BULLETIN DE LA S. M. F.

R. AMSLER

# Le calcul symbolique sommatoire

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 56 (1928), p. 141-166
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1928__56__141_0>

# LE CALCUL SYMBOLIQUE SOMMATOIRE;

PAR M. R. AMSLER.

Le calcul symbolique sommatoire est un auxiliaire du calcul des différences.

Il permet notamment de traiter simplement la théorie des polynomes et des nombres de Bernoulli, diverses questions sur le développement des fonctions hyperboliques ou circulaires, et aussi de résoudre les équations numériques algébriques par un procédé où se combinent le calcul des différences et les méthodes d'approximation de Newton et des parties proportionnelles.

Dans le présent Mémoire, on trouvera seulement l'exposé du principe du calcul et son application aux quadratures par ordonnées équidistantes.

On a terminé par deux quadratures, l'une exacte, l'autre approchée, pour montrer sur deux exemples simples l'utilité des formules de quadrature, calculées une fois pour toutes.

## DÉFINITION DES SYMBOLES.

RAPPEL DE PROPRIÉTÉS CONNUES. — On sait que le tableau des nombres figurés comprend une première ligne et une première colonne d'indice o formées d'éléments tous égaux à 1. Tout nouvel élément du tableau est la somme du précédent dans la ligne, et du précédent dans la colonne.

La loi de construction du tableau, comparée à la propriété

$$C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1}$$

des coefficients binomiaux, montre que la diagonale de rang $m$ du tableau renferme les coefficients du développement de $(a+b)^m$.

On en tire

$$C_m^p = F_{m-p}^p \qquad \text{et} \qquad F_m^p = F_p^m = \frac{(m+p)!}{m!\,p!} \qquad \text{avec } 0! = 1.$$

*Sommation par lignes.* — La loi de formation du tableau conduit à la relation

$$\sum_{x=0}^{x=p} \frac{(x+1)(x+2)\dots(x+p)}{m!} = \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+m+1)}{(m+1)!}$$

ou encore à

$$(I) \qquad \sum_{x=1}^{x=p} \frac{x(x+1)\dots(x+m-1)}{m!} = \frac{p(p+1)\dots(p+m)}{(m+1)!}.$$

La somme des $p$ nombres dont le dernier est

$$\frac{p(p+1)(p+2)\dots(p+m-1)}{m!}$$

s'obtient donc en introduisant dans ce nombre un facteur de plus au numérateur et au dénominateur.

*Sommation par colonnes.* — En supposant $p \geqq m > 0$, sommons les éléments de la colonne $m$

$$F_0^m + F_1^m + \dots + F_{p-m}^m = F_{p-m}^{m+1}.$$

Passons aux C

$$C_m^m + C_{m+1}^m + \dots + C_p^m = C_{p+1}^{m+1}.$$

Calculons le polynome $\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-m+1)}{m!}$ pour $x = 0$, $1, 2, \dots, m, \dots, p$.

Les valeurs obtenues en premier lieu sont nulles et les autres sont $C_m^m, C_{m+1}^m, \dots, C_p^m$.

D'où le résultat

$$\sum_{x=0}^{x=p} \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-m+1)}{m!} = C_{p+1}^{m+1}.$$

D'ailleurs ce résultat est valable pour $p < m$, puisque nous posons $C_k^m = 0$ pour $k$ entier, positif et inférieur à $m$, d'où

$$C_{p+1}^{m+1} = 0 \qquad \text{pour } p+1 < m+1 \quad \text{ou} \quad p \leqslant m.$$

Donc, pour $m$ entier et positif, on écrira

$$(\text{II}) \qquad \sum_{x=0}^{x=p} \frac{x(x-1)\ldots(x-m+1)}{m!} = C_p^m + C_p^{m+1}$$

Le $\Sigma$ est égal à son dernier terme plus la fraction obtenue en y introduisant un facteur de plus au numérateur et au dénominateur.

Les deux symbolismes. — Posons

$$\varphi_m = \frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)}{m!},$$
$$\gamma_m = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1)}{m!}.$$

Par une suite de divisions, un polynome $f(x)$ entier et de degré $m$ se met sous les deux formes

$$a_0\varphi_m + a_1\varphi_{m-1} + \ldots + a_m,$$
$$b_0\gamma_m + b_1\gamma_{m-1} + \ldots + b_m.$$

Le polynome en $\varphi$ suivant $a_0\varphi^m + a_1\varphi^{m-1} + \ldots + a_m$ s'appellera le symbole en $\varphi$ de $f(x)$.

Le polynome en $\gamma$ suivant $b_0\gamma^m + b_1\gamma^{m-1} + \ldots + b_m$ s'appellera le symbole en $\gamma$ de $f(x)$.

Deux polynomes en $\varphi$ et en $\gamma$, correspondant comme les précédents au même polynome en $\varphi$, sont appelés des symboles équivalents.

En appelant *première somme bernoullienne* d'un polynome $f(x)$, la somme des valeurs prises par ce polynome pour les valeurs entières consécutives 1, 2, 3, ..., $x$ attribuées à la variable, nous écrirons symboliquement, vu la formule (I),

$$S\varphi^m = \varphi^{m+1}.$$

En appelant *deuxième somme bernoullienne* du polynome $f(x)$, la somme des valeurs prises par $f(x)$ pour les valeurs entières consécutives 0, 1, 2, 3, ..., $x$, attribuées à la variable, nous aurons symboliquement, vu la formule (II),

$$S'\gamma^m = \gamma^m + \gamma^{m+1} = (\gamma+1)\gamma^m.$$

En appliquant ces règles de sommation à une équivalence nous aurons :

Première somme bernoullienne,

$$\varphi P(\varphi) = (\gamma + 1) Q(\gamma) - Q(o);$$

Deuxième somme bernoullienne,

$$\varphi P(\varphi) + P(o) = (\gamma + 1) Q(\gamma),$$

$P(o)$ et $Q(o)$ représentant évidemment le terme constant du polynome qui admet les deux symboles $P(\varphi)$ et $Q(\gamma)$.

L'équivalence $\varphi = \gamma$ conduit à

$$(1) \qquad \varphi^m = \gamma(\gamma + 1)^{m-1}.$$

L'équivalence $\gamma + 1 = \varphi + 1$ relative au polynome $x + 1$, conduit à

$$(2) \qquad \frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+m)}{m!} = (\gamma + 1)^m$$
$$= \varphi^m + \varphi^{m-1} + \ldots + \varphi^2 + \varphi + 1,$$

si l'on tient compte de la formule qui nous a conduit à la formule (I).

Changement de symbole. — Nous venons de voir que $\varphi^m$ équivaut à $\gamma(\gamma + 1)^{m-1}$.

Formons un tableau contenant dans sa première ligne les coefficients de $\varphi^m$, savoir le nombre 1 et $m$ fois le nombre o, la première colonne renfermant $m + 1$ éléments tous égaux à 1. Appliquons à ce tableau la loi de construction du tableau des figurés; dès la deuxième ligne, on voit apparaître ce tableau et les éléments qui forment une diagonale avec les éléments extrêmes des rangées initiales sont :

$$1, \quad C_{m-1}^1, \quad C_{m-1}^2, \quad \ldots, \quad C_{m-1}^p, \quad \ldots, \quad C_{m-1}^{m-1}, \quad o;$$

ce sont donc les coefficients du polynome $\gamma(\gamma + 1)^{m-1}$.

On tire de là la règle du changement de symbole.

On applique la loi de construction du tableau des figurés à un tableau dont la première ligne renferme les coefficients du symbole en $\varphi$ donné et dont la première colonne a tous ses éléments identiques, en nombre égal à celui des éléments de la première ligne.

Soit $5\varphi^3 - 2\varphi^2 + 4\varphi - 1$, nous formons le tableau

$$\begin{array}{llll} 5 & -2 & +4 & -1 \\ 5 & +3 & +7 & \\ 5 & +8 & & \\ 5 & & & \end{array}$$

La diagonale du tableau qui joint les extrémités des deux premières rangées, contient les coefficients du symbole en $\gamma$ cherché qui est

$$5\gamma^3 + 8\gamma^2 + 7\gamma - 1.$$

Changer $x$ en $-x$. — Dans le polynome $\varphi_m$, changeons $x$ en $-x$, il vient

$$(-1)^m \frac{x(x-1)\ldots(x-m+1)}{m!} = (-1)^m \gamma_m.$$

Donc, pour changer $x$ en $-x$ en partant d'un symbole en $\varphi$, on remplace $\varphi$ par $-\gamma$. Si, au contraire, on part d'un symbole en $\gamma$, on remplace $\gamma$ par $-\varphi$.

Si l'on tient à rester dans le même symbolisme, il suffit de faire au préalable, ou ensuite un changement de symbole.

Ainsi, vu le tableau de changement de symbole relatif à

$$5\varphi^3 - 2\varphi^2 + 4\varphi - 1,$$

le changement de $x$ en $-x$ conduit à

$$-5\varphi^3 + 8\varphi^2 - 7\varphi - 1.$$

Par un changement de $x$ en $-x$, les formules (1) et (2) deviennent

$$\gamma^m = \varphi(\varphi - 1)^{m-1}, \tag{3}$$

$$(\varphi - 1)^m = \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-m)}{m!} \tag{4}$$
$$= \gamma^m - \gamma^{m-1} + \gamma^{m-2} + \ldots + (-1)^m.$$

Donner a $x$ un accroissement entier. — *Symboles en* $\varphi$. — La formule (2) nous montre qu'augmenter $x$ de 1 revient à changer $\varphi$ en $\gamma + 1$.

En tenant compte de la règle du changement de $x$ en $-x$, on voit que changer $x$ en $1-x$ revient à changer $\varphi$ en $1-\varphi$.

La même formule montre aussi qu'augmenter $x$ de $1$ revient à remplacer $P(\varphi)$ par la partie entière de l'expression $\frac{\varphi P(\varphi)}{\varphi - 1}$. Soit $p$ un *entier positif*.

Augmenter $x$ de $p$, c'est remplacer $P(\varphi)$ par la partie entière de $\frac{\varphi^p P(\varphi)}{(\varphi - 1)^p}$.

Remplacer $x$ par $x - p$, c'est remplacer $P(\varphi)$ par la partie entière de $\frac{(\varphi - 1)^p P(\varphi)}{\varphi^p}$.

En particulier, faire $x = -p$ dans un polynome en $x$, c'est former le coefficient de $\varphi^p$ dans le produit $(\varphi + 1)^p P(\varphi)$, $P(\varphi)$ étant le symbole du polynome donné.

*Symboles en $\gamma$.* — Vu la formule (41), diminuer $x$ de $1$, c'est remplacer $\gamma$ par $\varphi - 1$ ; changer $x$ en $-1-x$, c'est remplacer $\gamma$ par $-1-\gamma$.

Si $Q(\gamma)$ est un symbole en $\gamma$, diminuer $x$ de $p$ (entier positif), c'est prendre la partie entière de $\frac{\gamma^p Q(\gamma)}{(\gamma + 1)^p}$.

Augmenter $x$ de $p$, c'est prendre la partie entière de l'expression $\frac{(\gamma + 1)^p Q(\gamma)}{\gamma^p}$.

En particulier, faire $x = p$, c'est former le coefficient de $\gamma^p$ dans le produit $(\gamma + 1)^p Q(\gamma)$.

Accroissements successifs égaux à 1. — Soit

$$5\varphi^3 - 2\varphi^2 + 4\varphi - 1$$

le symbole de $f(x)$. Pour augmenter $x$ de $1$ à plusieurs reprises, appliquons la règle connue de la division par un binome du premier degré (ici $\varphi - 1$)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5 | $-2$ | $+4$ | $-1$ |
| $f(x+1)$ | 5 | $+3$ | $+7$ | $+6$ |
| $f(x+2)$ | 5 | $+8$ | $+15$ | $+21$ |
| $f(x+3)$ | 5 | $+13$ | $+28$ | $+49$ |
| ......... | . | .... | .... | .... |

On reconnaît le tableau du changemeat de symbole : on a évidemment

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 6, \quad \ldots.$$

Réciproquement, connaissant les valeurs $-1$, $6$, $21$, $49$ d'un polynome du troisième degré, pour $= 0, 1, 2, 3$, il est possible de construire le tableau à partir de sa dernière colonne, d'où le symbole en $\gamma$, puis le symbole en $\varphi$ du polynome. Le symbole en $\gamma$ est conforme à la formule d'interpolation de Newton, car $7$, $8$, $5$ sont évidemment les différences successives de $-1$ dans la suite $-1$, $6$, $21$, $49$.

Différences successives d'un polynome $f(x)$. — $f(x) - f(x-1)$ sera la différence *arrière*; la différence *arrière* de $f(x) - f(x-1)$ sera la différence arrière *seconde* de $f(x)$, etc.; $f(x+1) - f(x)$ est la différence *avant* de $f(x)$, etc.

I. *Différences arrière.* — Les paragraphes qui précèdent montrent que les différences arrière successives de $f(x)$ sont représentées par les parties entières de $\frac{P}{\varphi}, \frac{P}{\varphi^2}, \frac{P}{\varphi^3}, \ldots$, en appelant $P(\varphi)$ le symbole de $f(x)$. En particulier, les coefficients de $P(\varphi)$ sont les différences arrière prises pour $x = 0$.

Les différences arrière se notent également par les parties entières de $\frac{Q}{\gamma+1}, \frac{Q}{(\gamma+1)^2}, \ldots$, $Q(\gamma)$ symbolisant $f(x)$.

II. *Différences avant.* — Elles ont, comme symboles, les parties entières de $\frac{Q}{\gamma}, \frac{Q}{\gamma^2} \cdots$ ou de $\frac{P}{\varphi-1}, \frac{P}{(\varphi-1)^2}, \ldots$. En particulier, les coefficients du symbole $Q$ sont les différences avant de $f(x)$ prises pour $x = 0$.

## LA MULTIPLICATION.

Deux polynomes en $x$ étant donnés par leurs symboles, on se propose de former le symbole de leur produit. Nous séparons par le signe $\times$ les facteurs d'un produit *effectif* pour le distinguer d'un produit *symbolique*.

Symboles en $\varphi$. — Partons de l'identité

$$\varphi^{m+p} = \frac{x(x+1)(x+2)\dots(x+m-1)(x+m)\dots(x+m+p-1)}{(m+p)!}.$$

Diminuons $x$ de $m$ dans les deux membres par la règle connue

$$\varphi^p(\varphi-1)^m = \frac{(x-m)(x-m+1)\dots(x-1)x(x+1)\dots(x+p-1)}{(m+p)!}.$$

On en conclut, vu la formule (4),

$$\varphi^p(\varphi-1)^m = \frac{m!\,p!}{(m+p)!}(\varphi-1)^m \times \varphi^p,$$

ou encore

$$(5)\qquad \varphi^p \times (\varphi-1)^m = \mathrm{F}_m^p\,\varphi^p(\varphi-1)^m.$$

Cette formule peut s'écrire, à volonté,

$$\varphi^p \times (\varphi-1)^m = \frac{\varphi^p}{p!}\frac{d^p}{d\varphi^p}[(\varphi-1)^p(\varphi-1)^m],$$

$$\varphi^p \times (\varphi-1)^m = \frac{(\varphi-1)^m}{m!}\frac{d^m}{d\varphi^m}[\varphi^m\varphi^p];$$

d'où, immédiatement, les formules plus générales

$$(6)\qquad \varphi^p \times \mathrm{P}(\varphi) = \frac{\varphi^p}{p!}\frac{d^p}{d\varphi^p}[(\varphi-1)^p\,\mathrm{P}(\varphi)],$$

$$(7)\qquad (\varphi-1)^m \times \mathrm{P}(\varphi) = \frac{(\varphi-1)^m}{m!}\frac{d^m}{d\varphi^m}[\varphi^m\,\mathrm{P}(\varphi)].$$

*Formule générale.* — L'expression $\frac{1}{p!}\frac{d^p}{d\varphi^p}[(\varphi-1)^p\,\mathrm{P}(\varphi)]$ est le coefficient de $z^p$ dans le développement suivant les puissances croissantes de $z$ de l'expression

$$(\varphi+z-1)^p\,\mathrm{P}(\varphi+z),$$

par la formule de Mac-Laurin. C'est donc le terme indépendant de $z$ du développement de

$$\left(1+\frac{\varphi-1}{z}\right)^p\mathrm{P}(\varphi+z).$$

Le second membre de la formule (6) est donc le terme indépendant de $z$ du développement de

$$\left[\varphi + \frac{\varphi(\varphi - 1)}{z}\right]^p P(\varphi + z).$$

Le symbole du produit effectif $P(\varphi) \times Q(\varphi)$ est donc le terme indépendant de $z$ du développement de

$$Q\left[\varphi + \frac{\varphi(\varphi - 1)}{z}\right] P(\varphi + z).$$

Or on a

$$P(\varphi + z) = P(\varphi) + \frac{z}{1} P'(\varphi) + \frac{z^2}{1.2} P''(\varphi) + \dots,$$

$$Q\left[\varphi + \frac{\varphi(\varphi - 1)}{z}\right] = Q(\varphi) + \frac{\varphi(\varphi - 1)}{1.z} Q'(\varphi) + \frac{\varphi^2(\varphi - 1)^2}{1.2.z^2} Q''(\varphi) + \dots;$$

d'où la formule

$$(8)\quad P(\varphi) \times Q(\varphi) = PQ + \frac{\varphi(\varphi - 1)}{(1!)^2} P'Q' + \frac{\varphi^2(\varphi - 1)^2}{(2!)^2} P''Q'' + \dots + \frac{\varphi^n(\varphi - 1)^n}{(n!)^2} + \dots,$$

dans laquelle il y a $k + 1$ termes au second membre, $k$ étant le plus faible des degrés de P et Q.

Symboles en $\gamma$. — Il existe notamment les trois formules suivantes analogues à celles qui précèdent :

$$(9)\qquad \gamma^p(\gamma + 1)^m = F_m^p \gamma^p(\gamma + 1)^m,$$

$$(10)\qquad \gamma^p P \times (\gamma) = \frac{\gamma^p}{p!} \frac{d^p}{d\gamma^p}[(\gamma + 1)^p P(\gamma)],$$

$$(11)\quad P(\gamma) \times Q(\gamma) = PQ + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{(1!)^2} P'Q' + \frac{\gamma^2(\gamma + 1)^2}{(2!)^2} P''Q'' + \dots.$$

## LA SUBSTITUTION LINÉAIRE.

Augmentons $x$ de 1 à plusieurs reprises, par le procédé déjà indiqué, dans le polynome $\varphi_m$. Les coefficients du symbole $\varphi^m$

sont l'unité, suivie de $m$ zéros :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_m(x)$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | ... | 0 |
| $\varphi_m(x+1)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... | 1 |
| $\varphi_m(x+2)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... | $\frac{m+1}{1}$ |
| $\varphi_m(x+3)$ | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | ... | $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ |
| .......... | . | . | . | .. | .. | ... | ............... |

On reproduit ainsi le tableau des figures $\varphi$, de sorte que, pour $h$ entier et positif, on a

$$\varphi_m(x+h) = \varphi_m + \frac{h}{1}\varphi_{m-1} + \frac{h(h+1)}{1.2}\varphi_{m-2} + \dots + \frac{h(h+1)\dots(h+m-1)}{m!}.$$

Les deux membres sont des polynomes en $h$ qui coïncident pour toutes les valeurs entières et positives de $h$, donc pour plus de $m$ valeurs de $h$, ils sont identiques et la formule est valable pour $h$ quelconque.

Puisque $\varphi_{m-1}$, $\varphi_{m-2}$, ... dont les différences arrière successives de $\varphi_m$, on en conclut l'identité

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}\delta + \frac{h(h+1)}{1.2}\delta^2 + \dots + \frac{h(h+1)(h+2)\dots(h+m-1)}{m!}\delta^m. \tag{12}$$

$m$ étant le dégré de $f(x)$ et $\delta$ représentant la différence arrière d'ordre $a$ de $\varphi_m$.

En supposant $h = -p$ ($p$ entier et positif), on trouve la formule symboliquement abrégée

$$f(x) - f(x-p) = 1 - (1-\delta)^p. \tag{13}$$

Dans l'autre symbolisme, on trouvera des formules analogues, en changeant d'abord $x$ en $-x$ et $h$ en $-h$ dans la formule qui développe $\varphi_m(x+h)$, d'où une formule qui développe $\gamma_m(x+h)$.

On en tire

$$(14)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}\Delta+\frac{h(h-1)}{1.2}\Delta^2+\ldots$$
$$+\frac{h(h-1)(h-2)\ldots(h-m+1)}{m!}\Delta^m;$$

cette formule redonne une formule bien connue du calcul des différences si l'on y suppose $h$ entier et positif.

Généralisation. — I. On va développer $f(x+mh)$, $x$ et $h$ étant quelconques, et $m$ un entier positif.

Convenons que $\psi$, $\psi^2$, $\psi^3$, ... représenteront les expressions suivantes :

$$\frac{h}{1},\quad \frac{h(h+1)}{1.2},\quad \frac{h(h+1)(h+2)}{1.2.3},\quad \ldots.$$

Je dis qu'on peut écrire symboliquement

$$(15)\quad f(x+mh)=f(x)+\psi[1-(1-\delta)^m]$$
$$+\psi^2[1-(1-\delta)^m]^2+\ldots+\psi^p[1-(1-\delta)^m]^p.$$

$p$ étant le degré de $f(x)$, les crochets de la forme $[1-(1-\delta)^m]^k$ devant être entièrement développés, les puissances de $\delta$ devant alors être remplacées par les différences arrière correspondantes du polynome $f(x)$.

Les deux membres de (15) sont des polynomes en $h$ de degré $p$; il suffit de s'assurer qu'ils coïncident pour les valeurs suivantes de $h$

$$0,\quad -1,\quad -2,\quad \ldots,\quad -p;$$

$h=0$ donne $f(x)$ dans les deux membres.

Pour $h=-k\ (0<k\leqq p)$, on trouve au premier membre

$$f(x-mk)$$

et au deuxième

$$f(x)-C_k^1[1-(1-\delta)^m]$$
$$+C_k^2[1-(1-\delta)^m]^2-\ldots+(-1)^k C_k^k[1-(1-\delta)^m]^k.$$

ou encore

$$f(x)+\{1-[1-(1-\delta)^m]\}^k-1=f(x)+(1-\delta)^{mk}-1.$$

Il reste à vérifier que

$$f(x - mk) = f(x) + (1 - \delta)^{mk} - 1.$$

C'est la formule (13), où $p$ reçoit la valeur $mk$.

C. Q. F. D.

Appliquons la formule (15) en faisant $x = 0$ et supposant que $f(x)$ est le polynome $\varphi_p(x)$. Les différences successives de $\varphi_p(x)$ pour $x = 0$ sont nulles, sauf la $p^{\text{ième}}$ qui vaut 1.

D'ailleurs $\varphi_p(0) = 0$.

Le symbole de $\varphi_p(mh)$ est donc le coefficient de $\delta^p$ dans le deuxième membre de (16).

Autrement dit, en revenant aux notations ordinaires, le symbole de $\varphi_p(mx)$ est le coefficient de $z^p$ dans le développement de l'expression

$$\frac{1}{1 - \varphi[1 - (1 + z)^m]}$$

suivant les puissances de $z$.

D'ailleurs, le développement de $\varphi_p(x - q)$, pour $q$ entier et positif, résulte de la formule (13)

$$\varphi_p(x - q) = \varphi_p - C_q^1 \varphi_{p-1} + C_q^2 \varphi_{p-2} + \ldots + (-1)^p C_q^p,$$

quelques-uns des derniers termes pouvant être nuls si l'on a $p > q$.

On voit immédiatement que le symbole de $\varphi_p(mx - q)$ est le coefficient de $z^p$ dans le développement de l'expression

$$\frac{(1 - z)^q}{1 - \varphi[1 - (1 - z)^m]},$$

En imaginant le développement suivant les $\varphi_k$ d'un polynome $f(x)$ quelconque de degré $p$, on voit que le symbole de $f(mx - q)$ est le coefficient de $z^p$ dans le développement de l'expression

$$\frac{z^p \mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)(1 - z)^q}{1 - \varphi[1 - (1 - z)^m]},$$

$\mathrm{P}(\varphi)$ désignant le symbole de $f(x)$.

En appliquant deux fois le théorème d'après lequel coïncident deux polynomes de degré $k$ qui prennent la même valeur numérique pour plus de $k$ valeurs de la variable, on arrive à la conclusion suivante :

Le symbole de $f(\alpha x+\beta)$ est le terme en $z^p$ du développement de

$$\frac{z^p\,\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)(1-z)^{-\beta}}{1-\varphi[1-(1-z)^x]},$$

les développements des puissances $-\beta$ et $\alpha$ étant pratiquement limités aux termes en $z^p$.

*Exemple.* — On donne le symbole

$$\mathrm{P}(\varphi)=18\varphi^3-10\varphi^2+7\varphi-1,$$

y remplacer $x$ par $3x+z$.

On forme le terme en $z^3$ de

$$\frac{(18-10z+7z^2-z^3)(1-z)^{-2}}{1-\varphi[1-(1-z)^3]}.$$

ou de

$$\frac{(18-10z+7z^2-z^3)(1+2z+3z^2+4z^3)}{1-3\varphi z+3\varphi z^2-\varphi z^3}$$

ou de

$$\frac{18+26z+41z^2+55z^3}{1-3\varphi z+3\varphi z^2-\varphi z^3};$$

on trouve

$$486\varphi^3-90\varphi^2+63\varphi+55.$$

Le problème de la substitution linéaire étant ainsi résolu, on voit que la sommation des valeurs prises pour un polynome pour des valeurs de la variable formant une progression arithmétique, est ramenée au calcul d'une somme bernoullienne de première espèce.

II. Si l'on voulait changer $x$ en $\alpha x+\beta$ dans un symbole $\mathrm{Q}(\gamma)$, il y aurait lieu de former, en appelant $p$ le degré de Q, le terme en $z^p$ du développement de l'expression

$$\frac{z^p\,\mathrm{Q}\left(\frac{1}{z}\right)(1+z)^\beta}{1-\gamma\left[\overline{1+z}^{\,\alpha}-1\right]}.$$

## LA DÉRIVATION.

Dans la formule (12), prenons le coefficient de $h$ au second membre; il vient

$$(16)\qquad f'(x) = \frac{\delta}{1} + \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} + \dots + \frac{\delta^m}{m},$$

$n$ étant le degré de $f(x)$.

On aurait de même, d'après (14), la formule

$$(17)\qquad f(x) = \frac{\Delta}{1} - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} + \dots + (-1)^m \frac{\Delta^m}{m}.$$

On peut mettre sous la forme d'une certaine intégrale le symbole de $f'(x)$. Pour $\varphi_m$, on a

$$\frac{d\varphi_m}{dx} = \varphi^{m-1} + \frac{\varphi^{m-2}}{2} + \frac{\varphi^{m-3}}{3} + \dots + \frac{\varphi}{m-1} + \frac{1}{m},$$

ou encore

$$\frac{d\varphi_m}{dx} = \int_0^1 \frac{z^m - \varphi^m}{z - \varphi}\, dz$$

et, plus généralement, si $P(\varphi)$ est le symbole de $f(x)$

$$(18)\qquad f'(x) = \int_0^1 \frac{P(z) - P(\varphi)}{z - \varphi}\, dz.$$

Relations entre les dérivées et les différences du polynome entier :

1° *Expression de* $D^m$ *en fonction des différences.* — $D^m$ représentera la dérivée $m^{\text{ième}}$, $\delta^m$ et $\Delta^m$ les différences d'ordre $m$, arrière et avant.

Dans la relation (16), on peut ajouter indéfiniment des termes analogues à ceux qui y figurent, puisque les différences dont l'ordre dépasse le degré de $f(x)$ sont identiquement nulles. Nous écrirons symboliquement

$$f'(x) = L\frac{1}{1-\delta}.$$

Pour calculer $f''(x)$, il suffit de dériver $\delta$, $\delta^2$, $\delta^3$, ... dans la formule précédente.

La dérivée de $\delta$ est

$$\delta^2 + \frac{\delta^3}{2} + \frac{\delta^5}{3} + \dots = \delta\left(\delta + \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} + \dots\right).$$

La dérivée de $\delta^2$ est

$$\delta^3 + \frac{\delta^4}{2} + \frac{\delta^5}{3} + \ldots = \delta^2\left(\delta + \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} + \ldots\right).$$

On en conclut

$$f''(x) = \left(\delta + \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} + \ldots\right)^2 = \mathrm{L}^2 \frac{1}{1-\delta}$$

et généralement

$$\mathrm{D}^m = \mathrm{L}^m \frac{1}{1-\delta}.$$

On verrait de même que

$$\mathrm{D}^m = \mathrm{L}^m(1+\Delta).$$

2° *Expression de $\delta^m$ en fonction des dérivées.* — La formule de Taylor s'écrit

$$f(x+h) - f(x) = \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots;$$

d'où, pour $h = -1$,

$$\delta = \mathrm{D} - \frac{\mathrm{D}^2}{1.2} + \frac{\mathrm{D}^3}{1.2.3} + \ldots = 1 - e^{-\mathrm{D}};$$

on en conclurait que

$$\delta^m = (1 - e^{-\mathrm{D}})^m.$$

3° *Expression de $\Delta^m$ en fonction des dérivées.* — On aurait pareillement

$$\Delta^m = (e^{\mathrm{D}} - 1)^m.$$

4° *Relations entre les deux sortes de différences.* — En faisant $h = -1$ dans la formule (14), on trouve

$$\delta = \Delta - \Delta^2 + \Delta^3 + \ldots$$

ou encore

$$\delta = \frac{\Delta}{1+\Delta};$$

on en déduit

$$\delta^m = \left(\frac{\Delta}{1+\Delta}\right)^m;$$

en faisant $h = 1$ dans la formule (12), on trouve

$$\Delta = \delta + \delta^2 + \delta^3 + \ldots$$

ou encore

$$\Delta = \frac{\delta}{1 - \delta};$$

on en tire

$$\Delta^m = \left(\frac{\delta}{1 - \delta}\right)^m.$$

*Remarque.* — Posons la double égalité

$$e^{D} = 1 + \Delta = \frac{1}{1 - \delta}.$$

Si l'on tire l'une des trois quantités D, $\Delta$, $\delta$ de l'une de ces deux égalités, qu'on élève à une puissance quelconque d'exposant entier et positif, les deux membres de l'égalité obtenue, on trouve une relation symbolique exacte.

Application au symbole de $x^m$. — Le polynome $x^m$ a ses dérivées de tous ordres nulles pour $x = 0$, sauf la dérivée $m^{\text{ième}}$ qui ne dépend pas de $x$ et est égale à $m$!

Soient donc $\delta$, $\delta^2$, $\delta^3$, ..., $\delta^n$, ... les différences arrière, pour $x = 0$, du polynome $x^m$. Comme le polynome est nul pout $x = 0$, son symbole s'écrit

$$P_m(\varphi) = \delta\varphi + \delta^2\varphi^2 + \ldots + \delta^m\varphi^m.$$

On peut introduire des puissances de $\delta$ au delà de la $m^{\text{ième}}$, puisque les différences arrière d'ordre plus grand que $m$ sont nulles identiquement.

Pour faire la somme de la série

$$\delta\varphi + \delta^2\varphi^2 + \ldots + \delta^n\varphi^n + \ldots,$$

il faut tenir compte du fait que, seule, la dérivée $m^{\text{ième}}$ est différente de 0 pour $x = 0$. On peut donc dire que $P_m(\varphi)$ est égal au produit par $m$! du coefficient de $z^m$ dans le développement suivant :

$$\varphi(1 - e^{-z}) + \varphi^2(1 - e^{-z} + \ldots + \varphi^m(1 - e^{-z})^m + \ldots,$$

si l'on observe que la formule $\delta^n(1 - e^{-D})^z$ doit être appliquée pour $x = 0$.

Le développement qui précède est celui de la fonction

$$\frac{1}{1-\varphi(1-e^{-z})},$$

toute question relative à la convergence étant évidemment hors du sujet.

On peut donc écrire

$$\frac{1}{1-\varphi(1-e^{-z})}=1+\frac{z\,P_1(\varphi)}{1!}+\frac{z^2\,P_2(\varphi)}{2!}+\ldots+\frac{z^n\,P_n(\varphi)}{n!}+\ldots.$$

On aurait de même, en posant $Q_n(\gamma)$ comme symbole de $x^m$

$$\frac{1}{1-\gamma(e^z-1)}=1+\frac{z\,Q_1(\gamma)}{1!}+\frac{z^2\,Q_2(\gamma)}{2!}+\ldots+\frac{z^n\,Q_n(\gamma)}{n!}+\ldots.$$

On trouve ainsi

| | |
|---|---|
| $P_1(\varphi)=\varphi,$ | $Q_1(\gamma)=\gamma,$ |
| $P_2(\varphi)=2\varphi^2-\varphi,$ | $Q_2(\gamma)=2\gamma^2+\gamma,$ |
| $P_3(\varphi)=6\varphi^3-6\varphi^2+\varphi,$ | $Q_3(\gamma)=6\gamma^3+6\gamma^2+\gamma,$ |
| $P_4(\varphi)=24\varphi^4-36\varphi^3+14\varphi^2-\varphi,$ | $Q_4(\gamma)=24\gamma^4+36\gamma^3+14\gamma^2+\gamma,$ |
| ..............................., | ................................ |

## L'INTÉGRATION.

Étant donné le symbole d'un polynome $f(x)$, formons le symbole de la primitive de $f(v)$ *qui s'annule pour* $x=0$.

Soit, par exemple, $A\varphi^3+B\varphi^2+C\varphi+D$ le symbole de $f(x)$. Imaginons une division où le dividende serait $A\varphi^3+By^2+C\varphi+D$ et le diviseur $\varphi-1+\frac{\varphi^{-2}}{2}+\frac{\varphi^{-3}}{3}+\frac{\varphi^{-4}}{4}$.

On trouve un quotient du quatrième degré et un reste R de degré inférieur à $-1$ vérifiant l'identité

$$\begin{aligned}&A\varphi^3+B\varphi^2+C\varphi+D\\&\quad=\left(\varphi^{-1}+\frac{\varphi^{-2}}{2}+\frac{\varphi^{-3}}{3}+\frac{\varphi^{-4}}{4}\right)(a\varphi^4+b\varphi^3+c\varphi^2+d\varphi+e)+R.\end{aligned}$$

Je dis que $a\varphi^4+b\varphi^3+c\varphi^2+d\varphi$ symbolise la primitive cherchée.

Identifions

$$A = a, \qquad B = b + \frac{a}{2}, \qquad C = c + \frac{b}{2} + \frac{a}{3}, \qquad D = d + \frac{c}{2} + \frac{b}{3} + \frac{a}{4}.$$

Dérivons le symbole $a\varphi^4 + b\varphi^3 + c\varphi^2 + d\varphi$ par rapport à $x$; il vient, d'après la formule (16),

$$a\varphi^3 + b\varphi^2 + c\varphi + d + \frac{a\varphi^2 + b\varphi + c}{2} + \frac{a\varphi + b}{3} + \frac{a}{4}.$$

Il suffit d'ordonner pour retrouver

$$A\varphi^3 + B\varphi^2 + C\varphi + D.$$

C. Q. F. D.

*Dispositif pratique.* — On inscrit au dividende les coefficients du symbole donné, au diviseur les termes de la suite $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ en nombre égal à celui des coefficients du symbole donné. On détermine au quotient un nombre de coefficients égal au précédent.

Cherchons, par exemple, la primitive nulle pour $x = 0$ du polynome admettant le symbole $5\varphi^3 - 2\varphi^2 + 8\varphi - 7$ :

$$\begin{array}{rrrr|l}
5 & -2 & +8 & -7 & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\
\cline{5-5}
 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{4} & 5 - \frac{9}{2} + \frac{103}{12} - \frac{265}{24} \\
\cline{1-2}
 & & +\frac{9}{4} & +\frac{3}{2} & \\
\cline{3-3}
 & & & -\frac{103}{24} & \\
\cline{4-4}
\end{array}$$

La primitive cherchée admet le symbole

$$5\varphi^4 - \frac{9}{2}\varphi^3 + \frac{103}{12}\varphi^2 - \frac{265}{24}\varphi.$$

Il existe un dispositif analogue dans le symbolisme des $\gamma$, les coefficients du diviseur étant pris dans la suite indéfinie

$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad +\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \dots.$$

Formules de quadrature. — On va montrer que les formules calculées d'avance donnent la primitive d'un polynome quelconque pour toute valeur entière et positive de la variable, le polynome étant connu par son symbole en $\gamma$.

I. Soit $a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d$ le symbole de $f(x)$, nous cherchons la primitive de $f(x)$, nulle avec $x$, pour $x = 3$, 3 étant le degré de $f(x)$. Nous trouvons la primitive de $f(x)$, nulle pour $x = 0$, par la division définie par l'identité suivante :

$$a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d$$
$$= \left(\gamma^{-1} - \frac{\gamma^{-2}}{2} + \frac{\gamma^{-3}}{3} - \frac{\gamma^{-4}}{4}\right)(A\gamma^4 + B\gamma^3 + C\gamma^2 + D\gamma + E) + R$$
$$(\text{degré de } R < -1).$$

Il faut calculer le terme en $\gamma^3$ de

$$(\gamma + 1)^3(A\gamma^4 + B\gamma^3 + C\gamma^2 + D\gamma)$$

qui est aussi celui de

$$(3\gamma^2 + 3\gamma + 1)(A\gamma^4 + B\gamma^3 + C\gamma^2 + D\gamma + E).$$

C'est aussi le terme en $\gamma^4$ du produit

$$(3\gamma^3 + 3\gamma^2 + \gamma)(A\gamma^4 + B\gamma^3 + C\gamma^2 + D\gamma + E).$$

Cherchons la primitive nulle pour $x = 0$ du polynome dont le symbole est $3\gamma^3 + 3\gamma^2 + \gamma$

$$3\gamma^3 + 3\gamma^2 + \gamma = \left(\gamma^{-1} - \frac{\gamma^{-2}}{2} + \frac{\gamma^{-3}}{3} - \frac{\gamma^{-4}}{4}\right)$$
$$\times (u\gamma^4 + v\gamma^3 + w\gamma^2 + s\gamma + t) + R'$$
$$(\text{degré de } R' < -1).$$

Entre les identités des deux divisions, éliminons

$$\gamma^{-1} - \frac{\gamma^{-2}}{2} + \frac{\gamma^{-3}}{3} - \frac{\gamma^{-4}}{4}.$$

Il vient

$$(a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d)(u\gamma^4 + v\gamma^3 + w\gamma^2 + s\gamma + t)$$
$$-(3\gamma^3 + 4\gamma^2 + \gamma)(A\gamma^4 + B\gamma^3 + C\gamma^2 + D\gamma + E)$$
$$= R(u\gamma^4 + v\gamma^3 + w\gamma + s\gamma + t) - R'(A\gamma^4 + B\gamma^3 + C\gamma^2 + D\gamma + E).$$

Le second membre est de degré inférieur à $+3$. Donc les deux produits dont la différence forme le premier membre ont le même terme en $\gamma^4$.

La primitive de $f(x)$, calculée pour $x = 3$, est donc

$$du + cv + bw + as.$$

et l'on peut écrire, $F(x)$ étant une primitive *quelconque* de $f(x)$,

$$F(3) - F(0) = du + cv + bw + as.$$

Si l'on forme le symbole de $f(x)$ à l'aide des différences de $y_0$ dans la suite $y_0 y_1 y_2 y_3$ des valeurs que prend $f(x)$ pour $o = 0$, 1, 2, 3, on peut écrire

$$F(3) - F(0) = u y_0 + v \Delta y_0 + w \Delta^2 y_0 + \delta \Delta^3 y_0.$$

Cette formule de quadrature à *quatre ordonnées* résulte donc de la primitive nulle pour $x = 0$ du polynome

$$\varphi_4 - \gamma_4 = 3\gamma^3 + 3\gamma^2 + \gamma \qquad [\textit{voir} \text{ formule } (1)].$$

II. Un raisonnement analogue montre que pour calculer

$$F(3) - F(0)$$

pour un polynome $f(x)$ du $10^e$ degré, il suffit d'avoir calculé une fois pour toutes la primitive nulle pour $x = 0$ du polynome

$$3\gamma^{10} + 3\gamma^9 + \gamma^8.$$

Le tableau suivant donne les formules de quadrature à 2, 3, 4, 5 ordonnées, en supposant que l'équidistance des ordonnées n'est plus l'unité, mais possède une valeur quelconque $h$

$$S = h\,\frac{y_0 + y_1}{2}, \qquad S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

$$S = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3).$$

$$S = \frac{2h}{45}(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y^3 + 7y_4).$$

Revenons à l'hypothèse $h = 1$.

S'il s'agit, par exemple, de calculer la différence des primitives pour $x = 4$ et pour $x = 0$ d'un polynome $f(x)$ *du* $11^e$ *degré au* *plus*, on fait usage des coefficients du symbole de la primitive de

$$C_4^1\gamma^{11} + C_4^2\gamma^{10} + C_4^3\gamma^9 + C_4^4\gamma^8 = 4\gamma^{11} + 6\gamma^{10} + 4\gamma^9 + \gamma^8.$$

On est conduit à écrire

$$\begin{aligned} F(4) - F(o) = {} & 4y_0 + 8\Delta y_0 + \frac{20}{3}\Delta^2 y_0 + \frac{8}{3}\Delta^3 y_0 + \frac{14}{15}\Delta^4 y_0 \\ & - \frac{8}{945}\Delta^6 y_0 + \frac{8}{945}\Delta^7 y_0 - \frac{107}{14175}\Delta^3 y_0 + \frac{94}{14175}\Delta^9 y_0 \\ & - \frac{547}{93555}\Delta^{10} y_0 + \frac{2}{385}\Delta^{11} y_0. \end{aligned}$$

*On observe que le terme en* $\Delta^5 y_0$ *manque*. Montrons qu'on a, en effet,

$$\int_0^1 \gamma_5\, dx = o.$$

Cette intégrale s'écrit

$$\frac{1}{120}\int_0^4 (x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\, dz.$$

Posons $x = 2 + y$, elle se note

$$\frac{1}{120}\int_{-2}^{+2} y(y^2-1)(y^2-4)\, dy$$

et se compose en effet d'éléments deux à deux opposés.

En imaginant qu'on calcule $F(4) - F(o)$ pour le polynome :

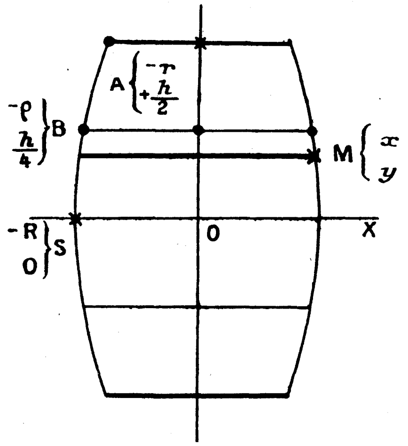
$$f(x) = \gamma_6 + \gamma_7,$$

on expliquerait de même le fait que $\Delta^6 y_0$ et $\Delta^7 y_0$ sont des coefficients opposés.

Exemple I. — *Volume du tonneau à douves paraboliques.* — Un tonneau est engendré par la révolution d'un arc de parabole ayant son milieu au sommet de la parabole, autour d'un axe parallèle à la tangente au sommet. Soit $y^2 = 2p(x + R)$ la parabole méridienne, R étant le rayon du bouge. Exprimons que le point A appartient à la parabole de façon à faire intervenir le rayon $r$ du fond

$$\frac{h^2}{4} = 2p(R - r),$$

$h$ étant la distance intérieure des deux fonds.




L'aire de la section d'ordonnée $y$ est $\pi x^2$, c'est-à-dire un polynome en $y$ du quatrième degré; donc nous appliquerons la formule de quadrature à cinq ordonnées, l'équidistance des ordonnées étant de $\frac{h}{4}$.

En appelant $\rho$ le rayon de la section du tonneau correspondant à $y = \pm \frac{h}{4}$, il vient

$$V = \frac{2}{45} \times \frac{h\pi}{4} [7r^2 \times 2 + 64\rho^2 + 12R^2] = \frac{h\pi}{45}(7r^2 + 32\rho^2 + 6R^2).$$

Pour évaluer $\rho$, exprimons que le point B est sur la parabole

$$\frac{h^2}{16} = 2p(R - \rho).$$

Éliminons $\rho$, il vient

$$8(R - \rho) = 2(R - r),$$
$$8\rho = 6R + 2r,$$
$$4\rho = 3R + r;$$

d'où

$$V = \frac{h\pi}{45}[7r^2 + 2(3R + r)^2 - 6R^2] = \frac{h\pi}{45}[24R^2 + 12Rr + 9r^2]$$
$$= \frac{h\pi}{15}[8R^2 + 4Rr + 3r^2].$$

Faisons apparaître le diamètre D du bouge, le diamètre $d$ du fond

$$V = \frac{\pi h}{60}(8D^2 + 4Dd + 3d^2).$$

Exemple II. — *Calcul approché de* $L_2$. — En posant

$$F_k^n = \frac{(k+1)(k+2)\dots(k+n)}{n!},$$

$k$ étant un nombre positif quelconque, on démontre aisément, par une multiplication symbolique, la formule suivante :

$$1 + \frac{\varphi_1}{F_k^1} + \frac{\varphi_2}{F_k^2} + \dots + \frac{\varphi_{n-1}}{F_k^{n-1}} = \frac{k}{k-x}\left[1 - \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{k(k+1)\dots(k+n-1)}\right]$$

(on en déduirait des développements en série, valables pour $x < k$ des expressions $\frac{k}{k-x}$, $\frac{k}{(k-x)^2}$, $\dots$).

En faisant $k = 4$, et changeant $x$ en $-x$ dans cette formule, il vient

$$\frac{1}{x+4} = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{\gamma_1}{5} + \frac{\gamma_2}{15} - \frac{\gamma_3}{35} + \frac{\gamma_4}{70}\right] - \frac{\gamma_5}{56(x+4)}$$

Une nouvelle application de cette formule nous donne

$$\frac{1}{x+4} = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{\gamma_1}{5} + \frac{\gamma_2}{15} - \frac{\gamma_3}{30} + \frac{\gamma_4}{70}\right]$$
$$- \frac{\gamma_5}{224} \times \left[1 - \frac{\gamma_1}{5} + \frac{\gamma_2}{15} - \frac{\gamma_3}{35} + \frac{\gamma_4}{70}\right] + \frac{\gamma_5^2}{56^2(x+4)}$$

Effectuons le produit

$$\gamma_5 \times \left[1 - \frac{\gamma_1}{5} + \frac{\gamma_2}{15} - \frac{\gamma_3}{35} + \frac{\gamma_4}{70}\right];$$

il faut calculer, d'après la formule (10), l'expression

$$\frac{\gamma^5}{5!}\frac{d^5}{d\gamma^5}\left[(\gamma+1)^5\left(1 - \frac{\gamma}{5} + \frac{\gamma^2}{15} - \frac{\gamma^3}{35} + \frac{\gamma^4}{70}\right)\right];$$

e crochet devant être calculé en négligeant tous les termes de degré inférieur à 5, on trouve

$$\frac{19}{42}\gamma^5 - \frac{2}{35}\gamma^6 + \frac{7}{5}\gamma^7 + \frac{12}{5}\gamma^8 + \frac{9}{5}\gamma^9.$$

Multiplions par $dx$ les deux membres de l'identité et intégrons entre o et 4; il vient

$$\begin{aligned} L_2 = {} & \frac{1}{4}\int_0^4 \left(1 - \frac{\gamma_1}{5} + \frac{\gamma_2}{15} - \frac{\gamma_3}{35} + \frac{\gamma_4}{70}\right) dx \\ & - \frac{1}{224}\int_0^4 \left(\frac{19}{42}\gamma_5 - \frac{2}{35}\gamma_6 + \frac{7}{5}\gamma_7 + \frac{12}{5}\gamma_8 + \frac{9}{5}\gamma_9\right) dx \\ & - \frac{1}{56^2}\int_0^4 \frac{\gamma_5^2}{x+4}\, dx. \end{aligned}$$

Comme, entre $x = 0$ et $x = 4$, la courbe $y = \frac{1}{x+4}$ tourne sa concavité vers les $y$ positifs, on voit qu'elle est comprise entre la corde qui joint les points $x = 0$, $x = 4$ et la tangente au point $x = 0$, d'où

$$\frac{8-x}{36} < \frac{1}{x+4} < \frac{8-x}{32},$$

pour toutes les valeurs de $x$ comprises entre o et 4. On tire de là

$$\int_0^4 \frac{8-x}{36}\gamma_5^2\, dx < \int_0^4 \frac{\gamma_5^2}{x+4}\, dx < \frac{8-x}{32}\gamma_5^2\, dx.$$

Posons

$$I = \int_0^4 \frac{8-x}{36}\gamma_5^2\, dx.$$

Au facteur $\frac{1}{56^2}$ près, I constitue une valeur approchée par défaut du dernier terme du second membre de l'identité. L'erreur commise sur I est inférieure à

$$\int_0^4 (8-x)\left[\frac{1}{32} - \frac{1}{36}\right] dx = \int_0^4 \frac{(8-x)}{288}\, dx = \frac{1}{8}.$$

D'ailleurs

$$\int_0^4 (8-x)\gamma_5^2\, dx = \int_0^4 (2-x)\gamma_5^2\, dx + 6\int_0^4 \gamma_5^2\, dx.$$

La première intégrale du second membre est nulle, comme on le voit en posant $x = 2 + z$.

Ce qui permet de poser, par approximation :

$$\frac{1}{\overline{56}^2}\int_0^4 \frac{\gamma_5^2}{x+4}\,dx = \frac{1}{6\times\overline{56}^2}\int_0^4 \gamma_5^2\,dx,$$

l'erreur sur ce terme positif étant par défaut et inférieure au $\frac{1}{8}$ de ce terme.

On a d'ailleurs symboliquement

$$\gamma^5\times\gamma^5 = \frac{1}{120}\gamma^5\frac{d^5}{d\gamma^5}[\gamma^5(\gamma+1)^5]$$
$$= \gamma^5 + 30\gamma^6 + 210\gamma^7 + 560\gamma^8 + 630\gamma^9 + 252\gamma^{10}.$$

Soit donc

$$J = \frac{1}{6\times\overline{56}^2}\int_0^4 (\gamma_5 + 30\gamma_6 + 210\gamma_7 + 560\gamma_8 + 630\gamma_9 + 252\gamma_{10})\,dx.$$

Avec une erreur *par défaut* plus petite que $\frac{J}{8}$, nous écrirons

$$L_2 = \frac{1}{4}\int_0^4\left(1 - \frac{\gamma_1}{5} + \frac{\gamma_2}{15} - \frac{\gamma_3}{35} + \frac{\gamma_4}{70}\right)dx$$
$$-\frac{1}{224}\int_0^4\left(\frac{19}{42}\gamma_5 - \frac{2}{35}\gamma_6 + \frac{7}{5}\gamma_7 + \frac{12}{5}\gamma_8 + \frac{9}{5}\gamma_9\right) + J.$$

Nous calculons d'abord J au moyen de l'expression de

$$F(4) - F(0)$$

indiquée plus haut. On trouve

$$J = \frac{32}{6\times\overline{56}^2\times 31185} = \frac{1}{3\times 14^2\times 31185} = \frac{1}{18336780},$$

d'où

$$\frac{J}{8} = \frac{1}{24\times 196\times 31185} = \frac{1}{146694248}.$$

On trouve que

$$\frac{J}{8} < 6{,}82.10^{-9}.$$

Le calcul est le suivant, toujours en appliquant l'expression connue de $F(4) - F(0)$ :

$$L_2 = \frac{43.67}{63} - \frac{0.509}{18522} + \frac{0,1}{1833678},$$

On trouve que

$$0.693147176 < L_2 < 0.693147184;$$

d'où

$$L_2 = 0.69314718 \qquad \left(\text{à } \frac{1}{2.10^8} \text{ près dans un sens inconnu}\right).$$