BULLETIN DE LA S. M. F.

P. LEVY

Sur les conditions d'application et sur la régularité des procédés de sommation des séries divergentes

Bulletin de la S. M. F., tome 54 (1926), p. 1-25

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1926__54__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR LES CONDITIONS D'APPLICATION ET SUR LA RÉGULARITÉ DES PROCÉDÉS DE SOMMATION DES SÉRIES DIVERGENTES [1];

PAR M. PAUL LÉVY.

1. Le problème fondamental qui se pose à propos des séries divergentes est le suivant : faire correspondre à chaque série un nombre, que l'on pourra appeler somme de la série, la correspondance entre une série et sa somme se conservant au cours des opérations usuelles que l'on a à effectuer sur ces séries. Bien entendu la définition de la somme devra se réduire à la définition ordinaire dans le cas des séries convergentes.

Ces conditions suffisent pour déterminer la somme de certaines séries. Si une série divergente peut être obtenue par la multiplication de deux séries semi-convergentes de sommes a et b, on ne peut admettre qu'une définition de la somme qui donne la valeur ab. Tel est le cas, comme on sait, pour la formule de Cesaro

$$S = \lim \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n} \tag{1}$$

(S_n désignant la somme des n premiers termes; nous désignerons par u_n le terme de rang n). Ces considérations s'appliquent en particulier à la série d'Euler

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots, \tag{2}$$

que l'on peut considérer comme le carré de la série $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ pour $x = 1$;

---

[1] Les résultats contenus dans ce Mémoire ont été exposés au séminaire de M. Hadamard, au Collège de France, le 5 février 1926 et résumés dans une Note présentée aux *Comptes rendus* le 29 mars 1926,

sa somme S doit donc être $\frac{1}{2}$ et c'est bien ce que donne la formule (1). Plus simplement, mais par des considérations du même ordre, on remarque que la même expression $S - 1 = - S$ est obtenue, soit en enlevant le premier terme, soit en changeant tous les signes; la somme, si on a le droit de parler de la somme, ne peut être que $\frac{1}{2}$.

Ces remarques fondamentales, qui ont inspiré la plupart des recherches sur les séries divergentes, ont fait oublier un autre point de vue, qui est sans doute le premier qui vient à l'esprit à propos des séries divergentes, qui a dû le premier conduire Euler à considérer $\frac{1}{2}$ comme somme de la série (2) et Cesaro à proposer la formule de sommation (1), mais qui n'a jamais été développé systématiquement et qui mérite de l'être. Il consiste à considérer comme somme de la série un nombre S tel que les sommes successives S_n soient tantôt plus grandes, tantôt plus petites, et qu'il y ait une compensation aussi parfaite que possible entre les valeurs plus grandes et les valeurs plus petites.

Il nous semble que c'est cette compensation aussi parfaite que possible qui fait comprendre la raison profonde du lien qui existe entre une série divergente et sa somme, et que la recherche de cette compensation sera notre meilleur guide pour définir la somme dans des cas aussi étendus que possible. Ensuite il y aura lieu de chercher à reconnaître si les séries divergentes ainsi sommées peuvent être soumises suivant les règles habituelles aux opérations usuelles telles que la multiplication; c'est là une question que nous n'aborderons pas au cours de ce travail.

On remarque l'analogie entre le problème que nous posons et le problème qui consiste à déterminer la meilleure valeur à prendre pour une grandeur inconnue dont on a n mesures $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Dans un cas comme dans l'autre il s'agit de définir les conditions d'une bonne compensation. Mais il y a deux différences importantes. Dans la théorie des erreurs, il s'agit d'applications pratiques, et l'on sait combien il est délicat de justifier la valeur pratique de la règle qui consiste à prendre la moyenne arithmétique

$$\frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n}. \tag{3}$$

Le problème actuel est au contraire d'ordre théorique. Nul ne saurait nous contester le droit de prendre la formule (3), et à la limite la formule (1), qui est la plus simple possible et correspond bien à l'idée que nous avons d'une bonne compensation; l'utilité de ce point de vue est ensuite suffisamment justifiée par le résultat de Cesaro rappelé tout à l'heure.

La seconde différence avec le problème fondamental de la théorie des erreurs provient de ce qu'ici n augmente indéfiniment; il faut tenir compte d'une infinité de valeurs et de l'ordre dans lequel elles se présentent. Là est la difficulté du problème. La formule (1) ne donne pas toujours une limite déterminée. Mais les remarques faites à propos de cette formule doivent nous encourager à nous laisser guider par des considérations d'ordre théorique pour déterminer les conditions d'une bonne compensation.

2. Au point de vue qui nous occupe, il y a une différence essentielle entre les séries où les S_n sont finis et celles où ils augmentent indéfiniment ou du moins ne sont pas bornés. Dans le premier cas, si l'on ne se propose qu'une approximation limitée (mais d'ailleurs aussi grande que l'on veut), on peut dire que les S_n n'ont qu'un nombre fini de valeurs, dont on peut prendre la moyenne, en leur donnant des poids plus ou moins grands suivant leurs fréquences plus ou moins grandes. La difficulté est bien plus grande si les S_n ne sont pas bornés. Nous étudierons surtout le cas où les S_n sont bornés; mais nous verrons que les résultats obtenus peuvent n'être pas inutiles pour l'étude du problème général.

Dans le cas où les S_n sont bornés, il suffit de considérer les formules de sommation du type

$$(4) \qquad S = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{m_n}(\mu_1 S_1 + \mu_2 S_2 + \ldots + \mu_n S_n),$$

m_n désignant la somme des coefficients $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Cette formule comprend la formule (1) comme cas particulier. Il est bien entendu essentiel, pour une bonne compensation, que les μ_n varient régulièrement. Ainsi, non seulement nous écarterons l'hypothèse que les μ_n puissent être de signes quelconques, mais nous écarterons des expressions telles que

$$(5) \qquad \mu_n = \sin^2 \sqrt{n},$$

expression qui, appliquée par exemple à une série telle que $S_n = \sin^2 \sqrt{n}$, donnerait $\frac{3}{4}$, tandis que la formule de Cesaro, appliquée à la même série, donne $\frac{1}{2}$ [1]. Mais, s'il est évident que la suite des coefficients μ_n définis par la formule (5) doit être considérée comme irrégulière, la difficulté sera de définir avec précision quand une suite sera *régulière*, ou du moins *assez régulière* pour ne pas risquer de nous induire en erreur, en donnant un poids trop grand à certains S_n.

Observons d'autre part qu'il est essentiel que la série $\Sigma\mu_n$ diverge, c'est-à-dire que m_n augmente indéfiniment. Étant donnée l'hypothèse déjà faite que les μ_n sont positifs, cette condition de divergence est nécessaire et suffisante pour que des S_n en nombre fini n'aient qu'un poids infiniment petit, et qu'en conséquence, toutes les fois que la suite des S_n a une limite, la *limite généralisée* définie par la formule (4) soit égale à cette limite. Il faut de plus que la série $\Sigma\mu_n$ diverge lentement; on sait, et nous le verrons bientôt d'une manière précise, que c'est à cette condition que la formule (4) s'applique dans des cas aussi étendus que possible. Nous considérons donc essentiellement des suites de coefficients μ_n dont les sommes m_n croissent lentement et régulièrement, mais au delà de toute limite.

La suite précisera un peu le sens de ces mots. Indiquons seulement que m_n doit avoir un ordre de croissance déterminé α, positif ou nul, c'est-à-dire non seulement que $\frac{\log m_n}{\log n}$ tend vers α, mais que le rapport des accroissements de ces logarithmes, rapport équivalent à $\frac{n\mu_n}{m_n}$, tend vers le même nombre α, positif ou nul.

---

[1] Plus simplement, comme exemple de procédé de sommation irrégulier, on peut indiquer celui défini par la formule

$$S = \lim \frac{S_2 + S_4 + \ldots + S_{2n}}{n},$$

qui, appliqué à la série (2), donne 0, au lieu de $\frac{1}{2}$. On remarque que la condition qu'on puisse ajouter au début de la série un terme nul sans changer la somme, condition évidemment susceptible d'écarter certains procédés irréguliers, n'est pas vérifiée pour ce procédé.

L'objet des nos 3 à 7 de cette étude est de répondre en partie aux problèmes suivants, qui se posent tout naturellement.

Problème I. — *Étant donnée une suite de valeurs bornées de* S_n, *peut-on toujours trouver une suite de coefficients* μ_n, *vérifiant les conditions précédentes, et telle que la limite généralisée définie par la formule* (4) *existe ?*

Problème II. — *Peut-on affirmer que deux suites différentes de coefficients* μ_n, *vérifiant ces conditions, ne donnent jamais deux limites différentes?*

Cette étude repose sur l'introduction d'une notion importante, la notion d'*intervalle de compensation*. Nous étendrons ensuite cette notion, et la notion de régularité, à des procédés de sommation plus généraux.

3. Il est utile de remarquer l'analogie du problème qui nous occupe avec celui de la définition de la limite généralisée d'une fonction $f(x)$ de la variable continue x, pour x infini, par l'une des formules

$$(6) \qquad L_1 = \lim_{X \to \infty} \frac{1}{X} \int_0^X f(x)\, dx,$$

$$(7) \qquad L_2 = \lim_{X \to \infty} \frac{1}{\varphi(X)} \int_0^X f(x)\, \varphi'(x)\, dx,$$

qui correspondent respectivement aux formules (1) et (3); $y = \varphi(x)$ est une fonction nulle pour $x = 0$, et qui devient infinie avec x, lentement et régulièrement. Le problème de la suite discontinue des S_n se ramène d'ailleurs à ce problème, en considérant une fonction $f(x)$ égale à S_n de n à $n+1$. Appliquer la formule (7) à cette fonction, revient à appliquer la formule (3) en prenant pour m_n la valeur $\varphi(n)$. Le problème discontinu se ramène ainsi au problème continu, qui est plus général, puisqu'il permet de traiter le cas où $f(x)$ varie irrégulièrement dans chaque intervalle $(n, n+1)$.

L'avantage du problème continu provient de ce qu'appliquer la formule (7) revient à appliquer la formule (6) après avoir exprimé $f(x)$ en fonction de la nouvelle variable y; on voit alors que *passer de la formule* (7) *à une formule analogue formée avec* *une autre fonction est une opération analogue à celle qui consiste à passer de la formule* (6) *à la formule* (7); c'est un changement de variable.

Le problème discontinu ne diffère guère d'ailleurs du problème continu si les points sont assez resserrés. Cela est vrai surtout si μ_n est infiniment petit par rapport à m_n (ce qui est le cas, d'après les hypothèses faites plus haut), car alors un S_n isolé a toujours un poids infiniment petit.

4. Introduisons maintenant la notion fondamentale d'*intervalle de compensation* de la suite des S_n. Nous poserons

$$(8) \qquad [\mathfrak{M}]_n^N = \frac{\mu_{n+1}S_{n+1} + \mu_{n+2}S_{n+2} + \ldots + \mu_N S_N}{\mu_{n+1} + \mu_{n+2} + \ldots + \mu_N}.$$

Si la formule (4) définit une limite S, cette moyenne $[\mathfrak{M}]_n^N$, quel que soit n, est aussi voisine de S que l'on veut si l'on a pris N assez grand; la compensation dont nous avons parlé au n° 1 se produit dans le calcul de cette moyenne.

Nous dirons que l'intervalle (n, N), comprenant les $N - n$ sommes $S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots, S_N$, est *un intervalle de compensation au sens strict* de la suite des S_n si N est une fonction de n telle que $[\mathfrak{M}]_n^N$ tende vers S pour n infini. Nous prendrons en principe pour N une fonction de n aussi petite qne possible. Ainsi, pour la série d'Euler, $N = n + 2$; l'intervalle de compensation, pris aussi petit que possible, comprend deux termes. Il ne sera d'ailleurs pas toujours possible de définir avec la même précision cet intervalle minimum, car on pourra souvent prendre pour N différentes fonctions de n parmi lesquelles il n'y en aura pas une qui soit plus petite que toutes les autres suivant; la fonction choisie $[\mathfrak{M}]_n^N$ tendra vers S plus ou moins rapidement.

On pourrait introduire une notion un peu différente, celle d'intervalle de compensation *au sens large*, en imposant la condition que $[\mathfrak{M}]_n^{N'}$ tende vers S pour tout $N' \geqq N$. Alors dans le cas de la série (2), $N - n$ serait une fonction de n devenant infinie aussi lentement qu'on veut [1]. Nous laissons au lecteur le soin de

---

[1] D'une manière générale, la réunion d'intervalles de compensation au sens strict, (n, n_1), (n_1, n_2), ..., en nombre croissant indéfiniment avec n, constitue un intervalle de compensation au sens large.

préciser la manière dont il y a lieu de modifier la suite de cet exposé si l'on préfère introduire cette notion; il n'y a aucune difficulté. Dans la suite il ne s'agira que d'intervalle de compensation au sens strict.

A première vue, la notion d'intervalle de compensation dépend non seulement de la suite des S_n, mais du choix des coefficients μ_n. Mais si $N - n$ est assez petit, si par exemple $\frac{N-n}{n}$ tend vers zéro, il résulte des hypothèses générales faites sur les coefficients μ_n que la variation relative des μ_n dans l'intervalle considéré est négligeable, de sorte que l'ensemble des valeurs limites de l'expression (8), et par suite l'existence d'une limite unique, ne dépendent pas de la valeur exacte des coefficients.

Introduisant maintenant les coefficients d'une manière essentielle, nous appellerons *poids* de l'intervalle considéré l'expression

$$(9) \qquad \frac{\mu_{n+1} + \mu_{n+2} + \ldots + \mu_N}{m_N} = \frac{m_N - m_n}{m_N},$$

qui est le poids de l'ensemble des sommes $S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots, S_N$, c'est-à-dire de $[\mathfrak{M}]_n^N$, dans le calcul de $\mathfrak{M}_N = [\mathfrak{M}]_0^N$. Ces définitions étant posées, on a le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que la suite des S_n *ait une limite généralisée définie par la formule* (4) *est que son intervalle de compensation, pris aussi petit que possible, ait un poids infiniment petit.*

Supposons d'abord cette condition réalisée, c'est-à-dire que, pour n assez grand, on peut déterminer N de manière à rendre à la fois le poids (9) inférieur à ε, et la moyenne $[\mathfrak{M}]_n^N$ comprise entre $S + \eta$ et $S - \eta$, ε et η étant arbitrairement petits. On peut alors trouver une suite d'entiers croissants $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$, tels qu'aux intervalles (n_p, n_{p+1}) successifs correspondent des poids tendant vers zéro et des moyennes $\mathfrak{M}'_p = [\mathfrak{M}]_{n_p}^{n_{p+1}}$ tendant vers S.

Si nous prenons pour n un des nombres n_p, la moyenne

$$\mathfrak{M}_n = \frac{\mu_1 S_1 + \mu_2 S_2 + \ldots + \mu_n S_n}{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n}$$

est une moyenne entre les moyennes successives $\mathfrak{M}_{n_1}$, $\mathfrak{M}'_1$,

$\mathfrak{M}'_2, \ldots, \mathfrak{M}'_{p-1}$ obtenues en groupant les termes; comme elles tendent vers S et que les coefficients forment une série divergente, $\mathfrak{M}_n$ tend vers S quand n croît indéfiniment en parcourant la suite des valeurs n_p.

Si d'autre part n est compris entre $n' = n_p$ et n_{p+1}, la formule

$$(10) \qquad \mathfrak{M}_N = \frac{m_{n'}}{m_n}\mathfrak{M}_{n'} + \frac{m_n - m_{n'}}{m_n}[\mathfrak{M}]_{n'}^{n},$$

où le poids du second terme, évidemment inférieur à celui de l'intervalle (n_p, n_{p+1}), tend vers zéro, où $\mathfrak{M}_{n'}$ tend vers S et où $[\mathfrak{M}]_{n'}^{n}$ est borné (tous les S_n étant bornés), montre que $\mathfrak{M}_n$ tend vers S, pour p infini. La première partie du théorème est donc démontrée.

Supposons maintenant que la condition indiquée ne soit pas vérifiée. Il existera alors deux nombres déterminés ε et η tels que, pour certaines valeurs de n aussi grandes que l'on veut, aucun entier N supérieur à n ne vérifie à la fois les conditions

$$|[\mathfrak{M}]_n^N - S| < \eta, \qquad \frac{m_N - m_n}{m_N} < \varepsilon.$$

Si alors on prend pour N le plus grand nombre vérifiant la seconde de ces inégalités, de sorte que pour n infini le poids $\frac{m_N - m_n}{m_N}$ tendra vers la limite positive ε tandis que $[\mathfrak{M}]_n^N$ ne tendra pas vers S, la formule

$$\mathfrak{M}_N = \frac{m_n}{m_N}\mathfrak{M}_n + \frac{m_N - m_n}{m_N}[\mathfrak{M}]_N^n$$

montre que $\mathfrak{M}_n$ et $\mathfrak{M}_N$ ne peuvent pas tendre simultanément vers S, ce qui démontre la deuxième partie du théorème.

5. Il est maintenant facile de montrer comment la puissance de la méthode de sommation considérée est d'autant plus grande que m_n devient infini moins rapidement. Si en effet nous considérons une suite d'intervalles séparés par les nombres $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$, dire que leurs poids successifs tendent vers zéro revient à dire que l'augmentation de $\log m_n$, de n_p à n_{p+1}, tend vers zéro pour p infini. Il y a avantage, pour réaliser cette condition, à prendre des m_n lentement croissants, et, quelque rapide que soit

la croissance de la suite des n_p, on peut la réaliser en prenant des m_n croissant assez lentement. Il y a lieu de remarquer que cela revient au même de prendre m_n ou m_n^k; par exemple, prendre $m_n = n^k$, avec n'importe quelle valeur positive de k, revient à appliquer la formule de Cesaro. Si elle ne suffit pas, on pourra essayer de prendre $m_n = \log n$, ou $\log\log n$, ou une fonction à croissance encore plus lente.

Il reste à se demander si les intervalles (n_p, n_{p+1}) sont des intervalles de compensation. Supposons qu'ils le soient pour la formule de Cesaro, c'est-à-dire que $\frac{n_{p+1}}{n_p}$ tend vers l'unité. Je dis qu'ils le sont pour la formule de sommation (4), moyennant l'hypothèse que les μ_n décroissent régulièrement. Comme il faut que la série $\Sigma\mu_n$ soit divergente, on pourra par exemple limiter supérieurement $\log \frac{1}{\mu_n}$ par $2 \log n$, et il résulte de l'hypothèse de régularité que ce logarithme varie moins que $2 \log n$. Alors pour deux nombres n et n' d'un même intervalle (n_p, n_{p+1}), μ_n et $\mu_{n'}$ sont équivalents; on n'a donc pas besoin de tenir compte de ces coefficients dans le calcul de la moyenne relative à un de ces intervalles. Cette moyenne est la même pour la formule de Cesaro et pour la formule (4). Si donc une série est sommable par la formule (1), elle l'est *a fortiori* par la formule (4) qui donne la même limite S. Si elle ne l'est pas par la formule (1), elle peut le devenir par la formule (4), en prenant par exemple dans cette formule $m_n = \log n$, ou $\log\log n$, et l'on pourra sommer des catégories de séries de plus en plus étendues si l'on prend pour les m_n des suites de moins en moins rapidement croissantes.

6. Abordons maintenant, en commençant par le second, l'examen des problèmes énoncés à la fin du n° **2**. A première vue, on peut croire que ce problème est résolu par ce qui précède. Il subsiste cependant une difficulté essentielle.

Cherchons à comparer les procédés de sommation définis par deux suites différentes m_n et m'_n. D'après le n° **3**, cette comparaison est analogue à la comparaison de l'un de ces procédés avec celui de Cesaro. Par suite si m'_n, *considéré comme fonction de* m_n, vérifie la condition de régularité très peu restrictive sur laquelle nous nous sommes appuyés tout à l'heure, il est impossible que les deux procédés de sommation considérés puissent conduire à des sommes différentes pour une série où les S_n sont bornés.

Il est d'ailleurs facile de préciser la nature de l'irrégularité qui doit exister pour que les deux procédés puissent donner, pour une certaine série, des valeurs différentes S et S'. Dans ce cas en effet on peut certainement définir une suite d'entiers n_1. n_2, ..., n_p, ..., croissant assez rapidement pour que les intervalles successifs (n_p, n_{p+1}) soient, pour l'un et l'autre procédé, des intervalles de compensation. Or pour que, dans ces intervalles, les deux procédés, comportant le calcul des moyennes avec les poids respectifs $\mu_n = m_n - m_{n-1}$ et $\mu'_n = m'_n - m'_{n-1}$ entre des quantités S_n bornées, puissent donner des moyennes tendant vers les limites différentes S et S', il est nécessaire que l'oscillation maxima de $\log \frac{\mu'_n}{\mu_n}$ dans l'intervalle (n_p, n_{p+1}), ne tende pas vers zéro pour p infini. En introduisant des fonctions continues $y(x)$ et $z(x)$ égales respectivement à m_n et m'_n pour $x = n$, il est donc nécessaire que l'oscillation maxima de $\log \frac{dz}{dy}$ dans les intervalles successifs considérés ne tende pas vers zéro.

D'ailleurs, avant d'appliquer cette remarque, on peut, si c'est utile, remplacer y et z par des fonctions lentement et régulièrement croissantes $Y = \varphi_1(y)$ et $Z = \varphi_2(z)$, et cela sans modifier les limites S et S'. On peut ainsi faire en sorte que le rapport $\frac{Z}{Y}$ ne devienne ni nul ni infini $\left(\text{il en sera alors de même du rapport } \frac{dZ}{dY}\right)$, et que l'augmentation de Y dans chaque intervalle (n_p, n_{p+1}) soit $\geqq 2\pi$. Écrivant de nouveau y et z au lieu de Y et Z, nous voyons que, sans que $\log \frac{dz}{dy}$ devienne infini, son oscillation maxima dans l'intervalle $[2p\pi, 2(p+1)\pi]$ ne doit pas tendre vers zéro pour p infini. Comme exemple de fonction aussi peu irrégulière que possible vérifiant ces conditions, nous pouvons prendre

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}(1 + a \sin y),$$

a étant aussi petit qu'on veut, mais constant. Telle est une relation qui définit l'irrégularité relative minima devant exister entre y et z pour que ces fonctions puissent conduire à des sommes différentes pour une même série, et l'on vérifie en effet aisément que si $\frac{dy}{dx}$ tend ver zéro et si S_n est une fonction croissante de la valeur de $\frac{dz}{dy}$ pour $x = n$, on obtient effectivement deux sommes différentes S et S'.

La question qui se pose maintenant est la suivante : *est-il possible que deux fonctions régulières de x, et lentement croissantes, soient liées par la relation* (11)? La réponse au problème II du n° 2 résultera évidemment de la réponse à cette question.

Cette réponse est certainement négative. En précisant suffisamment la notion de fonction à croissance régulière, on peut certainement arriver à montrer que deux telles fonctions ne peuvent pas être liées par une relation telle que (11). Mais cette théorie des fonctions à croissance régulière, que nous avons esquissée dans deux notes récentes [1], n'existe encore qu'à l'état d'hypothèse très probable, et dans l'état actuel de la science, on ne peut que poser la question suivante : *si deux fonctions de x sont liées par la relation* (11), *peut-on, par un critère de régularité défini avec précision, montrer que l'une des deux au moins est irrégulière?*

La première idée qui vient à l'esprit est de ne considérer comme régulière qu'une fonction telle que chacune de ses dérivées ait à partir d'un certain moment un signe constant. Si alors on prend $y = \sqrt{x}$, on voit que dès le calcul de la dérivée seconde, l'irrégularité de z apparaît. Il en est de même si $y = x^\alpha$, quelque petit que soit α. Si l'on prend une fonction plus lentement croissante, telle que $y = \log x$, l'irrégularité de z est déjà plus difficile à mettre en évidence; il faut un nombre de dérivations d'autant plus grand que a est plus petit. Si l'on prend $y = \log\log x$, l'irrégularité de z ne peut plus être mise en évidence par des dérivations successives. On a en effet toujours

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \frac{d^n y}{dx^n}(1 + a\sin y)(1 + \varepsilon_n),$$

---

[1] *Comptes rendus*, 22 février 1926, et *Congrès pour l'Avancement des Sciences*, Poitiers, avril 1926.

ε_n tendant vers zéro, et si $|a| < 1$, aucune des dérivées de z n'aura une infinité de changements de signe.

Il ne semble pas facile, dans l'état actuel de la science, de trouver un critère défini avec précision, applicable même aux fonctions à croissance très lente, et permettant de mettre en évidence l'irrégularité de z, si la fonction y est régulière. La réponse à la question théorique posée ne paraît tout de même pas douteuse, et, *ce point admis*, on peut conclure que deux procédés de sommation du type (4), réguliers l'un et l'autre, ne peuvent pas conduire à des résultats en contradiction l'un avec l'autre, si les S_n sont bornés.

7. Étudions maintenant le problème I du n° 2, et à cet effet considérons une série divergente pour laquelle, avec un certain choix de la suite des m_n, on obtienne des moyennes $\mathfrak{M}_n$ oscillant indéfiniment entre deux limites α_1 et β_1; nous entendons par là d'une manière précise que α_1 et β_1 sont respectivement les limites inférieure et supérieure d'indétermination de la suite des $\mathfrak{M}_n$. Remplaçons maintenant les m_n par d'autres coefficients m'_n, tels que m'_n soit une fonction lentement et régulièrement croissante de m_n; un raisonnement analogue à celui du n° 4 montre aisément que α_1 et β_1 sont remplacés par de nouvelles valeurs $\alpha_2 \geqq \alpha_1$ et $\beta_2 \leqq \beta_1$. Prenant alors de nouvelles suites de moins en moins rapidement croissantes, on réduit de plus en plus l'intervalle d'indétermination, jusqu'à ce qu'on arrive à un intervalle (α, β), nul ou non, qui ne peut plus être réduit. Comme on peut certainement approcher de cette limite par une infinité dénombrable de suites $m_n, m'_n, \ldots$, de plus en plus lentement croissantes, il est possible d'en choisir une croissant plus lentement encore et qui nécessairement donnera exactement les limites α et β. On a ainsi une suite déterminée, que nous désignerons maintenant par m_n, et l'intervalle (α, β) relatif à la série étudiée et à cette suite ne peut plus être réduit. Si $\alpha = \beta$, le problème est résolu; il reste donc à voir si l'hypothèse $\alpha < \beta$ ne conduit pas à une contradiction.

Dans cette hypothèse, nous pouvons choisir une suite d'entiers croissants $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$, tels que les moyennes M_n correspondant aux n_p d'indices pairs tendent vers α, celles qui correspondent aux n_p d'indices impairs tendant vers β; chaque fois que n varie de n_p à n_{p+2}, on aura donc une double oscillation entre α et β. Remplaçant maintenant de nouveau les m_n par une suite m'_n plus lentement croissante, on pourra arriver à ce que l'augmentation de $\log m'_n$ de n_p à n_{p+1} soit infiniment petite pour p infini, de sorte que les poids des intervalles successifs (n_p, n_{p+1}) tendront vers zéro. Les S_n étant bornés, les moyennes successives $\mathfrak{M}'_n$ relatives aux coefficients m'_n ne peuvent, d'après la formule (10), varier de n_p à n_{p+1} que d'une quantité infiniment petite. Les oscillations mises en évidence sur la suite des $\mathfrak{M}_n$ auront disparu, mais peut-être pour faire place à des oscillations plus lentes, de sorte que nous n'aboutissons pas encore à une contradiction. Si l'on fait de même disparaître ces oscillations plus lentes, on peut en faire apparaître d'autres plus lentes encore. Il faut recommencer indéfiniment et transfiniment, et la question posée se précise ainsi : Existe-t-il une suite des S_n, ces sommes étant bornées mais variant irrégulièrement, pour laquelle, cherchant ainsi à faire disparaître des oscillations de plus en plus lentes, on épuisera l'ensemble non dénombrable des fonctions de moins en moins rapidement croissantes avant d'arriver au résultat?

Il est assez vraisemblable que non et que, par suite, toute série divergente dont les sommes successives soient bornées est sommable par une formule du type (4). Mais il semble bien difficile d'échapper aux difficultés du transfini et de démontrer ce résultat. Il semble même, si l'on peut établir des degrés dans la vraisemblance de résultats qui ne sont pas démontrés, que le degré de certitude ici atteint n'est pas comparable à celui obtenu pour le problème II.

8. La notion d'intervalle de compensation s'étend aisément à des procédés de sommation plus généraux. Considérons d'abord la sommation exponentielle, étudiée par M. Borel, et définie par la formule

$$(12)\qquad S = \lim_{a \to \infty} \frac{S_0 + a S_1 + \ldots + \frac{a^n}{n!} S_n + \ldots}{1 + a + \ldots + \frac{a^n}{n!} + \ldots},$$

et demandons-nous ce que doit être l'intervalle de compensation d'une série pour qu'elle soit sommable par la méthode de M. Borel.

A cet effet, posons

(13) $$n = a + \lambda\sqrt{a}.$$

Un calcul simple montre que, toutes les fois que les S_n sont bornés, la formule (12) équivaut à prendre pour S la limite, pour a infini, de la fonction

(14) $$F(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} f(a + \lambda\sqrt{a})\, d\lambda,$$

$f(x)$ représentant une fonction égale à S_n quand x est compris entre n et $n+1$, et nulle pour x négatif. On remarque d'ailleurs qu'en n'intégrant par rapport à λ que dans un intervalle fini $(-\mu, +\mu)$, on commet une erreur aussi petite que l'on veut si μ est assez grand; on commettra donc une erreur tendant vers zéro si l'on intègre dans un intervalle fini, mais croissant indéfiniment avec a, tel que $(-\log a, +\log a)$.

Il résulte de la formule (14) qu'une condition suffisante pour l'existence de la limite S est que, quelque petit que soit ε positif, N désignant la partie entière de $n + \varepsilon\sqrt{n}$, l'intervalle (n, N) soit un intervalle de compensation pour la série étudiée. En effet $f(a)$ apparaît comme une moyenne entre des moyennes relatives à de tels intervalles, et dans chacun desquels λ varie très peu, de sorte que le poids $e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$ peut être considéré comme constant (¹).

Nous montrerons tout à l'heure que cette condition est nécessaire. Observons d'abord qu'il est évidemment nécessaire que la compensation se produise, compte tenu du poids $e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$, dans l'intervalle $(a - \mu\sqrt{a}, a + \mu\sqrt{a})$, où μ est très grand. Elle doit aussi se produire sans tenir compte du poids. En effet si $F(a)$ tend

---

(¹) Naturellement, en raison du grand nombre d'intervalles ayant chacun un poids très petit, il ne suffit pas que la variation de $e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$ soit petite; il faut que sa variation *relative* dans chacun des intervalles soit petite. Cette condition est naturellement réalisée, si ε est assez petit, dans tout intervalle fini $(-\mu, +\mu)$, et l'on aura d'abord choisi μ de manière à commettre une erreur très petite en se limitant à cet intervalle. On peut aussi diviser l'intervalle de variation de λ en une infinité dénombrable d'intervalles dans chacun desquels la variation relative de $e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$ est très petite.

vers S, il en est de même de la moyenne de $F(a)$ dans l'intervalle

$$(a - \mu\sqrt{a},\ a + \mu\sqrt{a}),$$

et un calcul facile montre que cette moyenne diffère de celle de $f(x)$ dans le même intervalle d'une quantité d'autant plus petite que μ est plus grand.

Mais on peut utiliser le fait que $F(a + \lambda'\sqrt{a})$, où λ' est une constante quelconque, doit aussi tendre vers la même limite S, et c'est de ce fait que nous déduirons que la compensation doit se produire dans toute fraction finie (si petite soit-elle) de l'intervalle $(a - \mu\sqrt{n},\ a + \mu\sqrt{n})$, c'est-à-dire que la condition énoncée tout à l'heure comme suffisante est aussi nécessaire. Il nous faut d'abord établir trois lemmes, qui peuvent d'ailleurs présenter quelque intérêt par eux-mêmes.

9. Lemme I. — *Étant donnée une variable x, obéissant à la loi de Gauss réduite* [1], *si une fonction $f(x)$ mesurable et bornée est telle que $f(x - c)$ ait une valeur probable nulle, quelle que soit la constante c, elle est identiquement nulle.*

L'hypothèse s'exprime par la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x - c)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 0$$

changeant x en $x + c$, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-\frac{(x+c)^2}{2}}\, dx = 0,$$

ou, par des dérivations successives par rapport à c, et en faisant ensuite $c = 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, x^h\, dx = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

Or le polynome d'approximation d'ordre n

$$P_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$$

[1] Nous appelons ainsi la loi de Gauss, formée avec une valeur du paramètre telle que la valeur quadratique moyenne soit égale à l'unité. Peu importe d'ailleurs la valeur du paramètre, pourvu qu'elle soit fixée.

tel que l'intégrale

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)-A_0x^n-A_1x^{n-1}-\ldots-A_n]^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

soit minima, est évidemment déterminé d'une manière unique par les équations

$$\frac{\partial I}{\partial A_i}=-2\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)-A_0x^n-\ldots-A_n]x^{n-i}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0$$
$$(i=0,1,\ldots,n).$$

Les équations (15) exprimant que ces conditions sont vérifiées si tous les A_i sont nuls, le polynome d'approximation $P_n(x)$ est identiquement nul, et cela quel que soit n. Il en résulte que la fonction $f(x)$ est nulle C. Q. F. D.

Dans le cas où l'on a une famille de fonctions vérifiant asymptotiquement l'hypothèse du lemme I, on peut énoncer le résultat suivant.

Lemme II. — *Étant données la variable x, obéissant à la loi de Gauss réduite, et des fonctions $f_n(x)$ telles que*

(16) $$|f_n(x)|\leqq K,\qquad |f_n(x)-f_n(x_0)|\leqq K'|x-x_0|,$$

les constantes K *et* K′ *étant indépendantes de x, x_0, et n, si la valeur probable de $f_n(x-c)$ tend vers zéro pour n infini, la fonction $f_n(x)$ tend elle-même vers zéro* (1).

Bien entendu, à cause de la seconde condition (16), les convergences considérées ne peuvent qu'être uniformes, la première par rapport à c, la seconde par rapport à x, dans tout intervalle fini.

D'après les conditions (16), les fonctions $f_n(x)$ forment une *famille normale* dans tout intervalle fini, c'est-à-dire que x_1, x_2, …, x_p, …, étant des nombres positifs indéfiniment croissants, on peut à chacun d'eux faire correspondre une suite d'entiers

(17) $$n_{p,1},\quad n_{p,2}\quad \ldots,\quad n_{p,i},\quad \ldots,$$

(1) Au lieu des conditions (16), on peut se contenter de l'hypothèse que les fonctions considérées soient *bornées et également continues*.

tels que les fonctions $f_n(x)$ formées avec ces valeurs de n tendent vers une limite $g_p(x)$ dans l'intervalle $(-x_p, +x_p)$. On peut de plus supposer que chacune de ces suites est extraite de la précédente. Si alors on prend $n_1 = n_{1,1}$, et pour n_p le plus petit des $n_{p,i}$ supérieur à n_{p-1}, on a une suite d'entiers

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots, \quad n_p, \quad \ldots,$$

auxquels correspondent des fonctions $f_n(x)$ tendant vers une limite $f(x)$, et cela uniformément dans tout intervalle fini. La valeur probable de $f(x-c)$, limite pour n infini de celle de $f_n(x-c)$, est alors nulle, et, d'après le lemme I, $f(x) = 0$.

Nous avons ainsi montré que de la suite des $f_n(x)$ on peut extraire une suite de fonctions tendant uniformément vers zéro. Il faut montrer de plus que la suite formée par tous les $f_n(x)$ tend vers zéro, et cela uniformément dans tout intervalle fini $(-a, +a)$. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver a et ε tels qu'une infinité de fonctions $f_n(x)$ dépassent ε en valeur absolue au moins en un point de l'intervalle considéré; en raisonnant sur la suite de ces fonctions comme nous venons de le faire sur la suite de tous les $f_n(x)$, on pourrait en extraire une suite tendant uniformément vers zéro de $-a$ à $+a$. Cela est en contradiction avec l'hypothèse que les fonctions considérées ne restent pas inférieures à ε. Le théorème est donc démontré.

L'exemple de la fonction $f_n(x) = \sin nx$ montre d'ailleurs que la seconde condition (16) est essentielle dans l'énoncé de ce théorème. Mais, sans cette condition, on peut établir le résultat suivant.

Lemme III. — *Si la variable x obéit à la loi de Gauss réduite, et si une suite de fonctions $f_n(x)$, bornées dans leur ensemble, est telle que la valeur probable de $f_n(x-c)$ tende vers zéro pour n infini, la valeur moyenne de $f_n(x)$ dans n'importe quel intervalle fini tend vers zéro.*

Observons d'abord que, $\varphi_n(c)$ désignant la valeur probable de $f_n(x-c)$

$$\varphi_n(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-c)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, e^{-\frac{(x+c)^2}{2}}\, dx,$$

et K la limite supérieure de $|f_n(x)|$, on a

$$|\varphi'_n(c)| \leqq \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+c)^2}{2}} |x+c|\, dx = \frac{2K}{\sqrt{2\pi}},$$

de sorte que $\varphi_n(c)$, tendant vers zéro, tend uniformément vers zéro; sa moyenne dans un intervalle $(x, x+a)$ tend donc vers zéro.

Or cette moyenne est la valeur probable de $g_n(x, a)$ moyenne de $f_n(x)$ dans l'intervalle considéré. On a d'ailleurs évidemment

$$|g_n(x, a)| \leqq K, \qquad |g_n(x, a) - g_n(x_0, a)| \leqq K' |x - x_0|$$

où $K' = \frac{2K}{a}$. La fonction $g_n(x, a)$, quelle que soit la constante a, vérifie donc toutes les conditions du lemme II, et par suite tend vers zéro.

C. Q. F. D.

10. Appliquons ces lemmes à l'étude de la formule (14). Si $F(a)$ tend vers une limite S, il en est de même de

$$F(a + \mu\sqrt{a}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} f[a + (\lambda' + \mu)\sqrt{a}] \left(1 + \frac{\mu}{\sqrt{a}}\right)^{-\frac{1}{2}} d\lambda',$$

où λ' est une variable auxiliaire définie par

$$\lambda\sqrt{a + \mu\sqrt{a}} = \lambda'\sqrt{a},$$

et par suite, λ' tendant vers λ pour a infini, de

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} f[a + (\lambda - c)\sqrt{a}]\, d\lambda,$$

en écrivant λ au lieu de λ' et $-c$ au lieu de μ. Si l'on donne à a une suite de valeurs croissantes, la fonction $f(a + \lambda\sqrt{a}) - S$, considérée comme fonction de λ, vérifie donc les conditions du lemme III, et sa moyenne dans tout intervalle fini, si petit soit-il, tend vers zéro. L'intervalle $(a, a + l\sqrt{a})$, quelque petit que soit l, est donc un intervalle de compensation pour la série étudiée. Donc :

Théorème. — *Pour toute série divergente où les* S_n *sont bornés, la condition nécessaire et suffisante pour que la méthode de sommation exponentielle s'applique est que, quelque petit* *que soit l positif, l'intervalle* $(a, a+l\sqrt{a})$ *soit un intervalle de compensation.*

Naturellement, si cette condition est réalisée, on peut trouver une fonction $L(a)$ tendant vers zéro assez lentement pour que l'intervalle $[a, a+L(a)\sqrt{a}]$ soit un intervalle de compensation; mais $L(a)$ ne peut pas être choisi indépendamment de la série.

Cette condition étant plus restrictive que celle relative à la formule de Cesaro, on voit que :

Corollaire I. — *Toute série où les* S_n *sont bornés, sommable par la méthode de Cesaro, l'est* a fortiori *par la méthode exponentielle.*

D'une manière plus précise :

Corollaire II. — *Pour toute série où les* S_n *sont bornés, la méthode de sommation exponentielle est exactement équivalente à celle qui résulte de la formule* (4), *où* $m_n = e^{\sqrt{n}}$.

La méthode exponentielle, appliquée à ces séries, est donc très peu puissante; mais il n'en est pas de même si on l'applique à des séries où les S_n augmentent indéfiniment. Elle permet la sommation de séries qui ne sont sommables par aucune des méthodes de Cesaro; c'est de là, comme on sait, que provient son intérêt.

On peut d'ailleurs faire une remarque analogue pour les *méthodes successives de Cesaro. Pour les séries où les* S_n *sont bornés, ces méthodes n'ont pas un champ d'application plus étendu que la première d'entre elles.*

Si, en effet les S_n sont bornés, on a entre les moyennes

$$S'_n = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n}$$

la relation

$$|S'_{n+1} - S'_n| < \frac{2K}{n}, \tag{18}$$

K désignant une limite supérieure des $|S_n|$. Si les S'_n ont une limite S au sens de Cesaro, c'est que leur moyenne dans l'intervalle (n, N) tend vers S, N étant le plus grand entier inférieur à $(1+\varepsilon)n$, et ε un nombre positif arbitrairement petit. D'après l'inégalité (18), l'oscillation maxima de S'_n dans un tel intervalle est $2K\varepsilon$. C'est donc que les S'_n ont une limite.

Si donc la première moyenne de Cesaro S'_n n'a pas de limite, les S_n étant bornés, il est inutile de former la moyenne S''_n des S'_n; elle ne peut pas en avoir, pas plus qu'aucune des moyennes successives ainsi formées.

Dans ce cas, les S_n oscillant indéfiniment entre deux limites, les S'_n auront des oscillations analogues au point de vue de la période, mais avec une amplitude réduite; pour les S''_n l'amplitude sera plus réduite encore, et il peut arriver que des applications successives de la méthode des moyennes donnent des limites de plus en plus rapprochées, finissant par définir avec précision la somme de la série. Tel est le cas par exemple si S_n est une fonction périodique de $\log n$; mais si S_n est une fonction périodique de $\log\log n$, la méthode de Cesaro, indéfiniment répétée, ne peut même pas resserrer les limites d'oscillation. La méthode la plus simple consiste d'ailleurs à appliquer la formule (4), avec $\mu_n = \frac{1}{n}$ dans le premier de ces deux cas et $\mu_n = \frac{1}{n \log n}$ dans le second.

11. Considérons maintenant la méthode de sommation plus générale, qui consiste à définir S comme la limite, pour p infini, de la moyenne

$$\Sigma_p = \mu_{p,1} S_1 + \mu_{p,2} S_2 + \ldots + \mu_{p,n} S_n + \ldots, \tag{19}$$

les coefficients $\mu_{p,n}$ étant positifs ou nuls, la somme de ceux qui ont p pour premier indice étant égale à l'unité, et $\mu_{p,n}$ tendant vers zéro quand p augmente indéfiniment. Cette méthode comprend comme cas particuliers toutes celles qui ont été considérées jusqu'ici.

On peut étendre à cette méthode les résultats établis dans ces cas particuliers relativement à leur application aux séries où les S_n sont bornés. Du moins il est assez facile d'obtenir des conditions suffisantes de sommabilité, liées aux notions d'intervalle de compensation et de poids d'un intervalle.

A cet effet, posant

$$m_{p,n} = \mu_{p,1} + \mu_{p,2} + \ldots + \mu_{p,n},$$

on déterminera, par l'étude asymptotique de cette somme, une fonction $x_p(\alpha)$ telle que $m_{p,n}$ tende vers α pour p infini, si n est le plus grand entier inférieur à $x_p(\alpha)$. Les nombres $x_p(\alpha)$ et $x_p(\alpha+\varepsilon)$ définissent alors un intervalle dont le poids, pour le calcul de Σ_p, tend vers ε, et il suffit, pour qu'une série soit sommable que, quels que soient α fixe entre 0 et 1, et ε très petit, cet intervalle soit un intervalle de compensation; naturellement cette condition implique à la fois une condition imposée à la série, au sujet de la rapidité des oscillations des valeurs de S_n, et une condition imposée aux coefficients $\mu_{p,n}$ au sujet de la régularité de leur variation dans cet intervalle.

On remarque que l'on impose ainsi à la série autant de conditions qu'il y a de valeurs de α. Dans le cas de la méthode exponentielle, α étant lié au nombre λ défini par la formule (13) par la relation

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\lambda e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,d\xi,$$

on voit aisément qu'à l'intervalle $(\alpha, \alpha+\varepsilon)$ correspond pour x un intervalle $(n, n+c\varepsilon\sqrt{n})$, où $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$; ce coefficient est donc fonction de α, mais non de p, et la condition de régularité imposée aux coefficients $\mu_{p,n}$ étant vérifiée, la condition imposée à la série que l'intervalle $(n, n+c\varepsilon\sqrt{n})$ soit un intervalle de compensation est indépendante de α. Il peut n'en être pas de même dans d'autres cas, de sorte que l'étude asymptotique indiquée peut ne pas aboutir à un résultat aussi simple que dans la méthode exponentielle.

Il peut être utile de mettre en évidence le poids maximum d'un intervalle (n, N), c'est-à-dire le maximum de $m_{p,N} - m_{p,n}$ quand p varie. Si l'on forme une infinité d'intervalles successifs séparés par des nombres $n_1, n_2, \ldots, n_h, \ldots$ dont les poids maxima soient de plus en plus petits, et que la condition de variation régulière des coefficients soit vérifiée, au moins pour les intervalles correspondant à des valeurs très grandes de n et pour chacun de ces intervalles tant que son poids est supérieur à un nombre ε très petit, alors une condition suffisante imposée à la série pour qu'elle soit sommable est que ces intervalles soient des intervalles de compensation. Mais elle n'est pas nécessaire; on peut définir des cas de sommabilité avec des conditions moins restrictives pour la série. Il semble donc que la méthode indiquée d'abord est préférable en général.

12. Nous ne pousserons pas plus loin l'étude de cette question, et terminerons ce travail en cherchant à quelles conditions le procédé de sommation déduit de la formule (19) peut être considéré comme *régulier*, c'est-à-dire correspondant aux conditions d'une bonne compensation ainsi qu'il a été indiqué aux nos **1** et **2**. Il faut exclure les procédés qui, comme celui défini par la formule (5), donnent des poids trop grands à certaines sommes S_n.

Une idée qui peut venir à l'esprit est d'imposer aux coefficients de croître, puis décroître régulièrement, comme dans la méthode exponentielle. Il est facile de voir qu'elle est à la fois trop et trop peu restrictive.

Considérons par exemple le procédé défini par la formule

$$\Sigma_p = \frac{1}{2}(S_p + S_{p+3}) \qquad (p = 1, 2, \ldots, \infty)$$

qui ne vérifie pas cette condition, puisque entre deux sommes S_p et S_{p+3} affectées de coefficients égaux on en néglige deux; c'est cependant un procédé régulier, qui donne un résultat correct dans le cas de la série d'Euler (2); toutes les fois qu'il s'applique, la formule (1) s'applique et donne le même résultat.

Au contraire le procédé défini par la formule

$$\Sigma_p = \frac{1}{6}(S_{2p-1} + 4S_{2p} + S_{2p+1})$$

vérifie cette condition, et pourtant donne un poids trop grand aux sommes d'indices pairs, et conduit à un résultat incorrect pour la série d'Euler.

En comparant ces deux exemples, on se rend compte que ce qui fait l'irrégularité d'un procédé de sommation, ce n'est pas qu'il y ait des maxima et minima dans la courbe des coefficients, mais que ces maxima et minima restent fixes quand p varie, ou du moins aient pour effet de donner un poids trop grand aux entiers d'un ensemble indépendant de p_α.

Ainsi, si l'on modifie la méthode exponentielle par l'introduction d'un facteur sinusoïdal, en prenant par exemple les $\mu_{p,n}$ proportionnels à

$$\frac{p^n}{n!}\sin^2\frac{n}{\log n},$$

ce facteur est indépendant de p, et le procédé est incorrect. Il donnera par exemple à la série pour laquelle $S_n = \sin^2\frac{n}{\log n}$ la somme $\frac{3}{4}$, au lieu de $\frac{1}{2}$ Mais si nous remplaçons ce facteur par $\sin\left(\frac{n}{\log n}+p\right)$, et qu'on donne à p, sinon toutes les valeurs possibles jusqu'à l'infini, du moins toutes les valeurs entières, le procédé sera régulier. Dans le cas de la série pour laquelle

$$S_n = \sin^2\frac{n}{\log n},$$

il n'induira pas en erreur, mais donnera pour Σ_p des valeurs oscillant indéfiniment entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$; d'une manière plus précise elles diffèrent infiniment peu, pour p infini, de $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos 2p$.

Mais il semble préférable d'envisager la question à un autre point de vue. Ce que nous voulons, c'est que certains ensembles de valeurs de n n'apparaissent pas comme trop favorisés. Si un ensemble a α pour *poids naturel* (nous préciserons cette notion dans un moment), il faut que le procédé considéré lui donne le même poids, c'est-à-dire donne la somme α à une série pour laquelle S_n a la valeur 1 ou 0 suivant que n appartient ou non à cet ensemble, ou du moins ne donne pas une somme autre que α.

Considérons donc une série où les S_n sont bornés, variant par exemple entre deux limites comprises à l'intérieur de l'intervalle $(-\sigma, +\sigma)$. Divisons cet intervalle en intervalles (s_i, s_{i+1}) tous inférieurs à ε, et désignons par $\alpha(s)$ le poids naturel de l'ensemble des n pour lesquels $S_n < s$. Si le procédé de sommation est régulier, il devra donner à chaque intervalle (s_i, s_{i+1}) le poids $D\alpha_i(s)$, et avec une erreur inférieure à ε, devra donner la somme

$$\Sigma s_i D\alpha_i(s).$$

Il devra donc conduire à une valeur exactement égale à l'intégrale de Stieltjes

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} s \, d\alpha(s). \tag{20}$$

Nous avons mis des limites infinies, pour ne pas avoir besoin de préciser les limites $-\sigma$, $+\sigma$. Mais il est essentiel de supposer les S_n bornés. S'il n'en est pas ainsi, si par exemple $S_n = (-1)^n n$, les S_n compris dans n'importe quel intervalle fini ont un poids nul; il s'agit d'une compensation à établir entre les valeurs de S_n positives et très grandes et les valeurs négatives et très grandes. Les remarques précédentes et la formule (20) ne donnent aucun résultat.

Précisons maintenant ce que c'est que le *poids naturel* d'une suite d'entiers

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots, \quad n_p, \quad \ldots, \tag{21}$$

que nous supposons rangés par ordre de grandeurs croissantes. Il est évident que si la densité de cette suite a une limite α, c'est-à-dire si le rapport $\frac{p}{n_p}$ tend vers α, c'est cette limite qu'on devra considérer comme le poids naturel de cette suite. Or la formule (1) de Cesaro est une moyenne accordant précisément à n'importe quelle suite d'entiers le poids ainsi défini. Si elle conduit à une somme S pour une série divergente où les S_n sont bornés, cette somme est bien celle que donne la formule (20). Nous sommes donc conduit à la règle suivante pour définir, au moins en première approximation, la régularité d'un procédé de sommation :

Un procédé de sommation sera régulier (*en première approximation*) *si*, *pour une série où les* S_n *sont bornés*, *il ne peut pas conduire à un résultat en contradiction avec celui de Cesaro* (ce qui n'empêche pas qu'il peut avoir un champ d'application plus restreint, comme c'est le cas pour la méthode exponentielle, ou au contraire plus étendu).

Un tel procédé, appliqué à une série où les S_n ne sont pas bornés, semble devoir donner des résultats corrects toutes les fois qu'il n'y aura pas de difficulté provenant de l'existence de termes à variation trop lente pour être compensée dans l'intervalle $(n, n + \varepsilon n)$.

Il reste à étendre la notion de poids naturel au cas où la densité de la suite (21) n'a pas une limite déterminée. Elle oscille alors entre deux valeurs α et β et il s'agit de déterminer sa limite généralisée. D'après une remarque faite plus haut sur les suites vérifiant la condition (18), les moyennes successives de Cesaro ne peuvent rien donner. Il faut alors appliquer une formule du type (4), soit pour déterminer la limite généralisée de cette densité, soit plutôt pour déterminer directement la somme d'une série pour laquelle S_n a la valeur 1 ou 0 suivant que n appartient ou non à la suite (21) (¹). Bien entendu il faudra n'employer la formule (4) qu'avec une suite régulière de coefficients, au sens résultant des nos 1 à 7, et spécialement du n° 6, de ce travail. Comme d'ailleurs, ainsi qu'on l'a vu plus haut, la sommation des séries où les S_n sont ainsi égaux à 0 ou 1 entraîne la sommation de toutes celles où les S_n sont bornés, le résultat de cette discussion peut s'énoncer de la manière suivante :

Un procédé de sommation sera régulier si, pour une série où les S_n sont bornés, il ne peut pas conduire à une somme différente de celle qui résulte de la formule (4), *où l'on prend pour S_n une suite régulière.*

Il serait intéressant, pour préciser la portée de cet énoncé, de rechercher si deux procédés de sommation vérifiant cette condition ne risquent en aucun cas de conduire à deux résultats différents. L'étude de la régularité des procédés simples de sommation, utiles surtout dans le cas où les S_n sont bornés, permettrait ainsi de définir la régularité des procédés de sommation les plus généraux.

(¹) Passer par l'intermédiaire de la notion de densité revient à appliquer la formule (4), non aux sommes S_n, mais aux moyennes qu'on en déduit par la formule (1). C'est donc une combinaison inutilement compliquée des méthodes exposées au début de ce travail et de l'idée des moyennes successives de Cesaro.