J. KANITANI

Sur le rang de la forme de Darboux de l'hypersurface

Bulletin de la S. M. F., tome 55 (1927), p. 206-217
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1927__55__206_0>

SUR LE RANG DE LA FORME DE DARBOUX DE L'HYPERSURFACE;

Par M. Jôyô Kanitani.

Dans un Mémoire précédent ([1]) on a vérifié que l'hypersurface dont la forme de Darboux est un cube parfait, autrement dit, l'hypersurface dont la forme de Darboux peut s'exprimer au moyen d'une expression de Pfaff, est une enveloppe de ∞^1 hyperquadriques. Nous consacrons cet article à l'étude de l'hypersurface dont la forme de Darboux est plus générale. Si une forme des expressions de Pfaff peut s'exprimer au moyen des r expressions de Pfaff et ne peut s'exprimer par moins de r expressions de Pfaff, on dira que la forme est de rang r. On démontrera que l'hypersurface dont la forme de Darboux est de rang r est une enveloppe de ∞^r hyperquadriques.

1. Considérons n expressions distinctes de Pfaff

$$d\omega^i = a_1^i du^1 + \ldots + a_n^i du^n \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

et une forme quadratique $g_{\sigma\tau} d\omega^\sigma d\omega^\tau$ telle que

$$g = |g_{ij}| \neq 0.$$

On emploiera un calcul pfaffien absolu caractérisé par les équations

$$\text{(I)} \qquad \bar{\delta}(d\omega^i) - \bar{d}(\delta\omega^i) = 0,$$

$$\text{(II)} \qquad \bar{d}g_{ij} = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n),$$

où $\bar{d}$ représente la différentiation tensorielle, c'est-à-dire

$$\bar{d}X_{ij}^k = dX_{ij}^k + (\Gamma_{\lambda\sigma}^k X_{ij}^\lambda - \Gamma_{i\sigma}^\lambda X_{\lambda j}^k - \Gamma_{j\sigma}^\lambda X_{i\lambda}^k) d\omega^\sigma.$$

En vertu de (1) la condition pour que le système des équations de Pfaff

$$\begin{matrix} d\omega^1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdot \\ d\omega^r = 0 \end{matrix} \qquad (r < n - 1)$$

([1]) *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, 1928.

soit complètement intégrable peut s'écrire

$$\Gamma^i_{\alpha\beta} - \Gamma^i_{\beta\alpha} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r;\ \alpha, \beta = r+1, \ldots, n)$$

Considérons une hypersurface dans l'espace projectif de dimensions $n+1$ définie par les équations

$$x^k = x^k(u^1, \ldots, u^n) \qquad (k = 0, \ldots, n+1).$$

Les points $(x_1), \ldots, (x_n)$ définis par

$$x_i = \frac{\partial x}{\partial \omega^i}$$

se trouvent dans l'hyperplan tangent à l'hypersurface en point (x). Prenons le point (y) satisfaisant

$$|x\, x_1 \ldots x_n y| = \sqrt{g}.$$

On peut prendre les $n+2$ points $(x), (x_1), \ldots, (x_n), (y)$ comme sommets de repère local; $dx, \overline{dx}_1, \ldots, \overline{dx}_n, dy$ peuvent s'exprimer sous la forme

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} dx &= d\omega^\sigma x_\sigma \\ \overline{dx}_i &= M_{i\sigma} d\omega^\sigma x - K^\lambda_{i\sigma} d\omega^\sigma x_\lambda + H_{i\sigma} d\omega^\sigma y \qquad (i = 1, \ldots, n), \\ dy &= N_\sigma d\omega^\sigma + N^\lambda_\sigma d\omega^\sigma x_\lambda + d\omega^{n+1}_{n+1} y \end{aligned} \right.$$

où $d\omega^{n+1}_{n+1}$ est une expression de Pfaff.

Évidemment $H_{ij} = H_{ji}$.

Pour l'hypersurface qui a ∞^n points sur elle et ∞^n hyperplans tangents, et l'étude de laquelle nous nous occuperons, le déterminant H formé par H_{ij} n'est pas identiquement nul. Nous supposerons que la forme fondamentale $g_{\sigma\tau} d\omega^\sigma d\omega^\tau$ est préalablement déterminée de manière qu'elle coïncide avec la forme $H_{\sigma\tau} d\omega^\sigma d\omega^\tau$. On peut choisir le point (y) de manière qu'on ait

$$\text{(IV)} \qquad \begin{aligned} d\omega^{n+1}_{n+1} &= 0, \\ M^\sigma_\sigma &= 0. \end{aligned}$$

En effet, si

$$\begin{aligned} d\omega^{n+1}_{n+1} &= \lambda_\sigma d\omega^\sigma, \\ M^\sigma_\sigma &= \rho, \end{aligned}$$

on peut y arriver en prenant comme nouveau point (y) le point

$$y - \lambda^\sigma x_\sigma + \frac{1}{n} \rho x.$$

Désormais nous supposerons que le point (y) est choisi de cette façon.

En différentiant l'équation

$$|x\, x_1 \ldots x_n\, y| = \sqrt{H},$$

on a

$$\text{(V)} \qquad K^{\sigma}_{\sigma i} = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que (III) soit complètement intégrable est la suivante :

$$M_{ij} = M_{ji}, \qquad N_{ij} = N_{ji}, \qquad K_{ijl} = K_{jil} = K_{ilj};$$

$$\text{(VI)} \quad 2\left(\frac{\bar\partial K_{ijm}}{\partial\omega^l} - \frac{\bar\partial K_{ijl}}{\partial\omega^m}\right) = H_{il}(M_{jm} - N_{jm}) - H_{jm}(M_{il} - N_{il}) + H_{jl}(M_{im} - N_{im}) - H_{im}(M_{jl} - N_{jl});$$

$$\text{(VII)} \quad 2\left(K^{\rho}_{il} K_{\rho jm} - K^{\rho}_{im} K_{\rho jl}\right) + 2 R_{ij,lm} = H_{im}(M_{jl} + N_{jl}) + H_{jl}(M_{im} + N_{im}) - H_{il}(M_{jm} + N_{jm}) - H_{jm}(M_{il} + N_{il});$$

$$\text{(VIII)} \quad \frac{\bar\partial(M_{im} - N_{im})}{\partial\omega^l} - \frac{\bar\partial(M_{il} - N_{il})}{\partial\omega^m} + K_{il\sigma}(M^{\sigma}_m + N^{\sigma}_m) - K_{im\sigma}(M^{\sigma}_l + N^{\sigma}_l) = 2(N_m H_{il} - N_l H_{im});$$

$$\text{(IX)} \quad \frac{\bar\partial(M_{im} + N_{im})}{\partial\omega^l} - \frac{\bar\partial(M_{il} + N_{il})}{\partial\omega^m} + K_{il\sigma}(M^{\sigma}_m - N^{\sigma}_m) - K_{im\sigma}(M^{\sigma}_l - N^{\sigma}_l) = 0;$$

$$\text{(X)} \quad \frac{\bar\partial N_l}{\partial\omega^m} - \frac{\bar\partial N_m}{\partial\omega^l} + N^{\sigma}_l M_{\sigma m} - N^{\sigma} M_{\sigma l} = 0.$$

où $R_{ij,lm}$ sont les composantes du tenseur Riemann-Christoffel.

Des équations (VI), (VII), on peut déduire

$$\text{(XI)} \qquad M_{ij} - N_{ij} = \frac{2}{n}\frac{\bar\partial K^{\sigma}_{ij}}{\partial\omega^{\sigma}} + H_{ij}(R - E),$$

où

$$R = \frac{1}{n(n-1)} R^{\sigma\tau}_{\sigma\tau}, \qquad E = \frac{1}{n(n-1)} K_{\sigma\tau\rho} K^{\sigma\tau\rho}.$$

Soient $\xi^0, \ldots, \xi^{n+1}$ les coordonnées projectives par rapport au repère formé par $n+2$ points $(x), (x_1), \ldots, (x_n), (y)$, et soient $t^1, \ldots, t^{n+1}$ les coordonnées non homogènes définies par

$$t^i = \frac{\xi^i}{\xi^0} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Grâce à (III), en se bornant aux termes jusqu'au troisième ordre, on a pour l'équation de l'hypersurface donnée

$$t^{n+1} = \frac{1}{2} H_{\sigma\tau} t^\sigma t^\tau + \frac{1}{3} K_{\sigma\tau\rho} t^\sigma t^\tau t^\rho$$

qui montre que la forme

$$K_{\sigma\tau\rho}\, d\omega^\sigma d\omega^\tau d\omega^\rho$$

est la forme de Darboux [1].

On peut écrire le déterminant

$$| x\, x_1 \ldots x_n\, y |$$

sous la forme

$$\sqrt{H} \sum_{k=0}^{n+1} X^k y^k.$$

Les X^k sont les coordonnées tangentielles de l'hyperplan tangent à l'hypersurface donnée, et l'on a

$$\text{(XII)} \quad \begin{cases} dX = d\omega^\sigma X_\sigma, \\ dX_i = \{ N_{i\sigma} + H_{i\sigma}(R - E) \} d\omega^\sigma X + K_{i\sigma}^\lambda d\omega^\sigma X_\lambda + H_{i\sigma} d\omega^\sigma Y, \\ dY = -\{ d(R - E) + N_\sigma d\omega^\sigma \} X + \{ M_\sigma^\lambda - d\omega^\lambda (R - E) \} X_\lambda \\ \qquad (i = 1, \ldots, n), \end{cases}$$

où les hyperplans $(X_1), \ldots, (X_n)$ et (Y) sont définis de la même manière que les points $(x_1), \ldots, (x_n)$ et (y) ont été définis.

2. Supposons que la forme de Darboux est de rang r, et que les expressions de Pfaff de base sont choisies de manière qu'on ait

$$(1) \quad K_{\alpha\beta\gamma} = K_{i\alpha\beta} = K_{ij\alpha} = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, r; \ \alpha, \beta, \gamma = r+1, \ldots, n).$$

Désormais nous conviendrons de désigner par les indices i, j, l quelques-uns des $1, 2, \ldots, r$ et par les indices α, β, γ quelques-uns des $r+1, \ldots, n$ et enfin par les indices p, q, t quelques-uns des $1, 2, \ldots, n$. Nous allons démontrer que le système des équations

$$(2) \quad \begin{cases} d\omega^1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ d\omega^r = 0 \end{cases}$$

est complètement intégrable.

---

(1) J. Kanitani, *Mem. Coll. Sci. Kioto*, t. IX, p. 269.

C'est évident, si $r = n - 1$. Nous supposerons que $r < n - 1$. Grâce aux équations (XI) et (1), on a

$$M_{\alpha\beta} - N_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}(R - E) \qquad (\alpha, \beta = r + 1, \ldots n).$$

Si, au moins une des fonctions $H_{r+1,r+1}, H_{r+1,r+2}, \ldots, H_{n,n}$ par exemple, $H_{\alpha\beta}$ n'est pas nulle, on a

$$M_{i\alpha} - N_{i\alpha} = H_{i\alpha}(R - E),$$

comme conséquence des équations

$$0 = \frac{\bar{\partial} K_{\alpha\alpha i}}{\partial \omega^\beta} - \frac{\bar{\partial} K_{\alpha\alpha\beta}}{\partial \omega^i} = H_{\alpha\beta}(M_{\alpha i} - N_{\alpha i}) - H_{\alpha i}(M_{\alpha\beta} - N_{\alpha\beta}).$$

Puis, les équations

$$\begin{aligned} 0 &= 2\left(\frac{\bar{\partial} K_{\alpha\gamma i}}{\partial \omega^\beta} - \frac{\bar{\partial} K_{\alpha\gamma\beta}}{\partial \omega^i}\right) \\ &= H_{\alpha\beta}(M_{\gamma i} - N_{\gamma i}) - H_{\gamma i}(M_{\alpha\beta} - N_{\alpha\beta}) \\ &\quad + H_{\gamma\beta}(M_{\alpha i} - N_{\alpha i}) - H_{\alpha i}(M_{\gamma\beta} - N_{\gamma\beta}) \end{aligned}$$

donnent

$$M_{i\gamma} - N_{i\gamma} = H_{\gamma i}(R - E).$$

Donc, on a

$$(3) \qquad M_{p\alpha} - N_{p\alpha} = H_{p\alpha}(R - E) \qquad (p = 1, \ldots, n;\ \alpha = r + 1, \ldots, n).$$

Ensuite, supposons que toutes les fonctions $H_{r+1,r+1}, \ldots, H_{n,n}$ sont nulles. Ce cas-ci ne peut se présenter que si $2r \geqq n$, car si $2r < n$, H serait nul contrairement à la supposition.

Par conséquent, $r > 1$ dans le cas où $r < n - 1$, et que nous considérons.

Des équations

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\bar{\partial} K_{\alpha\alpha j}}{\partial \omega^i} - \frac{\bar{\partial} K_{\alpha\alpha i}}{\partial \omega^j} \\ &= H_{\alpha i}(M_{\alpha j} - N_{\alpha j}) - H_{\alpha j}(M_{\alpha i} - N_{\alpha i}), \end{aligned}$$

on a

$$\frac{M_{\alpha 1} - N_{\alpha 1}}{H_{\alpha 1}} = \ldots = \frac{M_{\alpha r} - N_{\alpha r}}{H_{\alpha r}} = \sigma_\alpha.$$

Et puis, les équations

$$\begin{aligned} 0 &= 2\left(\frac{\bar{\partial} K_{\alpha\beta j}}{\partial \omega^i} - \frac{\bar{\partial} K_{\alpha\beta i}}{\partial \omega^j}\right) \\ &= H_{\alpha i}(M_{\beta j} - N_{\beta j}) - H_{\beta j}(M_{\alpha i} - N_{\alpha i}) \\ &\quad + H_{\beta i}(M_{\alpha j} - N_{\alpha j}) - H_{\alpha j}(M_{\beta i} - N_{\beta i}) \end{aligned}$$

donnent

$$(H_{\alpha i}H_{\beta j}-H_{\alpha j}H_{\beta i})(\sigma_\beta-\sigma_\alpha)=0 \qquad (i, j=1, \ldots, r)$$

qui montrent que

$$\sigma_\beta=\sigma_\alpha=\sigma,$$

car les équations

$$H_{\alpha i}H_{\beta j}-H_{\alpha j}H_{\beta i}=0$$

donnent comme résultat $H=0$ contrairement à la supposition.

Donc, on a dans ce cas aussi

$$(3') \qquad M_{p\alpha}-N_{p\alpha}=\sigma H_{p\alpha} \qquad (p=1, \ldots, n; \quad \alpha=r+1, \ldots, n).$$

En vertu de (3) ou (3′), on a

$$\begin{aligned} 2K_{ij\lambda}(\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}-\Gamma^\lambda_{\beta\alpha}) &= 2\left(\frac{\partial K_{ij\beta}}{\partial\omega^\alpha}-\frac{\partial K_{ij\alpha}}{\partial\omega^\beta}\right)\\ &= H_{i\alpha}(M_{j\beta}-N_{j\beta})-H_{j\beta}(M_{i\alpha}-N_{i\alpha})\\ &\quad+H_{j\alpha}(M_{i\beta}-N_{i\beta})-H_{i\beta}(M_{j\alpha}-N_{j\alpha})=0 \end{aligned}$$

qui donnent

$$(4) \qquad \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}-\Gamma^\lambda_{\beta\alpha}=0,$$

car le système des équations

$$K_{ij\lambda}\,d\omega^\lambda=0$$

contient r équations indépendantes (¹).

Les équations (4) montrent que le système (2) est complètement intégrable.

3. Ce que nous venons de vérifier montre qu'en choisissant les paramètres u^i convenablement, on peut réduire la forme de Darboux à une forme *différentielle* en conservant les relations (1). Nous supposerons que les paramètres sont choisis de cette manière et posons

$$d\omega^i=du^i.$$

En vertu de (3) ou (3′), les équations

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{\partial K_{\alpha i\beta}}{\partial u^j}-\frac{\partial K_{\alpha ij}}{\partial u^\beta}\right) = {} & H_{\alpha j}(M_{i\beta}-N_{i\beta})-H_{i\beta}(M_{\alpha j}-N_{\alpha j})\\ &+H_{ij}(M_{\alpha\beta}-N_{\alpha\beta})-H_{\alpha\beta}(M_{ij}-N_{ij}) \end{aligned}$$

(¹) CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux*, p. 50.

donnent

$$(4)\qquad 2\sum_{\lambda=1}^{r} K_{ij\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = H_{ij}(M_{\alpha\beta}-N_{\alpha\beta}) - H_{\alpha\beta}(M_{ij}-N_{ij}).$$

D'abord nous supposerons que, au moins, une des fonctions $H_{r+1,r+1}$, $H_{r+1,r+2}$, ..., $H_{n,n}$ par exemple $H_{\gamma\varepsilon}$ n'est pas nulle.

Dans ce cas, en vertu de (3) et (4), on a

$$(5)\qquad \sum_{\lambda=1}^{r} K_{ij\lambda}\rho^{\lambda} = H_{ij}(R-E) - (M_{ij}-N_{ij}) \qquad (i, j = 1, \ldots, r)$$

$$\Gamma^{i}_{\gamma\varepsilon} = \rho^{i} H_{\gamma\varepsilon}.$$

Puisque le système des équations (5) contient r équations indépendantes, il donne un unique système de solutions $\rho^1, \ldots, \rho^r$.

Donc, si $H_{\alpha\beta} \neq 0$, on a

$$(6)\qquad \Gamma^{i}_{\alpha\beta} = \rho^{i} H_{\alpha\beta},$$

qui est aussi vraie quand $H_{\alpha\beta} = 0$, comme on le voit directement par (4).

Grâce aux équations (3), (5), et (6), les équations

$$\frac{\partial(M_{\varepsilon i}-N_{\varepsilon i})}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial(M_{\varepsilon\gamma}-N_{\varepsilon\gamma})}{\partial u^{i}} = 2(N_i H_{\varepsilon\gamma} - N_{\gamma} H_{\varepsilon i})$$

donnent

$$(7)\qquad H_{\varepsilon i}\left\{\frac{\partial(R-E)}{\partial u^{\gamma}} + 2N_{\gamma}\right\} = H_{\varepsilon\gamma}\left\{\frac{\partial(R-E)}{\partial u^{i}} + 2N_i - 2\sum_{\lambda,\mu=1}^{r} K_{i\lambda\mu}\rho^{\lambda}\rho^{\mu}\right\}.$$

D'un autre côté, si $r < n-1$, l'équation

$$\frac{\partial(M^{\beta}_{\alpha}-N^{\beta}_{\alpha})}{\partial u^{\beta}} - \frac{\partial(M^{\beta}_{\beta}-N^{\beta}_{\beta})}{\partial u^{\alpha}} = 2N_{\alpha} \qquad (\alpha \neq \beta)$$

donne

$$(8)\qquad N_{\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\partial(R-E)}{\partial u^{\alpha}} = 0 \qquad (\alpha = r+1, \ldots, n),$$

et, par suite,

$$(9)\qquad N_i + \frac{1}{2}\frac{\partial(R-E)}{\partial u^{i}} = \sum_{\lambda,\mu=1}^{r} K_{i\lambda\mu}\rho^{\lambda}\rho^{\mu}.$$

En vertu des équations (5) et

$$2\left(\frac{\partial K_{il\alpha}}{\partial u^j} - \frac{\partial K_{ilj}}{\partial u^\alpha}\right) = \begin{array}{l} H_{ij}(M_{l\alpha} - N_{l\alpha}) - H_{l\alpha}(M_{ij} - N_{ij}) \\ + H_{lj}(M_{i\alpha} - N_{i\alpha}) - H_{i\alpha}(M_{lj} - N_{lj}), \end{array}$$

on a

$$\sum_{\lambda=1}^{r} K_{ij\lambda}\left\{\frac{\partial \rho^\lambda}{\partial u^\alpha} + \sum_{\mu=1}^{r} \rho^\mu(\Gamma^\lambda_{\mu\alpha} - H_{\mu\alpha}\rho^\lambda)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left\{H_{ij}(R-E) - (M_{ij} - N_{ij})\right\} + \sum_{\lambda,\mu=1}^{r} K_{j\lambda\mu}\rho^\lambda(\rho^\mu H_{i\alpha} - \Gamma^\mu_{i\alpha}).$$

D'un autre côté, l'équation

$$\frac{\partial(M_{ij} - N_{ij})}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial(M_{i\alpha} - N_{i\alpha})}{\partial u^j} - 2K_{ij\sigma}N^\sigma_\alpha$$
$$= 2(N_j H_{i\alpha} - N_\alpha H_{ij})$$

donne

$$\sum_{\lambda,\mu=1}^{r} \Gamma^\lambda_{i\alpha} K_{j\lambda\mu}\rho^\mu - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left\{H_{ij}(R-E) - (M_{ij} - N_{ij})\right\} - K_{ij\sigma}N^\sigma_\alpha$$
$$= H_{i\alpha}\left(N_j + \frac{1}{2}\frac{\partial(R-E)}{\partial u^j}\right) - H_{ij}\left(N_\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial(R-E)}{\partial u^\alpha}\right).$$

Donc, si $r < n-1$, on a

$$\sum_{\lambda=1}^{r} K_{ij\lambda}\left\{\frac{\partial \rho^\lambda}{\partial u^\alpha} + \sum_{\mu=1}^{r} \rho^\mu(\Gamma^\lambda_{\mu\alpha} - H_{\mu\alpha}\rho^\lambda) + N^\lambda_\alpha\right\} = 0,$$

et, par suite,

$$(12) \qquad \frac{\partial \rho^i}{\partial u^\alpha} + \sum_{\lambda=1}^{r} \rho^\lambda(\Gamma^i_{\lambda\alpha} - H_{\lambda\alpha}\rho^i) + N^i_\alpha = 0$$
$$(i = 1, \ldots, r, \qquad \alpha = r+1, \ldots, n).$$

Si $r = n-1$, en vertu de (7) et de (11), on a

$$\sum_{\lambda=1}^{n-1} K_{ij\lambda}\left\{\frac{\partial \rho^\lambda}{\partial u^n} + \sum_{\mu=1}^{n-1} \rho^\mu(\Gamma^\lambda_{\mu n} - H_{\mu n}\rho^\lambda) + N^\lambda_n\right\}$$
$$= \frac{H_{ij}H_{nn} - H_{in}H_{jn}}{H_{nn}}\left(N_n + \frac{\partial(R-E)}{\partial u^n}\right);$$

qui donnent

$$0 = (n-1)\left(N_n + \frac{\partial(R-E)}{\partial u^n}\right).$$

Donc, dans ce cas aussi, les équations (8) et (12) sont vraies.

Si l'on considère $u^1, \ldots, u^r$ comme constantes, en vertu de (6) et (12), on a

$$dx = \sum_{\sigma=r+1}^{n} du^\sigma x_\sigma,$$

$$dx_\alpha = \sum_{\sigma=r+1}^{n} du^\sigma \left(M_{\alpha\sigma} x + \sum_{\tau=r+1}^{n} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\lambda} x_\tau + H_{\alpha\sigma} z \right),$$

$$dz = \sum_{\sigma=r+1}^{n} du^\sigma \left\{ (N_\sigma + \sum_{\lambda=1}^{r} \rho^\lambda M_{\lambda\sigma}) x + \sum_{\tau=r+1}^{n} (N_\sigma^\tau + \sum_{\lambda=1}^{r} \rho^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^{\tau}) x_\tau + \sum_{\lambda=1}^{r} \rho^\lambda H_{\lambda\sigma} z \right\},$$

où

$$z = y + \sum_{\lambda=1}^{r} \rho^\lambda x_\lambda.$$

Donc, lorsque $u^1, \ldots, u^r$ sont constantes, le point (x) décrit une variété (Q) de dimensions $n-r$ dans la variété linéaire (L) de dimensions $n-r+1$ déterminée par les $n-r+2$ points (x), $(x_{r+1}), \ldots, (x_n), (z)$.

D'ailleurs, la variété (Q) est une quadrique comme on peut le vérifier facilement en remarquant que (12) est encore vraie si l'on remplace x par X, et que $(x\,X) = 0$.

Il résulte de là que l'hypersurface donnée est un lieu d'une quadrique de dimensions $n-r$ qui se déplace suivant une variété de dimensions r.

En tenant compte de (12), on peut démontrer facilement que l'équation de (Q) par rapport au repère formé par $n-r+2$ points $(x), (x_{r+1}), \ldots, (x_n), (z)$ est

$$2\xi^0 \xi^{n+1} = \sum_{\sigma,\tau=r+1}^{n} H_{\sigma\tau} \xi^\sigma \xi^\tau + 2 \sum_{\lambda=1}^{r} \sum_{\sigma=r+1}^{n} \rho^\lambda H_{\lambda\sigma} \xi^\sigma \xi^{n+1} + \left(\sum_{\lambda,\mu=1}^{r} H_{\lambda\mu} \rho^\lambda \rho^\mu + R - E \right) (\xi^{n+1})^2.$$

Ainsi, (Q) est la section de l'hyperquadrique (S) dont l'équation par rapport au repère formé par $n+2$ points (x), (x_1), ..., (x_n), (y) est

$$2\xi^0\xi^{n+1} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{n} H_{\sigma\tau}\xi^\sigma\xi^\tau + (R-E)(\xi^{n+1})^2,$$

faite par les r hyperplans

$$\begin{gathered}\xi^1 - \rho^1\xi^{n+1} = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \xi^r - \rho^r\xi^{n+1} = 0.\end{gathered}$$

Cela étant posé, lorsqu'on fait varier les variables u^1, ..., u^r seulement, P décrit une variété (V) contenue dans l'hypersurface donnée. On va démontrer que (S) enveloppe l'hypersurface donnée lorsque P décrit V.

En effet, en tenant compte de (5) et (9), on peut vérifier que l'intersection de (S) avec l'autre hyperquadrique attachée de ladite manière au point qui se trouve sur V et qui est infiniment voisin de P, coïncide avec l'intersection de (S) avec l'hyperquadrique,

$$\sum_{\lambda,\mu,\nu=1}^{r} K_{\lambda\mu\nu}(\xi^\lambda - \rho^\lambda\xi^{n+1})(\xi^\mu - \rho^\mu\xi^{n+1})\,du^\nu = 0.$$

Mais les équations

$$\sum_{\lambda,\mu=1}^{r} K_{\lambda\mu\nu}(\xi^\lambda - \rho^\lambda\xi^{n+1})(\xi^\mu - \rho^\mu\xi^{n+1}) = 0 \qquad (i=1, \ldots, r)$$

doivent donner comme résultat

$$\xi^i - \rho^i\xi^{n+1} = 0.$$

Car, si au moins l'un des $\xi^i - \rho^i\xi^{n+1}$, par exemple $\xi^1 - \rho^1\xi^{n+1}$, n'était pas nul, en posant

$$v^i = \frac{\xi^i - \rho^i\xi^{n+1}}{\xi^1 - \rho^1\xi^{n+1}} \qquad (i=2, \ldots, r),$$

on aurait r équations entre $r-1$ variables v^2, ..., v^r, ces relations étant indépendantes, parce que les déterminants d'ordre r

déduits du tableau

$$\begin{Vmatrix} K_{111} & \dots & K_{n11} \\ K_{112} & \dots & K_{n12} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{1nn} & \dots & K_{nnn} \end{Vmatrix}$$

ne sont pas tous nuls.

Il résulte de là que l'enveloppe de (S) est le lieu de (Q) qui se déplace de manière que P décrit (V), c'est-à-dire l'hypersurface donnée.

Donc, *l'hypersurface donnée est une enveloppe de ∞^r hyperquadriques satisfaisant à la condition que chacune touche son enveloppe suivant une quadrique de dimensions $n-r$.*

Ensuite, supposons que tous les $H_{\alpha\beta}$ sont nuls. Dans ce cas, on a

$$\Gamma^i_{\alpha\beta} = 0 \qquad (i = 1, \dots, r; \quad \alpha, \beta = r+1, \dots, n),$$

et, par suite, si l'on suppose que $u^1, \dots, u^r$ sont constants, on a

$$dx = \sum_{\sigma=r+1}^{n} du^\sigma x_\sigma,$$

$$dx_\alpha = \sum_{\sigma=r+1}^{n} \left\{ M_{\alpha\sigma} du^\sigma + \sum_{\tau=r+1}^{n} \Gamma^\tau_{\alpha\sigma} du^\sigma x_\tau \right\},$$

c'est-à-dire, lorsque $u^1, \dots, u^r$ sont constants, le point (x) décrit une variété linéaire de dimensions $n-r$ qui est déterminée par les $n-r+1$ points $(x), (x_{r+1}), \dots, (x_n)$.

Il résulte de là que l'hypersurface est un lieu d'une variété linéaire de dimensions $n-r$ qui se déplace suivant une autre variété de dimensions r.

L'hyperquadrique (S) dont l'équation par rapport au repère formé par les $n+2$ points $(x), (x_1), \dots, (x_n), (z)$, est

$$2\xi^0\xi^{n+1} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{n} H_{\sigma\tau}\xi^\sigma\xi^\tau + \sigma(\xi^{n+1})^2,$$

passe justement par la variété linéaire (L) déterminée par les $n-r+1$ points $(x), (x_{r+1}), \dots, (x_n)$, c'est-à-dire la variété définie par les équations

$$\begin{aligned}\xi^1 &= 0,\\ &\dots\dots\dots\\ \xi^r &= 0,\\ \xi^{n+1} &= 0.\end{aligned}$$

Lorsque seulement les variables $u^1, \dots, u^r$ varient, (S) enveloppe une hypersurface qui est engendrée par la variété d'intersection des $r+1$ hyperquadriques définies par les équations

$$(14)\qquad 2\xi^0\xi^{n+1} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{n} H_{\sigma\tau}\xi^\sigma\xi^\tau + \sigma(\xi^{n+1})^2,$$

$$(15)\qquad \sum_{\lambda,\mu=1}^{r} K_{\lambda\mu i}\xi^\lambda\xi^\mu + \sum_{\lambda=1}^{r}\xi^\lambda\xi^{n+1}\{(M_{\lambda i} - N_{\lambda i} - \sigma H_{\lambda i})\} + \left(N_i + \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial u^i}\right)(\xi^{n+1})^2.$$

Il y a deux sortes d'enveloppes. D'abord, si $\xi^{n+1}\neq 0$, les dernières r équations (15) donnent des solutions de la forme

$$\xi^i - \nu^i\xi^{n+1} = 0 \qquad (i = 1, \dots, r),$$

en vertu desquelles la première équation (14) donne

$$2\xi^0 = \sum_{\lambda=1}^{r}\sum_{\tau=r+1}^{n} H_{\lambda\tau}\nu^\lambda\xi^\tau + \left(\sum_{\lambda,\mu=1}^{r}\nu^\lambda\nu^\mu + \sigma\right)\xi^{n+1}$$

Donc, on a une enveloppe qui est le lieu d'une variété linéaire de dimensions r déterminée par ces $r+1$ équations.

Ensuite, si $\xi^{n+1} = 0$, les équations (15) donnent

$$\begin{aligned}\xi^1 &= 0,\\ &\dots\dots,\\ \xi^r &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, on a une enveloppe qui est engendrée par (L) lorsque $u^1, \dots, u^r$ varient. Il résulte de là que *l'hypersurface donnée est une enveloppe de ∞^r hyperquadriques satisfaisant à la condition que chacune touche son enveloppe suivant la variété linéaire de dimensions $n-r$.*