. Soc.*, 2ᵉ série, t. XIII, p. 13-28.

l'intervalle $(-\pi \leqq a \leqq x \leqq b \leqq \pi)$ *vers une fonction à variation bornée* [1]; *la série* $\sum \frac{(a_n \cos nx + b_n \sin nx)}{\log n}$ *est une série R-F convergente presque partout dans l'intervalle* $(a \leqq x \leqq b)$.

La série intégrée $\sum \frac{(a_n \sin nx - b_n \cos nx)}{n}$ est une série de Fourier, car a_n et b_n sont bornés. Soit $g(x)$ sa fonction associée :

$$(6) \qquad g(x) \sim \sum \frac{(a_n \sin nx - b_n \cos nx)}{n}.$$

D'après la théorie des séries de Fourier, $g(x)$ est identique dans l'intervalle de restriction à la fonction à variation bornée de notre énoncé.

D'autre part $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\log n}$ est une série de Fourier connue, dont la fonction associée $f(x)$, sommable en $(-\pi, \pi)$ est analytique en tout intervalle ne contenant pas l'origine.

Écrivons donc

$$(7) \qquad f(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{\log n}\right) \qquad (-\pi \leqq x \leqq \pi).$$

Ces propriétés des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ permettent d'écrire, d'après un théorème connu,

$$(8) \quad \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x-t)\, g(t)\, dt \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a_n \sin nx - b_n \cos nx)}{n \log n} \qquad (-\pi \leqq x \leqq \pi).$$

Divisons l'intégrale en trois parties relatives aux intervalles $(-\pi, a)$, (a, b), (b, π) respectivement. Il est clair que chacune est fonction absolument convergente de x, — celle relative à (a, b), en vertu [2] du fait que $f(x-t)$ est sommable et $g(t)$ à variation

---

[1] Si cette fonction n'est pas continue, on lui attribuera en un point de discontinuité la valeur moyenne $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ de ses limites à droite et à gauche.

[2] Il suffit évidemment pour l'établir de poser $f(x-t) \gtreqless 0$ et $g(t)$ monotone; en intégrant par parties, on voit alors qu'il suffit, $F(x)$ désignant l'intégrale de $f(x)$, que la propriété soit vraie pour la fonction

$$\int F(x-t)\, dg(t).$$

Or celle-ci est une intégrale double absolument convergente; en changeant, par bornée dans $(a < x < b)$, les deux autres à cause de l'analyticité de $f(x-t)$ dans les intervalles $(-\pi, a)$ et (b, π).

Il suit de là que la série obtenue en dérivant terme à terme la série (8) est une série R-F dans l'intervalle $(a < x < b)$. Car les coefficients $\frac{a_n}{n}$ et $\frac{b_n}{n}$ tendent vers zéro, et la série intégrée (8) converge vers une intégrale dans l'intervalle $(a < x < b)$.

Soit $q(x)$ la fonction associée de cette série R-F; elle sera la dérivée de celle de la série (8). Donc

$$(9) \qquad q(x) \sim \sum \frac{(a_n \cos nx + b_n \sin nx)}{\log n} \qquad (a < x < b),$$

où

$$(10) \quad q(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt = q_1(x) - \frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}\int_a^b f(x-t)g(t)dt,$$

$q_1(x)$ étant absolument continue d'après ce que nous venons de démontrer.

Or considérons une fonction $G(x)$ à variation bornée dans l'intervalle complet de périodicité $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ et coïncidant avec $g(x)$ dans l'intervalle central $(a \leqq x \leqq b)$. Soit sa série de Fourier

$$(11) \qquad G(x) \sim \sum \frac{(A \sin nx - B \cos nx)}{n}.$$

Le même raisonnement que précédemment nous permet d'écrire les relations symboliques, analogues de (9) et (10),

$$(12) \qquad Q(x) \sim \sum \frac{(A_n \cos nx + B_n \sin nx)}{\log n} \qquad (-\pi \leqq x \leqq \pi),$$

et

$$(13) \quad Q(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)G(t)dt = Q_1(x) - \frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}\int_a^b f(x-t)g(t)dt,$$

où $Q_1(x)$ est absolument continue.

Les fonctions $q(x)$ et $Q(x)$ ont donc pour différence une inté-

---

suite, l'ordre d'intégration par rapport à $g(t)$ et à x, on écrira :

$$\int F(x-t)\,dg(t) = \int \left\{ \int_a^x f(u-t)\,du \right\} du = \int_a^x \left\{ \int f(u-t)\,dg(t) \right\} du.$$

grale et par suite, comme nous l'avons vu, leurs séries R-F, (9) et (12), convergent aux mêmes points de l'intervalle commun de restriction $(a < x < b)$.

Mais par un théorème jadis démontré par moi-même, la série (12) est convergente presque partout en $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ et en particulier presque partout en $(a < x < b)$. En conséquence la série (9) converge elle aussi presque partout dans l'intervalle $(a < x < b)$.

On peut remarquer à propos du théorème ci-dessus que des résultats analogues ont lieu pour les séries de fonctions de Bessel ou Legendre. En particulier *si la suite des termes des séries de Fourier-Legendre ou Fourier-Bessel convergent vers zéro, on obtient, en divisant le* $n^{\text{ième}}$ *terme par* $\log n$, *une série convergente presque partout.*

Finalement, il n'est pas sans intérêt, en parlant d'une série R-F, $\Sigma(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, de constater que la série

$$\Sigma(b_n \cos nx - a_n \sin nx),$$

qu'on pourrait appeler *la série alliée de la série R-F*, possède des propriétés intéressantes. Par le même raisonnement que tout à l'heure, on démontre, par exemple, que *lorsqu'une série donnée est la dérivée terme à terme d'une série trigonométrique ordinaire dont la suite des coefficients tend vers zéro et dont la série intégrée converge dans un intervalle vers une fonction à variation bornée, la série alliée de la série primitive donne après division du* $n^{\text{ième}}$ *terme par*

$$l_1(n)\, l_2(n) \ldots l_r(n)\, l_{r-1}(n) = z(n)$$

une série R-F convergente presque partout.

En effet nous n'avons qu'à interpréter $f(x)$ dans le raisonnement précédent comme étant la fonction associée de la série de Fourier

$$\sum \frac{\sin nx}{z(n)}$$

et nous obtiendrons le résultat énoncé, en nous rappelant que le théorème en question est vrai quand l'intervalle (a, b) est l'intervalle complet de périodicité $(-\pi, \pi)$.