BULLETIN DE LA S. M. F.

R. NEVANLINNA

Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes dans un cercle

Bulletin de la S. M. F., tome 55 (1927), p. 92-101
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1927__55__92_0>

SUR LES VALEURS EXCEPTIONNELLES DES FONCTIONS MÉROMORPHES DANS UN CERCLE ;

PAR M. ROLF NEVANLINNA.

1. Soit $f(x)$ une fonction analytique de la variable complexe x, méromorphe dans le cercle $|x| < \mathrm{R}$. Désignons par $n(r;\, z)$ le nombre des racines de l'équation $f(x) = z$ dans ce cercle et posons (¹)

$$m(r;\, z) = \frac{1}{2\pi}\int^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi}) - z}\right| d\varphi,$$

$$\mathrm{N}(r;\, z) = \int_{r_0}^{r} \frac{n(t;\, z)}{t}\, dt \qquad (0 < r_0 < r < \mathrm{R})$$

lorsque z est fini ; si $z = \infty$ on remplacera la fonction $f - z$ par $\frac{1}{f}$. Dans un travail récemment paru j'ai démontré le théorème suivant (²) :

A la fonction $f(x)$ correspond une fonction $\mathrm{T}(r)$ de r jouissant des propriétés suivantes :

1° $\mathrm{T}(r)$ *est une fonction croissante et convexe de* $\log r$ *dans l'intervalle* $0 \leqq r < \mathrm{R}$.

2° *On a pour toute valeur z, finie ou infinie,*

$$m(r;\, z) + \mathrm{N}(r;\, z) = \mathrm{T}(r) + \mathrm{O}(1) \quad (^3). \tag{I}$$

Les propriétés asymptotiques de la fonction caractéristique $\mathrm{T}(r)$ déterminent l'allure de la fonction $f(x)$ dans le voisinage de la circonférence $|x| = \mathrm{R}$. Ainsi, par exemple, la classe des fonctions pour lesquelles $\mathrm{T}(x)$ tend pour $r \to \mathrm{R}$ vers une limite finie con-

---

(¹) Le nombre $\overset{+}{\log} a$ est égal à $\log a$ ou à zéro suivant que $a \geqq 1$ ou $0 \leqq a < 1$.

(²) *Zur Theorie der meromorphen Funktionen* (*Acta mathematica*, t. 46, 1925).

(³) On désigne avec M. Landau par $\mathrm{O}(\varphi(r))$ une fonction $\psi(r)$ telle que le quotient $\left|\frac{\psi}{\varphi}\right|$ reste borné pour $r \to \mathrm{R}$.

tient toutes les fonctions analytiques dont chacune est quotient de deux fonctions bornées dans le cercle $|x| < R$ (1). Une autre classe remarquable est caractérisée par l'inégalité

$$\overline{\lim_{r=R}} \frac{T(r)}{\log \frac{1}{R-r}} = \infty ;$$

on sait qu'une fonction $f(x)$ vérifiant cette condition prend dans le cercle $|x| < R$ toute valeur, sauf deux valeurs exceptionnelles au plus. C'est une conséquence immédiate d'une inégalité générale que j'ai donnée dans le travail mentionné ci-dessus (*voir* p. 84) et qui renferme, comme cas particulier, la relation

$$\text{(II)} \qquad T(r) = O\left(\log \frac{1}{R-r}\right)$$

valable pour une fonction $f(x)$ admettant au moins *trois* valeurs exceptionnelles qu'elle ne prend pas dans le cercle $|x| < R$. On connaît, d'autre part, des fonctions analytiques qui, dans ce cercle, ont trois valeurs exceptionnelles et pour lesquelles la limite

$$\underline{\lim_{r=R}} \frac{T(r)}{\log \frac{1}{R-r}}$$

est finie (*loc. cit.*, p. 87).

Nous ferons ici une étude approfondie d'une fonction analytique ayant, dans le cercle $|x| < R$, trois ou plusieurs valeurs exceptionnelles. Nous emploierons à cet effet une méthode dont M. Frithiof Nevanlinna (2) s'est servi récemment pour étudier la distribution des valeurs d'une fonction analytique au voisinage d'un point singulier et qui consiste, essentiellement, dans l'emploi de certaines solutions de l'équation différentielle

$$\Delta u = e^{2u}.$$

Nous démontrerons que, le nombre des valeurs exceptionnelles

(1) *Cf.* mon article *Über eine Klasse meromorpher Funktionen* (*Math. Annalen,* Bd 92, p. 145-154, 1924).

(2) F. Nevanlinna, *Über die Werteverteilung einer analytischen Funktion in der Umgebung einer isolierten wesentlich singulären Stelle* (Den VI skandinaviske Matematikerkongres, Kopenhague 1925).

étant $q \geqq 3$, la fonction caractéristique $T(r)$ vérifie l'inégalité

$$(\text{II}') \qquad \overline{\lim_{r=R}} \frac{T(r)}{\log \frac{1}{R-r}} \leqq \frac{1}{q-2};$$

on verra d'ailleurs des exemples que la limite $\frac{1}{q-2}$ est exacte. Si, en particulier, la fonction a *une infinité* de valeurs exceptionnelles, on en déduit la relation

$$\lim_{r=R} \frac{T(r)}{\log \frac{1}{R-r}} = 0.$$

L'inégalité (II′) est un corollaire d'une relation plus générale (*voir* n° 4) qui renferme, comme cas particulier, le théorème connu de Picard-Landau.

2. M. Picard [1] et Poincaré [2] ont montré qu'il existe une solution réelle u de l'équation différentielle

$$(1) \qquad \Delta u = e^{2u},$$

uniquement déterminée par les conditions suivantes :

1° La fonction $u = u(z)$ est uniforme et continue pour toute valeur de la variable complexe z, à l'exception de $q(\geqq 2)$ valeurs finies $z = z_\nu (\nu = 1, \ldots, q)$ et du point à l'infini.

2° On a pour $z = z_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, q)$

$$u(z) = \log \left| \frac{1}{z - z_\nu} \right| - \log \log \left| \frac{1}{z - z_\nu} \right| + u_\nu(z) \qquad [u_\nu(z_\nu) \text{ fini}]$$

et pour $z = \infty$

$$u(z) = -\log |z| - \log \log |z| + u_\infty(z) \qquad [u_\infty(\infty) \text{ fini}].$$

Considérons la surface S de Riemann à une infinité de feuillets superposés au plan des z et admettant les points z_ν et ∞ pour points de ramification d'ordre infini. A la solution $u(z)$ de l'équation (1) correspond une fonction analytique et polymorphe, $\zeta = \zeta(z)$ qui fournit la représentation conforme de l'intérieur de

---

(1) E. Picard, *De l'équation $\Delta u = ue^n$ sur une surface de Riemann fermée* (*Journ. de Math.*, 1893, p. 273-291).

(2) H. Poincaré, *Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$* (*Journ. de Math.*, 1898, p. 137-230).

la surface S, limitée par les points z_ν et ∞, à l'intérieur d'un cercle C du plan des ζ; $\zeta(z)$ est déterminée à une transformation homographique près. Si C est le cercle $|\zeta| \leqq \rho$, les expressions u et ζ sont liées par la relation

$$(1)' \qquad u = \log \frac{2\rho\,|\zeta'|}{\rho^2 - |\zeta|^2},$$

où ζ' désigne la dérivée $\dfrac{d\zeta}{dz}$.

La fonction inverse de $\zeta(z)$

$$z = \omega(\zeta)$$

est une fonction automorphe admettant C pour cercle fondamental. Dans le cas $q = 2$, $\omega(\zeta)$ est la fonction modulaire.

3. Soit

$$(2) \qquad f(x) = a_0 + a_k x^k + \ldots \qquad (k \geqq 1;\ a_k \neq 0)$$

une fonction analytique de x, holomorphe dans le cercle $|x| < \mathrm{R}$. Supposons, en outre, qu'il existe $q \geqq 2$ valeurs finies $z_1, \ldots, z_q$ telles que $f(x)$ soit différent de $z_\nu (\nu = 1, \ldots, q)$ pour $|x| < \mathrm{R}$.

Soit $u(z)$ la solution de l'équation (1) admettant les points singuliers $z = z_\nu$ et $z = \infty$ et considérons l'expression

$$\overline{u}(x) = u[f(x)].$$

La fonction $\overline{u}(x)$ est *uniforme* et *continue* pour $|x| < \mathrm{R}$. Un calcul facile montre que

$$\Delta_x \overline{u}(x) = |f'(x)|^2 \Delta_z u(z) \qquad [z = f(x)].$$

On a donc, en observant l'équation (1),

$$(3) \qquad \Delta\overline{u}(x) = |f'(x)|^2 e^{2\overline{u}(x)}.$$

Posons $x = re^{i\varphi}$ et intégrons l'expression de Laplace

$$\Delta\overline{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\overline{u}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\varphi^2}$$

par rapport à φ entre les limites 0 et 2π. Désignant par $\mu(r)$ la valeur moyenne

$$(4) \qquad \mu(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{u}(re^{i\varphi})\,d\varphi,$$

on trouve que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{u}(re^{i\varphi})\,d\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\mu(r)}{dr}\right).$$

Il s'ensuit, à cause de (3), que l'inégalité

$$(5) \qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\mu}{dr}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f'(re^{i\varphi})|^2 e^{2\bar{u}(re^{i\varphi})}\,d\varphi$$

subsiste pour chaque valeur r de l'intervalle $0 \leqq r < R$.

On sait que, $\lambda(t)$ étant une fonction positive et continue dans l'intervalle $0 \leqq r \leqq T$,

$$(5)' \qquad \frac{1}{T}\int_0^T \log\lambda(t)\,dt \leqq \log\left(\frac{1}{T}\int_0^T \lambda(t)\,dt\right),$$

où l'égalité se présente seulement si $\lambda(t)$ est constant pour $0 \leqq t \leqq T$ (¹). En appliquant cette formule à l'intégrale (5), on trouve la relation

$$(5)'' \qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\mu}{dr}\right) \geqq e^{2\mu(r)+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\log|f'(re^{i\varphi})|\,d\varphi}.$$

Pour calculer la valeur moyenne de $\log|f'|$, figurant dans l'exposant, nous allons employer la formule connue de Jensen. En tenant compte du développement (2) on aura

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f'(re^{i\varphi})|\,d\varphi = (k-1)\log r + \log|ka_k| + \int_0^r \frac{n(\tau)}{\tau}\,d\tau,$$

$n(r)$ désignant le nombre des racines différentes de zéro de $f'(x)$ dans le cercle $|x| < r$. Il en résulte que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f'(re^{i\varphi})|\,d\varphi \geqq (k-1)\log r + \log|ka_k|,$$

le signe d'égalité étant valable seulement si $n(\tau) = 0$ pour $0 < \tau < r$. En substituant cette expression dans la relation (5)″ on obtient le résultat suivant où, pour simplifier l'écriture, nous avons introduit la nouvelle variable $t = \log r$:

La fonction

$$(6) \qquad \nu(t) = \mu(e^t) + kt + \log|ka_k|$$

(¹) *Cf.* F. Nevanlinna, *loc. cit.*

vérifie la relation

$$(6)' \qquad \nu''(t) \geqq e^{2\nu(t)}$$

pour toute valeur $t < \log R$.

4. Intercalons ici quelques remarques sur les expressions μ et ν que nous aurons à utiliser pour l'intégration de l'inégalité différentielle (6'). La dérivée $\frac{d^2\mu}{dt^2} = \frac{d^2\nu}{dt^2}$ étant d'après (6') positive on conclut que les expressions $\frac{d\mu}{dt}$ et $\frac{d\nu}{dt}$ sont *croissantes* dans l'intervalle $-\infty < t < \log R$; les fonctions μ et ν sont donc *convexes* pour les mêmes valeurs de t. Or $\mu(e^t)$ tend, en vertu de (2), pour $t \to -\infty$, vers la limite *finie*

$$(7) \qquad \mu(0) = \bar{u}(0) = u(a_0).$$

Il s'ensuit, à cause de la convexité de la fonction μ, que

$$\lim_{t=-\infty} \frac{d\mu}{dt} = 0,$$

ou, d'après (6),

$$(7)' \qquad \lim_{t=-\infty} \frac{d\nu}{dt} = k.$$

Multiplions l'inégalité (6)' par la fonction positive $2\nu'(t)$ et intégrons entre les limites t_0 et t $(-\infty < t_0 < t < \log R)$. Nous trouvons

$$(\nu'(t))^2 - (\nu'(t_0))^2 \geqq e^{2\nu(t)} - e^{2\nu(t_0)}.$$

Faisons ici t_0 tendre vers $-\infty$; à cause de (7)', (6) et (7) on aura $\nu'(t_0) \to k$ et $\nu(t_0) \to -\infty$ pour $t \to -\infty$. Il s'ensuit que

$$(\nu'(t))^2 - k^2 \geqq e^{\nu(t)},$$

d'où

$$\frac{dt}{d\nu} \leqq \frac{1}{e^{2\nu} + k^2}.$$

L'intégration entre les limites t et t_1 $(-\infty < t < t_1 < \log R)$ nous donne

$$t_1 - t \leqq \frac{1}{2k} \log \frac{\sqrt{e^{2\nu} + k^2} + k}{\sqrt{e^{2\nu} + k^2} - k} - \frac{1}{2k} \log \frac{\sqrt{e^{2\nu_1} + k^2} + k}{\sqrt{e^{2\nu_1} + k^2} - k},$$

où $\nu = \nu(t)$ et $\nu_1 = \nu(t_1)$. En observant que le dernier terme est *positif*, on aura, pour $t_1 \to \log R$, $t = \log r\, (0 \leqq r < R)$,

$$\log \frac{R}{r} \leqq \frac{1}{2k} \log \frac{\sqrt{e^{2\nu} + k^2} + k}{\sqrt{e^{2\nu} + k^2} - k}$$

ou

$$\nu(\log r) \leqq \log \frac{2 k r^k R^k}{R^{2k} - r^{2k}},$$

$\nu(\log r)$ étant l'expression définie par (6). Nous sommes ainsi conduits au théorème suivant :

Soit $f(x) = a_0 + a_k x^k + \ldots\, (a_k \neq 0)$ *une fonction analytique, holomorphe et différente de* $z_\nu\, (\nu = 1, \ldots, q;\ q \geqq 2)$ *pour* $|x| < R$. *Posons*

$$\mu(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(f(re^{\varphi i}))\, d\varphi,$$

où u *signifie la solution de l'équation différentielle*

$$\Delta u = e^{2u}$$

envisagée au n° 1.

Dans ces conditions, l'inégalité

$$\mu(r) \leqq \log \frac{2R^k}{|a_k|(R^{2k} - r^{2k})} \tag{8}$$

subsiste dans l'intervalle $0 \leqq r < R$. *On aura, en particulier, pour* $r = 0$

$$R^k \leqq \frac{2}{|a_k|} e^{-u(a_0)}. \tag{8'}$$

L'inégalité $(8)'$ contient, comme cas particulier $(q = 2)$, le théorème de Picard-Landau sous la forme précise, donnée à ce théorème par M. Carathéodory.

5. On voit aisément que les limites (8) et (8′) sont exactes. Soit $z = z(\zeta)$ une des fonctions fuchsiennes liées à la fonction $u(z)$ par la relation $(1)'$ et admettant le cercle $|\zeta| \leqq R^k$ pour cercle fondamental. La fonction

$$f(x) = z(x^k) = a_0 + a_k x^k + \ldots$$

sera holomorphe et différente de $z_\nu\, (\nu = 1, \ldots, q)$ pour $|x| < R$. Je dis que, pour cette fonction $f(x)$, l'égalité se présente dans les relations (8) et $(8)'$.

En effet, la formule (1)′ nous donne d'abord pour

$$|x| = r = |\zeta|^{\frac{1}{k}} < \mathrm{R},$$
$$u(f(x)) = \log \frac{2\mathrm{R}^k}{\mathrm{R}^{2k} - r^{2k}} - \log \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(f(re^{i\varphi}))\, d\varphi = \log \frac{2\mathrm{R}^k}{\mathrm{R}^{2k} - r^{2k}} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{dz}{d\xi} \right| d\varphi.$$

Remarquons que la dérivée $\frac{dz}{d\xi}$ ne s'annule pas dans le cercle $|\zeta| < \mathrm{R}^k$. La fonction $\log \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = \log \left| \frac{f'(x)}{k\, x^{k-1}} \right|$ étant une fonction harmonique pour $|x| = \mathrm{R}$, on trouve, en appliquant la formule de Gauss, que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{dz}{d\xi} \right| d\varphi = \log \left| \frac{dz}{d\xi} \right|_{x=0} = \log |a_k|.$$

On aura donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(f(re^{i\varphi}))\, d\varphi = \log \frac{2\mathrm{R}^k}{|a_k|(\mathrm{R}^{2k} - r^{2k})}$$

et, en particulier, pour $r = 0$,

$$\mathrm{R}^k = \frac{1}{|a_k|}\, e^{-u(a_0)}.$$

6. Pour établir les inégalités annoncées à la fin du n° **2**, nous allons, avec M. F. Nevanlinna, évaluer la valeur moyenne $\mu(r)$ en utilisant les expressions $m(r;\, z_\nu)\,(\nu = 1, \ldots, q)$ définies au début du n° 1. Choisissons, à cet effet, un nombre $\varkappa \leqq \frac{1}{e}$ tel que les aires circulaires définies par les inégalités

$$|z - z_\nu| \leqq \varkappa \; (\nu = 1, \ldots, q),$$

$|z| \geqq \frac{1}{\varkappa}$ n'empiètent pas l'une sur l'autre. Dans la portion complémentaire du plan des z la fonction restera bornée, et l'on aura donc

$$(9) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(f(re^{i\varphi}))\, d\varphi = \sum_1^q \frac{1}{2\pi} \int_{|f - z_\nu| \leqq \varkappa} u(f(re^{i\varphi}))\, d\varphi$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{|f| \geqq \frac{1}{\varkappa}} u(f(re^{i\varphi}))\, d\varphi + \mathrm{O}(1).$$

En tenant compte des développements donnés au n° 2 on obtient pour $|f - z_\nu| \leqq \varkappa$

$$u(f(x)) = \log\left|\frac{1}{f(x)-z_\nu}\right| - \log\log\left|\frac{1}{f(x)-z_\nu}\right| + O(1).$$

Si nous observons que (*cf.* n° 1)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|f-z_\nu|\leqq\varkappa} \log\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi})-z_\nu}\right| d\varphi = m(r;\, z_\nu) + O(1)$$

et que, d'après la formule (5)′,

$$0 \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{|f-z_\nu|\leqq\varkappa} \log\log\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi})-z_\nu}\right| d\varphi$$
$$\leqq \log\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\nu|\leqq\varkappa} \log\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi})-z_\nu}\right| d\varphi + 1\right\},$$

nous déduisons la relation

$$(10)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{|f-z_\nu|\leqq\varkappa} u(f(re^{i\varphi}))\, d\varphi = m(r;\, z_\nu) + O(\log m(r;\, z_\nu)).$$

D'une manière analogue on voit que [1]

$$(10)'\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{|f|\geqq\frac{1}{\varkappa}} u(f(re^{i\varphi}))\, d\varphi = -m(r;\, \infty) + O(\log m(r;\, \infty)).$$

Or, la fonction $f(x)$ étant différente de z_ν ($\nu = 1, \ldots, q$) et de ∞, les expressions $N(r;\, z)$ (*voir* n° 1) s'annulent identiquement pour ces valeurs de z. On aura donc, d'après le théorème fondamental (I),

$$(10)''\qquad m(r;\, z) = T(r) + O(1)$$

pour les valeurs $z = z_\nu (\nu = 1, \ldots, q)$ et $z = \infty$. Il s'ensuit de (9), à cause de (10), (10)′ et (10)″, que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(re^{i\varphi}))\, d\varphi = (q-1)T(r) + O(\log T(r)).$$

Substituons cette expression dans l'inégalité fondamentale (8).

---

(1) *Cf.* F. Nevanlinna, *loc. cit.*

Il en résulte que

$$(11)\qquad (q-1)\mathrm{T}(r) \leqq \log \frac{2\mathrm{R}^k}{|a_n|(\mathrm{R}^{2k}-r^{2k})} + \mathrm{O}\left(\log\log \frac{1}{\mathrm{R}^{2k}-r^{2k}}\right),$$

où le signe d'égalité est valable pour la fonction $\omega(x^k)$ considérée au n° 5. En observant que

$$\log \frac{2\mathrm{R}^k}{|a_k|(\mathrm{R}^{2k}-r^{2k})} = \log \frac{1}{\mathrm{R}-r} + \mathrm{O}(1),$$

on voit que

$$(11)'\qquad \overline{\lim_{r=\mathrm{R}}}\, \frac{\mathrm{T}(r)}{\log \dfrac{1}{\mathrm{R}-r}} \leqq \frac{1}{q-1}.$$

Pour la fonction $\omega(x^k)$ on aura, en particulier,

$$\lim_{r=\mathrm{R}} \frac{\mathrm{T}(r)}{\log \dfrac{1}{\mathrm{R}-r}} = \frac{1}{q-1}.$$

L'inégalité $(11)'$ subsiste pour toute fonction analytique $f(x)$, méromorphe dans le cercle $|x| < \mathrm{R}$ et admettant $p = q+1$ valeurs exceptionnelles dont l'une est supposée infinie. Le cas général où les p valeurs sont finies se ramène à ce cas spécial par la transformation $\frac{1}{f-a}$, a désignant une de ces p valeurs; la différence entre les fonctions caractéristiques T, correspondant aux fonctions f et $\frac{1}{f-a}$, restera, d'après le théorème fondamental (I), *bornée* pour $r \to \mathrm{R}$. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Soit $f(x)$ une fonction analytique, méromorphe dans le cercle $|x| < \mathrm{R}$ et admettant $p \geqq 3$ valeurs exceptionnelles. Dans ces conditions la fonction caractéristique $\mathrm{T}(r)$, correspondant à la fonction $f(x)$, vérifie l'inégalité

$$\overline{\lim_{r=\mathrm{R}}}\, \frac{\mathrm{T}(r)}{\log \dfrac{1}{\mathrm{R}-r}} \leqq \frac{1}{p-2}.$$

On connaît, d'autre part, des fonctions satisfaisant aux mêmes conditions et pour lesquelles

$$\lim_{r=\mathrm{R}} \frac{\mathrm{T}(r)}{\log \dfrac{1}{\mathrm{R}-r}} = \frac{1}{p-2}.$$