BULLETIN DE LA S. M. F.

CH. JORDAN

Sur la probabilité des épreuves répétées, le théorème de Bernoulli et son inversion

Bulletin de la S. M. F., tome 54 (1926), p. 101-137
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1926__54__101_0>

SUR LA PROBABILITÉ DES ÉPREUVES RÉPÉTÉES, LE THÉORÈME DE BERNOULLI ET SON INVERSION ;

PAR M. CH. JORDAN.

La question du développement en série des probabilités pour qu'en n épreuves le nombre des cas favorables soit égal à ν, ou qu'il soit plus petit que λ, si la probabilité p de l'événement simple est donnée, n'est pas encore complètement élucidée ; de plus, les formules des probabilités inverses, c'est-à-dire des probabilités pour que la probabilité de l'événement simple soit égale à p ou qu'elle soit plus petite que η, le nombre ν des cas favorables observés et le nombre n des épreuves étant donnés, sont toujours discutées.

On a employé l'expression approchée de ces formules à des cas où elles n'étaient pas valables ; et, vu les résultats inacceptables, on a émis des doutes sur la légitimité des formules de la probabilité des causes et sur leurs conséquences.

Il n'était donc pas superflu d'examiner ces questions. Au cours de ces recherches, j'ai déduit avec rigueur le développement en série des probabilités *a priori* mentionnées ci-dessus, suivant les dérivées de $\frac{e^{-x}x^{\nu}}{\nu!}$. L'idée de ce développement est due à Tchébychef et à M. Charlier [1], mais l'introduction des polynomes G_s et la formule générale des coefficients du développement sont nouvelles.

J'ai établi un théorème qui permet d'exprimer certaines probabilités *a posteriori* à l'aide d'une probabilité *a priori*. Ce théorème et certains développements en série ont conduit à des formules nouvelles rigoureuses donnant l'inversion du théorème de Bernoulli.

---

[1] TCHÉBYCHEF, *Sur le développement des fonctions à une seule variable* (*Bull. de l'Acad. Imp. des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 1859). — C.-V. CHARLIER, *Die zweite Form des Fehlergesetzes; Ueber die Darstellung willkürlicher Functionen* (*Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, Band II, 1905).

Les développements en série des paragraphes 3 et 5 de la probabilité des épreuves répétées ont une certaine importance, car ils peuvent être utilisés en statistique mathématique pour la détermination des fonctions de fréquences.

Enfin, j'ai trouvé une formule rigoureuse pour comparer deux probabilités *a posteriori*. Cette formule n'est pratiquement utilisable que si le nombre ν des cas favorables est petit; pour les autres cas, j'ai déduit pour cette formule une expression approchée donnant, avec peu de calculs, des résultats très précis.

I. — La formule de Bernoulli et ses développements en série.

1. Premier problème des épreuves répétées. Formule rigoureuse. — La probabilité d'un événement simple étant p à toutes les épreuves, la probabilité pour que cet événement se présente ν fois en n épreuves est

$$y = C_n^\nu p^\nu q^{n-\nu}. \tag{1}$$

Si n et ν sont grands, cette formule est difficilement utilisable ([1]); on est forcé alors de se contenter de formules approchées.

2. Formule approchée symétrique de Laplace. — Laplace a montré que l'on a

$$\lim_{n=\infty} C_n^\nu p^\nu q^{n-\nu} \sqrt{2npq} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2},$$

si n et ν tendent simultanément vers l'infini de telle façon que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\nu - np}{\sqrt{2npq}} = x.$$

Si $n-\nu$ et ν sont grands, si p diffère peu de $\frac{1}{2}$ et si la valeur absolue de l'écart $\xi = \nu - np$ est plus petite que pqn, alors la probabilité pour que l'écart soit égal à ξ est donnée d'une manière

---

([1]) On trouve des Tables donnant $\log n!$ à sept décimales de $n = 1$ à $n = 1000$ dans Pearson, *Tables for Statisticians and Biometricians* (*Cambridge University Press*, 1914, p. 96-101).

approchée par la formule

$$(2) \qquad y = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2\xi^2}, \qquad \text{où} \qquad k = \frac{1}{\sqrt{2npq}}$$

Cette formule a été obtenue en partant de (1) grâce à la formule de Stirling, donnant la valeur approchée de $n!$, puis en développant

$$\log\left(1 + \frac{\xi}{pn}\right) \quad \text{et} \quad \log\left(1 - \frac{\xi}{qn}\right)$$

suivant les puissances de ξ, et en négligeant les termes contenant ξ à un degré supérieur à 2. Le développement n'est justifié que si $\xi < pn$ et $\xi < qn$.

La formule (2) est symétrique, c'est-à-dire elle donne la même probabilité pour l'écart ξ et pour $-\xi$. Ceci n'a lieu rigoureusement que si $p = \frac{1}{2}$. La formule ne sera donc utilisable que pour des valeurs de p peu différentes de $\frac{1}{2}$. Dans ce cas elle donne des résultats assez exacts, comme on le voit en examinant le tableau suivant :

$$n = 32, \qquad p = \frac{1}{2}.$$

ξ.	y.	δ.
0	0,1400	+0,00100
1	0,1317	+0,00080
2	0,1097	+0,00015
3	0,08088	−0,00053
4	0,05257	−0,00067
6	0,01502	−0,00017
8	0.00245	+0,00014
10	0,00021	+0,00006

Dans la seconde colonne sont inscrites les probabilités des écarts ξ telles qu'elles sont données par la formule rigoureuse (1); dans la troisième colonne figurent les erreurs correspondant à la formule approchée (2). Ces erreurs sont assez petites, mais on voit que les erreurs relatives augmentent avec ξ, ce qui était à prévoir.

Si p diffère peu de $\frac{1}{2}$, les résultats sont encore bons; si par exemple $p = 0,45$ et $n = 400$, la formule rigoureuse donne, pour la probabilité d'obtenir 160 cas favorables, $y = 0,00530$, et la formule approchée $0,00528$.

Par contre, si p diffère considérablement de $\frac{1}{2}$, les résultats correspondant à (2) ne sont plus acceptables du tout; ainsi, par exemple, si $p = 0,25$ et $n = 32$, la formule exacte donne pour $\xi = 8$ la valeur de $y = 0,001403$ contre celle de $0,0007794$ de la formule approchée.

3. Développement suivant les polynomes d'Hermite. — Pour obtenir une formule utilisable dans le cas où p est très différent de $\frac{1}{2}$, Laplace a déduit une formule en conservant le terme en ξ^3 du développement mentionné ci-dessus. MM. Edgeworth, Charlier, Pearson et d'autres (1) ont donné des formules asymétriques obtenues soit en conservant plus ou moins de termes de ce développement, soit en appliquant d'autres méthodes.

D'après Tchébychef, on peut développer une fonction en série à l'aide des polynomes d'Hermite.

Définissons le polynome d'Hermite de degré ν par l'égalité

$$H_\nu(\xi) = e^{k^2\xi^2} \frac{d^\nu}{d\xi^\nu}[e^{-k^2\xi^2}].$$

Il en résulte

$$H_0 = 1, \qquad H_1 = -2k^2\xi, \qquad H_2 = 4k^4\xi^2 - 2k^2,$$
$$H_3 = -8k^6\xi^3 + 12k^4\xi, \qquad H_4 = 16k^8\xi^4 - 48k^6\xi^2 + 12k^4,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Ces polynomes possèdent les propriétés suivantes bien connues :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} H_\nu H_\mu e^{-k^2\xi^2}\,d\xi = 0 \qquad \text{si } \nu \neq \mu, \\ &\int_{-\infty}^{\infty} H_\nu^2\, e^{-k^2\xi^2}\,d\xi = 2^\nu \nu!\, k^{2\nu-1}\sqrt{\pi}. \end{aligned} \right.$$

(1) Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, 5e édition, p. 280 et suiv. — Edgeworth, *Statistical Journal*, July, 1902. — K. Pearson, *On Skew variation* (*Philosophical Transactions*, A, vol. 186, p. 343-414, et vol. 197, p. 442-459). — Kapteyn, *Skew Frequency Curves* (Groningen, 1903). — Kapteyn and Van Uven, *Skew Frequency Curves* (Groningen, 1916). — Bruns, *Wahrscheinlichkeitsrechnung u. Kollektivmasslehre*, p. 108 et suiv. — Charlier, *Grundzüge d. Mathematischen Statistik* (Lund, 1920), p. 67 et suiv.

La fonction $f(\xi)$ admet une série de la forme

$$(4)\qquad f(\xi) = [a_0 H_0 + a_1 H_1 + a_2 H_2 + \ldots] e^{-k^2 \xi^2},$$

dont les coefficients a_n sont

$$(5)\qquad a_n = \frac{1}{2^n\, n!\, k^{2n-1} \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n f(\xi)\, d\xi.$$

Il a été démontré que si $f(\xi)$ est une fonction continue à variation bornée, telle que $f(\xi)$ et au moins deux de ses premières dérivées sont nulles pour $\xi = \infty$, la série précédente converge dans tout intervalle, uniformément vers $f(\xi)$.

On a utilisé ce développement pour déterminer la fonction générale de probabilité. Or, dans le cas considéré, l'écart ξ n'est pas une variable continue, il ne peut prendre que certaines valeurs; dans le problème des épreuves répétées, par exemple, $\Delta\xi = 1$. On en conclut que, dans ces cas, les formules précédentes ne sont pas applicables. Les résultats ne pourront être qu'approchés, et souvent ils seront tout à fait inacceptables.

Remplaçons la variable ξ par $\frac{t}{k}$; alors $\Delta t = k$, et si k est petit, nous pourrons considérer la variable t comme continue.

Plusieurs des coefficients a_n correspondant à la probabilité (1) ont été calculés.

Nous allons déterminer le terme général de ce développement. On peut écrire le polynome d'Hermite de la manière suivante :

$$(6)\qquad H_n = k^n \sum_{i=0} A_n^{n-2i} (k\xi)^{n-2i},$$

où les A_n^i sont des grandeurs numériques satisfaisant à l'équation aux différences finies suivantes :

$$A_n^i = -2 A_{n-1}^{i-1} + (i+1) A_{n-1}^{i+1}.$$

En résolvant cette équation, on obtient

$$A_n^{n-2\nu} = (-1)^{n-\nu} \frac{n!\, 2^{n-2\nu}}{\nu!\,(n-2\nu)!}.$$

Ainsi le coefficient a_n sera

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=0} \frac{(-1)^{n-\nu} t^{n-2\nu} F(t)}{\nu!\,(n-2\nu)!\, 2^{2\nu} k^n} dt, \qquad \text{où} \qquad F(t) = f\left(\frac{t}{k}\right),$$

Pour pouvoir utiliser les formules (3) nous avons remplacé tout à l'heure

$$\Sigma k\,\mathrm{F}(k\xi) \quad \text{par} \quad \int \mathrm{F}(t)\,dt.$$

Faisons maintenant l'inverse, et remplaçons

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{n-2\nu}\,\mathrm{F}(t)\,dt \qquad \text{par} \qquad \sum_{\nu=0} k^{n-2\nu+1}\,\xi^{n-2\nu}\,\mathrm{F}(k\xi).$$

Le second membre est le moment $\mu_{n-2\nu}$ du degré $n-2\nu$ de ξ par rapport à la fonction $f(\xi)$ multiplié par $k^{n-2\nu+1}$. Il vient donc

$$(7) \qquad a_n = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \sum_{\nu=0} \frac{(-1)^{n-\nu}\,\mu_{n-2\nu}}{\nu!\,(n-2\nu)!\,2^{2\nu}\,k^{2\nu}}.$$

Cas particuliers :

$$a_0 = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\,\mu_0, \qquad a_2 = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{2}\,\mu_2 - \frac{\mu_0}{4k^2}\right],$$

$$a_1 = -\frac{k}{\sqrt{\pi}}\,\mu_1, \qquad a_3 = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\left[-\frac{\mu_3}{6} + \frac{\mu_1}{4k^2}\right],$$

....

Ce sont les coefficients a_i correspondant à une fonction $f(\xi)$ quelconque. Si ξ est une variable continue, les formules sont rigoureuses ; sinon, elles sont approchées.

Si la fonction $f(\xi)$ représente une probabilité, alors $\mu_0 = 1$; de plus, si la grandeur ξ est l'écart d'une grandeur de sa moyenne, alors $\mu_1 = 0$. On peut encore disposer de k ; il y a avantage à poser

$$k = \frac{1}{\sqrt{2\,\mu_2}};$$

dans ce cas, on a aussi

$$a_2 = 0.$$

Les coefficients a_i seront alors

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \qquad a_1 = 0, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = -\frac{1}{6\sqrt{\pi}}\,\mu_3,$$

$$a_4 = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\mu_4}{24} - \frac{\mu_2^2}{8}\right], \qquad a_5 = -\frac{k}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\mu_5}{120} - \frac{\mu_2\,\mu_3}{12}\right],$$

....

Pour pouvoir utiliser la formule (7), il faut connaître les moments de ξ par rapport à la fonction que l'on désire développer. Au lieu de déterminer directement les moments de ξ par rapport à la fonction (1), il est plus avantageux de déterminer d'abord les moments de ν par rapport à (1). Désignons le moment de degré s par M_s. On les obtient sans difficulté en exécutant sur $(p+q)^n$ s fois l'opération

$$p\frac{d}{dp},$$

q étant considéré comme indépendant de p ; enfin on pose

$$p+q=1$$

et l'on trouve

$$(9)\qquad M_s=\sum_{\iota=1}^{s+1}\mathfrak{S}_s^\iota\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\iota-1}{n}\right)m^\iota\ \text{(1)}.$$

Dans cette formule $m=np$, $\mathfrak{S}_s^\iota$ est le nombre de Stirling de seconde espèce, défini par

$$\mathfrak{S}_s^\iota=\mathfrak{S}_{s-1}^{\iota-1}+\iota\,\mathfrak{S}_{s-1}^\iota$$

avec les valeurs initiales

$$\mathfrak{S}_s^1=1 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{S}_s^0=0.$$

Ensuite on aura pour $\xi=\nu-np$

$$\mu_s=\sum_{\iota=0}^{s+1}(-1)^\iota C^\iota\ np)^{n-\iota}M_\iota.$$

De là résulte enfin le développement de la probabilité (1) :

$$(10)\qquad y=\left[1-\frac{1}{6}npq(q-p)H_3+\frac{1}{24}npq(1-6pq)H_4-\ldots\right]\frac{k}{\sqrt{\pi}}e^{-k^2\xi^2}.$$

Cette formule est très maniable ; en effet, si l'on pose

$$(11)\qquad \frac{k}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}H_s(t)=2^{s-1}k^{s+1}L_s(t),$$

---

(1) Dans ce travail, conformément aux principes du calcul des différences finies, la variable x ne prend pas la valeur de la limite supérieure de la somme définie, c'est-à-dire

$$\sum_{x=1}^{n+1}f(x)=f(1)+f(2)+\ldots+f(n).$$

la formule précédente devient, en écrivant t pour $k\xi$,

$$y = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} - \frac{1}{3}(q-p)k^2 L_3(t) + \frac{1}{6}(1-6pq)k^3 L_4(t) - \ldots.$$

Posons maintenant

$$L_s(t) = \frac{1}{2^s}\Phi_{s+1}(t).$$

Il y a des Tables qui donnent les quantités du second membre[1] à quatre décimales, pour $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, et pour $t = 0{,}00$, $t = 0{,}01, \ldots$, jusqu'aux valeurs de t nécessaires pour cette précision.

Remarquons encore que l'on a

$$\Phi_{s+1}(-t) = (-1)^s \Phi_{s+1}(t).$$

Considérons un des exemples traités précédemment. Soient $n = 32$, $p = 0{,}25$, et déterminons la probabilité pour avoir $\nu = 16$ ou $\xi = 8$.

Le premier terme donne (comme nous avons vu).	0,0007794
Le terme en H_3	0,0006681
Le terme en H_4	—0,0000360
	0,0014115

Comme la valeur exacte est 0,001403, on conclut que la formule (10) peut donner d'assez bons résultats déjà avec deux ou trois termes, même si p diffère beaucoup de $\frac{1}{2}$, et que l'écart est grand. Dans l'exemple considéré, on avait en effet $\xi = np$. La formule (2) ne serait pas applicable dans ce cas. Par contre, si np est petit, même la formule (10) ne donne pas de résultats acceptables.

4. Formule de Poisson. — Poisson a montré que si n croît indéfiniment de manière que $np = m$ reste constant, on a

$$\lim_{n=\infty} C_n^\nu p^\nu q^{n-\nu} = \frac{e^{-m} m^\nu}{\nu!} \equiv \psi(m, \nu). \tag{12}$$

---

(1) Jahnke, *Funktionentafeln*, p. 37-42. — Czuber, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 1914, I. p. 444-456. — Bruns, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, etc., A(6)-A(18).

Si n est grand et p petit, cette formule permet de déterminer la probabilité (1). Les calculs sont facilités par les Tables qui donnent $\psi(m, \nu)$ pour les valeurs de m et ν entrant en considération [1].

Soient, par exemple, $n = 400$ et $p = 0,015$, donc $m = 6$, et déterminons la probabilité pour que ν soit égal à 4 et à 8. Les résultats obtenus par les différentes formules seront dans les deux cas :

Formule.	P(4).	P(8).
(1)............................	0,1342	0,1039
(2)............................	0,1169	0,1169
(12)...........................	0,1338	0,1033

On voit que, dans les deux cas, la formule (12) s'accorde bien avec la formule rigoureuse, contrairement à la formule (2).

Si p est encore plus petit, la formule (12) devient d'autant meilleure. Si par exemple $p = 0,001$ et $n = 100$, la probabilité pour avoir $\nu = 0$ est égale à 0,9048, d'après les deux formules (1) et (12). Comme dans ce cas $k = 7,074$, la formule (2) donnerait une probabilité dépassant notablement l'unité et même la formule (10) serait inutilisable.

5. Développement de la probabilité (1) en série à l'aide des polynomes G_s. — Nous avons vu qu'une fonction à variable discontinue ne peut être développée en série, d'une manière rigoureuse, à l'aide des polynomes d'Hermite.

Nous allons considérer, d'après Tchébychef et M. Charlier, un développement en série, qui sera rigoureux dans le cas de ces fonctions. Nous les développerons en série, suivant les dérivées, par rapport à m, de la fonction $\psi(m, \nu)$ du paragraphe 4.

Pour y arriver, nous allons définir la fonction G_s de la manière suivante :

$$G_s(m, \nu)\psi(m, \nu) = \frac{d^s}{dm^s}\psi(m, \nu). \tag{13}$$

Il résulte que

$$G_s(m, 0) = (-1)^s.$$

---

[1] Pearson, *Tables for statisticians...*, p. 113-121. — Bortkiewicz, *Gesetz der Kleinen Zahlen*, 1898, p. 49-52.

Comme on a

$$G_s = \frac{D^s \psi(m, \nu)}{\psi(m, \nu)}, \qquad \Delta G_s = \frac{D^s \psi(m, \nu+1)}{\psi(m, \nu+1)} - \frac{D^s \psi(m, \nu)}{\psi(m, \nu)},$$

on en tire

$$\psi(m, \nu)\Delta G_s = \frac{\nu+1}{m} D^s \left[\frac{m}{\nu+1}\psi(m, \nu)\right] - D^s \psi(m, \nu) = \frac{s}{m} D^{s-1}\psi(m, \nu);$$

par suite,

$$\Delta G_s = \frac{s}{m} G_{s-1} \qquad \text{ou} \qquad G_s = \frac{s}{m} \Sigma\, G_{s-1} \quad (^1).$$

La dernière formule avec $G_s(m, 0) = (-1)^s$ peut servir pour déterminer les grandeurs G_s en partant de $G_0 = 1$. On les obtient par simple sommation, en remarquant que

$$\Sigma\, C_\nu^\iota = C_\nu^{\iota+1} + \text{const.}$$

Il résulte :

$$(14) \qquad \begin{cases} G_1 = \dfrac{1}{m}\,[C_\nu^1 - m], \\ G_2 = \dfrac{2\,!}{m^2}\left[C_\nu^2 - C_\nu^1 m + \dfrac{m^2}{2\,!}\right], \\ G_3 = \dfrac{3\,!}{m^3}\left[C_\nu^3 - C_\nu^2 m + C_\nu^1 \dfrac{m^2}{2\,!} - \dfrac{m^3}{3\,!}\right], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ G_s = \dfrac{s\,!}{m^s}\displaystyle\sum_{\iota=0}^{s+1}(-1)^\iota C_\nu^{s-\iota}\frac{m^\iota}{\iota\,!}. \end{cases}$$

On voit que $G_s(m, \nu)$ est un polynome de degré s en ν.
Comme

$$D\psi(m, \nu) = -\psi(m, \nu) + \psi(m, \nu-1) = -\Delta\psi(m, \nu-1)$$

on a la relation

$$(15) \qquad D^s\psi(m, \nu) = G_s(m, \nu)\,\psi(m, \nu) = (-1)^s \Delta^s \psi(m, \nu-s).$$

Les polynomes G_s possèdent donc les propriétés remarquables suivantes, en écrivant pour abréger $\psi(\nu)$ et $G_s(\nu)$ au lieu de

---

(1) Dans ce paragraphe, le symbole D signifie la dérivée par rapport à m; le symbole Δ la différence par rapport à ν, où $\Delta\nu = 1$; enfin, Σ est le symbole inverse de Δ.

$\psi(m, \nu)$ et $G_s(m, \nu)$:

$$(15') \qquad \begin{cases} \int G_s(\nu)\,\psi(\nu)\,dm = G_{s-1}(\nu)\,\psi(\nu) + C, \\ \Sigma\, G_s(\nu)\,\psi(\nu)\,\Delta\nu \quad = -\,G_{s-1}(\nu-1)\,\psi(\nu-1) + C. \end{cases}$$

En outre, on obtient par la sommation par parties

$$\Sigma\, C_\nu^\iota G_s(\nu)\,\psi(\nu) = -\,C_\nu^\iota G_{s-1}(\nu-1)\,\psi(\nu-1) + \Sigma\, C_\nu^{\iota-1} G_{s-1}(\nu)\,\psi(\nu).$$

On en conclut, si $s > \iota$,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu^\iota\, G_s(\nu)\,\psi(\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu^{\iota-\mu}\, G_{s-\mu}(\nu)\,\psi(\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} G_{s-\iota}(\nu)\,\psi(\nu) = 0$$

et si $s = \iota$,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu^s G_s(\nu)\,\psi(\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi(\nu) = 1.$$

Il résulte de là que si P est un polynome en ν de degré inférieur à s, on a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P\, G_s(\nu)\,\psi(\nu) = 0.$$

De ces équations, on tire les relations importantes

$$(16) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} G_s G_k \psi(\nu) = 0 \quad \text{si } s \neq k \qquad \text{et} \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} G_s{}^2 \psi(\nu) = \frac{s!}{m^s}.$$

Les polynomes G_s sont donc des polynomes orthogonaux analogues aux polynomes généralisés de Laguerre; ils peuvent servir aussi facilement au développement des fonctions en série que les polynomes d'Hermite. Tandis que ces derniers supposent une variable continue, les polynomes G_s demandent des variables discontinues. Par suite, dans le problème considéré, pour avoir des résultats rigoureux, il convient de recourir aux polynomes G_s.

Grâce aux relations (16), on peut déterminer facilement les coefficients du développement d'une fonction y quelconque de ν

$$(16') \qquad y = [a_0 G_0 + a_1 G_1 + a_2 G_2 + \ldots]\,\psi(m, \nu).$$

En effet, on a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} G_s y = a_s \frac{s!}{m^s}.$$

On exprimera $\Sigma G_s y$ comme précédemment par les moments

$$M_\iota = \Sigma \nu^\iota y,$$

mais cette fois, la formule reste rigoureuse. On aura

$$a_s = \frac{m^s}{s!} \sum_{\nu=0}^{\infty} G_s y = \sum_{\iota=0}^{s+1} (-1)^\iota \frac{m^\iota}{\iota!} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu^{s-\iota} y.$$

Il faut encore développer $C_\nu^{s-\iota}$ en série de puissances de ν. Si $s \neq \iota$, on trouve

$$C_\nu^{s-\iota} = \frac{1}{(s-\iota)!} \sum_{k=1}^{s-\iota+1} \mathfrak{S}_{s-\iota}^{k} \nu^k$$

où $\mathfrak{S}_{s-\iota}^{k}$ est le nombre de Stirling de première espèce défini par l'équation

$$\mathfrak{S}_{n+1}^{k} = \mathfrak{S}_{n}^{k-1} - n\,\mathfrak{S}_{n}^{k}$$

et par $S_1^0 = 0$, $S_1^1 = 1$. En introduisant les moments, on a, en remaniant la somme double,

$$a_s = \sum_{k=1}^{s+1} M_k \sum_{\iota=0}^{s-k+1} \frac{(-1)^\iota m^\iota}{\iota!(s-\iota)!} \mathfrak{S}_{s-\iota}^{k} + \frac{(-1)^s m^s}{s!} M_0. \tag{17}$$

Par exemple :

$$a_0 = M_0, \qquad a_1 = M_1 - m M_0, \qquad a_2 = \frac{1}{2} M_2 - \frac{1}{2}(1+2m) M_1 + \frac{1}{2} m^2 M_0,$$

$$a_3 = \frac{1}{6} M_3 - \frac{1}{2}(1+m) M_2 + \frac{1}{6}(2+3m+3m^2) M_1 - \frac{1}{6} m^3 M_0, \qquad \ldots$$

On peut encore disposer de la constante m. Si l'on pose m égale à la moyenne des grandeurs y, c'est-à-dire $m = \frac{M_1}{M_0}$ alors on aura $a_1 = 0$.

Dans le cas particulier où l'on veut développer la probabilité (1) en série de polynomes G_s, il suffit de remplacer les grandeurs M_k de la formule (17) par les moments de cette fonction donnés par la relation (9). En réarrangeant la somme double du second membre de (17), on arrive à

$$a_s = \sum_{\iota=0}^{s} (-1)^\iota \frac{m^\iota}{\iota!\,(s-\iota)!} \sum_{k=1}^{s-\iota+1} \mathfrak{S}_{s-\iota}^{k} \sum_{i=1}^{k+} \mathfrak{s}_k^i \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right) m^i$$

Comme $\mathfrak{s}_k^i$ est égale à zéro si $i > k$, on peut faire varier i dans la dernière somme de 1 à $s-\iota$ au lieu de 1 à k, car k est plus petit que $s-\iota$. Alors les deux dernières sommes peuvent s'écrire

$$\sum_{i=0}^{s} \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right) m^i \sum_{k=1}^{s-\iota+1} \mathfrak{S}_{s-\iota}^{k} \mathfrak{s}_k^i$$

à cause des relations suivantes connues

$$\sum_{k=1}^{s-\iota+1} \mathfrak{S}_{s-\iota}^{k} \mathfrak{s}_k^i = 0 \quad \text{si } i \neq s-\iota \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{s-\iota+1} \mathfrak{S}_{s-\iota}^{k} \mathfrak{s}_k^{s-\iota} = 1,$$

on a

$$(18) \qquad a_s = m^s \sum_{\iota=0}^{s} \frac{(-1)^\iota}{\iota!\,(s-\iota)!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{s-\iota-1}{n}\right) + (-1)^s \frac{m^s}{s!}.$$

Cette formule permet de calculer assez facilement les coefficients a_s; mais on peut la simplifier encore en développant

$$\frac{1}{n^{s-\iota}} n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+\iota+1)$$

suivant les puissances de n et en se servant des nombres de Stirling de première espèce. On trouve pour cette dernière expression

$$\frac{1}{n^{s-\iota}} \sum_{k=1}^{s-\iota+1} \mathfrak{S}_{s-\iota}^{k} n^k.$$

Introduisons cette expression dans la formule (18) et remarquons que le terme correspondant à $k = s-\iota$ est égal à $\frac{-(-m)^s}{s!}$; posons encore $\mu = s-\iota-k$, alors la formule deviendra

$$(19) \qquad a_s = \frac{m^s}{s!} \sum_{\mu=1}^{s} \frac{1}{n^\mu} \sum_{\iota=0}^{s-1} (-1)^\iota C_s^\iota \mathfrak{S}_{s-\iota}^{s-\iota-\mu}.$$

On peut montrer que la seconde somme est nulle pour toutes les valeurs de μ telle que $s > 2\mu$; on en conclura qu'il suffit de faire varier μ du plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(s+1)$ jusqu'à $s-1$. Ainsi on obtiendra très rapidement les constantes a_s. Par exemple

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = -\frac{m^2}{2n}, \qquad a_3 = \frac{m^3}{3n^2}, \qquad a_4 = \frac{m^4}{8n^2} - \frac{m^4}{4n^3},$$

$$a_5 = -\frac{m^5}{6n^3} + \frac{m^5}{5n^4}, \qquad a_6 = \frac{-m^6}{48n^3} + \frac{13m^6}{72n^4} - \frac{m^6}{6n^5}.$$

Il résulte de la formule (19) que $\frac{a_s}{m^s}$ est indépendant de m. Désignons cette grandeur par b_s, la probabilité (1) se mettra alors sous la forme

$$y = [b_0 + b_2 m^2 G_2 + b_3 m^3 G_3 + \ldots]\psi(m, \nu),$$

où les coefficients b_i sont indépendants de m et $m^i G_i$ est un polynome de degré i en m et en ν.

On peut encore donner une autre forme aux coefficients b_s

$$(19') \qquad b_s = \frac{1}{s!} \sum_{\mu=s_0}^{s} \frac{1}{n^\mu} N_\mu^{2\mu+1-s},$$

où s_0 est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(s+1)$. On peut calculer les nombres N_μ^ι très rapidement à l'aide de l'équation aux différences finies suivante

$$N_\mu^\iota = (\iota - 2\mu)\left[N_{\mu-1}^\iota + N_{\mu-1}^{\iota-1}\right]$$

et des valeurs initiales $N_1^1 = -1$, $N_1^{1+s} = 0$.

On peut dresser ainsi une table de ces nombres qui permettent de déterminer facilement les coefficients b_s.

Remarquons que l'on a

$$(a) \qquad \sum_{\iota=1}^{\mu+1} (-1)^\iota N_\mu^\iota = (-1)^{\mu-1}.$$

A l'aide de cette relation, on peut démontrer que

$$(b) \qquad \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s b_s = \frac{n}{n+1}.$$

Nous avons vu que a_0 est en général égal à M_0, donc dans le cas considéré on a $a_0 = 1$; ainsi le développement de la probabilité (1) est la suivante

$$(20) \quad y = \left[1 - \frac{m^2}{2n} G_2 + \frac{m^3}{3n^2} G_3 + \frac{m^4(n-2)}{8n^3} G_4 - \frac{m^5(5n-6)}{30n^4} G_5 + \ldots\right] \psi.$$

Remarquons que cette formule est l'expression rigoureuse de la probabilité (1); par contre, la formule (10), développement à l'aide des polynomes d'Hermite, n'est qu'une forme approchée; elle suppose que $\frac{1}{\sqrt{2npq}}$ est petit.

Considérons l'exemple suivant : $n = 32$, $p = \frac{1}{8}$, donc $m = 4$; on demande la probabilité pour que ν soit égal à zéro; la valeur exacte donnée par la formule (1) est 0,01393.

Ce cas est particulièrement simple, car on a d'après la formule (13) pour toutes les valeurs de s

$$G_s(m, 0) = (-1)^s,$$

par suite

$$y = \left[1 - \frac{m^2}{2n} - \frac{m^3}{2n^2} + \frac{m^4(n-2)}{8n^3} - \ldots\right] \psi(m, 0).$$

On trouve dans les Tables de Pearson $\psi(4, 0) = 0,018316$. Les grandeurs correspondant aux termes de la série (20) sont :

Premier terme....................	0,018316
Second terme....................	—0,004579
Troisième terme..................	—0,000377
Quatrième terme..................	0,000537
	0,013897

La valeur du premier terme correspond à la probabilité donnée par la formule (12); on voit qu'elle s'écarte considérablement de la valeur exacte. Par contre, en tenant compte du second terme, l'approximation devient assez bonne; elle est excellente si l'on conserve quatre termes.

Pour utiliser la formule (20), il y a avantage à la transformer à l'aide de la relation (15) par laquelle on obtient

$$(21) \quad \begin{aligned} y = \psi(\nu) &+ a_2 \Delta^2 \psi(\nu - 2) - a_3 \Delta^3 \psi(\nu - 3) \\ &+ a_4 \Delta^4 \psi(\nu - 4) - a_5 \Delta^5 \psi(\nu - 5) + \ldots. \end{aligned}$$

On peut déterminer très rapidement les valeurs de $\Delta^s\psi(\nu - s)$ en se servant des tables qui donnent $\psi(m, \nu)$ en fonction de m et ν.

Comme exemple, utilisons la formule (20) dans des conditions très défavorables pour elle, c'est-à-dire dans un cas où n est petit et p relativement grand; soient $p = \frac{1}{3}$ et $n = 10$ et déterminons la probabilité pour que ν soit égal à 5. La valeur exacte est 0, 1366. Les coefficients de la formule (20) seront

$$a_2 = -\frac{5}{9}, \qquad a_3 = -\frac{10}{81}, \qquad a_4 = \frac{10}{81}.$$

Des Tables, on tire les différences successives :

$$\psi(5) = 0,122314, \qquad \Delta^2\psi(3) = -0,24425, \qquad \Delta^3\psi(2) = 0,33574,$$
$$\Delta^4\psi(1) = 0,31992.$$

Le premier terme est la valeur de la probabilité donnée par la formule (12), elle diffère beaucoup de la valeur exacte; par contre, en conservant le second terme, l'approximation obtenue

$$y = 0,135884$$

est très bonne; l'erreur n'est plus que de 5 pour 1000.

Pour comparer, déterminons encore cette probabilité par la formule (10); le cas considéré est assez favorable pour cette formule, puisque l'écart $\frac{5}{3}$ est bien plus petit que $np = \frac{10}{3}$ et k n'est pas trop grand; aussi cette formule donne-t-elle des résultats assez satisfaisants :

Premier terme	0,14335
Deux premiers termes	0,13289
Trois premiers termes	0,13557

L'erreur n'est donc que de 7,3 pour 1000.

6. Second problème des épreuves répétées. Formules rigoureuses. — Le nombre des épreuves est n, la probabilité pour que l'événement simple soit favorable est p; on demande la probabilité pour que le nombre des cas favorables soit plus petit que $\mu + 1$; c'est-à-dire pour que l'écart $\xi = \nu - np$ soit plus petit que $\mu + 1 - np$. La formule rigoureuse qui donne cette proba-

bilité est la suivante :

$$P = \sum_{\nu=0}^{\mu+1} C_n^\nu p^\nu q^{-n\nu}. \tag{22}$$

7. Formule approchée de Laplace. — Si n et μ sont grands, les calculs pour déterminer la probabilité P à l'aide de la formule (22) deviennent trop longs et l'on est forcé de recourir à des formules approchées. Dans le cas où p diffère peu de $\frac{1}{2}$, on déduira, en partant de la formule (2), la formule approchée de Laplace, donnant la probabilité pour que l'écart soit plus petit que λ

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda k} e^{-t^2}\, dt \quad \text{où} \quad k = \frac{1}{\sqrt{2npq}}. \tag{23}$$

Dans la formule (22), la variable ν est discontinue; en effet, elle ne prend que des valeurs $0, 1, 2, \ldots, \mu$. Dans la formule (23), la variable t est continue; pour pouvoir comparer les résultats des deux formules, il faut considérer dans la seconde l'intervalle entre $\nu - \frac{1}{2}$ et $\nu + \frac{1}{2}$ comme correspondant dans la première à ν; par suite, si dans la première ν varie de 0 à μ, dans la seconde il faudra faire varier t entre des limites correspondant à $\nu = -\frac{1}{2}$ et $\nu = \mu + \frac{1}{2}$. Il résulte que dans la formule (23) $\lambda = \mu + \frac{1}{2} - np$. Comme np doit être assez grand, on peut prendre comme limite inférieure $-\infty$ au lieu de $-k\left(\frac{1}{2} + np\right)$.

Lorsque les conditions énumérées plus haut sont satisfaites, l'approximation sera assez bonne. Soient, par exemple, $n = 32$ et $p = \frac{1}{2}$; on demande la probabilité pour que ν soit plus petit que $\mu + 1 = 20$, c'est-à-dire $\lambda = 19,5 - 16 = 3,5$.

La probabilité cherchée sera égale, d'après la formule (22), à 0,89205 et, d'après la formule (23), à 0,8923. L'accord est donc très bon.

Par contre, si n n'est pas grand et si p diffère notablement de $\frac{1}{2}$, les résultats de la formule (23) seront moins bons. Soient, par exemple, $n = 10$ et $p = \frac{1}{3}$. La probabilité pour que ν soit plus petit que 2,5 ou $\xi < -\frac{5}{6}$, est, d'après la formule (22), égale à 0,2950; d'après la formule (23) égale à 0,2885; l'accord est moins bon, mais le résultat est encore acceptable.

8. Développement de la probabilité (22) en série à l'aide des polynomes d'Hermite. — Si p ne diffère pas considérablement de $\frac{1}{2}$, on peut partir de la formule (10); on arrivera alors au résultat suivant :

$$P = \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-k^2\xi^2}[a_0 + a_3 H_3 + a_4 H_4 + \ldots]\, d\xi. \tag{24}$$

Cette formule est très facile à utiliser; en effet, on a

$$\int H_s e^{-k^2\xi^2}\, d\xi = H_{s-1}\, e^{-k^2\xi^2};$$

il en résulte

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda k} e^{-t^2}\, dt + [a_3 H_2 + a_4 H_3 + \ldots]\, e^{-k^2\lambda^2}.$$

Pour les calculs numériques, introduisons de nouveau à la place des H_s les L_s; d'après la formule (11) on trouve ainsi

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda k} e^{-t^2}\, dt + \sqrt{\pi}[4 a_3 k^3 L_2(\lambda k) + 8 a_4 k^4 L_3(\lambda k) + \ldots].$$

L'intégrale du second membre peut être tirée des Tables de l'intégrale de Laplace [1]

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

La probabilité cherchée sera égale à $\frac{1}{2}[1 + \Theta(\lambda k)]$. Il faut remarquer que l'on a $\Theta(-x) = -\Theta(x)$.

Appliquons la formule (24) à l'exemple précédent. La probabilité cherchée sera, en conservant

Le premier terme....................	0,28855
Les deux premiers termes............	0,29685
Les trois premiers termes...........	0,29381

---

[1] On trouve de telles Tables dans presque tous les traités sur les probabilités. Les grandeurs $L_n(\lambda k)$ pour les valeurs de $n = 0$ à $n = 6$ peuvent être tirées des Tables mentionnées dans la note page 108.

L'approximation obtenue est très bonne, l'erreur résultante n'est que de 4 pour 1000.

9. Formule approchée de Poisson. — Afin de déterminer la probabilité pour que le nombre des cas favorables soit plus petit que $\mu+1$, $m=np$ étant petit, il y a avantage à partir de la formule (12), au lieu de la formule (10), alors on arrive à

$$P = e^{-m}\sum_{\nu=0}^{\mu+1}\frac{m^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{\mu+1}\psi(m,\nu). \tag{25}$$

La première somme de l'expression précédente forme une partie de la série de e^m. Si m est plus petit que 15, on peut former cette somme en additionnant les valeurs correspondantes trouvées dans les Tables de Pearson.

Par exemple, si $n=400$ et $p=0,015$ et que l'on demande la probabilité pour que le nombre des cas favorables soit plus petit que 5, on a $m=6$. La formule exacte (18) donne pour la probabilité cherchée $P=0,28361$. La valeur tirée de (25) est

$$P = \psi(6,0)+\psi(6,1)+\psi(6,2)+\psi(6,3)+\psi(6,4) = 0,285058.$$

L'erreur n'est que de 5 pour 1000.

A titre de comparaison, déterminons cette probabilité par la formule (23); on trouve $P=0,2684$, valeur trop différente de la valeur exacte.

On peut exprimer la probabilité (25) par une fonction gamma incomplète. En effet, si μ est un entier positif, on a, comme on peut le voir en intégrant par parties,

$$\Gamma_m(\mu+1) = \int_0^m e^{-t}t^\mu\,dt = \mu! - \mu!\left(1+\frac{m}{1!}+\frac{m^2}{2!}+\ldots+\frac{m^\mu}{\mu!}\right)e^{-m},$$

et en divisant par $\mu!$, on obtient

$$\sum_{\nu=0}^{\mu+1}\psi(m,\nu) = 1-\frac{\Gamma_m(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)} = 1-I_m(\mu+1).$$

On trouve les grandeurs $I_m(\mu+1)$ dans les Tables remarquables de Pearson : *Tables of the Incomplete Gamma Function* (London, 1922; xxxi + 162 pages).

Par exemple, pour $\mu = 4$ et $m = 6$, on trouve $I_6(5) = 0,7150086$ en bon accord avec le résultat trouvé ci-dessus.

Autre exemple. — Soient $n = 400$ et $p = 0,025$; la probabilité pour que le nombre des cas favorables soit plus petit que 9 est

$$\sum_{\nu=0}^{9} \psi(10, \nu) = 0,332815;$$

d'autre part, on trouve $I_{10}(9) = 0,6671811$.

Remarque. — Il résulte de ce qui précède que la différence de $I_m(\mu+1)$ par rapport à μ est égale à

$$\Delta I_m(\mu+1) = -\psi(m, \mu+1),$$

c'est-à-dire à la valeur approchée de la probabilité pour que le nombre des cas favorables soit égal à $\mu + 1$ si $np = m$.

10. Développement rigoureux de la probabilité (22) en série a l'aide des polynomes G_s. — Si m n'est pas assez petit ou n n'est pas assez grand, il convient, pour obtenir la probabilité (22), de faire la somme des probabilités données par la formule (16′) de $\nu = 0$ à $\nu = \mu$ (limites comprises). Grâce à la seconde relation (15′), on trouve

$$P = 1 - I_m(\mu+1) - [a_2 G_1 + a_3 G_2 + \ldots]\,\psi(m, \mu)$$

ou encore, à cause de (15),

$$(26)\quad P = 1 - I_m(\mu+1) + a_2 \Delta\psi(m, \mu-1) - a_3\Delta^2\psi(m, \mu-2) + \ldots.$$

Comme exemple, déterminons la probabilité pour que ν soit plus petit que $\mu + 1 = 3$, lorsque $n = 10$ et $p = \frac{1}{3}$. Ici $m = \frac{10}{3}$. Dans les tables, on trouve $I_m(\mu+1) = 0,647126$; par suite, la probabilité correspondant à la formule (25) est $0,352874$; comme la valeur exacte de la probabilité cherchée est $0,2950$, ce résultat ne serait pas acceptable.

Les constantes a_i sont les suivantes :

$$a_2 = -\frac{4}{9}, \qquad a_3 = -\frac{10}{81}, \qquad a_4 = \frac{10}{81}, \qquad a_5 = \frac{44}{729}, \qquad \ldots.$$

Les différences successives déterminées à l'aide des tables :

$$\Delta\psi(1) = 0{,}079209, \qquad \Delta^2\psi(0) = -0{,}004054,$$
$$\Delta^3\psi(-1) = -0{,}051604 \quad \text{et} \quad \Delta^4\psi(-2) = -0{,}063441, \quad \ldots$$

Enfin les probabilités correspondant aux

Premier terme	0,352874
Deux premiers termes	0,308869
Trois premiers termes..............	0,308369
Quatre premiers termes.............	0,301998
Cinq premiers termes...............	0,298169
Six premiers termes................	0,296149

L'erreur totale est inférieure à 4 pour 1000; en continuant, on obtiendrait la précision désirée. Les conditions du problème étaient très défavorables pour la formule employée; si n est plus grand et p plus petit, généralement deux termes suffiront.

II. — Inversion du théorème de Bernoulli.

11. Premier problème des probabilités *a posteriori*. Formule rigoureuse de la probabilité obtenue par le théorème de Bayes. — On entend par inversion du théorème de Bernoulli le problème suivant : Le nombre des cas favorables est ν en n épreuves; on demande la probabilité pour que la probabilité de l'événement simple soit égale à p. Pour résoudre ce problème, on a recours au théorème de Bayes ([1]).

Un événement peut avoir pour cause C_1, C_2, C_3, ... Désignons par ω_i la probabilité *a priori*, c'est-à-dire avant l'arrivée de l'événement, pour que la cause C_i soit en jeu; de plus, désignons par p_i la probabilité pour que l'événement se produise si la cause C_i agit. On démontre que la probabilité *a posteriori*, c'est-à-dire après l'arrivée de l'événement, pour que celui-ci soit dû à la cause C_i est

$$P_i = \frac{\omega_i p_i}{\Sigma\,\omega_s p_s}.$$

([1]) On peut démontrer ce théorème en toute rigueur. *Voir*, par exemple, Ch. Jordan, *On Probability* (*Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan*, 1925, p. 96).

La somme dans le dénominateur est étendue à toutes les causes susceptibles d'avoir amené l'événement. Si toutes les grandeurs ω_i et p_i sont données, il n'y a rien à objecter. Si les probabilités ω_i sont inconnues, il faut choisir une hypothèse concernant ces probabilités. Dans ce cas, si l'on veut appliquer la formule précédente à des questions pratiques, le résultat sera bon ou mauvais suivant que l'hypothèse choisie sera conforme ou non à la réalité.

Il faut remarquer que dans chaque problème de probabilité appliquée, on est forcé de procéder ainsi au sujet des cas également probables; le résultat dépendra de l'hypothèse choisie. Ainsi, sous ce rapport, le théorème de la probabilité des causes, ou théorème de Bayes, se trouve exactement dans le même cas que toutes les autres formules de probabilité.

Dans ce qui suit, nous admettrons d'après Poisson, que si l'on ne sait rien sur les causes C_i, celles-ci sont également probables.

Dans notre problème, les « causes » C_i sont les diverses probabilités p_i; l'événement peut se produire en effet soit avec la probabilité p_1, soit avec p_2, soit avec p_3, et ainsi de suite. En considérant ces éventualités comme également probables *a priori*, la probabilité *a posteriori* pour que la probabilité de l'événement simple soit égale à p_i est

$$P_i = \frac{p_i^\nu q_i^{n-\nu}}{\Sigma p_s^\nu q_s^{n-\nu}}.$$

Si p peut prendre les valeurs $0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \cdots, \frac{m}{m}$, cette probabilité devient

$$P_i = \frac{i^\nu (m-i)^{n-\nu}}{\sum_{s=0}^{m+1} s^\nu (m-s)^{n-\nu}}.$$

Si p peut prendre avec la même probabilité toutes les valeurs entre zéro et un, la probabilité pour que la probabilité de l'événement simple soit comprise entre p et $p + \Delta p$ est donnée par la formule

$$(1) \qquad \Delta P = \frac{p^\nu q^{n-\nu} \Delta p}{\int^1 p^\nu q^{n-\nu}\, dp} = C_n^\nu (n+1) p^\nu q^{n-\nu} \Delta p.$$

Par exemple, si $n = 400$ et $\nu = 160$, la probabilité pour que p soit compris entre $0,45$ et $0,45 + \Delta p$ sera, d'après (1),

$$\Delta P = 2,127 \Delta p.$$

La probabilité pour que p soit compris entre $0,35$ et $0,35 + \Delta p$ sera

$$\Delta P = 1,887 \Delta p.$$

12. Formules approchées de la probabilité (1). — Si n est très grand, la formule (1) est difficilement utilisable; on se contente alors des formules approchées. On ne peut obtenir une telle formule en partant de la formule de Laplace (2) du paragraphe **2**, car on est conduit à des intégrales trop compliquées.

Lorsque ν et $n - \nu$ sont grands, on obtient la valeur approchée de la probabilité (1) en la transformant par la formule de Stirling. On trouve ainsi

$$\Delta P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\Pi}\right)^{\nu} \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 - \Pi}\right)^{n-\nu} \Delta p,$$

où

$$h^2 = \frac{n}{2\Pi(1 - \Pi)}, \qquad \Pi = \frac{\nu}{n} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = p - \Pi.$$

Si, en outre, $\frac{p}{\Pi}$ diffère peu de l'unité, c'est-à-dire si $\frac{\varepsilon}{\Pi}$ et $\frac{\varepsilon}{(1 - \Pi)}$ sont petits, on aura en développant $\log\left(1 + \frac{\varepsilon}{\Pi}\right)$ et $\log\left(1 - \frac{\varepsilon}{1 - \Pi}\right)$ suivant les puissances de ε

$$(2) \qquad \Delta P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-n \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{i+1}}{i+1} \frac{\Pi^i - (-1)^i (1-\Pi)^i}{\Pi^i (1-\Pi)^i}} \Delta p.$$

Cette formule est légitime pour $\frac{\varepsilon}{\Pi} < 1$ et $\frac{\varepsilon}{(1 - \Pi)} < 1$. Si ε est petit et si Π diffère peu de $\frac{1}{2}$, on a en première approximation la formule suivante, qui est symétrique, en donnant la même probabilité pour un écart $\pm \varepsilon$ $\left(\text{ceci n'a réellement lieu que si } \Pi = \frac{1}{2}\right)$:

$$(3) \qquad \Delta P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \Delta p, \qquad \text{où} \qquad h^2 = \frac{n}{2\Pi(1 - \Pi)}.$$

C'est la formule usuelle de l'inversion du théorème de Bernoulli (1).

Exemple : $n = 400$ et $\Pi = \frac{1}{2}$; on demande la probabilité pour que p soit compris entre $0,45$ et $0,45 + \Delta p$. La formule (3) donne $\Delta p = 2,159 \Delta p$ et la formule exacte (1) donne $2,141\, \Delta p$.

Le résultat est acceptable, mais plus Π est différent de $\frac{1}{2}$, moins il sera bon.

Exemple : $n = 400$ et $\Pi = \frac{2}{5}\cdot$ On demande la probabilité pour que l'on ait $0,45 < p < 0,45 + \Delta p$. On trouve $2,023\, \Delta p$ contre $2,127\, \Delta p$ donnée par la formule exacte (1).

Si la différence est encore plus grande, par exemple si $\Pi = 0,02$ la probabilité pour avoir $0,01 < p < 0,01 + \Delta p$ est d'après (3) $1,145\, \Delta p$ au lieu de la valeur vraie $2,052\, \Delta p$.

Dans ces cas, il faut déterminer plusieurs termes de la série (2). On peut les calculer sans difficulté; néanmoins on a avantage à transformer cette série. La transformation deviendra nécessaire pour pouvoir résoudre le second problème.

Introduisons la variable z au lieu de l'écart relatif ε. Soit $z = \frac{\varepsilon h}{\sqrt{2}}$ ou $\varepsilon^2 = \frac{z^2 \Pi(1-\Pi)}{n}\cdot$ On trouve

$$\Delta P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} e^{-\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{z^{i+1}}{i+1} [\Pi^i - (-1)^i (1-\Pi)^i][n\Pi(1-\Pi)]^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}} \Delta P.$$

Développons maintenant le deuxième facteur exponentiel suivant les puissances de z; nous aurons

$$(4) \quad \Delta P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \left[1 - z^3 \frac{\Pi^2 - (1-\Pi)^2}{3\sqrt{n\Pi(1-\Pi)}} - z^4 \frac{\Pi^3 + (1-\Pi)^3}{4n\Pi(1-\Pi)} - z^5 \frac{\Pi^4 - (1-\Pi)^4}{5[n\Pi(1-\Pi)]^{\frac{3}{2}}} + \dots \right] \Delta p.$$

Résolvons, à l'aide de cette formule, le problème suivant :

---

(1) Ch. Jordan, *On the Inversion of Bernoulli's Theorem* (*Philosophical Magazine*, 1923).

Soient $n = 400$ et $\Pi = 0,4$; déterminons la probabilité pour avoir $0,35 < p < 0,35 + \Delta p$. On trouve en conservant

Le premier terme..................	$2,0230\,\Delta p$
Les deux premiers termes..........	$1,9060\,\Delta p$
Les trois premiers termes..........	$1,9037\,\Delta p$
Les quatre premiers termes........	$1,9027\,\Delta p$
La valeur exacte...................	$1,8817\,\Delta p$

On voit que la convergence est bien lente.

13. Développement de la formule (1) en série a l'aide des polynomes d'Hermite. — Au lieu de déduire la formule (2) en transformant la formule (1) par la formule de Stirling, on peut développer la probabilité (1) en série de polynomes d'Hermite. On aura

$$\Delta P = [a_0 + a_1 H_1 + a_2 H_2 + \ldots]\, e^{-h^2\varepsilon^2}, \tag{5}$$

les coefficients a_i étant donnés par l'équation (7) du n° 3, où l'on remplace k par h et l'on entend par μ_s le moment de ε par rapport à (1). Comme cette fois ε est une variable continue, le développement à l'aide des polynomes d'Hermite sera rigoureux, ce qui n'était pas le cas dans le problème direct, en établissant la formule (10) du n° 3.

Au lieu de déterminer directement les moments μ_s, il est préférable de déterminer d'abord les moments M_s de p relatif à (1). On a

$$M_s = (n+1)C_n^\nu \int_0^1 p^{\nu+s} q^{n-\nu}\, dp = \frac{(n+1)!\,(\nu+s)!}{(n+1+s)!\,\nu!}.$$

Il en résulte les moments μ_s

$$\mu_s = \sum_{i=0}^{s+1} (-1)^i C_s^i \Pi^i M_{s-i}.$$

Cas particuliers :

$$\mu_0 = 1, \qquad \mu_1 = \frac{1-2\Pi}{n+2}, \qquad \mu_2 = \frac{2+(n-6)\Pi(1-\Pi)}{(n+2)(n+3)}.$$

Disposons maintenant de h de manière à avoir $h^2 = \dfrac{n}{2\Pi(1-\Pi)}$.

L'équation (5) deviendra

$$(6)\quad \Delta P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}\left[1 - \frac{1-2\Pi}{n+2}H_1 + \frac{2n-(11n+6)\Pi(1-\Pi)}{2n(n+2)(n+3)}H_2 - \dots\right]\Delta p.$$

Pour déterminer les valeurs particulières de ΔP, le plus simple c'est d'introduire, par la formule (11) du n° **3**, les grandeurs L_n.

Exemple. — Soient $n = 400$, $\Pi = 0,4$, et déterminons la probabilité pour avoir $0,35 < p < 0,35 + \Delta p$. Dans ce cas $\varepsilon = -0,05$ et $h = \frac{50}{\sqrt{3}}$. La probabilité correspondant à (6) est si l'on prend

Le premier terme seul...............	$2,0230\,\Delta p$
Les deux premiers termes..........	$1,9393\,\Delta p$
Les trois premiers termes...........	$1,9180\,\Delta p$
Tandis que la valeur exacte est.....	$1,8817\,\Delta p$

La convergence est donc bien lente, et il faudrait pousser l'approximation plus loin.

14. Inversion de la formule de Poisson. — Nous avons mentionné au paragraphe **12** que l'inversion directe de la formule de Laplace [formule (2) du paragraphe **2**] conduit à des intégrales trop compliquées; par contre, l'inversion de la formule de Poisson [formule (12) du paragraphe **4**] est très facile et, lorsque $m = np$ est petit, elle conduit à des résultats acceptables.

Le nombre des cas favorables étant ν en n épreuves, la probabilité pour que la probabilité de l'événement simple soit comprise entre p et $p + \Delta p$ est donnée par le théorème de Bayes :

$$(7)\qquad \Delta P = \frac{n\, e^{-m} m^{\nu}\, \Delta p}{\int_0^{\infty} e^{-m} m^{\nu}\, dm} = \frac{n}{\nu!} e^{-m} m^{\nu}\, \Delta p.$$

Si, par exemple, $n = 400$ et $\nu = 8$, et si nous déterminons la probabilité pour avoir $0,015 < p < 0,015 + \Delta p$, nous la trouvons d'après (7) égale à $41,32\,\Delta p$, tandis que la formule exacte (1) aurait donné $41,61\,\Delta p$. L'erreur n'est que de 8 pour 1000. Par contre, la formule (3) donne dans ce cas un résultat inacceptable.

15. Expression rigoureuse de la probabilité (1) a l'aide d'une

SÉRIE DE POLYNOMES G_s. — Au paragraphe 21 nous déduirons la formule suivante, donnant la probabilité du premier problème *a posteriori*. On aura

$$(8)\quad \Delta P = (n+1)\left[1 + \frac{2a_2}{m} G_1 + \left(a_2 + \frac{3a_3}{m}\right) G_2 + \left(a_3 + \frac{4a_4}{m}\right) G_3 + \ldots\right] \psi(m, \nu)\,\Delta p.$$

Les coefficients a_i et les grandeurs G_i sont respectivement donnés par les formules (19) et (14) du paragraphe 5. Dans ce cas on a

$$m = (n+1)\,p.$$

Exemple. — Soient $n = 400$, $\nu = 8$, et déterminons la probabilité pour avoir $0{,}015 < p < 0{,}015 + \Delta p$. On trouve en prenant

Le premier terme de (8)	$41{,}6098\,\Delta p$.
Les deux premiers termes	$41{,}4089\,\Delta p$.
Les trois premiers termes	$41{,}6185\,\Delta p$.
Les quatre premiers termes	$41{,}6134\,\Delta p$.
Tandis que la valeur exacte est	$41{,}6133\,\Delta p$.

L'accord est donc excellent.

16. SECOND PROBLÈME DES PROBABILITÉS *a posteriori*. FORMULE RIGOUREUSE. — Le nombre des épreuves est n, le nombre des cas favorables est ν; on demande la probabilité pour que la probabilité de l'événement simple soit plus petite que λ. On obtiendra cette probabilité en intégrant la grandeur (1) de $p = 0$ à $p = \lambda$:

$$(9)\qquad P = (n+1)\, C_n^\nu \int_0^\lambda p^\nu (1-p)^{n-\nu}\, dp.$$

Comme ν et $n - \nu$ sont des nombres entiers, on peut toujours effectuer l'intégration; mais si ν et $n - \nu$ sont grands, les calculs sont trop longs. On aura, en intégrant $n - \nu$ fois par parties :

$$P = \sum_{s=\nu+1}^{n+2} C_{n+1}^s \lambda^s (1-\lambda)^{n+1-s}.$$

On en conclut que P exprime aussi la probabilité pour qu'en

$n+1$ épreuves le nombre des cas favorables soit plus grand que ν, la probabilité de l'événement simple étant égale à λ. Nous avons ainsi ramené le calcul relatif au second problème des probabilités des causes à celui d'un problème de probabilité *a priori*, et nous pouvons énoncer le

THÉORÈME. — *Le nombre des cas favorables en n épreuves étant ν, la probabilité* a posteriori *pour que la probabilité de l'événement simple soit plus petite que λ est égale à la probabilité* a priori *pour que le nombre des cas favorables en $n+1$ épreuves soit plus grand que ν si la probabilité de l'événement simple est λ.*

Comme la probabilité (9) peut être exprimée par une fonction B incomplète, et qu'il y a des méthodes qui permettent de calculer assez rapidement les valeurs de ces fonctions, même si ν et $n-\nu$ sont grands [1], le théorème peut servir à déterminer la probabilité *a priori* à l'aide de ces fonctions. On a

$$(10) \qquad P = \frac{B_\lambda(\nu+1,\ n-\nu+1)}{B\,(\nu+1,\ n-\nu+1)} \equiv J_\lambda(\nu+1,\ n-\nu+1).$$

Par contre, dans d'autres cas où la probabilité *a priori* est plus facile à déterminer que la probabilité *a posteriori*, pour avoir la seconde, on calculera la première.

Remarque. — La différence de $J_\lambda(\nu+1,\ n-\nu+1)$ par rapport à ν est égale à

$$\Delta J_\lambda(\nu+1,\ n-\nu+1) = -\,C_{n+1}^{\nu+1}\,\lambda^{\nu+1}(1-\lambda)^{n-\nu};$$

c'est la probabilité pour qu'en $n+1$ épreuves le nombre des cas favorables soit égal à $\nu+1$, si la probabilité de l'événement simple est égale à λ.

Exemple. — Soient $n = 400$ et $\nu = 8$; déterminons la probabilité pour que l'on ait $p < 0{,}025$. La formule (10) donne, en utilisant la série (5) de Soper :

$$P = 0{,}67273.$$

(1) H.-E. SOPER, *The Numerical Evaluation of the Incomplete* B-*Function* (Cambridge, *University Press*, 1921).

Le calcul direct, très laborieux, aurait donné $0,67302$. La concordance est donc très bonne.

17. Formule déduite de la formule de Laplace. — On obtient une formule approchée de la probabilité (9) en partant de la formule (3); par intégration, on obtient

$$(11) \qquad P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{h\lambda} e^{-t^2}\,dt, \qquad \text{où} \qquad h^2 = \frac{n}{2\Pi(1-\Pi)}.$$

La limite inférieure de cette intégrale devrait être $-h\Pi$; mais, si $h\Pi$ est assez grand, l'erreur commise en la remplaçant par $-\infty$ est négligeable.

Exemple de Laplace traitant la probabilité de la masculinité des naissances à Paris :

En 40 ans, on a observé 770 941 naissances, dont il y avait 393 386 masculines; par suite, la probabilité statistique est

$$\Pi = 0,51027.$$

La probabilité pour que la probabilité d'une naissance masculine soit plus grande que $\frac{1}{2}$ est donnée par la formule

$$(12) \qquad P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{-h^2(p-\Pi)^2}\,dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\zeta^2}\,d\zeta,$$

où

$$z_0 = h\left(\frac{1}{2} - \Pi\right)\sqrt{2}.$$

Dans le problème de Laplace, $z_0 = 18,018$. La probabilité P peut être déterminée à l'aide de la Table IV de Pearson (*Tables for Statisticians*, ...), qui donne $-\log(1-P)$ en fonction de z_0. On trouve pour ce logarithme la valeur de $-72,145$. Il en résulte pour la probabilité cherchée

$$P = 1 - 0,716\,(0,1)^{72}.$$

Laplace a trouvé par d'autres moyens

$$P = 1 - 0,559\,(0,1)^{72}.$$

Comme la formule que nous avons employée n'est qu'approchée, le résultat obtenu est assez bon; l'écart ne se présente que dans la 73ᵉ décimale.

Par contre, si nous déterminons la probabilité dans un cas où $\Pi = \frac{\nu}{n}$ diffère considérablement de $\frac{1}{2}$, le résultat ne sera plus satisfaisant. Soient par exemple $n = 400$, $\nu = 8$, et déterminons la probabilité pour que p soit plus petit que 0,025. On trouve la valeur peu exacte 0,7612 au lieu de 0,6700.

18. Formule déduite de la formule (4) du paragraphe **12**. — Si Π diffère beaucoup de $\frac{1}{2}$, on peut obtenir une formule approchée de (9) en intégrant la probabilité (4), p variant de 0 à λ. Posons

$$\zeta = h(\lambda - \Pi)\sqrt{2}, \qquad \text{où} \qquad h^2 = \frac{n}{2\Pi(1-\Pi)},$$

nous aurons pour la valeur de la probabilité cherchée :

$$(13) \quad P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\zeta} e^{-\frac{1}{2}z^2} \times \left[1 - \frac{\Pi^2 - (1-\Pi)^2}{3\sqrt{n\Pi(1-\Pi)}} z^3 - \frac{\Pi^3 + (1-\Pi)^3}{4n\Pi(1-\Pi)} z^4 + \ldots\right] dz.$$

Dans les Tables mentionnées de Pearson, on trouve de $s = 1$ à $s = 10$ les grandeurs m_s qui sont des fonctions des moments incomplets (p. 22-23):

$$m_s(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\zeta} \frac{z^s e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz}{(s-1)(s-3)(s-5)\ldots\ldots}.$$

Si s est pair, le dénominateur du second membre s'arrête à 1; si n est impair, il s'arrête à 2. Par suite, les intégrales de la probabilité précédente seront données par les relations

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\zeta} z^s e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz = [(-1)^s m_s(\infty) + m_s(\zeta)](s-1)(s-3)\ldots.$$

Remarquons que l'on a $m_s(-\zeta) = (-1)^{s+1} m_s(\zeta)$.

Exemple. — $n = 400$ et $\nu = 180$; déterminons la probabilité pour que p soit plus petit que $\frac{1}{2}$. Dans ce cas, $h = \frac{400}{3\sqrt{22}}$ et $\zeta = 2{,}02$.

Le premier terme de la formule (13) suffit, les autres ont une influence négligeable. On trouve $P = 0,9778$.

D'après notre théorème, cette probabilité doit être égale à la probabilité pour que le nombre des cas favorables soit plus grand que 180 si le nombre des épreuves est 401; la probabilité pour que l'événement simple soit favorable étant $\frac{1}{2}$. Déterminons cette dernière probabilité par la formule (23) du n° **6**; nous trouverons

$$P = 0,9796.$$

L'écart entre les deux valeurs n'est que légèrement supérieur à 2 pour 1000, ce qui est satisfaisant en tenant compte du fait que les formules ne sont qu'approchées.

Considérons un exemple moins favorable pour la formule (13). Soient $n = 400$ et $\Pi = 0,02$; la probabilité pour que p soit plus petit que 0,025 est d'après (1) si l'on conserve

Le premier terme	0,76274
Les deux premiers termes	0,69691
Les trois premiers termes	0,64810
et la valeur exacte est	0,6730

Comme Π diffère beaucoup de $\frac{1}{2}$, il était à prévoir que, pour arriver à un résultat acceptable, il faudrait conserver plusieurs termes.

19. Formule déduite du développement en série (5) suivant les polynomes d'Hermite. — On peut encore obtenir la probabilité (9) par l'intégration de la grandeur (5), en faisant varier $t = h\varepsilon$ de $-\Pi h$ à $h(\lambda - \Pi) = \chi$, c'est-à-dire p de zéro à λ :

$$(14) \qquad P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-h\Pi}^{\chi} e^{-t^2}\,dt + [a_1 + a_2 H_1 + a_3 H_2 + \ldots]\, e^{-\chi^2} - [a_1 + a_2 H_1 + \ldots]\, e^{-h^2 \Pi^2}.$$

Pratiquement, comme $-h\Pi$ est généralement plus grand en valeur absolue que 5, on peut remplacer la limite inférieure par $-\infty$. Si, de plus, on remplace les coefficients a_i par les valeurs trouvées au n° **13**, on a

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\chi} e^{-t^2}\,dt - \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\chi^2} \left[\frac{1 - 2\Pi}{2n + 4} - \frac{2n - (11n + 6)\Pi(1 - \Pi)}{2n(n + 2)(n + 3)} H_1 + \ldots \right].$$

Exemple. — Soient $n = 400$ et $\Pi = 0,02$. La probabilité pour que p soit plus petit que $0,025$ sera, en prenant

Le premier terme	0,7623
Les deux premiers termes	0,6628
Les trois premiers termes	0,6378

Comme Π diffère beaucoup de $\frac{1}{2}$, il faudrait continuer pour arriver à un résultat acceptable.

20. Formule déduite de la formule (7) de Poisson. — Si Π est très différent de $\frac{1}{2}$, il est plus avantageux, au lieu d'utiliser les formules précédentes, de partir de la formule (7) du n° **14** et d'intégrer p de 0 à λ. Il vient

$$(15) \qquad P = \frac{1}{\nu!} \int_0^{n\lambda} e^{-t}\, t^\nu\, dt = \frac{\Gamma_{n\lambda}(\nu+1)}{\Gamma\,(\nu+1)}.$$

Comme nous l'avons mentionné, on peut déterminer cette grandeur à l'aide des Tables de Pearson donnant les valeurs de la fonction Γ incomplète.

Considérons l'exemple $n = 400$ et $\nu = 8$; la probabilité pour que p soit plus petit que $\lambda = \frac{1}{40}$ est, d'après cette formule, égale à $0,66695$ au lieu de la valeur exacte $0,6730$; l'erreur n'est environ que de 8 pour 1000. Le résultat est bien plus favorable que celui obtenu aux n^{os} **18** et **19**.

D'après le théorème que nous avons énoncé au n° **16**, cette probabilité peut être obtenue à l'aide de la formule du n° **9**.

21. Expression rigoureuse de la probabilité (9) à l'aide des polynomes G_s. — D'après notre théorème du n° **16**, la probabilité (9) est égale à la probabilité d'obtenir plus de ν cas favorables en $n+1$ épreuves, si la probabilité de l'événement simple est égale à χ.

Cette dernière probabilité est donnée par la formule (26) du n° **10**; dans cette formule, il faut écrire ν au lieu de μ et $\mu = \chi(n+1)$ au lieu de m; de plus, il faut retrancher cette probabilité de l'unité. On trouve alors

$$(16) \qquad P(\chi) = I_\mu(\nu+1) + [a_2 G_1 + a_3 G_2 + \ldots]\, \psi(\mu, \nu).$$

Les grandeurs a_i et G_i sont données respectivement par les formules (19) et (14) du paragraphe 5, mais il faut remplacer dans ces formules m par la valeur de μ donnée ci-dessus.

Appliquons cette formule à l'exemple du n° 16. Soient $n = 400$, $\nu = 8$, et déterminons la probabilité pour avoir $p < \frac{1}{40}$.

Le premier terme de (16) donne..............	0,66973
Les deux premiers termes........	0,67256
Les trois premiers termes....................	0,67255
Valeurs obtenues au n° 16..........	0,67273 et 0,67302

La concordance est donc très bonne.

La formule (16) permet encore d'exprimer d'une manière rigoureuse la probabilité (1) du premier problème des probabilités des causes, à l'aide des polynomes G_s, En effet, en différentiant la probabilité (16) par rapport à χ on obtient la probabilité pour que la probabilité de l'événement simple soit comprise entre χ et $\chi + \Delta\chi$, si le nombre des cas favorables observés est ν en n épreuves. Il vient

$$(8)\quad \Delta P = (n+1)\left[1 + \frac{2a_2}{\mu} G_1 + \left(a_2 + \frac{3a_3}{\mu}\right) G_2 + \left(a_3 + \frac{4a_4}{\mu}\right) G_3 + \ldots\right] \psi(\mu, \nu)\, \Delta\chi,$$

car d'après l'équation (19) du paragraphe 5 on a

$$\frac{d}{dm} a_i = \frac{i a_i}{m},$$

et d'après (13) du paragraphe 5,

$$\frac{d}{dm} G_i \psi = G_{i+1} \psi.$$

Nous avons appliqué la formule (8) au paragraphe 15 à un exemple et elle a donné un résultat très satisfaisant.

22. Troisième problème des probabilités *a posteriori*. Comparaison de deux probabliités. Formule rigoureuse. — Dans une première série d'expériences, le nombre des cas favorables est ν en n épreuves; dans une seconde série, ce nombre est égal à ν_1 en n_1 épreuves. Il faut déterminer la probabilité pour que la probabilité p de l'événement simple de la première série soit plus grande que la probabilité p_1 de l'événement simple de la seconde série. Effectuons le calcul :

$$P = \int_0^1 dp \int_0^p (n+1)(n_1+1)\, C_n^\nu C_{n_1}^{\nu_1} p^\nu q^{n-\nu} p_1^{\nu_1} q_1^{n_1-\nu_1}\, dp_1,$$

$$P = \int_0^1 (n+1)\, C_n^\nu p^\nu q^{n-\nu} J_p(\nu_1+1,\ n_1-\nu_1+1)\, dp,$$

où $J_p(\ldots)$ est le rapport d'une fonction B incomplète à la fonction complète correspondante. Nous avons montré au n° 16 que

$$J_p(\nu_1+1,\ n_1-\nu_1+1) = \sum_{s=\nu_1+1}^{n_1+2} C_{n_1+1}^s p^s q^{n_1+1-s}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation précédente et en effectuant l'intégration, nous aurons

$$P = \frac{1}{C_{n_1+n+2}^{n+1}} \sum_{s=\nu_1+1}^{n_1+2} C_{\nu+s}^\nu C_{n_1+n+1-\nu-s}^{n-\nu}.$$

On peut donner une autre forme à cette expression en employant la méthode de la sommation par parties. On a, s étant la variable,

$$\sum C_{\nu+s}^\nu C_{a-s}^b = -C_{a-s+1}^{b+1} C_{\nu+s}^\nu + \sum C_{a-s}^{b+1} C_{\nu+s}^{\nu-1};$$

et en répétant cette opération ν fois,

$$\sum C_{\nu+s}^\nu C_{a-s}^b = -\sum_{i=0}^{\nu+1} C_{a+1-s}^{b+1+i} C_{\nu+s}^{\nu-i}.$$

Par l'utilisation de cette formule, on obtient

$$P = \frac{1}{C_{n_1+n+2}^{\nu_1+\nu+1}} \sum_{i=0}^{\nu+1} C_{n_1+n+1-\nu_1-\nu}^{n+1-\nu+i} C_{\nu_1+\nu+1}^{\nu-i}$$

ou encore

(18) $$P = \frac{1}{C_{n_1+n+2}^{\nu_1+\nu+1}} \sum_{i=0}^{\nu+1} C_{n_1+1}^{\nu_1+1+i} C_{n+1}^{\nu-i}.$$

C'est l'expression cherchée. Si ν n'est pas grand, elle se prête à un calcul rapide. Si ν_1 était plus petit que ν, on déterminerait la probabilité de l'événement contraire.

23. Formule approchée pour comparer deux probabilités. — Si ν et ν_1 sont grands tous les deux, la formule n'est pratiquement plus utilisable; alors il faut la transformer pour obtenir une formule approchée.

On peut considérer la grandeur P comme le rapport de deux probabilités *a priori*. Le numérateur sera la probabilité composée suivante : la probabilité de l'événement simple étant $p = \frac{1}{2}$, on demande la probabilité pour que, dans une série de $n + 1$ épreuves, $\nu - i$ cas soient favorables ; et que dans une seconde série de $n_1 + 1$ épreuves $\nu_1 + 1 + i$ cas soient favorables ; ensuite on fait la somme de ces probabilités de $i = 0$ à $i = \nu$ (inclus).

Le dénominateur sera la probabilité d'obtenir, en $n_1 + n + 2$ épreuves, $\nu_1 + \nu + 1$ cas favorables, la probabilité de l'événement simple étant toujours égale à $\frac{1}{2}$. Transformons ces probabilités par la formule de Laplace en remarquant que, pour avoir des résultats comparables à ceux de la formule (18), il faudra faire varier la variable continue dans l'intervalle de $i = -\frac{1}{2}$ à $i = \nu + \frac{1}{2}$.

Posons

$$h = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(n+1)}}, \qquad h_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(n_1+1)}},$$

alors, d'après le n° 2, la probabilité au numérateur sera

$$\frac{hh_1}{\pi} \exp.\left[-h^2\left(\nu - i - \frac{1}{h^2}\right)^2 - h_1^2\left(\nu_1 + 1 + i - \frac{1}{h_1^2}\right)^2\right] (^1).$$

Introduisons à la place de i la variable t

$$t = i\sqrt{h^2 + h_1^2} + \frac{h_1^2(\nu_1 + 1) - h^2\nu}{\sqrt{h^2 + h_1^2}}$$

et posons en outre

$$a = \frac{hh_1}{\sqrt{h^2 + h_1^2}}(\nu + \nu_1 + 1) - \frac{\sqrt{h^2 + h_1^2}}{hh_1};$$

---

(1) Le symbole exp. x désigne e^x.

la probabilité en question s'exprime sous la forme

$$\frac{hh_1}{\pi} e^{-t^2-a^2},$$

et en intégrant cette quantité de t_0 à t_1 on aura la probabilité du numérateur de P; t_0 correspond à $i = -\frac{1}{2}$ et t_1 à $i = \nu + \frac{1}{2}$:

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} t_0 &= \frac{(n+1)\left(\nu_1 + \frac{1}{2}\right) - (n_1+1)\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{(n+n_1+2)(n+1)(n_1+1)}} \sqrt{2}, \\ t_1 &= \frac{2(n+1)(\nu+\nu_1+1) + (n_1+n_2+2)}{\sqrt{2(n_1+n+2)(n+1)(n_1+1)}}. \end{aligned} \right.$$

La probabilité au numérateur sera donc

$$\frac{hh_1}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-} \quad dt.$$

La formule approchée de la probabilité au dénominateur est

$$\frac{2}{(n+n_1+2)\pi} \exp. \left\{ -\frac{2}{n+n_1+2} \left[\nu + \nu_1 + 1 - \frac{1}{2}(n+n_1+2) \right]^2 \right\};$$

mais cette quantité est précisément égale à $\frac{hh_1}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2}$, de manière que la formule approchée de la probabilité pour que la probabilité de l'événement simple de la première série soit plus grande que celle de la seconde série est

$$(20) \qquad \mathrm{P} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} \, dt.$$

Les valeurs de t_0 et t_1 sont données par les équations (19); on peut donc déterminer P d'une manière très simple, presque sans calculs.

Exemple de Laplace. — Comparaison des probabilités de la masculinité des naissances à Paris et à Londres :

Le nombre des naissances à Paris était $n = 770\,941$, le nombre des garçons 393 386. Le nombre des naissances à Londres était $n_1 = 1\,436\,589$ et le nombre des garçons $\nu_1 = 737\,629$.

On a ici $t_0 = 3,1927$; si ν et ν_1 sont grands, on peut prendre, sans erreur appréciable, $t_1 = \infty$.

La probabilité cherchée est

$$P = \frac{1}{2}\theta(t_1) - \frac{1}{2}\theta(t_0).$$

On a donc

$$P = 0,00000315;$$

c'est la probabilité pour que la probabilité de la masculinité des naissances soit plus grande à Paris qu'à Londres. Ce résultat s'accorde bien avec celui que Laplace a obtenu par des méthodes plus compliquées. Il a trouvé en effet 0,00000305.

Si $n = n_1$, les formules se simplifient et l'on a

$$t_0 = \frac{\nu_1 - \nu}{\sqrt{n+1}}, \qquad t_1 = \frac{\nu + \nu_1 + 2}{\sqrt{n+1}}.$$

Exemple. — Soient $n = 35$, $\nu = 18$ et $\nu_1 = 15$. On aura

$$t_0 = -\frac{1}{2}, \qquad t_1 = 5,833;$$

par suite,

$$\theta(t_0) = 0,5205, \qquad \theta(t_1) = 1 \qquad \text{et} \qquad P = \frac{1}{2} + 0,26025 = 0,76025.$$

En déterminant la valeur exacte par la formule (18) du n° **23**, on obtient

$$P = 0,76433.$$

L'erreur n'est environ que de 5 pour 1000.