BULLETIN DE LA S. M. F.

R. TAMBS LYCHE

# Une formule d'itération

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 55 (1927), p. 102-113
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1927__55__102_0>

## UNE FORMULE D'ITÉRATION;

PAR M. R. TAMBS LYCHE
[Trondhjem (Norvège)].

1. REMARQUES PRÉLIMINAIRES. — Soit $z_1 = \varphi(z)$ une susbtitution holomorphe dans le voisinage d'un point double, que nous supposerons, pour plus de simplicité, à l'origine, et posons

$$\varphi(z) = sz + a_2 z^2 + \ldots + a_p z^p + \ldots.$$

Alors on a dans un certain cercle $|z| < \rho_n$,

$$z_n = \varphi_n(z) = \varphi[\varphi_{n-1}(z)] = s^n z + a_2^{(n)} z^2 + \ldots + a_p^{(n)} z^p + \ldots,$$

où le coefficient $a_p^{(n)}$ s'exprime en fonction de $s$, $a_2$, $\ldots$, $a_p$. Il ne semble pas qu'on ait trouvé l'expression de ce coefficient sur une forme assez simple pour le pouvoir étudier directement et en tirer des conséquences de quelque importance; or je vais donner pour $a_p^{(n)}$ une formule très simple et qui montre surtout la structure de $a_p^{(n)}$ en fonction de $s$ et de $n$, propriété qui semble être d'une certaine importance quand il s'agit d'étudier le cas encore très peu connu où $s = e^{i\alpha}$, $\alpha$ étant incommensurable à $\pi$. Il s'ensuit par exemple immédiatement qu'il existe dans ce cas une quantité positive $g_p$ dépendant de $p$, $s$, $a_2$, $\ldots$, $a_p$ seulement, telle qu'on a, quel que soit $n$, $|a_p^{(n)}| < g_p$. Je terminerai ces pages en donnant comme d'autres applications de la formule, d'une part le développement en série entière de la fonction $K(z)$ de M. Kœnigs et d'autre part le développement en série entière de la fonction inverse de $\varphi(z)$.

2. FORMULE POUR $a_p^{(n)}$ EN FONCTION DES $a_2$, $\ldots$, $a_p$. — En remplaçant dans

$$z_{n-1} = s^{n-1} z + a_2^{(n-1)} z^2 + \ldots + a_p^{(n-1)} z^p + \ldots$$

$z$ par $z_1$ et en égalant ensuite des deux côtés le coefficient de $z^p$

on trouve d'abord la formule

$$(1) \qquad a_p^{(n)} = s^{n-1} a_p + a_2^{(n-1)} K_{p,2} + \ldots + a_q^{(n-1)} K_{p,q} + \ldots + a_p^{(n-1)} s^p$$

en posant

$$K_{p,q} = \sum_{(\alpha)} \frac{q!}{\alpha_1! \ldots \alpha_p!} s^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_p^{\alpha_p} \qquad (q = 2, 3, \ldots, p),$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs entières non négatives des $\alpha$ satisfaisant aux conditions

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = q,$$
$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + p\alpha_p = p.$$

Attribuons à $a_r$ le poids $r - 1$ ; on verra sans peine que tous les termes de $K_{p,q}$ auront le même poids $p - q$, d'où il suit qu'en supposant que $a_q^{(n-1)}$ ait le poids $q - 1$, $a_p^{(n)}$ aura le poids $p - 1$ ; or, pour $n = 1$ on a $a_p^{(1)} = a_p$, donc le résultat est général. On a ainsi pour $a_p^{(n)}$ une expression de la forme

$$(2) \qquad a_p^{(n)} = \sum_{(\mu)_p} b_{\mu_2, \ldots, \mu_p}^{(n)} a_2^{\mu_2} \ldots a_p^{\mu_p},$$

la somme étant étendue à tout système $(\mu)_p$ des nombres entiers non négatifs $\mu$ satisfaisant à la condition

$$\mu_2 + 2\mu_3 + \ldots + (p-1)\mu_p = p - 1.$$

En portant cela dans la formule (1) on trouve

$$(3) \qquad \sum_{(\mu)_p} b_{\mu_2, \ldots, \mu_p}^{(n)} a_2^{\mu_2} \ldots a_p^{\mu_p} = s^{n-1} a_p + \sum_{q=2}^{p} \sum_{(\mu)_q} b_{\mu_2, \ldots, \mu_q}^{(n-1)} a_2^{\mu_2} \ldots a_q^{\mu_q} K_{p,q}.$$

Soit alors $\lambda_2, \ldots, \lambda_p$ un système quelconque de nombres entiers non négatifs tels que

$$\lambda_2 + 2\lambda_3 + \ldots + (p-1)\lambda_p = p - 1$$

et égalons dans (3) des deux côtés le coefficient de $a_2^{\lambda_2} \ldots a_p^{\lambda_p}$. Désignons pour abréger par $[\mu]_q$ un système quelconque de nombres $\mu_2, \ldots, \mu_q$ satisfaisant à la fois aux conditions

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mu_2 + 2\mu_3 + \ldots + (q-1)\mu_q = q - 1, \\ 0 \leqq \mu_2 \leqq \lambda_2, \qquad \ldots, \qquad 0 \leqq \mu_q \leqq \lambda_q, \\ \mu_2 + \mu_3 + \ldots + \mu_q \geqq \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots \lambda_p - q. \end{array} \right.$$

Chaque fois qu'il existe un tel système de nombres $\mu$ on aura dans (3) un terme de coefficient

$$b^{(n-1)}_{\mu_2,\ldots,\mu_q} \frac{q!}{\alpha_1!\ldots\alpha_p!} s^{\alpha_1}$$

en $a_2^{\lambda_2}\ldots a_p^{\lambda_p}$, provenant du terme en $K_{p,q}$; on a encore

$$\alpha_2 = \lambda_2 - \mu_2, \quad \ldots, \quad \alpha_q = \lambda_q - \mu_q, \quad \alpha_{q+1} = \lambda_{q+1}, \quad \ldots, \quad \alpha_p = \lambda_p,$$
$$\alpha_1 = q + (\mu_2 + \ldots + \mu_q) - (\lambda_2 + \ldots + \lambda_p).$$

En particulier, on a, pour $q = p$ en vertu de (4),

$$\mu_2 = \lambda_2, \quad \ldots, \quad \mu_p = \lambda_p$$

comme seul système $[\mu]_p$, donc le seul terme à droite dans (3) contenant un coefficient à $p - 1$ indices est le terme $b^{(n-1)}_{\lambda_2,\ldots,\lambda_p} s^p$. On aura donc les formules

$$(5) \qquad b^{(n)}_{\lambda_2,\ldots,\lambda_{p-1},0} = s^p b^{(n-1)}_{\lambda_2,\ldots,\lambda_{p-1},0} + \sum_{q=2}^{p-1} \sum_{[\mu]_q} \frac{q!}{\alpha_1!\ldots\alpha_p!} s^{\alpha_1} b^{(n-1)}_{\mu_2,\ldots,\mu_q}$$

dans le cas $\lambda_p = 0$, et

$$(5 \textit{ bis}) \qquad b^{(n)}_{0,\ldots,0,1} = s^p b^{(n-1)}_{0,\ldots,0,1} + s^{n-1}$$

si $\lambda_p = 1$.

3. Le symbole $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$. — Avant de tirer des équations (5) et (5 *bis*) la forme des coefficients $b^{(n)}_{\lambda_2,\ldots,\lambda_p}$, il sera commode d'introduire un symbole que je désignerai, à cause de ses analogies avec le coefficient binome $\binom{n}{r}$ (auquel il se réduit d'ailleurs si l'on fait tendre $s$ vers 1), par $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$; posons par définition

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{(s^n - 1)(s^{n-1} - 1)\ldots(s^{n-r+1} - 1)}{(s-1)(s^2-1)\ldots(s^r-1)}, \qquad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

pour des nombres $n$ et $r$ entiers et non négatifs. On a évidemment

$$\begin{bmatrix} n \\ n-r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}, \qquad r = 0, 1, \ldots, n-1,$$
$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = 0 \quad \text{pour} \quad r > n.$$

Démontrons encore les deux identités suivantes qui nous seront utiles dans ce qui suit :

$$(6)\qquad \sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}s^{\frac{i(i-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ n-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n-r \\ n-i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n \\ n-r \end{bmatrix}\qquad (r \overline{\gtrless} n),$$

$$(7)\qquad \sum_{i=0}^{p-r-1}(-1)^{i}s^{-(n-r)+\frac{i(i+1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ r+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r+i \\ r \end{bmatrix}$$

$$=(-1)^{p-r-1}s^{-(p-r-1)(n-r)+\frac{(p-r)(p-r-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n-r-1 \\ p-r-1 \end{bmatrix}\qquad (r<p).$$

Montrons d'abord que la formule (6) est vraie dans le cas $r=n$, c'est-à-dire que

$$(6\ bis)\qquad \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}s^{\frac{i(i-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ n-i \end{bmatrix}=1.$$

En effet, la formule (6) est bien exacte pour $n=1$ ; cherchons donc la différence

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}s^{\frac{i(i-1)}{2}}\begin{bmatrix} n+1 \\ n-i+1 \end{bmatrix}-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}s^{\frac{i(i-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ n-i \end{bmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}s^{\frac{i(i-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ n-i \end{bmatrix}\left(\frac{s^{n+1}-1}{s^{n-i+1}-1}-1\right)+(-1)^{n}s^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}s^{\frac{i(i-1)}{2}+n+1-i}\begin{bmatrix} n \\ n-i+1 \end{bmatrix}+(-1)^{n}s^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i}s^{\frac{i(i+1)}{2}+n-i}\begin{bmatrix} n \\ n-i \end{bmatrix}+(-1)^{n}s^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$=s^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}s^{\frac{i(i-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ n-i \end{bmatrix}+(-1)^{n}s^{\frac{n(n+1)}{2}}+s^{n}-s^{n}(-1)^{n}s^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Si donc nous supposons la formule (6 *bis*) vraie pour la valeur $n$ cette différence se réduit à zéro, ce qui montre l'exactitude de la formule pour la valeur $n+1$ ; étant vraie pour $n=1$ elle est générale.

Supposons alors la formule (6) vraie pour la valeur $n$ et $r \overline{\gtrless} n$ ;

alors, changeons $n$ en $n+1$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}s^{\frac{i(i-1)}{2}}\begin{bmatrix}n+1\\ n-i+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-i+1\\ n-r+1\end{bmatrix}\\
&=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}\frac{s^{n+1}-1}{s^{n+1-r}-1}\begin{bmatrix}n\\ n-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-i\\ n-r\end{bmatrix}\\
&=\frac{s^{n+1}-1}{s^{n-r+1}-1}\begin{bmatrix}n\\ n-r\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}n+1\\ n+1-r\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

La formule sera donc vraie pour la valeur $n+1$ et $r \lesseqgtr n$; mais, d'après la formule (6 *bis*) elle est encore vraie pour $n+1$ et $r=n+1$; donc elle est générale.

Passons à la formule (7); en la supposant vraie pour $n$ quelconque et une certaine valeur de $p$, changeons $p$ en $p+1$; on trouve alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{p-r}(-1)^{i}s^{-i(n-r)+\frac{i(i+1)}{2}}\begin{bmatrix}n\\ r+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r+i\\ r\end{bmatrix}\\
&=(-1)^{p-r-1}s^{-(p-r-1)(n-r)+\frac{(p-r)(p-r-1)}{2}}\begin{bmatrix}n\\ r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-r-1\\ p-r-1\end{bmatrix}\\
&\quad+(-1)^{p-r}s^{-(p-r)(n-r)+\frac{(p-r)(p-r+1)}{2}}\begin{bmatrix}n\\ p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ r\end{bmatrix}\\
&=(-1)^{p-r-1}s^{-(p-r)(n-r)+\frac{(p-r)(p-r+1)}{2}}\\
&\quad\times\left(s^{n-p}\begin{bmatrix}n\\ r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-r-1\\ p-r-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}n\\ p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ r\end{bmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Or, la quantité entre les parenthèses se trouve égale à

$$\begin{aligned}
&\frac{(s^n-1)\ldots(s^{n-r+1}-1).(s^{n-r-1}-1)\ldots(s^{n-p+1}-1)}{(s-1)\ldots(s^r-1).(s-1)\ldots(s^{p-r-1}-1)}\left(s^{n-p}-\frac{s^{n-r}-1}{s^{p-r}-1}\right)\\
&=-\begin{bmatrix}n\\ r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-r-1\\ p-r\end{bmatrix},
\end{aligned}$$

ce qui démontre la formule (7) en général; car, étant toujours vraie pour $r=p-1$ elle est exacte pour la valeur $p+1$ et $r<p+1$ si elle l'est pour la valeur $p$ et $r<p$; et elle est vraie pour $p=1$, $r=0$.

4. Le coefficient $b^{(n)}_{0,\ldots,0,1}$. — Revenons à la formule (5 *bis*),

qui donne d'une manière simple

$$b^{(n)}_{0,\ldots,0,1} = s^{n-1}\,\frac{s^{n(p-1)}-1}{s^{p-1}-1}.$$

Il convient de donner à cette expression une autre forme en posant

$$(8)\qquad s^{n-1}\,\frac{s^{n(p-1)}-1}{s^{p-1}-1} = A_1 s^n \begin{bmatrix} n \\ p-1 \end{bmatrix} + A_2 s^{2n} \begin{bmatrix} n \\ p-2 \end{bmatrix} + \ldots + A_{p-1} s^{(p-1)n} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix},$$

les $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$ étant à déterminer. En faisant dans (8) $n = k$ où $1 \leqq k \leqq p-1$, on trouve

$$s^{k-1}\,\frac{s^{k(p-1)}-1}{s^{p-1}-1} = A_{p-k} s^{k(p-k)} \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} + \ldots + A_{p-1} s^{k(p-1)} \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On aura donc pour $k = 1$, $A_{p-1} s^{p-1} = 1$; pour $k = 2$,

$$A_{p-2} s^{2(p-2)} = s(s^{p-1}+1) - A_{p-1} s^{2(p-1)}(s+1),$$

et en continuant ainsi on trouve de proche en proche pour les $A_{p-k}$ des expressions telles que $A_{p-k} s^{k(p-k)}$ est un polynome en $s$ dont le degré sera au plus égal à $(k-1)p$.

Tous les $A_1, \ldots, A_{p-1}$ ainsi déterminés rendent l'équation (8) identique; en effet, divisons les deux membres de cette équation par $s^n$ et mettons ensuite $s^n = x$; on aura une équation en $x$ de la forme

$$\frac{x^{p-1}-1}{s^{p-1}-1} = A_1\,\frac{(x-1)(xs^{-1}-1)\ldots(xs^{-p+2}-1)}{(s-1)(s^2-1)\ldots(s^{p-1}-1)} + \ldots + A_{p-1} x^{p-2}\,\frac{x-1}{s-1},$$

donc une égalité entre deux polynomes de degré $p-1$; cette égalité étant vérifiée, d'après ce qui précède, pour $x = 1$; $s, s^2, \ldots, s^{p-1}$, elle est bien identique en $x$; donc il en est de même pour l'équation (8).

5. Le coefficient $b^{(n)}_{\lambda_2,\ldots,\lambda_p}$. — Je dis qu'on a encore pour le coefficient général $b^{(n)}_{\lambda_2,\ldots,\lambda_p}$ une expression de la forme que nous venons de trouver pour $b^{(n)}_{0,\ldots,0,1}$, soit

$$(9)\qquad b^{(n)}_{\lambda_2,\ldots,\lambda_p} = A_1^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_p)} s^n \begin{bmatrix} n \\ p-1 \end{bmatrix} + A_2^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_p)} s^{2n} \begin{bmatrix} n \\ p-2 \end{bmatrix} + \ldots + A_{p-1}^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_p)} s^{(p-1)n} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix},$$

où les $A_{p-k}^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_p)}$, multipliés par $s^{k(p-k)}$, sont encore des polynomes en $s$ de degré au plus égal à $(k-1)p$. En effet, portons l'expression (9) dans la formule (5). On aura, puisque $\lambda_p = 0$, d'où nécessairement $p > 2$,

$$(10)\quad \sum_{i=1}^{p-1} A_i^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_{p-1},0)} s^{in} \begin{bmatrix} n \\ p-i \end{bmatrix}$$
$$= s^p \sum_{i=1}^{p-1} A_i^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_{p-1},0)} s^{i(n-1)} \begin{bmatrix} n-1 \\ p-i \end{bmatrix}$$
$$+ \sum_{q=2}^{p-1} \sum_{[\mu]_q} \frac{q!}{\alpha_1!\ldots\alpha_p!} s^{\alpha_1} \sum_{i=1}^{q-1} A_i^{(\mu_2,\ldots,\mu_q)} s^{i(n-1)} \begin{bmatrix} n-1 \\ q-i \end{bmatrix},$$

d'où, en posant $n = k$, $1 \leqq k \leqq p-1$,

$$(11)\quad \sum_{i=p-k}^{p-1} A_i^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_{p-1},0)} s^{ik} \begin{bmatrix} k \\ p-i \end{bmatrix}$$
$$= s^p \sum_{i=q-k+1}^{p-1} A_i^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_{p-1},0)} s^{i(k-1)} \begin{bmatrix} k-1 \\ p-i \end{bmatrix}$$
$$+ \sum_{q=2}^{p-1} \sum_{[\mu]_q} \frac{q!}{\alpha_1!\ldots\alpha_p!} s^{\alpha_1} \sum_{i=q-k+1}^{q-1} A_i^{(\mu_2,\ldots,\mu_q)} s^{i(k-1)} \begin{bmatrix} k-1 \\ q-i \end{bmatrix}.$$

Cette équation donne d'abord pour $k = 1$

$$A_{p-1}^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_{p-1},0)} s^{p-1} = 0,$$

et alors, pour $k = 2$,

$$A_{p-2}^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_{p-1},0)} s^{2(p-2)} + A_{p-1}^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_{p-1},0)} s^{2(p-1)} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= s^p A_{p-1}^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_{p-1},0)} s^{p-1} + \sum_{q=2}^{p-1} \sum_{[\mu]_q} \frac{q!}{\alpha_1!\ldots\alpha_p!} s^{\alpha_1} A_{q-1}^{(\mu_2,\ldots,\mu_q)} s^{q-1}.$$

D'après ce qui a déjà été trouvé l'expression à droite est au plus de degré $p$ en $s$, donc $A_{p-2}^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_{p-1},0)} s^{2(p-2)}$ est un polynome en $s$ de degré $p$ au plus.

Or, supposons qu'on ait déjà trouvé de l'équation (11) tous les $A_i^{(\mu_2,\ldots,\mu_q)}$ pour $q < p$ et $i \geqq q-k+1$, ainsi que $A_i^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_{p-1},0)}$ pour $i \geqq p-k+1$ et supposons que, pour tous ces coefficients on ait trouvé le degré en $s$ du produit $A_{p-k}^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_p)} s^{k(p-k)}$ au plus égal à $(k-1)p$. Alors l'équation (11) donne $A_{p-k}^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_{p-1},0)} s^{k(p-k)}$ linéairement en ces coefficients. Or $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ est en général un polynome en $s$ de degré $r(n-r)$, d'où il suit que le terme

$$s^p A_i^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_{p-1},0)} s^{i(k-1)} \begin{bmatrix} k-1 \\ p-i \end{bmatrix}$$

aura le degré $(k-1)p$ au plus pour $i = p-k+1, \ldots, p-1$; et le terme

$$s^{\alpha_1} A_i^{(\mu_2,\ldots,\mu_q)} s^{i(k-1)} \begin{bmatrix} k-1 \\ q-i \end{bmatrix}$$

aura le degré $\alpha_1 + (k-2)q$ au plus, donc, puisque $\alpha_1 \overline{\overline{<}} q$, $q < p$ son degré sera inférieur à $(k-1)p$; donc $A_{p-k}^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_q)} s^{k(p-k)}$ est toujours un polynome en $s$ de degré $(k-1)p$ au plus.

En supposant ainsi tous les $A_i^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_p)}$ déterminés, ils rendent l'équation (10) identique; en effet, en divisant par $s^n$ les deux membres de (10) et en mettant ensuite $s^n = x$ on obtient comme tout à l'heure une égalité entre deux polynomes en $x$ de degré $p-1$ qui est vérifiée pour $x = s, s^2, \ldots, s^{p-1}$ avec le meme coefficient de $x^{p-1}$.

On a donc, en résumé, pour le coefficient $a_p^{(n)}$ la formule

$$a_p^{(n)} = \sum_{(\lambda)_p} b_{\lambda_2,\ldots,\lambda_p}^{(n)} a_2^{\lambda_2} \ldots a_p^{\lambda_p} \qquad (\lambda_2 + 2\lambda_3 + \ldots + (p-1)\lambda_p = p-1),$$

les $b_{\lambda_2,\ldots,\lambda_p}^{(n)}$ ayant la forme

$$b_{\lambda_2,\ldots,\lambda_p}^{(n)} = \sum_{i=1}^{p-1} A_i^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_p)} s^{in} \begin{bmatrix} n \\ p-i \end{bmatrix},$$

où $A^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_p)} s^{i(p-i)}$ est un polynome en $s$ de degré $p(p-i-1)$ au plus, et qui se détermine par l'équation (11).

6. Autre forme de la formule pour $a_p^{(n)}$. — Étant démontrée l'existence des coefficients $A_i^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_p)}$ vérifiant l'équation (9), cherchons à les exprimer d'une manière plus commode. Mettons, à cet effet, dans (9) successivement $n = 1, 2, 3, \ldots$, ce qui permet d'en tirer les $A_i^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_p)}$ en fonction des $b_{\lambda_2,\ldots,\lambda_p}^{(n)}$; pour simplifier l'écriture supprimons les indices $\lambda_2, \ldots, \lambda_p$ communs pour tous les A et $b$ dans ce qui va suivre. On trouve d'abord, pour $n = 1$,

$$s^{p-1} A_{p-1} = b^{(1)}$$

et pour $n = 2$

$$s^{2(p-2)} A_{p-2} = b^{(2)} - s^{p-1} b^{(1)}.$$

Supposons qu'on ait trouvé, en continuant ainsi, jusqu'à une certaine valeur de $k$

$$(12) \qquad s^{k(p-k)} A_{p-k} = \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r s^{r(p-k)+\frac{r(r+1)}{2}} \begin{bmatrix} k \\ k-r \end{bmatrix} b^{(k-r)}.$$

Alors on aura, en faisant dans (9) $n = k+1$,

$$b^{(k+1)} = s^{(p-k-1)(k+1)} A_{p-k-1} + s^{(p-k)(k+1)} \begin{bmatrix} k+1 \\ k \end{bmatrix} A_{p-k} + \ldots + s^{(p-1)(k+1)} \begin{bmatrix} k+1 \\ 1 \end{bmatrix} A_{p-1},$$

d'où

$$\begin{aligned} s^{(k+1)(p-k-1)} A_{p-k-1} &= b^{(k+1)} - \sum_{t=0}^{k-1} s^{(k+1)(p-k+t)} \begin{bmatrix} k+1 \\ k-t \end{bmatrix} A_{p-k+t} \\ &= b^{(k+1)} - \sum_{t=0}^{k-1} \sum_{r=0}^{k-t-1} (-1)^r s^{(t+r+1)(p-k+t)+\frac{r(r+1)}{2}} \begin{bmatrix} k+1 \\ k-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k-t \\ k-t-r \end{bmatrix} b^{(k-t-r)} \\ &= b^{(k+1)} - \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{t=0}^{r} (-1)^{r-t} s^{(r+1)(p-k+t)+\frac{(r-t)(r-t+1)}{2}} \begin{bmatrix} k+1 \\ k-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k-t \\ k-r \end{bmatrix} b^{(k-r)} \\ &= b^{(k+1)} - \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r s^{(r+1)(p-k)+\frac{r(r+1)}{2}} b^{(k-r)} \sum_{t=0}^{r} (-1)^t s^{\frac{t(t+1)}{2}} \begin{bmatrix} k+1 \\ k-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k-t \\ k-r \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Or, la formule (6) donne pour $n = k+1$, en changeant $r$ en $r+1$ et en mettant $t+1$ au lieu de $i$,

$$\sum_{t=0}^{r} (-1)^t s^{\frac{t(t+1)}{2}} \begin{bmatrix} k+1 \\ k-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k-t \\ k-r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+1 \\ k-r \end{bmatrix},$$

donc on aura

$$\begin{aligned} s^{(k+1)(p-k-1)} A_{p-k-1} &= b^{(k+1)} - \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r s^{(r+1)(p-k)+\frac{r(r+1)}{2}} \begin{bmatrix} k+1 \\ k-r \end{bmatrix} b^{(k-r)} \\ &= \sum_{r=0}^{k} (-1)^r s^{r(p-k-1)+\frac{r(r+1)}{2}} \begin{bmatrix} k+1 \\ k+1-r \end{bmatrix} b^{(k+1-r)}, \end{aligned}$$

ce qui montre l'exactitude de la formule (12) en général.

Portons ensuite l'expression (12) dans la formule (9), nous trouvons

$$
\begin{aligned}
b^{(n)} &= \sum_{l=1}^{p-1} A_{p-l}\, s^{(p-l)n} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix} \\
&= \sum_{l=1}^{p-1} s^{(p-l)n} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix} s^{-l(p-l)} \sum_{r=0}^{l-1} (-1)^r s^{r(p-l)+\frac{r(r+1)}{2}} \begin{bmatrix} l \\ l-r \end{bmatrix} b^{(l-r)} \\
&= \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{r=0}^{l-1} (-1)^r s^{(p-l)(n-l+r)+\frac{r(r+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ l-r \end{bmatrix} b^{(l-r)} \\
&= \sum_{r=1}^{p-1} \sum_{k=0}^{p-r-1} (-1)^k s^{(p-k-r)(n-r)+\frac{k(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k+r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k+r \\ r \end{bmatrix} b^{(r)} \\
&= \sum_{r=1}^{p-1} s^{(p-r)(n-r)} b^{(r)} \sum_{k=0}^{p-r-1} (-1)^k s^{-k(n-r)+\frac{k(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k+r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k+r \\ r \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

donc, en vertu de la formule (7),

$$
b^{(n)} = \sum_{r=1}^{p-1} s^{(p-r)(n-r)} b^{(r)} (-1)^{p-r-1} s^{-(p-r-1)(n-r)+\frac{(p-r)(p-r-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-r-1 \\ p-r-1 \end{bmatrix}
$$

ou enfin

$$
(13) \quad b^{(n)}_{\lambda_2,\dots,\lambda_p} = \sum_{r=1}^{p-1} (-1)^{p-r-1} s^{n-r+\frac{(p-r)(p-r-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-r-1 \\ p-r-1 \end{bmatrix} b^{(r)}_{\lambda_2,\dots,\lambda_p}.
$$

Portons cette expression des $b^{(n)}_{\lambda_2,\dots,\lambda_p}$ dans la formule (2), il vient

$$
\begin{aligned}
a_p^{(n)} &= \sum_{(\lambda)_p} \left( \sum_{r=1}^{p-1} (-1)^{p-r-1} s^{n-r+\frac{(p-r)(p-r-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-r-1 \\ p-r-1 \end{bmatrix} b^{(r)}_{\lambda_2,\dots,\lambda_p} \right) a_2^{\lambda} \dots a_p^{\lambda_p} \\
&= \sum_{r=1}^{p-1} (-1)^{p-r-1} s^{n-r+\frac{(p-r)(p-r-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-r-1 \\ p-r-1 \end{bmatrix} \sum_{(\lambda)_p} b^{(r)}_{\lambda_2,\dots,\lambda_p} a_2^{\lambda_2} \dots a_p^{\lambda_p},
\end{aligned}
$$

donc enfin la formule énoncée

$$
(14) \qquad a_p^{(n)} = \sum_{r=1}^{p-1} (-1)^{p-r-1} s^{n-r+\frac{(p-r)(p-r-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-r-1 \\ p-r-1 \end{bmatrix} a_p^{(r)},
$$

formule qui exprime le coefficient de $z^p$ dans l'itérée $z_n$ d'ordre quelconque linéairement par les coefficients de $z^p$ dans $z_1$, $z_2$, ..., $z_{p-1}$. Tirons-en quelques conséquences immédiates.

7. Développement de la fonction de M. Kœnigs. — Dans le cas où $|s| < 1$ la fonction $K(z)$ de M. Kœnigs est définie par

$$K(z) = \lim_{n \succ \infty} \frac{z_n}{s^n}.$$

Or, nous avons posé

$$z_n = s^n z + a_2^{(n)} z^2 + \ldots + a_p^{(n)} z^p + \ldots$$

et, en vertu de la formule (14), on a

$$\frac{a_p^{(n)}}{s^n} = \sum_{r=1}^{p-1} (-1)^{p-r-1} s^{-r+\frac{(p-r)(p-r-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-r-1 \\ p-r-1 \end{bmatrix} a_p^{(r)},$$

quantité qui tend pour $p$ fixe vers

$$\beta_p = \sum_{r=1}^{p-1} (-1)^{p-r-1} \frac{s^{-r+\frac{(p-r)(p-r-1)}{2}}}{(1-s)\ldots(1-s^r)(1-s)\ldots(1-s^{p-r-1})} a_p^{(r)}$$

lorsque $n$ croît indéfiniment; or, la série pour $z_n$ converge, quel que soit $n$ à l'intérieur d'un certain cercle $\Gamma$ de centre à l'origine; donc la série

$$S(z) = z + \beta_2 z^2 + \ldots + \beta_p z^p + \ldots$$

converge dans le même cercle; et elle aura pour somme la fonction $K(z)$; on trouve, en effet,

$$(15) \quad \left| S(z) - \frac{z_n}{s^n} \right| \leq \left| \left(\beta_2 - \frac{a_2^{(n)}}{s^n}\right) z^2 + \ldots + \left(\beta_p - \frac{a_p^{(n)}}{s^n}\right) z^p \right| + |\beta_{p+1} z^{p+1} + \ldots| + \left| \frac{1}{s^n} (a_{p+1}^{(n)} z^{p+1} + \ldots) \right|$$

Les séries pour $\frac{z_n}{s^n}$ et $S(z)$ convergeant uniformément dans un cercle $\Gamma'$ intérieur à $\Gamma$, prenons $p$ assez grand pour que les restes de ces deux séries soient inférieurs à $\frac{\varepsilon}{3}$ en module, $\varepsilon > 0$ étant donné arbitrairement; choisissons ensuite $n$ assez grand pour que le premier terme à droite dans (15) soit inférieur à $\frac{\varepsilon}{3}$, il suit alors $\left| S(z) - \frac{z_n}{s^n} \right| < \varepsilon$, donc

$$K(z) = z + \beta_2 z^2 + \ldots + \beta^p z^p + \ldots.$$

8. Développement de la fonction inverse de $\varphi(z)$. — Le symbole $\left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right]$ étant défini d'abord pour $n$ entier et positif, on étendra immédiatement la définition au cas de $n$ quelconque. Or, l'égalité (1) étant vérifiée identiquement en $n$ pour les $a_p^{(n)}$ tirés de (14), il en sera de même si l'on remplace $n$ par une quantité quelconque. Il s'ensuit qu'en posant

$$a_p^{(-1)} = \sum_{r=1}^{p-1} (-1)^{p-r-1} s^{-1+r+\frac{(p-r)(p-r-1)}{2}} \left[\begin{matrix} -1 \\ r \end{matrix}\right] \left[\begin{matrix} -2-r \\ p-r-1 \end{matrix}\right] a_p^{(r)},$$

on trouve une série

$$z_{-1} = s^{-1} z + a_2^{(-1)} z^2 + \ldots + a_p^{(-1)} z^p + \ldots$$

qui satisfait formellement à la condition $\varphi(z_{-1}) = z$; et cette équation définissant, pour $s \neq 0$, une fonction inverse $z_{-1} = \varphi_{-1}(z)$, holomorphe autour de l'origine et se réduisant à zéro pour $z = 0$, on aura, en effet,

$$\varphi_{-1}(z) = s^{-1} z + a_2^{(-1)} z^2 + \ldots + a_p^{(-1)} z^p + \ldots,$$

où les $a_p^{(-1)}$ se réduisent d'ailleurs à la forme plus simple

$$a_p^{(-1)} = \sum_{r=1}^{p-1} (-1)^r s^{-(r+1)\left(p-\frac{r}{2}\right)} \left[\begin{matrix} p \\ p-r-1 \end{matrix}\right] a_p^{(r)}.$$

9. Une remarque sur le cas d'exception $s = e^{i\alpha}$, $\alpha$ incommensurable à $\pi$. — Puisqu'on a dans ce cas $|s^r| = 1$ pour $r$ quelconque, il suit immédiatement

$$\left|\left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right]\right| < \frac{2^r}{|(s-1)\ldots(s^r-1)|} \left|\left[\begin{matrix} n-r-1 \\ p-r-1 \end{matrix}\right]\right| < \frac{2^{p-r-1}}{|(s-1)\ldots(s^{p-r-1}-1)|},$$

donc, quel que soit $n$,

$$|a_p^{(n)}| < g_p = 2^{p-1} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{|a_p^{(r)}|}{|(s-1)\ldots(s^{r+1}-1)(s-1)\ldots(s^{p-r-1}-1)|},$$

quantité qui ne dépend que de $p$, $s$, $a_2$, $\ldots$, $a_p$.