BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches douées de deux directrices rectilignes

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 134-136
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__134_1>

Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches douées de deux directrices rectilignes; par M. Halphen.

(Séance du 21 février 1877.)

Une remarque aussi simple qu'ingénieuse, due à M. Picard [1], fournit un moyen de trouver les lignes asymptotiques des surfaces gauches douées de deux directrices rectilignes, et fait voir que, si la surface est algébrique, il en est de même de ses lignes asymptotiques. Je me propose d'établir ici le même résultat d'une autre manière.

Soit choisi un tétraèdre de référence dont deux arêtes opposées soient directrices de la surface : ce seront, par exemple, les arêtes $X_3 = 0$, $X_4 = 0$ d'une part, et $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ de l'autre. Soient x, y les points où ces deux directrices sont respectivement rencontrées par une même génératrice de la surface, z un point quelconque de cette génératrice. On a

$$z_1 = \lambda x_1, \quad z_2 = \lambda x_2, \quad z_3 = (1 - \lambda) y_3, \quad z_4 = (1 - \lambda) y_4.$$

La surface est définie par une relation entre $x_1 : x_2$ et $y_3 : y_4$. Une courbe tracée sur la surface est définie par une nouvelle relation

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXIV, p. 229.

entre ces quantités et λ. On exprimera que cette courbe est une asymptotique en écrivant que son plan osculateur passe constamment par la génératrice rectiligne. Il suffira d'écrire cette relation pour voir qu'elle se réduit à la suivante. Posant

$$\lambda x_2 d(\lambda x_1) - \lambda x_1 d(\lambda x_2) = u,$$
$$(1-\lambda) y_4 d[(1-\lambda) y_3] - (1-\lambda) y_3 d[(1-\lambda) y_4] = v,$$

on trouve

$$u\,dv - v\,du = 0,$$

d'où l'on conclut que u et v sont dans un rapport constant. Ces quantités ne contiennent qu'en apparence la différentielle de λ; en les transformant, on est ainsi conduit à la relation

$$\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^2 = C\left(\frac{x_2}{y_4}\right)\frac{d\dfrac{x_1}{x_2}}{d\dfrac{y_3}{y_4}}.$$

Si l'on y fait $y_4 = x_2 = 1$, on obtient cet énoncé :

Soient A, B *deux directrices rectilignes d'une surface gauche, x et y les distances de deux origines fixes prises sur ces droites aux points a, b où ces droites sont rencontrées par une même génératrice rectiligne. Soit enfin* C *une constante arbitraire. On prend sur ab le point m, tel que l'on ait*

$$\left(\frac{ma}{mb}\right)^2 = C\frac{dx}{dy}; \tag{1}$$

le point m décrit une ligne asymptotique de la surface.

A chaque valeur de C correspond une asymptotique qui rencontre chaque génératrice en deux points m, m', déterminés par l'équation (1). Ces deux points forment avec a, b une division harmonique.

Si la relation qui lie x, y est algébrique, les lignes asymptotiques sont également algébriques. Il est aisé de déterminer leur degré et leur classe. Soient p, q les degrés respectifs de x, y dans la relation qui lie ces variables, cas dans lequel la surface est du degré $p+q$. Il y a $2(q-1)p$ génératrices singulières le long de chacune desquelles le plan tangent est constant et passe par B.

D'après l'équation (1), chaque asymptotique rencontre une telle génératrice tangentiellement sur A. Par suite, chaque plan mené par A rencontre une asymptotique en $2p + 2(q - 1)p$ points. Donc *le degré des asymptotiques est égal au double du produit des ordres de multiplicité des directrices rectilignes, soit* $2pq$, *ou encore à la classe des sections planes de la surface.*

Pour trouver la classe, j'applique un théorème de M. Zeuthen, en considérant la correspondance qui existe entre les points des lignes asymptotiques et ceux d'une des directrices. Je trouve ainsi que *la classe des asymptotiques est égale à* $6(2pq - p - q)$, *c'est-à-dire égale à six fois l'excès de leur degré sur celui de la surface*. Pour la surface gauche du troisième degré, on trouve ainsi que les asymptotiques sont des courbes unicursales du quatrième degré, comme on le savait d'autre part.