BULLETIN DE LA S. M. F.

N. DELAUNAY

Sur l'intégration des équations différentielles et la théorie des systèmes articulés

Bulletin de la S. M. F., tome 54 (1926), p. 180-189
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1926__54__180_0>

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET LA THÉORIE DES SYSTÈMES ARTICULÉS;

PAR M. N. DELAUNAY.

1. La belle théorie de Sophus Lie pour l'intégration des équations différentielles nous montre que la connaissance d'un groupe des transformations d'un point, tel que $x_1 = f(x, y)$; $y_1 = F(x, y)$, nous permet de : 1° trouver l'équation différentielle « appartenant » à ce groupe; 2° intégrer cette équation, et 3° trouver un autre groupe des transformations qui « admette » cette équation. Ainsi : plus de tels groupes que l'on connaisse, plus on est avancé dans la théorie des équations différentielles.

Or, le progrès de la théorie des systèmes articulés doit être basé sur l'étude des transformations $x_1 = f(x, y), y_1 = F(x, y)$, comme nous allons le montrer. Donc ces deux théories, des équations différentielles et des systèmes articulés, peuvent être bien utiles l'une à l'autre. C'est ce que nous tâcherons de montrer dans la présente Note sur quelques exemples.

La théorie des systèmes articulés a été dernièrement un peu abandonnée, justement parce qu'on a imaginé qu'on pourrait inventer des mécanismes nouveaux en encombrant des quadrilatères articulés l'un sur l'autre. L'essentiel pour la théorie n'est pas un mécanisme qui n'a qu'un degré de liberté en ayant tout un support, ou au moins une tige fixe, mais un système articulé qui peut ne pas avoir de points fixes; comme, par exemple, un pantographe isoscèle, qui donne le milieu de la droite joignant les deux points, qu'ils soient fixes ou non.

Par exemple le pantographe est un mécanisme lorsqu'il transmet la rotation d'une tige en rotation d'une autre. Dans ce cas-là c'est un système trop spécial. Mais lorsque le pantographe n'a qu'un seul point fixe, placé en origine des coordonnées, il peut augmenter ou diminuer toutes les figures données, parce qu'alors il donne la transformation de similitude $r = k\rho$, ce qui revient à la transformation $x_1 = kx$; $y_1 = ky$.

L'inverseur de Peaucellier est un mécanisme très spécial lorsqu'il sert seulement à tracer une droite. Mais l'essentiel dans l'inverseur c'est qu'il donne l'inversion $r = \frac{\mu^2}{\rho}$, ce qui revient à la transformation $x_1 = \frac{\mu^2 x}{x^2 + y^2}$; $y_1 = \frac{\mu^2 y}{x^2 + y^2}$. Cette propriété permet à l'inverseur non seulement de tracer des droites mais aussi de transmettre les rotations et de donner les inversions de toutes les courbes.

La transformation a joué un grand rôle chez Galois pour la théorie des équations algébriques et chez Lie pour la théorie des équations différentielles. Et au lieu des systèmes articulés il convient d'étudier *les transformateurs articulées* qui peuvent avoir un symbiose plus parfait avec les mathématiques modernes.

2. Les transformations de mon hyperbolographe (¹). — L'inverseur négatif, qui donne la transformation $r = -\frac{\mu^2}{\rho}$, est composé d'un losange ABCD. Les sommets opposés B et D portent les tiges égales OB et OD plus courtes que les côtés du losange. Il m'a paru intéressant de conduire les sommets B et D sur la même droite MN que je prends pour l'axe des y des coordonnées cartésiennes. Alors entre les coordonnées des points $A(x, y)$ et $O(x_1, y_1)$ existe une relation

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1^2 = x^2 - (m^2 - n^2), \\ y_1 = y \end{cases}$$

où $m = AB = BC = CD = DA$; $n = OB = OD$. Lorsque l'on conduit le point O le long de la droite $y_1 = kx_1$, le point A décrit une branche de l'hyperbole $\frac{x^2}{m^2 - n^2} - \frac{y^2}{k^2(m^2 - n^2)} = 1$, tandis que le point C, étant symétrique au point A par rapport à la droite MN, décrit l'autre branche de la même hyperbole, et la droite $y_1 = kx_1$ est l'asymptote de cette hyperbole. On voit par cela même que les relations (1) transforment les droites du plan en hyperboles.

(¹) N. Delaunay, *Sur quelques nouveaux mécanismes* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. XIX, novembre 1895).

Comme exception les parallèles aux axes des coordonnées sont transformées en droites. Mais on peut envisager ces droites comme hyperboles dégénérées.

3. Les relations (1) donnent un groupe des transformations. — En posant $m^2 - n^2 = \varepsilon$ on donne aux relations (1) la forme

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 = \sqrt{x^2 - \varepsilon}, \\ y_1 = y. \end{cases}$$

Les formules $x_{11} = \sqrt{x_1^2 - \varepsilon} = \sqrt{x^2 - 2\varepsilon}$ font voir que la transformation (2) présente : un groupe avec le paramètre ε, une transformation identique pour $\varepsilon = 0$ et une transformation inverse pour le paramètre $\bar{\varepsilon} = -\varepsilon$.

4. La transformation infinitésimale correspondante au groupe (2). — Pour déduire du groupe (2) la transformation *infinitésimale* qui lui correspond, suivons la théorie de Lie. On pose $x' = \sqrt{x_1^2 - \bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon} = \sqrt{x^2 - \varepsilon - \bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon} = f(\bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon)$. Alors la formule de Taylor donne :

$$x' = f(\bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon) = f(\bar{\varepsilon}) + \frac{\partial f(\bar{\varepsilon})}{\delta\bar{\varepsilon}}\delta\varepsilon + \ldots = \sqrt{x^2 - \varepsilon - \bar{\varepsilon}} - \frac{\delta\varepsilon}{2\sqrt{x^2 - \varepsilon - \bar{\varepsilon}}} + \ldots$$

Cette formule devient

$$(3)\qquad x' = x - \frac{\delta\varepsilon}{2x} + \ldots.$$

Les formules (2) et (3) donnent la transformation infinitésimale

$$(4)\qquad \xi = -\frac{1}{2x}; \qquad \eta = 0$$

avec le symbole

$$(5)\qquad \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y},$$

qui dans le cas actuel devient

$$(6)\qquad -\frac{1}{2x}\frac{\partial f}{\partial x},$$

à cause des relations (4).

5. La construction de l'équation différentielle du premier ordre appartenant au groupe (2). — Suivant la théorie de Lie on intègre le système.

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = d\beta. \tag{7}$$

Suivant (4), dans le cas actuel le système (7) devient

$$-2x\,dx = \frac{dy}{0} = d\beta \tag{8}$$

qui donne les intégrales

$$\left\{\begin{aligned} y &= \alpha = \text{const.} \\ -x^2 &= \beta = \text{const.} \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Suivant la théorie de Lie, l'équation différentielle cherchée est alors

$$\frac{\dfrac{\partial\beta}{\partial x} + \dfrac{\partial\beta}{\partial y}y'}{\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} + \dfrac{\partial\alpha}{\partial y}y'} = v = F(\beta). \tag{10}$$

Dans cette formule $y' = \frac{dy}{dx}$. Dans le cas actuel on a

$$\frac{\dfrac{\partial\beta}{\partial x} + \dfrac{\partial\beta}{\partial y}y'}{\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} + \dfrac{\partial\alpha}{\partial y}y'} = -\frac{2x}{y'} = F(-x^2) = v. \tag{11}$$

On peut présenter (11) sous la forme

$$F(-x^2)\,dy - (-2x)\,dx = 0 \tag{12}$$

comme cas particulier de la forme générale

$$X\,dy - Y\,dx = 0 \tag{13}$$

des équations différentielles du premier ordre. Selon la théorie de Lie le facteur intégrant de l'équation (12) est

$$\frac{1}{X\eta - Y\xi}. \tag{14}$$

Ainsi la connaissance de ξ et de η, c'est-à-dire du groupe initial, donne la possibilité d'intégrer l'équation $X\,dy - Y\,dx = 0$

déduite de ce groupe. Dans le cas actuel le groupe initial est donné par les relations (2) qui ont donné $\xi = -\frac{1}{2x}$; $\eta = 0$. On voit par (12) qu'ici $X = F(-x^2)$; $Y = -2x$. Donc, dans le cas actuel le facteur intégrant (14) est égal à l'unité, et l'intégrale de l'équation (12) est évident:

$$y = \int \frac{dx^2}{F(-x^2)}. \tag{15}$$

6. L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU SECOND ORDRE APPARTENANT AU GROUPE (2). — Nous avons trouvé dans les formules (9) et (11)

$$\alpha = y; \qquad v = -\frac{2x}{y'}.$$

La théorie de Lie montre que l'équation du second ordre appartenant au groupe $\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$ est

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} y' + \frac{\partial v}{\partial y'} y''}{\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} y'} = \varphi(\alpha, v). \tag{16}$$

Dans le cas actuel on a

$$\frac{-\frac{2}{y'} + \frac{2x}{y'^2} y''}{y'} = \varphi\left[y; \left(-\frac{2x}{y'}\right)\right], \tag{17}$$

ce qui revient à

$$2xy'' - 2y' = y'^3 \varphi\left[y; \left(-\frac{2x}{y_1}\right)\right], \tag{18}$$

ou enfin à

$$2x\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = \varphi\left[y; \left(-\frac{2x}{y'}\right)\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

La formule (16) peut être présentée sous la forme

$$\frac{dv}{d\alpha} = (\alpha, v). \tag{19}$$

Lorsque l'on trouve l'intégrale de l'équation (19) sous la forme

$$v = \varphi(\alpha, c); \qquad c = \text{const.},$$

on peut envisager cette intégrale comme une équation différentielle du premier ordre, parce que v contient y'. Cette équation, selon la théorie de Lie, appartient au groupe initial, ainsi que son facteur intégrant se présente sous la forme que nous avons vue dans le paragraphe 5; seulement avec d'autres X et Y appropriés à l'équation $v = \varphi(\alpha, c)$.

Comme exemple posons $\varphi(\alpha, v) = \alpha = y$. Alors (17) devient

$$2xy'' - 2y' = yy'^3, \tag{20}$$

et (19) devient

$$\frac{dv}{d\alpha} = \alpha. \tag{21}$$

L'intégrale de cette équation est évidemment $\alpha^2 = 2v$. A cause des relations (9) et (11) elle devient $y^2 = -\frac{4x}{y'}$, ce qui donne

$$y^2\, dy + 4x\, dx = 0;$$

et enfin $y^3 = -6x^2$. Il est facile de vérifier qu'avec cette valeur de y l'équation (20) devient une identité.

7. La question inverse a celle du paragraphe 4. — Pour trouver le groupe fini (2), lorsque la transformation infinitésimale est donnée par ξ et η, il faut, selon la théorie de Lie, intégrer le système $\frac{dx_1}{\xi} = \frac{dy_1}{\eta} = d\varepsilon$. Dans le cas actuel ce système devient

$$-2x\, dx = \frac{dy}{0} = d\varepsilon,$$

dont les intégrales sont

$$\left\{\begin{aligned} y_1 &= \alpha = \text{const.}, \\ -x_1^2 - \varepsilon &= \beta = \text{const.} \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Pour $\varepsilon = 0$ on a

$$\left\{\begin{aligned} y &= \alpha = \text{const.}, \\ -x^2 &= \beta = \text{const.} \end{aligned}\right. \tag{23}$$

En éliminant les constantes α, β entre les équations (22) et (23) on a

$$\left\{\begin{aligned} y_1 &= y, \\ -x_1^2 - \varepsilon &= -x^2. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Cela donne

$$(25) \qquad \begin{cases} x_1 = \sqrt{x^2 - \varepsilon}, \\ y_1 = y. \end{cases}$$

De la transformation infinitésimale nous remontons au groupe fini (2).

8. En présence du groupe donné, trouver un autre groupe admettant la même équation différentielle $X dy - Y dx = 0$. — Soient

$$(26) \qquad U_1(f) = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

le symbole du groupe initial; $X\,dy - Y\,dx$ l'équation différentielle qu'il admet, et ω l'intégrale de cette équation. Alors, selon la théorie de Lie, le symbole du nouveau groupe cherché est

$$(27) \qquad U_2(f) = \Omega(\omega).U_1(f) + \rho(x, y).A(f).$$

Dans cette formule, $\Omega(\omega)$ est une fonction quelconque de ω ; $U_1(f)$ est donné par (26); $A(f)$ est donné par la formule

$$(28) \qquad A(f) = X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y},$$

$\rho(x, y)$ est une fonction quelconque de x et y.

9. Exemple pour le paragraphe 8. — Pour la $F(-x^2)$ de l'équation (12) prenons $F(-x^2) = a = \text{const}$. Alors l'équation (12) devient

$$(29) \qquad a\,dy + 2x\,dx = 0.$$

L'intégrale de cette équation est $ay + x^2 = \omega$. Le symbole du groupe (2) est

$$U_1(f) = -\frac{1}{2x} \frac{\partial f}{\partial x},$$

suivant la formule (6),

$$A(f) = a \frac{\partial f}{\partial x} - 2x \frac{\partial f}{\partial y},$$

par la comparaison avec (29).

La formule (27) prend la forme

$$(30)\qquad U_2(f) = \Omega(ay+x^2)\left(-\frac{1}{2x}\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \rho(x, y)\left[a\frac{\partial f}{\partial x} - 2x\frac{\partial f}{\partial y}\right]\cdots$$

En la rangeant suivant les dérivées partielles, on obtient

$$(31)\qquad U_2(f) = \left[a\,\rho(x, y) - \frac{1}{2x}\,\Omega(ay+x^2)\right]\frac{\partial f}{\partial x} - 2x\,\rho(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Bornons-nous à poser $\Omega\,(ay+x^2) = ay + x^2$. Alors $U_2(f)$ se réduit à

$$U_2(f) = \left[a\,\rho(x, y) - \frac{ay}{2x} - \frac{x}{2}\right]\frac{\partial f}{\partial x} - 2x\,\rho(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Bornons-nous au cas

$$a\,\rho(x, y) = \frac{ay}{2x}.$$

Alors

$$(32)\qquad U_2(f) = -\frac{x}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Donc le symbole du groupe cherché devient

$$(33)\qquad \xi_1\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial f}{\partial y};\qquad \xi_1 = -\frac{x}{2};\qquad \eta_1 = -y.$$

Nous avons trouvé le symbole de la transformation infinitésimale (33). Pour remonter au groupe fini on n'a qu'à suivre les indications du paragraphe 7. Avec les ξ_1 et η_1 de la formule (33) le systéme $\frac{dx_1}{\xi} = \frac{dy_1}{\eta} = d\varepsilon$ devient $-\frac{2\,dx_1}{x_1} = -\frac{dy}{y_1} = d\varepsilon$, dont les intégrales sont

$$(34)\qquad \begin{cases} \log x_1^2 + \varepsilon = \alpha = \text{const.},\\ y_1 - x_1^2 \;= \beta = \text{const.}\end{cases}$$

Pour $\varepsilon = 0$ on a

$$(35)\qquad \begin{cases} \log x^2 \;= \alpha,\\ y - x^2 = \beta.\end{cases}$$

En suivant les indications du paragraphe 7 il faut éliminer les constantes α et β entre les équations (34) et (35). On obtient

$$(36)\qquad \begin{cases} \log x_1^2 + \varepsilon = \log x^2,\\ y_1 - x_1^2 \;= y - x^2.\end{cases}$$

Les équations (36) donnent

$$x_1^2 = e^{\log x^2 - \varepsilon} = e^{\log x^2}\, e^{-\varepsilon} = x^2\, e^{-\varepsilon},$$
$$y_1 - x^2\, e^{-\varepsilon} \;= y - x^2.$$

Après quelques calculs faciles on trouve

$$(37)\qquad \begin{cases} x_1 = x\, e^{-\frac{\varepsilon}{2}}, \\ y_1 = y - x^2(1 - e^{-\varepsilon}). \end{cases}$$

Ainsi la théorie de Lie permet de trouver avec la formule (27) beaucoup de groupes admettant la même équation $X\,dy - Y\,dx = 0$ que le groupe initial. Le groupe (37) transforme la droite

$$y_1 = \delta = \text{const.},$$

en une parabole $y - x^2(1 - e^{-\varepsilon}) = \delta$. Et c'est assez suggestif, pour la théorie des systèmes articulés, qu'en partant de *hyperbolographe* nous avons trouvé une transformation (37) qui peut servir à la construction d'un *parabolographe*.

10. Le groupe transformant chaque droite du plan en une conique. — Maintenant nous allons montrer comment l'étude des transformateurs articulés peut conduire aux groupes intéressants pour la théorie des équations différentielles.

Songeant à la construction d'un parabolographe, je me suis rencontré avec le groupe

$$(38)\qquad \varphi_1 = \varphi; \qquad r = \frac{\rho}{1 + \varepsilon\rho}$$

en coordonnées polaires. Cette transformation (38) est équivalente à la transformation

$$(39)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{x}{1 + \varepsilon\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ y_1 = \dfrac{y}{1 + \varepsilon\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{cases}$$

en coordonnées cartésiennes.

Lorsque le point (x_1, y_1) parcourt la droite $\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} = 1$, le point (x, y) parcourt la courbe

$$\frac{1}{1 + \varepsilon\sqrt{x^2 + y^2}}\left[\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right] = 1,$$

ou

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)^2=\varepsilon^2x^2+\varepsilon^2y^2. \tag{40}$$

C'est une conique qui dégénère en des droites lorsque son discriminant $a^6\,b^6$ devient nul, ce qui peut arriver seulement lorsque la droite parcourue par le point (x_1, y_1) passe par l'origine. Donc la transformation (39) transforme les droites du plan en coniques, qui dégénèrent en droites, lorsque la droite transformée passe par l'origine.

On pourrait le voir aussi par la théorie des systèmes articulés. La droite peut être transformée en un arc de cercle avec un inverseur. On peut profiter de cet arc pour la construction d'un limaçon de Pascal à l'aide d'un protacteur, et l'on peut transformer le limaçon en une conique à l'aide d'un second inverseur.

Le groupe (39) donne l'équation $X\,dy - Y\,dx = 0$ en forme

$$\left[\frac{1}{x}(x^2+y^2)\,F\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+y\right]dy - \left[\frac{y}{x^2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-x\right]dx=0. \tag{41}$$

Pour le groupe (39) on a

$$\begin{cases} \xi=-x\sqrt{x^2+y^2}, \\ \eta=-y\sqrt{x^2+y^2}, \end{cases} \tag{42}$$

et le facteur intégrant est dans ce cas

$$\frac{1}{X\eta-Y\xi}=\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En posant $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=z$, on obtient l'intégration de l'équation (41) au moyen d'une seule quadrature en forme :

$$\frac{y}{x}-\int\frac{dz}{F(z)}=\text{const.}$$

Pourrait cette Note servir à la résurrection d'intérêt pour la théorie des transformateurs articulés ou, au moins, comme une très courte introduction à la belle théorie de Lie qu'on peut trouver clairement exposée dans le livre de M. Scheffers : *Sophus Lie Vorlesunger über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*.