BULLETIN DE LA S. M. F.

G. BOULIGAND

Sur quelques points de topologie restreinte du premier ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 56 (1928), p. 26-35
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1928__56__26_0>

SUR QUELQUES POINTS DE TOPOLOGIE RESTREINTE DU PREMIER ORDRE;

PAR M. GEORGES BOULIGAND.

1. La topologie restreinte du premier ordre est l'ensemble des propriétés géométriques demeurant invariantes par les transformations ponctuelles continues et biunivoques

$$X = f(x, y, z), \qquad Y = g(x, y, z), \qquad Z = h(x, y, z),$$

f, g, h étant astreintes à posséder des dérivées premières continues. Il arrive très souvent qu'une théorie mathématique d'un certain degré de généralité gagne en clarté lorsqu'on y fait la part des propriétés purement topologiques, celle des propriétés topologiques restreintes du premier ordre (ou des ordres supérieurs) pour n'étudier qu'en dernière analyse les conséquences d'hypothèses ayant un champ d'invariance beaucoup plus étroit, par exemple les conséquences d'hypothèses métriques.

La théorie du potentiel fait particulièrement ressortir l'opportunité d'une stratification de ce genre. L'impossibilité d'un maximum ou d'un minimum pour une fonction harmonique, à l'intérieur du domaine où elle est régulière, est un caractère topologique : il sera impossible, par une transformation bicontinue et biunivoque, de déduire d'un champ scalaire continu donné un champ scalaire harmonique si le premier champ n'est monotone (au sens précédent). Les notions de la topologie restreinte du premier ordre deviennent nécessaires pour opérer la discrimination des *ensembles impropres*, c'est-à-dire ceux que l'on peut, lors de la résolution du problème de Dirichlet avec données continues à la frontière, enlever de cette frontière (les ajoutant au domaine) sans que la solution soit altérée (¹).

(¹) Ma première publication sur ce point s'intitule : *Dimension, étendue, densité* (*C. R. Ac. Sc. Paris*, t. 180, p. 245). Je suis revenu incidemment sur le sujet dans mon Mémoire : *Sur le Problème de Dirichlet* (*Bull. Soc. Pol. de Math.*, t. IV, année 1925, p. 59-112, n° 36), et j'ai repris la question plus à fond dans un article récent de l'*Enseignement mathématique*, sous le titre : *En-*

2. Certaines propriétés, tout en étant qualitatives, le sont donc à divers degrés. C'est pourquoi les topologies restreintes des divers ordres se présentent à l'attention du mathématicien de la manière la plus naturelle. Au reste, des considérations de ce genre ont été déjà rencontrées dans certaines recherches : pour n'en citer qu'un exemple, rappelons d'abord comment M. Émile Borel a obtenu une *classification des ensembles de mesure nulle.*

L'illustre géomètre établit (admettons ici ce point) que tout ensemble de mesure nulle est un sous-ensemble d'un ensemble régulier de mesure nulle, lequel sera défini de la manière suivante (¹) :

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *une infinité énumérable de points, dits points fondamentaux; à chaque entier* h, *faisons correspondre une infinité de carrés* $C_1^{(h)}, C_2^{(h)}, \ldots, C_n^{(h)}, \ldots$, *dont les aires forment une série convergente et tels que le carré* $C_n^{(h)}$ *renferme à son intérieur* $C_n^{(h+1)}$ *et tende vers* A_n *lorsque* h *augmente indéfiniment. Soit* E_h *l'ensemble des points intérieurs à l'un des carrés* $C_n^{(h)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; *l'ensemble des points intérieurs à tous les* E_h $(h = 1, 2, \ldots)$ *est un ensemble régulier, qui est évidemment de mesure nulle.*

Supposons (c'est là une hypothèse encore très générale) que les $C_n^{(h)}$ aient précisément pour centre (quel que soit h) le point A_n. Tout cela posé, on peut dire que la rapidité de décroissance des carrés $C_n^{(h)}$ en fonction de h caractérise l'ensemble régulier. On peut donc établir la classification de tels ensembles sur la décroissance asymptotique de la somme

$$\sum_{p=n}^{\infty} \text{mes.}[\text{surf. } C_p^{(h)}] = \frac{1}{\psi_h(n)},$$

ou mieux sur la croissance d'une fonction $\psi(n)$, croissance qu'on

---

sembles impropres et nombres dimensionnels (année 1927, second fascicule). Ayant réalisé dernièrement de grands progrès dans ces questions, j'ai donné un exposé aussi systématique et aussi complet que possible dans un Mémoire, actuellement à l'impression au *Bulletin des Sciences mathématiques.*

(¹) Voir pour un exposé didactique le Chapitre IV des *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe*, Gauthier-Villars, Paris, 1917.

s'efforcera de rendre aussi rapide que possible, mais plus lente cependant que toutes celles des $\psi_h(n)$. Plus la fonction $\psi(n)$ croît rapidement, et moins l'ensemble de mesure nulle sera-t-il riche en points.

S'il existe un nombre p tel que la croissance de $\psi(n)$ puisse être prise égale à n^p, nous dirons que l'ensemble est d'ordre p. Si $\psi(n)$ est comparable à e^n, nous dirons que l'ensemble est d'ordre ω; si $\psi(n)$ est comparable à e^{e^n}, nous aurons un ensemble d'ordre ω^2, etc.

Cela posé (sans toutefois employer notre terminologie), M. Émile Borel montre que sa classification procède de la topologie restreinte du premier ordre. Remarquons d'ailleurs combien le principe qu'il emploie est apparenté à ceux qui révèlent les propriétés dimensionnelles des ensembles, et surtout au processus que M. Haussdorff a imaginé beaucoup plus tard ([1]). Toutefois, ce dernier a eu principalement en vue les extensions de la théorie de la mesure. L'appréciation des nuances d'extension dans la gamme de tous les ensembles de mesure nulle, problème résolu, comme nous venons de l'indiquer, par M. Émile Borel, rallie très naturellement à son point de vue mes propres tentatives sur la discrimination des ensembles impropres, dans le problème de Dirichlet ou dans des questions plus générales de calcul des variations, discrimination procédant des caractères dimensionnels de la frontière. Quoi qu'il en soit, toutes ces constructions se rattachent naturellement au point de vue actuel.

3. La théorie du potentiel a d'ailleurs attiré mon attention sur d'autres notions appartenant également à la topologie du premier ordre. J'ai donné notamment le résultat suivant :

Une suite de fonctions harmoniques dans un certain domaine, lesquelles y sont bornées dans leur ensemble, converge vers une fonction harmonique, pourvu qu'elle converge en une infinité de points de ce domaine ayant un point ULTRA-LIMITE O *intérieur au domaine, ce qui veut dire qu'à l'intérieur d'un cône droit à base circulaire de sommet* O, *tout autre cône droit à base circulaire de sommet* O *contient des points de convergence* ([2]).

([1]) *Dimension und aüszore Masz* (*Math. Ann.*, t. 79, 1918).

([2]) *Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. XI, p. 20.

Comme on le voit cet énoncé met à part une catégorie spéciale de points limites, précisément désignés sous le nom de points ultra-limites. Cette catégorie se présentera d'une manière toute naturelle si l'on cherche à fonder la topologie d'ordre un sur une classification appropriée des points limites : pour qu'elle soit telle, il faut et il suffit que cette classification soit invariante par la classe restreinte (au moyen de l'hypothèse de dérivabilité) des homéomorphies dont nous avons parlé en commençant.

Soit O un point limite d'un certain ensemble E de points de l'espace euclidien à n dimensions. On peut recourir à deux principes distincts :

1° Considérons le système des demi-droites Δ_ε joignant le point O aux points de E dont la distance à O ne dépasse pas ε. Ce système admet un certain ensemble limite Δ, lequel est naturellement fermé, lorsque ε tend vers zéro. Un premier mode de classification consiste à faire appel aux propriétés de l'ensemble limite Δ. Les hypothèses que l'on fera, relativement à ces propriétés de Δ, varieront d'ailleurs avec les questions étudiées : elles dépendront notamment de la nature de l'ensemble E. Quoi qu'il en soit, un cas particulièrement saillant est celui où l'ensemble limite Δ contient des rayons intérieurs, c'est-à-dire où il existe un cône, ayant pour sommet le point O, de directions appartenant toutes à Δ. Nous retrouvons ainsi les points ultra-limites de l'énoncé précédent.

2° Considérons le système des droites D_ε joignant deux points P et Q de E tels qu'on ait simultanément

$$OP \leq \varepsilon, \qquad OQ \leq \varepsilon.$$

Lorsque ε tend vers zéro, ce système admet encore un ensemble limite D de droites issues de O, lequel contient le système des demi-droites Δ et celui des demi-droites opposées. Mais, en général, on n'épuise pas ainsi toutes les droites de D. On s'en rend compte en géométrie plane en supposant que l'ensemble E soit formé des points de la courbe

$$y = x^2\left(2 + \cos\frac{1}{x}\right),$$

le point O coïncidant avec l'origine des coordonnées. Il n'y a qu'une seule droite Δ : c'est l'axe Ox. Au contraire, il y a une infinité de droites D, formée de celles dont le coefficient angulaire est compris entre -1 et $+1$. Pareillement, si E est une courbe (même algébrique) possédant un point de rebroussement, il n'y a qu'une seule demi-droite Δ tandis que toute droite issue de O est une droite de D.

Cela posé, lorsque l'ensemble D contient au moins un rayon intérieur, nous dirons que le point O est un *point hyperlimite*.

Nous dirons plus spécialement que le point O est un point *ultra-limite total* (ou un *point hyperlimite total*), lorsque le faisceau Δ (ou la gerbe D) épuise toutes les demi-droites (ou toutes les droites) menées par le point O.

Nous allons examiner, tel sera l'objet principal du présent article, le parti qu'on peut tirer de pareilles notions dans l'étude des continus. Nous allons surtout envisager deux problèmes particuliers, dont l'un conduit à des résultats mal démarqués, à l'opposé du second, où la conclusion obtenue est simple. Ainsi apparaîtra une fois de plus l'importance du choix des hypothèses dans des questions de cette nature.

4. Problème A. — *Étudier les continus dépourvus de points ultra-limites totaux.*

Une seule conséquence résulte simplement de cette hypothèse : le continu étudié sera dépourvu de points intérieurs, car tout point intérieur est un point ultra-limite total. En géométrie plane, nous serons donc ramenés à certaines courbes cantoriennes; parmi les courbes cantoriennes, même les plus simples, il en est qui ne répondraient pas à la question : par exemple une spirale logarithmique serait exclue, ce qui, d'ailleurs, ne saurait constituer matière à scandale. Mais voici un autre exemple sur lequel apparaît mieux le caractère artificiel de la délimitation considérée ici. Envisageons le continu défini au moyen de la courbe

$$y = \sin\frac{1}{x},$$

pour les points dont l'abscisse satisfait aux conditions

$$0 \leq x \leq 1.$$

Ce continu est dépourvu de points ultra-limites totaux. Par contre, le continu formé par les points de la même courbe dont l'abscisse satisfait aux conditions

$$-1 \leq x \leq +1$$

admet un segment (ouvert) de points ultra-limites totaux. Ceci montre que le continu obtenu en appliquant certaines transformations simples à un continu répondant aux conditions du problème A, par exemple en le complétant à l'aide d'une symétrie, peut très bien ne pas être une solution de ce problème.

5. Problème B. — *Étudier les continus dépourvus de points hyperlimites totaux.*

Nous allons arriver ici à une solution beaucoup plus intéressante et plus complète. Indiquons auparavant deux propositions préliminaires qui, sans être indispensables à la suite du raisonnement, sont cependant intéressantes à signaler.

Lemme I. — *Considérons, en géométrie à n dimensions, et à l'intérieur de la sphère unitaire, un ensemble dont l'étendue d'ordre $n-1$ est infinie*, c'est-à-dire tel que tout système de sphères recouvrant l'ensemble voit la somme des étendues périphériques (d'ordre $n-1$) des sphères qui le composent s'accroître toujours indéfiniment quand le maximum des diamètres tend vers zéro. *Alors, l'interjonction par des droites de tous les couples de points de cet ensemble épuise la totalité des directions de l'espace.*

En effet, supposons qu'une certaine direction n'ait pas été obtenue lors de la jonction des points de E deux à deux. Prenons-la pour direction d'un de nos axes de coordonnées n. Chaque parallèle à cet axe rencontrera l'ensemble E en un point au plus. En outre, l'ensemble des directions résultant de l'interjonction est fermé. Donc, on peut mener par l'origine des coordonnées un cône formé de toutes les droites faisant avec x_n un angle inférieur ou égal à un angle suffisamment petit, de manière qu'aucun rayon issu du sommet et intérieur à ce cône ne soit parallèle à une droite d'interjonction. Dans ces conditions, on trouve facilement que la limite inférieure (pour des rayons évanescents) de la somme des étendues périphériques de sphères recouvrant l'ensemble, non seulement ne croît pas indéfiniment, mais encore admet une limite supérieure de la forme

$$\frac{\sigma_n}{\sin\alpha},$$

σ_n désignant l'aire de la sphère unitaire dans l'espace à n dimensions. Il y a donc contradiction, d'où l'impossibilité de direction non obtenue dans l'interjonction. C. Q. F. D.

Lemme II. — *Considérons, en géométrie à n dimensions, un continu borné dont l'étendue d'ordre n — 1 est infinie. Alors, il possède au moins un point hyperlimite total* (¹).

En effet, le continu donné étant borné, on peut l'enfermer dans un *cube* (d'ordre n). Subdivisons-le en 2^n cubes égaux. Chacun d'eux contiendra un ensemble, qui n'est plus nécessairement un continu; mais l'un au moins de ces ensembles sera d'étendue d'ordre $n - 1$ infinie. On pourra de proche en proche définir une suite de cubes emboîtés tels que chacun d'eux découpe une portion de E dont l'étendue d'ordre $n - 1$ est infinie. Le point limite de cette suite de cubes est alors, en vertu de nos définitions et du lemme I, un point hyperlimite total. C. Q. F. D.

6. Au moyen de ces propositions, abordons maintenant la résolution du problème B.

Soit C un continu dépourvu de points hyperlimites totaux. Soit M un point quelconque de C. Formons l'ensemble D correspondant : je puis mener par M au moins une droite d n'appartenant pas à D; alors, le point M est nécessairement un point isolé de C sur cette droite. D'autre part, considérons les droites parallèles à d; à tout $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un δ positif tel que chacune de ces droites, située à une distance de d qui soit $< \delta$ coupe C au plus en un point intérieur à la sphère de centre M et de rayon ε. Ainsi, la classe des continus cherchés comprendra notamment :

1° Dans le plan, des courbes représentables aux environs de chaque point (moyennant un choix correspondant des axes) par une équation explicite $y = \varphi(x)$;

(¹) Mais non nécessairement un point ultra-limite, même partiel. Exemple : soit pour $0 < x < 1$ la courbe $y = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ est de longueur infinie. Il n'y a pas cependant de point ultra-limite.

2° Dans l'espace à 3 dimensions, des surfaces représentables aux environs de chaque point (moyennant un choix correspondant des axes) par une équation de la forme $z = \varphi(x, y)$ et ainsi de suite.

Pour obtenir ainsi des solutions particulières du problème B, il nous reste à tenir compte du fait suivant : non seulement, dans un certain voisinage de M, la direction de la droite d sera telle que les parallèles infiniment voisines ne rencontrent C qu'en un point au plus infiniment voisin de M; mais encore cette propriété appartiendra à tout un continuum de directions contenant d comme élément intérieur. Il en résulte que la partie de notre continu analytiquement représentable sous forme explicite pourra toujours être restreinte de manière que ses pentes soient bornées dans la région utile.

En définitive, nous obtiendrons, dans le plan, des lignes rectifiables; dans l'espace, des surfaces quarrables, etc., qui, par rapport à une direction convenablement associée à chaque point, posséderont la propriété d'être « localement à pentes bornées ».

Dans le plan, les lignes rectifiables qui, par rapport à une direction associée à chacun de leurs points, sont (dans un certain voisinage) à pentes bornées épuiseront toutes les solutions du problème. Notons qu'un arc simple d'une telle ligne est seul susceptible de répondre à la question, le croisement de deux arcs simples (tangents ou non) fournissant toujours un point hyperlimite total [1] : en effet, il est facile de prouver que, si deux lignes simples de Jordan se coupent en un point, l'interjonction des couples de points d'un tel ensemble épuise toutes les directions possibles : s'il y avait une direction absente, la prenant pour axe des y (l'origine étant au point d'intersection), il est clair que chaque parallèle à cet axe, suffisamment voisine, couperait chacun des deux arcs en un seul point, mais à ce titre, elle interjoindrait donc deux points de l'ensemble.

Pareillement, dans l'espace les seules surfaces répondant à la question sont des surfaces quarrables dont chaque point a pour environs une rondelle homéomorphe à un disque (rondelle qui,

---

[1] Nous rencontrons ici une circonstance singulière analogue à celle du problème A : la somme de deux continus solutions, si elle est elle-même un continu, n'est pas forcément solution.

relativement à une direction convenable associée au point, est à pentes bornées). Mais ici, nous cessons d'obtenir de la sorte tous les continus répondant à la question. Il est clair que chaque sous-ensemble continu d'une des surfaces qui vient d'être définie y répond également.

Signalons encore la possibilité de décomposer les lignes et les surfaces précédentes en un nombre fini de morceaux représentables chacun sous forme explicite : c'est là une conséquence immédiate du théorème de Borel-Lebesgue.

Nous n'insisterons pas davantage. Nous allons seulement, pour terminer, montrer comment les notions que nous avons mises en œuvre et les résultats que nous avons obtenus sont liés à quelques autres travaux.

7. Dans un Mémoire récent (1), M. Georges Valiron a fait connaître un ensemble important de résultats, relatifs à l'étude d'une surface possédant, en chaque point, un plan tangent. M. Georges Valiron pose la définition suivante :

La surface S possède un plan tangent π_0 en un point M_0 lorsqu'il existe un plan unique π_0 passant par M_0 et tel qu'à chaque nombre $\eta > 0$ on peut faire correspondre un $\varepsilon > 0$ tel que l'angle de M_0M avec π_0 soit $< \eta$ dès que la distance de M à la normale en M_0 à π_0 est $< \varepsilon$.

Cette définition, qui diffère (comme le remarque l'auteur) de celle des traités classiques (2), est la plus naturelle en topologie restreinte du premier ordre lorsqu'on adopte le premier des deux principes de classification pour les points limites (n° 3). L'hypothèse d'existence d'un plan tangent peut alors se formuler ainsi : l'ensemble Δ relatif au point M_0 est un ensemble plan. Si cet ensemble constitue la totalité du plan qui le contient, nous dirons, avec M. Valiron, que pour le point M_0 le plan tangent est *ordinaire*. Malgré cette précaution, on ne peut affirmer, comme l'indique M. Valiron, qu'il existe, aux environs d'un point, une correspondance biunivoque par projection orthogonale entre la

(1) *Bull. Soc. math.*, t. 54, 1926, p. 190 et suivantes.

(2) Elle correspond à la notion de la différentielle au sens de Stolz.

surface et son plan tangent. D'après ce qui précède, nous voyons qu'un tel résultat serait certainement atteint en excluant les points hyperlimites totaux.

8. Dans ses travaux sur les espaces abstraits M. Fréchet a considéré les espaces ($\mathcal{L}$) où les points d'accumulation [1] d'un ensemble donné peuvent s'obtenir au moyen d'une définition de la convergence d'une suite d'éléments. Plus généralement, il a introduit les espaces ($\mathcal{V}$) où les points d'accumulation peuvent se définir au moyen d'une famille de voisinages préalablement donnés pour chaque élément. Tout espace ($\mathcal{L}$) est un espace ($\mathcal{V}$), mais il existe des espaces ($\mathcal{V}$) qui ne sont pas des espaces ($\mathcal{L}$), et M. Fréchet cite notamment, à la suite d'une remarque faite par M. F. Riesz, l'espace où l'on convient de ne considérer comme véritables points d'accumulation que les points de condensation de M. Lindelöf. Dans un tel espace, on appellera voisinage d'un point l'ensemble obtenu en supprimant d'une sphère centrée en ce point tout ensemble au plus dénombrable de points du plan.

Pareillement, un espace ($\mathcal{V}$), non réductible à un espace ($\mathcal{L}$), s'obtiendra en prenant l'espace où l'on convient de ne regarder comme véritable point d'accumulation qu'un point ultra-limite (ou hyperlimite). Dans un tel espace, on appellera voisinage d'un point l'ensemble obtenu en supprimant d'une sphère située en ce point tout ensemble donnant naissance à un faisceau Δ dépourvu de rayon intérieur. Remarquons d'ailleurs qu'un point limite de points ultra-limites n'est pas nécessairement un ultra-limite. Il s'ensuit qu'au sens de M. Fréchet, *l'espace* ($\mathcal{V}$) *ainsi obtenu n'est pas un espace accessible*, car le dérivé d'un ensemble donné n'y est pas toujours fermé.

Si donc, s'écartant du point de vue dominant de cet article, on voulait étudier des ensembles dont l'ultra-dérivé ou l'hyperdérivé sont quelconques, c'est à la géométrie des espaces ($\mathcal{V}$) qu'il faudrait faire appel, pour y trouver des formes de raisonnement s'adaptant par avance à de telles recherches.

---

(1) Les points limites d'un ensemble sont aussi appelés points d'accumulation : ces deux locutions sont équivalentes. M. Fréchet donnant la préférence à la seconde, nous l'employons dans le cours de ce paragraphe.