J. HAAG

Sur le calcul de certaines déformations élastiques, avec application au spiral de montre

Bulletin de la S. M. F., tome 56 (1928), p. 240-273
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1928__56__240_0>

SUR LE CALCUL DE CERTAINES DÉFORMATIONS ÉLASTIQUES, AVEC APPLICATION AU SPIRAL DE MONTRE;

Par M. J. Haag.

I. — Théorie générale.

1. Introduction de l'énergie de déformation. — Soit un corps élastique S, soumis à certaines forces extérieures *permanentes* (Φ) et à certaines forces *variables* (F). Nous supposerons que ces dernières sont très petites et qu'elles dépendent *linéairement* de n paramètres indépendants $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ s'annulant avec elles et que nous appellerons leurs *coordonnées* (1). Sous l'action des forces (Φ) et (F), S se déforme élastiquement (2) et acquiert une certaine énergie de déformation $\frac{1}{2}W$. En principe, cette énergie ne peut être calculée, par la formule de Clapeyron, que si l'on connaît la déformation de S en chacun de ses points. Il y a cependant des cas, comme le cas des ressorts, par exemple, où l'on peut évaluer cette énergie directement, à partir des forces appliquées, sous la seule condition de connaître la forme *actuelle* de S. C'est dans cette hypothèse que nous nous placerons.

Faisons d'ailleurs observer que la forme actuelle de S peut très bien différer de la forme *naturelle* d'une quantité finie, comme il arrive fréquemment dans les ressorts un peu longs, sans que, pour cela, la limite d'élasticité soit atteinte. Chaque déformation *locale* reste très petite; mais, la déformation d'ensemble peut être grande.

Cela posé, la fonction W se présente toujours, d'après la forme même de la formule de Clapeyron, sous la forme d'un polynome du second degré en Q_i, polynome que nous écrirons, en l'ordonnant,

$$W = W_0 + 2\Sigma a_i Q_i + W'(Q_i), \tag{1}$$

(1) Ces coordonnées sont, par exemple, des composantes de forces ou de moments.

(2) Nous supposons donc que *la limite d'élasticité n'est pas atteinte*.

W' désignant une forme quadratique des Q_i. Les coefficients de cette forme, ainsi que les coefficients a_i et W_0, dépendent, en principe, des variables Q_i, car leur calcul fait intervenir la forme *actuelle* de S, laquelle dépend, bien entendu, des forces (F) et, par conséquent, des Q_i. Mais, comme les forces (F) sont supposées très petites, il en est de même de la déformation qui leur est imputable et l'on peut, dès lors, regarder comme *constants* les coefficients dont il vient d'être question.

2. Introduction des variables adjointes. — Donnons aux Q_i les accroissements infiniment petits dQ_i. Le corps se déforme infiniment peu. Supposons, d'autre part, qu'il soit *encastré* en un de ses points A, dans un obstacle *fixe*. Chacun de ses autres points subit un déplacement infinitésimal, dont les composantes sont des fonctions linéaires et homogènes des dQ_i, *à coefficients constants*. Les forces (Φ) et les forces (F) fournissent, du fait de ces déplacements, un certain travail élémentaire $d\mathfrak{T}$. Quant aux réactions d'encastrement appliquées en A, elles ne travaillent pas, puisque l'élément encastré ne peut subir aucun déplacement. Il s'ensuit que $d\mathfrak{T}$ est le travail élémentaire total reçu par S. On a donc

$$(2)\qquad d\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\,dW = \Sigma a_i\,dQ_i + \Sigma \frac{1}{2}\frac{\partial W'}{\partial Q_i}\,dQ_i.$$

D'autre part, le travail élémentaire des forces (F) se présente comme une forme bilinéaire des variables Q_i et dQ_i, *à coefficients constants*. Si nous l'ordonnons par rapport aux Q_i, il s'écrit

$$(3)\qquad \Sigma Q_i\,dq_i,$$

les dq_i étant des formes linéaires des dQ_i. Quant au travail des forces (Φ), il est simplement de la forme $\Sigma \alpha_i\,dQ_i$, les α_i étant des coefficients constants.

Dès lors, l'équation (2) s'écrit

$$\Sigma \alpha_i\,dQ_i + \Sigma Q_i\,dq_i = \Sigma a_i\,dQ_i + \Sigma \frac{1}{2}\frac{\partial W'}{\partial Q_i}\,dQ_i.$$

Ceci doit avoir lieu *quels que soient les* Q_i *et les* dQ_i. Donc [1],

[1] En réalité, si l'on serre la question de plus près, les coefficients a_i dépendent

$\alpha_i = a_i$ et

$$\Sigma Q_i\, dq_i = \Sigma \frac{1}{2} \frac{\partial W'}{\partial Q_i} dQ_i = \Sigma Q_i \frac{1}{2} \frac{\partial W'}{\partial (dQ_i)}.$$

Si nous égalons les coefficients de Q_i dans les deux membres de cette dernière identité, nous voyons que dq_i et dQ_i sont deux groupes de *variables adjointes*, par rapport à la *forme quadratique fondamentale* W'. Comme les coefficients de cette forme sont *constants*, nous pouvons intégrer les formules qui définissent les dq_i en fonction des dQ_i. Nous faisons ainsi correspondre aux variables Q_i les *variables adjointes* (¹)

$$(4) \qquad q_i = \frac{1}{2} \frac{\partial W'}{\partial Q_i}.$$

Nous dirons que ce sont les *paramètres de déformation* correspondant aux forces (F) définies par les coordonnées Q_i. Leur *signification géométrique* apparaîtra toujours nettement dans les applications. Elle résulte du fait que l'expression (3) représente le travail élémentaire des (F) pour la déformation due aux dQ_i. On peut dire aussi que $\Sigma Q_i q_i$ est le travail élémentaire des forces (F), *supposées constantes*, pour la déformation infinitésimale due à ces forces.

Si nous substituons les q_i aux Q_i dans W, la forme quadratique $W'(Q_i)$ se transforme en la *forme adjointe* $V'(q_i)$. La forme bili-

---

des Q_j et, en négligeant le second ordre, on doit écrire

$$a_i = a_{i0} + \sum_j a_{ij} Q_j.$$

On a $\alpha_i = a_{i0}$ et

$$\Sigma Q_i\, dq_i = \sum \frac{1}{2} \frac{\partial W'}{\partial Q_i} dQ_i + \Sigma\Sigma a_{ij} Q_j\, dQ_i.$$

On ne peut en conclure les égalités (4) que *si les* a_{ij} *sont très petits vis-à-vis des coefficients de la forme quadratique* W'. Il en est ainsi, en particulier, si la déformation totale produite par des forces finies est *infiniment petite dans son ensemble* et non pas seulement localement. Il en est également de même *si les forces* (Φ) *sont très petites*. Mais, si la déformation et les forces (Φ) sont finies, on ne peut plus répondre de l'exactitude, même approchée, des formules (4). Il y a là une difficulté dont il faudra se préoccuper dans l'étude du spiral.

(¹) Dans le cas particulier où les forces (Φ) n'existent pas, la formule (4) donne le *théorème de Castigliano* (*cf.* Lecornu, *Cours de Mécanique*, t. III, p. 102).

néaire $\Sigma a_i Q_i$ devient $\Sigma A_i q_i$, les coefficients A_i étant les variables adjointes des coefficients a_i. Enfin, W_0 ne change pas; mais, par raison de symétrie, nous l'appellerons maintenant V_0. Finalement, W devient

$$(5) \qquad V(q_i) = V_0 + 2\Sigma A_i q_i + V'(q_i).$$

On sait que

$$(6) \qquad Q_i = \frac{1}{2}\frac{\partial V'}{\partial q_i}.$$

Le travail des forces (Φ) pour la déformation (dq_i) est, nous l'avons vu, égal à

$$\Sigma a_i dQ_i = \Sigma A_i dq_i.$$

Les coefficients A_i jouent donc, au point de vue du travail des forces (Φ) dans cette catégorie particulière de déformations, le même rôle que les coordonnées Q_i pour le travail des forces (F). Mais, là se borne l'analogie, car les forces (Φ) ne peuvent évidemment pas être définies par la seule connaissance desdits coefficients, puisque ce sont des forces absolument quelconques, n'ayant rien à voir avec la loi qui donne les forces (F) en fonction des Q_i.

3. Déformation due a une variation infiniment petite des forces (Φ). — Supposons que les forces (Φ) subissent des accroissements infiniment petits $\delta\Phi$. Il se produit une certaine déformation Δ, qui donne aux q_i certains accroissements infiniment petits δq_i [1]. Considérons, d'autre part, la déformation D due à l'introduction des forces (F) de coordonnées Q_i. Les deux déformations étant *infiniment petites*, nous pouvons leur appliquer le *théorème de réciprocité*. Autrement dit, le travail des (F) pour la déformation Δ est identique au travail des ($\delta\Phi$) pour la déformation D. Or, le premier travail est $\Sigma Q_i \delta q_i$, d'après la définition même que nous venons de donner des δq_i. D'autre part, nous avons vu, au numéro précédent, que le travail des (Φ) pour la déformation D est $\Sigma a_i Q_i$. Le travail des ($\Phi + \delta\Phi$) pour la *même*

[1] Il ne faudrait pas en conclure que la déformation est identique à la déformation (δq_i) qui serait produite par les accroissements δQ_i donnés aux Q_i. Ces deux déformations peuvent être totalement différentes. Seule, leur répercussion sur les variables géométriques q_i est la même.

déformation est $\Sigma(a_i + \delta a_i)\,Q_i$. Comme ce travail est égal au travail des (Φ) augmenté du travail des ($\delta\Phi$), on en conclut que le travail des ($\delta\Phi$) est égal à $\Sigma Q_i\,\delta a_i$. On a donc l'identité

$$\Sigma Q_i\,\delta q_i = \Sigma Q_i\,\delta a_i,$$

quels que soient les Q_i. D'où il résulte que $\delta q_i = \delta a_i$. Donc, *la déformation due aux* ($\delta\Phi$) *produit sur les paramètres* q_i *les accroissements* δa_i.

4. Calcul du déplacement en un point quelconque de S sous l'action des ($\delta\Phi$). — Soient un point P de S et un élément de volume entourant ce point. Sous l'action des ($\delta\Phi$), cet élément subit une translation, de composantes δu, δv, δw et une rotation, de composantes δp, δq, δr. Pour les calculer, prenons comme forces (F) une force appliquée en P et de composantes X, Y, Z et un couple, dont le moment a pour composantes L, M, N. Ce sont ces six composantes que nous prenons pour coordonnées Q_i.

D'autre part, si notre élément de volume subit les translations et rotations du, dv, dw, dp, dq, dr, le travail des (F) est [1]

$$X\,du + Y\,dv + Z\,dw + L\,dp + M\,dq + N\,dr.$$

Les variables q_i sont donc ici u, v, w, p, q, r.

Dès lors, calculons l'énergie de déformation

$$\frac{1}{2}W(X, Y, Z, L, M, N)$$

correspondant aux forces (Φ) + (F). Si a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 désignent les demi-coefficients de X, Y, Z, L, M, N dans W, on a [2]

$$(7)\qquad \delta u = \delta a_1, \qquad \delta v = \delta a_2, \qquad \ldots, \qquad \delta r = \delta a_6.$$

5. Cas où les forces (Φ) sont petites. — Lorsque les forces (Φ)

---

[1] Il peut y avoir de la déformation pure. Mais, le travail des F imputable à cette déformation est infiniment petit avec l'élément de volume, tandis qu'il n'en est pas de même des travaux dus à la translation et à la rotation.

[2] Cette méthode ne diffère pas, quant à son principe, de la méthode due à M. Bertrand de Fontviolant, et fondée sur le principe des travaux virtuels (cf. Lecornu, *Cours de Mécanique*, t. III, p. 45 à 47).

sont assez petites pour ne produire qu'une déformation infiniment petite, on peut les considérer elles-mêmes comme des ($\delta\Phi$). Tout ce qui a été dit dans les n^{os} 3 et 4 peut alors leur être appliqué. En particulier, *les paramètres de déformation correspondants sont les a_i*. De même, le déplacement en un point quelconque est donné par les formules (7), où l'on supprime la lettre δ.

II. — Applications diverses.

6. Flexion d'une poutre encastrée. — Soit une poutre rectiligne, de longueur L, encastrée en O suivant Ox. Nous la supposons soumise à des forces (Φ) quelconques, dont le *moment fléchissant* au point P, d'abscisse x, est une fonction connue M de x.

Évaluons le fléchissement y en ce point. A cet effet, nous appliquons la méthode du n° 4. Nous appliquons, en P, une force Y perpendiculaire à Ox. Le double de l'énergie de déformation est, d'après une formule connue,

$$W = \frac{1}{EI}\int_0^x [M' - (x-x')Y]^2\,dx' + \frac{1}{EI}\int_x^L M'^2\,dx',$$

soit

$$W = W_0 - \frac{2Y}{EI}\int_0^x M'(x-x')\,dx' + \frac{Y^2}{EI}\int_0^x (x-x')^2\,dx'.$$

D'autre part, le travail élémentaire de la force Y pour le fléchissement dy est Y dy. Donc, Y et y sont des variables adjointes. Si la déformation de la poutre est supposée petite, ce qui a lieu si sa longueur n'est pas extrêmement grande par rapport à sa section, ou si les forces (Φ) sont assez petites, le fléchissement y est le demi-coefficient de Y dans W (n° 3), soit

$$y = \frac{1}{EI}\int_0^x M'(x-x')\,dx'. \tag{8}$$

Comme vérification, en dérivant deux fois par rapport à x, on retrouve la formule classique

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}.$$

La *flèche* est obtenue en faisant $x = L$ dans (8).

7. Ressort a lames. — Soit un ressort à lames régulièrement étagées, l'étagement étant a et la longueur de la maîtresse lame étant $2\,L$. Soit P le poids appliqué à chaque extrémité. Nous nous proposons de calculer le fléchissement y desdites extrémités.

Dans un étage quelconque, les moments fléchissants de toutes les lames sont égaux, si l'on suppose les lames bien collées à l'état déformé et à l'état naturel et si leur épaisseur commune est négligeable devant leur rayon de courbure. Si p désigne le nombre de ces lames, l'énergie de déformation de l'étage est

$$\frac{p}{\mathrm{EI}}\int_{(p-1)a}^{pa}\frac{\mathrm{P}^2}{p^2}x^2\,dx = \frac{\mathrm{P}^2 a^3}{3\mathrm{EI}}\left[3(p-1)+\frac{1}{p}\right].$$

Supposons n étages. Pour le dernier, il faut intégrer de $(n-1)a$ à L, ce qui donne

$$\frac{\mathrm{P}^2\mathrm{L}^3}{3\mathrm{EI}\,n}-\frac{\mathrm{P}^2 a^3}{3\mathrm{EI}}\left(n^2-3n-3-\frac{1}{n}\right).$$

L'énergie du ressort entier est finalement $\frac{1}{2}\mathrm{W}=\lambda\mathrm{P}^2$, en posant

$$(9)\qquad \lambda=\frac{\mathrm{L}^3}{3\mathrm{EI}\,n}+\frac{a^3}{3\mathrm{EI}}\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\right].$$

Remarquons maintenant que le travail élémentaire des forces P pour le fléchissement dy est égal à $2\,\mathrm{P}\,dy$. Donc, P et $2y$ sont variables adjointes et l'on a, d'après la formule (4),

$$2y=\frac{1}{2}\frac{\partial\mathrm{W}}{\partial\mathrm{P}},$$

soit $y=\lambda\mathrm{P}$. On retrouve une formule due à *Phillips* (*Annales des Mines*, 1852).

8. Ressort a boudin. — Supposons-le muni de deux courbes terminales aboutissant à l'axe Oz. L'une des extrémités est encastrée en un point fixe O. A l'autre extrémité O′ sont appliquées une force F, dirigée suivant Oz et un couple C, d'axe Oz.

Soient L la longueur de l'hélice, I le moment d'inertie de la section droite du fil par rapport au plan tangent au cylindre contenant le centre de gravité de cette section, et enfin I_0 le moment d'inertie polaire de ladite section ([1]). Posons, avec les notations habituelles,

$$A = EI, \qquad B = GI_0.$$

L'énergie de déformation se calcule immédiatement au moyen du *moment fléchissant* et du *moment de torsion*. Si l'on appelle R le rayon du cylindre moyen et φ l'inclinaison des spires sur les sections droites de ce cylindre, on a

$$(10) \qquad W = L\left[\frac{(C\cos\varphi - RF\sin\varphi)^2}{A} + \frac{(C\sin\varphi + RF\cos\varphi)^2}{B}\right].$$

D'autre part, soient z l'allongement du ressort et α son angle de torsion. Le travail élémentaire de la force F et du couple C pour les accroissements dz et $d\alpha$ est $F\,dz + C\,d\alpha$. Donc, z et α sont variables adjointes à F et C. On en conclut, si F et C sont assez petits,

$$z = \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial F}, \qquad \alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial C}$$

et l'on retrouve des formules connues.

9. Ressort conique. — Supposons-le soumis à une force F dirigée suivant son axe et appliquée à son extrémité centrale. Si l'on suppose les spires très aplaties, le ressort travaille uniquement à la torsion et son énergie de déformation est approximativement

$$\frac{1}{2}W = \frac{F^2}{2B}\int r^2\,ds.$$

Si R_0 désigne le rayon intérieur et R le rayon extérieur, et si l'on suppose que l'on ait affaire à une spirale d'Archimède à spires très arrondies, on trouve approximativement

$$W = \frac{F^2}{2B}L(R_0^2 + R^2).$$

D'autre part, l'aplatissement z du ressort est variable adjointe à F.

([1]) Si la section est circulaire ou de forme voisine. Dans le cas contraire, il faut multiplier I_0 par un certain facteur correctif, que fait connaître la théorie de la torsion.

Donc, si F est assez petit,

$$(11) \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial F} = \frac{FL}{2B}(R_0^2 + R^2).$$

III. — Théorie du spiral.

10. Spiral plan. — Prenons deux axes rectangulaires Oxy, ayant leur origine sur l'axe du balancier. L'une des extrémités A du spiral est encastrée en un point *fixe* (piton), que nous prendrons pour origine des arcs s. L'autre extrémité B est encastrée dans le balancier (virole). Nous appellerons x_1, y_1 ses coordonnées et φ_1 l'angle polaire de sa tangente. Grâce à l'encastrement, les variations de φ_1 sont aussi les variations d'azimut du balancier.

Nous appellerons de même x, y, φ les coordonnées d'un point P quelconque et l'angle polaire de la tangente en ce point.

Nous appellerons enfin L la longueur totale du spiral.

Tout ce que nous allons dire du spiral plan s'appliquera approximativement au spiral cylindrique, à condition que les spires en soient très aplaties, comme cela a lieu dans la pratique. Il nous suffira simplement de supposer les spires circulaires.

11. Calcul de la déformation infiniment petite. — Appliquons au spiral des forces (Φ) quelconques situées dans son plan et proposons-nous d'évaluer le déplacement infiniment petit δx, δy, $\delta\varphi$ que subit un point P quelconque pour des accroissements infiniment petits donnés aux forces (Φ). A cet effet, nous appliquons la méthode du n° 4. Appliquons en P une force F, de composantes X, Y et un couple de flexion C. Calculons l'énergie de déformation du spiral sous l'action de toutes ces forces.

Soit μ' le moment fléchissant des forces (Φ) au point P' d'abscisse curviligne s', c'est-à-dire le moment résultant, par rapport à P', des forces (Φ) appliquées le long de l'arc P'B. Le moment fléchissant de la force F et du couple C est zéro si $s' > s$ et $C + (x - x')Y - (y - y')X$, si $s' < s$. Posons

$$(12) \qquad M = C + xY - yX.$$

Le moment fléchissant total est $\mu' + M - x'Y + y'X$. Donc, le double de l'énergie de déformation est, avec les notations habituelles,

$$(13)\qquad W = \frac{1}{EI}\int_0^s (\mu' + M - x'Y + y'X)^2\,ds' + \frac{1}{EI}\int_s^L \mu'^2\,ds'.$$

Prenons les variables X, Y, M comme variables Q_1, Q_2, Q_3. Nous avons alors, avec les notations du n° **1**,

$$(14)\qquad W' = \frac{s}{EI}(q^2X^2 + p^2Y^2 + M^2 - 2nXY + 2\eta MX - 2\xi MY).$$

en posant

$$(15)\qquad sp^2 = \int_0^s x'^2\,ds', \qquad sq^2 = \int_0^s y'^2\,ds', \qquad sn = \int_0^s x'y'\,ds';$$

$$(16)\qquad s\xi = \int_0^s x'\,ds', \qquad s\eta = \int_0^s y'\,ds'.$$

On peut remarquer que ξ, η sont les coordonnées du centre de gravité G de l'arc AP; sp^2, sq^2 sont ses moments d'inertie par rapport à Oy et à Ox; enfin, sn est son produit d'inertie par rapport à Oxy.

Posons maintenant

$$(17)\qquad a = \frac{1}{EI}\int_0^s \mu' y'\,ds', \qquad b = \frac{-1}{EI}\int_0^s \mu' x'\,ds', \qquad c = \frac{1}{EI}\int_0^s \mu'\,ds'.$$

En comparant avec les formules (1), nous voyons que

$$(18)\qquad a_1 = a, \qquad a_2 = b, \qquad a_3 = c.$$

Enfin,

$$(19)\qquad W_0 = \frac{1}{EI}\int_0^L \mu'^2\,ds'.$$

Cherchons maintenant la signification géométrique des *variables adjointes* (n° **2**). Sous l'action de la force F et du couple C, supposés très petits, le ressort se déforme infiniment peu. Le point P subit, de ce fait, un déplacement infiniment petit (dx, dy, $d\varphi$). Le travail élémentaire de F et de C, pour ce déplacement, est

$$X\,dx + Y\,dy + C\,d\varphi = X(dx + y\,d\varphi) + Y(dy - x\,d\varphi) + M\,d\varphi.$$

Dès lors, les variables adjointes u, v, w sont données par les formules

$$(20)\qquad u = dx + y\,d\varphi,\qquad v = dy - x\,d\varphi,\qquad w = d\varphi.$$

Connaissant leurs valeurs, on en déduit le déplacement de P :

$$(21)\qquad dx = u - yw,\qquad dy = v + xw,\qquad d\varphi = w.$$

· Cela posé, produisons les accroissements ($\delta\Phi$). Nous avons, d'après le n° 3 et d'après les formules (18),

$$(22)\qquad \delta u = \delta a,\qquad \delta v = \delta b,\qquad \delta w = \delta c.$$

En remplaçant, dans (21), u, v, w par δu, δv, δw, on obtient le déplacement (δx, δy, $\delta\varphi$) cherché.

12. En appliquant les formules (4), nous pouvons aussi calculer les *déplacements dus à* F *et à* C, supposés très petits (1). Inversement, *la force* F *et le couple* C *nécessaires pour produire un déplacement donné du point* P peuvent être calculés par les formules (6). Il suffit de calculer la forme adjointe V′. En employant les formules habituelles de la théorie des formes quadratiques, on trouve

$$(23)\qquad \begin{aligned} V' = \frac{EI}{sD}\big[&(p^2-\xi^2)u^2 + (q^2-\eta^2)v^2 + (p^2q^2-n^2)w^2 \\ &+ 2(n-\xi\eta)uv + 2(n\xi - p^2\eta)uw + 2(q^2\xi - n\eta)vw\big], \end{aligned}$$

en posant

$$(24)\qquad D = p^2q^2 - n^2 - q^2\xi^2 - p^2\eta^2 + 2n\xi\eta.$$

13. Influence de la rotation du balancier. — Supposons que le balancier tourne de l'angle θ, à partir de l'état naturel du spiral. Il exerce, en B, une *réaction d'encastrement* F_1, de composantes X_1, Y_1 et un *couple d'encastrement* C_1. Toute la théorie du spiral réglant repose sur le calcul de ces quantités en fonction de θ. Plus exactement, on a seulement besoin de connaître leur moment résultant M_1 par rapport à l'origine O, moment qui est

---

(1) Nous supposons ici que l'objection signalée dans la note du n° 2 ne s'applique pas. Autrement dit, *les forces* (Φ) *sont très petites* ou bien le spiral est tel que *les dérivées partielles telles que* $\frac{\partial a_i}{\partial X}$ *soient petites par rapport aux coefficients* (15) *et* (16).

précisément donné par la formule (12). Il s'agit donc de *calculer* $\mathbf{M}_1$ *en fonction de* θ.

Nous entreprendrons d'abord ce calcul, en supposant que le spiral n'est soumis à aucune autre force perturbatrice. Dès lors, les forces (Φ) se réduisent ici à F_1 et à C_1. Leur moment fléchissant au point P' est

$$\mu' = M_1 - x' Y_1 + y' X_1. \tag{25}$$

En portant dans (17), on a [1]

$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{s}{EI}\left(q^2 X_1 - n Y_1 + \eta M_1\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial W'}{\partial X_1}, \\ b &= \frac{s}{EI}\left(-n X_1 + p^2 Y_1 - \xi M_1\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial W'}{\partial Y_1}, \\ c &= \frac{s}{EI}\left(\eta X_1 - \xi Y_1 + M_1\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial W'}{\partial M_1}. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

On en déduit, d'après (6),

$$X_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial V'}{\partial a}, \qquad Y_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial V'}{\partial b}, \qquad M_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial V'}{\partial c}. \tag{27}$$

14. Cas où la rotation est très petite. — Le problème est alors *extrêmement simple*, car, la déformation du spiral étant très petite, on peut appliquer ce qui a été dit au n° 5.

En particulier, les formules (27) donnent *les forces d'encastrement en fonction du déplacement d'un point* P *quelconque.* Or, il y a un point dont on connaît *a priori* le déplacement; c'est le point B, pour lequel on a

$$dx_1 = -y_1\theta, \qquad dy_1 = x_1\theta, \qquad d\varphi_1 = \theta;$$

d'où

$$u_1 = v_1 = 0, \qquad w_1 = \theta. \tag{28}$$

Dès lors, en remplaçant a, b, c par $0, 0, \theta$ dans les formules (27), on obtient immédiatement *les forces d'encastrement en fonction de*

---

[1] On peut obtenir directement les formules (26), en observant que le premier terme de (13) est égal à $W'(X + X_1, Y + Y_1, M + M_1)$.

l'angle θ :

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} X_1 &= \frac{EI\theta}{LD_1}(n_1\xi_1 - p_1^2\eta_1),\\ Y_1 &= \frac{EI\theta}{LD_1}(q_1^2\xi_1 - n_1\eta_1),\\ M_1 &= \frac{EI\theta}{LD_1}(p_1^2 q_1^2 - n_1^2),\end{aligned}\right.$$

les indices 1 indiquant que les quantités correspondantes se rapportent au spiral entier.

Connaissant X_1, Y_1, M_1, on a le *déplacement d'un point* P *quelconque* au moyen des formules (26) et (21), en se rappelant que $u = a$, $v = b$, $w = c$.

Le problème de la déformation et du calcul des forces d'encastrement est donc entièrement résolu pour une rotation infiniment petite du balancier (¹).

Dans le cas particulier où *le centre de gravité du spiral est sur l'axe*, on a

$$(30)\qquad X_1 = Y_1 = 0, \qquad M_1 = \frac{EI}{L}\theta\,;$$

la réaction d'encastrement est nulle et le moment d'encastrement est proportionnel à θ, suivant une formule bien connue.

On a ensuite, par les formules (26),

$$u = \frac{s}{L}\eta\theta, \qquad v = -\frac{s}{L}\xi\theta, \qquad w = \frac{s}{L}\theta.$$

D'où, d'après (21),

$$(31)\quad dx = -(y-\eta)\frac{s}{L}\theta, \qquad dy = (x-\xi)\frac{s}{L}\theta, \qquad d\varphi = \frac{s}{L}\theta.$$

Ces formules expriment simplement que *le point* P *tourne de l'angle* $\frac{s}{L}\theta$ *autour du centre de gravité de l'arc* AP. Ce résultat

(¹) Ajoutons qu'il l'est *rigoureusement*, puisque les forces (Φ) sont infiniment petites. Les coefficients a, b, c peuvent être calculés, par les formules (26), en prenant la forme naturelle du spiral. A titre de vérification, on peut appliquer les formules (29) au spiral circulaire. En supposant θ infiniment petit, on retrouve bien les formules que Caspari a déduites de la théorie de Résal (*cf.* ANDRADE, *Horlogerie et Chronométrie*, p. 268).

est peut-être moins connu, sauf en ce qui concerne la valeur de $d\varphi$.

15. Cas où la rotation est grande. — C'est le cas général en Chronométrie. La question devient alors *beaucoup plus difficile*.

Nous allons former les équations aux dérivées partielles auxquelles doivent satisfaire les coordonnées x, y et l'angle φ, considérés comme fonctions des deux variables indépendantes s et θ.

Donnons à θ l'accroissement infiniment petit $\delta\theta$. Les forces (Φ) subissent les accroissements infiniment petits δX_1, δY_1, δM_1. D'après le n° 4, le déplacement du point P est donné par [1]

$$\delta u = \delta a, \qquad \delta v = \delta b, \qquad \delta w = \delta c,$$

δa, δb, δc étant déduits de (26) en remplaçant X_1, Y_1, M_1 par δX_1, δY_1, δM_1. D'autre part, on calcule δX_1, δY_1, δM_1 en appliquant les formules (27) au point B, pour lequel $\delta u = \delta v = 0$ et $\delta w = \delta\theta$. On obtient ainsi les formules (29), où il suffit simplement de remplacer θ, X_1, Y_1, M_1 par $\delta\theta$, δX_1, δY_1, δM_1. En se reportant enfin aux formules (21), on a δx, δy, $\delta\varphi$.

En divisant toutes ces équations par $\delta\theta$, on obtient les équations suivantes :

$$(32) \qquad \frac{\partial X_1}{\partial\theta} = \mathrm{EIA}, \qquad \frac{\partial Y_1}{\partial\theta} = \mathrm{EIB}, \qquad \frac{\partial M_1}{\partial\theta} = \mathrm{EIC},$$

$$(33) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial\theta} + y\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} - s(\mathrm{A}q^2 - \mathrm{B}n + \mathrm{C}\eta) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial\theta} - x\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} - s(-\mathrm{A}n + \mathrm{B}p^2 - \mathrm{C}\xi) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} - s(\mathrm{A}\eta - \mathrm{B}\xi + \mathrm{C}) = 0; \end{cases}$$

où l'on a posé, pour simplifier l'écriture,

$$(34) \qquad \mathrm{A} = \frac{n_1\xi_1 - p_1^2\eta_1}{\mathrm{LD}_1}, \qquad \mathrm{B} = \frac{q_1^2\xi_1 - n_1\eta_1}{\mathrm{LD}_1}, \qquad \mathrm{C} = \frac{p_1^2 q_1^2 - n_1^2}{\mathrm{LD}_1}.$$

---

[1] Si le point P est un point quelconque du spiral, on tombe sous le coup de l'objection signalée dans la note du n° 2, car les variations de ξ et de η imputables à X, Y, M ne sont vraisemblablement pas négligeables.

Si P est en B et *si le centre de gravité du spiral est sensiblement sur l'axe du balancier*, X_1, Y_1, ξ, η sont très petits et l'objection disparaît pratiquement. Il s'ensuit que les formules (32) ci-dessus sont justifiées dans cette hypothèse; mais, nous ne pouvons pas encore en dire autant des formules (33).

On a, en outre,

$$(35)\qquad \frac{\partial x}{\partial s} = \cos\varphi, \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = \sin\varphi.$$

Le système (33), (35) est *complètement intégrable*. En effet, appelons P, Q, R les premiers membres des équations (33). Si l'on observe que A, B, C sont indépendants de s et si l'on tient compte de (35), (15) et (16), on a les identités

$$(36)\qquad \frac{\partial P}{\partial s} = y\frac{\partial R}{\partial s}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial s} = -x\frac{\partial R}{\partial s}.$$

Dès lors, considérons le système formé par les équations (35) et l'équation

$$(37)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = s(A\eta - B\xi + C).$$

Considérons une solution de ce système, qui vérifie en outre les *conditions d'encastrement au piton*

$$(38)\qquad \left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)_{s=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)_{s=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)_{s=0} = 0.$$

Pour cette solution, P et Q sont indépendants de s, d'après (36) et (37). Or, pour $s = 0$, P et Q sont nuls, d'après (38). Donc, P et Q sont identiquement nuls et *nous n'avons plus à nous préoccuper des équations* (33).

Quant au système (35), (37), c'est un *système intégro-différentiel*, puisque A, B, C renferment des intégrales définies portant sur les fonctions inconnues. On peut l'intégrer théoriquement par la méthode des *approximations successives*. On remplace, au second membre S de (37), x et y par les valeurs x_0 et y_0 correspondant à l'état naturel, c'est-à-dire à $\theta = 0$. On en déduit la première approximation

$$\varphi_1 = \varphi_0 + S_0\theta, \qquad x_1 = \alpha + \int_0^s \cos\varphi_1\, ds, \qquad y_1 = \beta + \int_0^s \sin\varphi_1\, ds,$$

en appelant α, β les coordonnées du piton.

On porte ces valeurs dans S et l'on obtient la deuxième approximation

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \int_0^{\theta} S_1' \, d\theta, \qquad x_2 = \alpha + \int_0^{s} \cos\varphi_2 \, ds, \qquad y = \beta + \int_0^{s} \sin\varphi_2 \, ds.$$

Et ainsi de suite.

Il resterait à prouver la convergence de ces approximations (¹). Cela paraît assez difficile.

Si le centre de gravité du spiral restait en O *quel que soit* θ, les coefficients A et B seraient toujours nuls et le coefficient C serait toujours égal à $\frac{1}{L}$. L'équation (37) donnerait alors (²)

$$\varphi = \varphi_0 + \theta \frac{s}{L}, \tag{39}$$

comme dans le cas où θ est infiniment petit. On aurait ensuite

$$x = \alpha + \int_0^{s} \cos\left(\varphi_0 + \frac{\theta s}{L}\right) ds, \qquad y = \beta + \int_0^{s} \sin\left(\varphi_0 + \frac{\theta s}{L}\right) ds. \tag{40}$$

Enfin, les équations (32) redonneraient les équations (30).

A part les deux premières équations (31), qui seraient à remplacer par (40), *on aurait exactement les mêmes équations que dans le cas de la rotation infiniment petite du balancier*. En particulier, *l'isochronisme des oscillations serait assuré rigoureusement* et c'est pourquoi les chronométriers s'efforcent, depuis longtemps, à maintenir le centre de gravité du spiral sur l'axe du balancier.

Malheureusement, *cette solution idéale n'existe pas*, comme nous allons le faire voir.

(¹) Et à lever l'objection signalée dans la note précédente.

(²) On sait que la formule (39) résulte aussi de la formule bien connue et *rigoureuse*

$$EI(\varphi - \varphi_0) = s(M_1 - \xi Y_1 + \eta X_1)$$

On en déduit

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{1}{L}\int_0 s' \sin\varphi' \, ds' = -\frac{1}{L}\int_A^P s' \, dy' = \frac{s}{L}(\eta - y)$$

et l'on voit que *les formules* (33) *sont, dans cette hypothèse, rigoureusement exactes.* Elles le sont à peu près, si le spiral est à peu près centré.

16. On a

$$\mathrm{L}(\xi_1 - \alpha) = \int_0^{\mathrm{L}} ds \int_0^{s} \cos\varphi' \, ds' = \int\!\!\int \cos\varphi' \, ds' \, ds$$

$$(0 < s' < s < \mathrm{L}).$$

D'où, en changeant l'ordre des intégrations,

$$\mathrm{L}(\xi_1 - \alpha) = \int_0^{\mathrm{L}} (\mathrm{L} - s') \cos\varphi' \, ds',$$

c'est-à-dire

(41) $$\mathrm{L}(\xi_1 - \alpha) = \int_0^{\mathrm{L}} (\mathrm{L} - s) \cos\varphi \, ds.$$

De même

(42) $$\mathrm{L}(\eta_1 - \beta) = \int_0^{\mathrm{L}} (\mathrm{L} - s) \sin\varphi \, ds.$$

En remplaçant φ par (39), nous obtenons

(43) $$\xi_1 = \alpha + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\theta^p}{\mathrm{L}^{p+1} p!} a_p, \qquad \eta_1 = \beta + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\theta^p}{\mathrm{L}^{p+1} p!} b_p,$$

en posant

(44) $$\left\{ \begin{aligned} a_p &= \int_0^{\mathrm{L}} (\mathrm{L} - s) s^p \cos\left(\varphi_0 + p\frac{\pi}{2}\right) ds, \\ b_p &= \int_0^{\mathrm{L}} (\mathrm{L} - s) s^p \sin\left(\varphi_0 + p\frac{\pi}{2}\right) ds. \end{aligned} \right.$$

Lorsque p grandit indéfiniment, la méthode de Laplace [1] montre que ces intégrales sont asymptotiques respectivement à

(45) $$a'_p = \frac{\mathrm{L}^{p+2}}{p^2} \cos\left(\varphi_1 + p\frac{\pi}{2}\right), \qquad b'_p = \frac{\mathrm{L}^{p+2}}{p^2} \sin\left(\varphi_1 + p\frac{\pi}{2}\right),$$

---

[1] Rappelons en quoi elle consiste. Posons

$$s = \mathrm{L} e^{\frac{-t}{p}}.$$

Il vient

$$\int_0^{\mathrm{L}} (\mathrm{L} - s) s^p \cos\varphi_0 \, ds = \frac{\mathrm{L}^{p+2}}{p} \int_0^{+\infty} \left(1 - e^{\frac{-t}{p}}\right) e^{-t} \cos\varphi_0 \, e^{\frac{-t}{p}} \, dt.$$

On peut écrire un développement asymptotique de l'intégrale du second membre, en utilisant le développement en série de $\cos\varphi_0$ suivant les puissances de $\mathrm{L} - s$.

φ_1 désignant toujours l'angle polaire de la tangente en B. Les termes généraux des séries (43) sont donc respectivement asymptotiques à

$$\frac{L\theta^p \cos\left(\varphi_1 + p\frac{\pi}{2}\right)}{p^2 p!} \quad \text{et} \quad \frac{L\theta^p \sin\left(\varphi_1 + p\frac{\pi}{2}\right)}{p^2 p!}.$$

Ceci prouve que *ces séries sont convergentes.*

Pour que le centre de gravité reste rigoureusement en O, en supposant qu'il s'y trouve à l'état naturel, il faut et il suffit que l'on ait, pour toutes les valeurs non nulles de p,

$$a_p = 0, \qquad b_p = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(46) \qquad \int_0^L (L - s)s^p \cos\varphi_0 \, ds = 0, \qquad \int_0^L (L - s)s^p \sin\varphi_0 \, ds = 0.$$

Mais, les valeurs asymptotiques (45) prouvent que *c'est impossible*, car $\cos\varphi_1$ et $\sin\varphi_1$ ne peuvent être nuls simultanément.

Les conditions (46) ont été obtenues pour la première fois par M. Keelhoff, sous une forme à peine différente [1]. Pour $p = 1$,

Si l'on se borne au premier terme, on obtient l'intégrale

$$\int_0^\infty \cos\varphi_1 \, e^{-t} \frac{t}{p} \, dt = \frac{\cos\varphi_1}{p}.$$

On peut aussi démontrer directement, sans changement de variable, que le produit de l'intégrale par $\frac{p^2}{L^{p+2}}$ tend vers $\cos\varphi_1$ pour p infini.

[1] *Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, 2e série, t. VI. L'auteur appelle centre de gravité d'ordre p le point dont les coordonnées X_p, Y_p sont données par les formules

$$L^p X_p = p\int_0^L s^{p-1} x \, ds, \qquad L^p Y_p = p\int_0^L s^{p-1} y \, ds,$$

et il démontre que *tous ces centres doivent être en* O. Or, si l'on appelle A_p la première intégrale (46), on a, en remplaçant $\cos\varphi_0 \, ds$ par dx et intégrant par parties,

$$A_p = L^{p+1}(X_{p+1} - X_p).$$

Les conditions (46) expriment donc que les centres de gravité successifs sont confondus. Comme le premier est, par hypothèse, en O, il en est de même de tous les suivants.

La non-existence d'une courbe satisfaisant à ces conditions est implicitement elles donnent les *conditions de Phillips*. Pour $p = 2$, elles donnent les *conditions de Moulin*. Pour p quelconque, nous les appellerons les *conditions de Keelhoff*.

17. Calcul approché du centre de gravité. — Malgré qu'il soit impossible de garder rigoureusement le centre de gravité du spiral sur l'axe du balancier, cette condition est réalisée très approximativement. Autrement dit, on peut admettre que ξ_1 et η_1 sont toujours *très petits*. Considérons-les, par exemple, comme des infiniment petits du premier ordre.

Avec le même ordre d'approximation, on peut admettre les égalités

$$p_1^2 = q_1^2, \qquad n_1 = 0,$$

eu égard à la symétrie approchée du spiral par rapport aux axes de coordonnées. La valeur commune des quantités p_1^2 et q_1^2 est alors la moitié du carré du *rayon de gyration du spiral par rapport à son centre*. Nous représenterons ce rayon par la lettre k et poserons, par conséquent,

$$p_1^2 = q_1^2 = \frac{k^2}{2}.$$

Dès lors, les formules (34) deviennent, *au second ordre près*,

$$A = -\frac{2\eta_1}{Lk^2}, \qquad B = \frac{2\xi_1}{Lk^2}, \qquad C = \frac{1}{L}.$$

Portant dans (37), il vient

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{s}{L} - \frac{2s}{Lk^2}(\xi\xi_1 + \eta\eta_1). \tag{47}$$

La formule (39) est maintenant inexacte. Posons, dès lors,

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{s}{L}\theta + \varepsilon. \tag{48}$$

---

démontrée par M. Keelhoff, bien qu'il se borne à affirmer qu'il n'existe aucune courbe *connue* répondant à la question. Il démontre, en effet, que le centre de gravité d'ordre p tend vers B pour p infini, à un échange près des rôles du piton et de la virole. Comme B n'est pas en O, tous les centres de gravité ne peuvent être en ce point.

On pourrait objecter, il est vrai, que rien n'empêche, du moins théoriquement, de mettre B en O. La démonstration que nous donnons ci-dessus ne prête évidemment pas à cette objection.

La fonction ε satisfait à l'équation

$$(49) \qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta} = -\frac{2s}{Lk^2}(\xi\xi_1 + \eta\eta_1),$$

avec la condition d'être nulle pour $\theta = 0$. Comme le second membre de cette équation est infiniment petit du premier ordre, il en est de même de ε.

Pour calculer, même approximativement, les coordonnées ξ_1 et η_1, *il est indispensable de connaître ce terme correctif*, car il a, sur ξ_1 et η_1, une répercussion du premier ordre, c'est-à-dire *du même ordre que les quantités ξ_1 et η_1 elles-mêmes.* Il serait donc illusoire d'employer les développements (43), car on commettrait, de la sorte, une *erreur du même ordre que les termes calculés.*

L'équation (49) est, comme l'équation (37), une équation *intégro-différentielle*, car ε figure implicitement sous des intégrales définies dans le second membre. Son intégration est difficile.

On peut simplifier un peu l'équation, en négligeant les quantités du second ordre en ε, dans l'évaluation du second membre. Posons, pour simplifier l'écriture,

$$(50) \qquad \varphi_0 + \frac{s}{L}\theta = \lambda.$$

On a

$$(51) \qquad \cos\varphi = \cos\lambda - \varepsilon\sin\lambda, \qquad \sin\varphi = \sin\lambda + \varepsilon\cos\lambda.$$

Appelons maintenant X et Y ce que deviennent ξ et η pour $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire quand on emploie la formule (39). Ces quantités sont des fonctions connues de s et de θ.

En portant (51) dans (41) et (42) [1], il vient

$$(52) \qquad \begin{cases} s\xi = sX - \displaystyle\int_0^s \varepsilon'(s-s')\sin\lambda'\,ds', \\ s\eta = sY + \displaystyle\int_0^s \varepsilon'(s-s')\cos\lambda'\,ds'. \end{cases}$$

---

[1] Plus exactement, dans les équations analogues, obtenues en remplaçant L par s.

On en déduit $L\xi_1$ et $L\eta_1$, en faisant $s = L$, $X = X_1$, $Y = Y_1$. En portant dans (49), il vient enfin

$$(53)\quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta} = -\frac{2s}{Lk^2}(XX_1 + YY_1)$$
$$+\frac{2}{Lk^2}\left[X_1\int_0^s \varepsilon'(s-s')\sin\lambda'\,ds' - Y_1\int_0^s \varepsilon'(s-s')\cos\lambda'\,ds'\right]$$
$$+\frac{2s}{L^2k^2}\left[X\int_0^L \varepsilon'(L-s')\sin\lambda'\,ds' - Y\int_0^L \varepsilon'(L-s')\cos\lambda'\,ds'\right].$$

On peut intégrer cette équation, en calculant le développement de ε suivant les puissances croissantes de θ. Posons

$$(54)\qquad \varepsilon = \sum_{p=1}^{\infty} c_p\theta^p.$$

En portant dans (53), on voit qu'on obtient une *formule de récurrence*, donnant c_{p+1} en fonction de c_1, c_2, ..., c_p. On peut donc, théoriquement, calculer tous ces coefficients, de proche en proche.

Si l'on porte (54) dans (52), en faisant $s = L$, on obtient enfin

$$(55)\qquad \begin{cases} L\,\xi_1 = \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\theta^p\left(\frac{a_p}{p!\,L^p} - \alpha_p\right), \\ L\,\eta_1 = \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\theta^p\left(\frac{b_p}{p!\,L^p} + \beta_p\right), \end{cases}$$

en posant

$$(56)\qquad \begin{cases} \alpha_p = \displaystyle\sum_{q=0}^{p-1}\frac{1}{q!\,L^q}\int_0^L c_{p-q}(L-s)s^q\sin\left(\varphi_0 + q\frac{\pi}{2}\right)ds, \\ \beta_p = \displaystyle\sum_{q=0}^{p-1}\frac{1}{q!\,L^q}\int_0^L c_{p-q}(L-s)s^q\cos\left(\varphi_0 + q\frac{\pi}{2}\right)ds. \end{cases}$$

Nous sommes donc en mesure d'évaluer *les développements de ξ_1 et de η_1 suivant les puissances croissantes de θ*, sous réserve de la question de convergence, que nous admettrons.

On voit que la solution se présente sous une forme extrêmement compliquée.

18. Cas où l'on a les conditions de Keelhoff jusqu'à un certain rang. — Supposons que les coefficients a_p et b_p soient nuls jusqu'au rang n exclusivement. Les développements (43) de X_1 et de Y_1 commencent alors par un terme en θ^n. Dès lors, la formule de récurrence dont il a été question au numéro précédent est homogène par rapport aux c_i, tant que p n'atteint pas la valeur n. Comme c_0 est nul, on voit, de proche en proche, que $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont nuls également. Quant au coefficient c_{n+1}, il est donné par [1]

$$(n+1)c_{n+1} = -\frac{2s}{k^2 n!\, L^{n+2}}(a_n \xi_0 + b_n \eta_0),$$

en appelant ξ_0, η_0 les valeurs de ξ, η à l'état naturel.

Les formules (56) nous montrent ensuite que α_p et β_p sont nuls, tant que p ne dépasse pas n. Pour $p = n+1$, on a

$$(57)\quad \begin{cases} \alpha_{n+1} = -\dfrac{2}{n!\, k^2 L^{n+2}} \displaystyle\int_0^L s(L-s)\sin\varphi_0(a_n \xi_0 + b_n \eta_0)\, ds, \\ \beta_{n+1} = -\dfrac{2}{n!\, k^2 L^{n+2}} \displaystyle\int_0^L s(L-s)\cos\varphi_0(a_n \xi_0 + b_n \eta_0)\, ds. \end{cases}$$

Nous pouvons donc écrire aisément les deux premiers termes des développements de ξ_1 et de η_1 [2]

$$(58)\quad \begin{cases} L\,\xi_1 = \dfrac{\theta^n}{L^n}\dfrac{a_n}{n!} + \left[\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)!\, L^{n+1}} - \alpha_{n+1}\right]\theta^{n+1}, \\ L\,\eta_1 = \dfrac{\theta^n}{L^n}\dfrac{b_n}{n!} + \left[\dfrac{b_{n+1}}{(n+1)!\, L^{n+1}} + \beta_{n+1}\right]\theta^{n+1}. \end{cases}$$

On voit que le premier terme est le même que si l'on adoptait la formule (39); de sorte que, *si l'on s'en tient à ce premier terme, on peut toujours employer les formules* (43). Mais, pour les termes suivants, il faut tenir compte de l'influence de ε.

---

[1] Pour $n = 0$, il faut remplacer a_0 et b_0 par $a_0 + L\alpha$ et $b_0 + L\beta$.

[2] En appliquant ces formules au spiral circulaire, pour $n = 0$, on retrouve les formules de Caspari, rectifiées par M. Andrade (*loc. cit.*). Les valeurs qu'on en déduit pour X_1, Y_1, M_1, en intégrant (32), coïncident aussi avec celles de cet auteur, dans le cas particulier où le nombre des spires est entier, c'est-à-dire lorsque le centre de gravité du spiral est sur l'axe, conformément à la note du n° 15.

19. Couple perturbateur dû à l'excentricité du spiral. — Reportons-nous à la troisième formule (32). Elle s'écrit

$$\frac{\partial M_1}{\partial \theta} = \frac{EI}{L}\left[1 + \frac{q_1^2\xi_1^2 + p_1^2\eta_1^2 - 2n_1\xi_1\eta_1}{D_1}\right]$$

ou, au troisième ordre près,

$$\frac{\partial M_1}{\partial \theta} = \frac{EI}{L}\left[1 + \frac{2(\xi_1^2 + \eta_1^2)}{k^2}\right].$$

D'où

$$(59) \qquad M_1 = \frac{EI}{L}\theta + \frac{2EI}{L}\int_0^\theta \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{k^2}\,d\theta.$$

Le second terme, changé de signe, est le couple perturbateur cherché. On voit qu'il a toujours le signe du couple moteur; donc, *l'excentricité du spiral se traduit par une avance de la montre.*

Nous calculerons cette avance dans la quatrième partie de ce Mémoire (n° 26).

20. Influence d'une petite force perturbatrice quelconque s'exerçant le long du spiral. — Au n° 11, nous avons appris à calculer le déplacement d'un point P quelconque du spiral sous l'action de petites forces perturbatrices quelconques ($\delta\Phi$). Posons-nous maintenant la question suivante :

Le balancier restant fixe, quels sont les accroissements δX_1, δY_1, δM_1 *des réactions d'encastrement dus à ces forces perturbatrices.*

La solution est très simple. Prenons le point P en B et, pour cela, il suffit de supposer $s = L$ au n° 11. Sous l'action des ($\delta\Phi$) et de δX_1, δY_1, δM_1, B doit rester immobile. Donc, si δa, δb, δc sont les accroissements des intégrales (17) dus aux ($\delta\Phi$), les accroissements dus à δX_1, δY_1, δM_1 sont $-\delta a$, $-\delta b$, $-\delta c$. Les formules (27) nous donnent alors immédiatement δX_1, δY_1, δM_1; il suffit d'y remplacer X_1, Y_1, M_1, a, b, c par δX_1, δY_1, δM_1, $-\delta a$, $-\delta b$, $-\delta c$.

Comme il s'agit d'évaluer une petite perturbation, nous pouvons, dans cette évaluation, négliger les autres perturbations et, en particulier, la perturbation d'excentricité du spiral. Nous avons alors, en nous reportant à (23) et y remplaçant s par L et ξ, η par zéro,

$$\delta M_1 = -\frac{EI}{L}\delta c. \tag{60}$$

En remplaçant δc par sa valeur tirée de (17), il vient

$$\delta M_1 = -\frac{1}{L}\int_0^L \mu\, ds, \tag{61}$$

où μ désigne le moment des forces perturbatrices [1].

21. Influence de l'inertie du spiral. — Nous allons appliquer le théorie précédente, en prenant pour forces perturbatrices les forces d'inertie. Il suffit simplement de calculer μ.

Pour évaluer l'accélération du point P, nous pouvons évidemment continuer à négliger toutes les perturbations. Nous avons alors, d'après (33) [2], où nous remplaçons A, B, C par o, o, $\frac{1}{L}$,

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -\frac{s}{L}(y-\eta), \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{s}{L}(x-\xi). \tag{62}$$

La vitesse de P a donc pour composantes

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{s}{L}(y-\eta)\frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{s}{L}(x-\xi)\frac{d\theta}{dt}. \tag{63}$$

Le vecteur accélération a pour composantes

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{s}{L}(y-\eta)\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{s}{L}\frac{\partial(y-\eta)}{\partial\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{s}{L}(x-\xi)\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{s}{L}\frac{\partial(x-\xi)}{\partial\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \end{aligned}\right. \tag{64}$$

Si m désigne la *masse du spiral*, la force d'inertie par unité de longueur a pour composantes $-\frac{m}{L}\frac{d^2x}{dt^2}$ et $-\frac{m}{L}\frac{d^2y}{dt^2}$. Le moment

---

[1] Cette formule a été établie autrement par M. Andrade (*loc. cit.*, p. 281).

[2] Rappelons que ces formules sont rigoureuses, si le spiral est bien centré.

fléchissant μ est

$$\mu = \frac{m}{L}\int_s^L \left[(y'-y)\frac{d^2x'}{dt^2} - (x'-x)\frac{d^2y'}{dt^2}\right] ds',$$

ou, d'après (64),

$$\mu = -\alpha\frac{d^2\theta}{dt^2} - \beta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

en posant provisoirement

$$\alpha = \frac{m}{L^2}\int_s^L [(x'-\xi')(x'-x) + (y'-\eta')(y'-y)]s'\,ds'.$$

$$\beta = \frac{m}{L^2}\int_s^L \left[(x'-x)\frac{\partial(x'-\xi')}{\partial\theta} + (y'-y)\frac{\partial(y'-\eta')}{\partial\theta}\right] s'\,ds'.$$

On a enfin, en portant dans (61),

$$\delta M_1 = \frac{mH}{L^3}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mK}{L^3}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \tag{65}$$

en posant

$$\frac{mH}{L^2} = \int_0^L \alpha\, ds, \qquad \frac{mK}{L^2} = \int_0^L \beta\, ds.$$

Nous allons transformer ces intégrales.

On a d'abord

$$H = \int\int [(x'-\xi')(x'-x) + (y'-\eta')(y'-y)]s'\,ds\,ds'$$
$$(0 < s < s' < L),$$

ou, en intégrant par rapport à s,

$$H = \int_0^L [(x'-\xi')^2 + (y'-\eta')^2]s'^2\,ds'. \tag{66}$$

Appelons ρ la distance entre le point P et le centre de gravité G de l'arc AP. Nous avons la formule très simple

$$H = \int_0^L \rho^2 s^2\,ds. \tag{67}$$

On a ensuite

$$K = \int\int \left[(x'-x)\frac{\partial(x'-\xi')}{\partial\theta} + (y'-y)\frac{\partial(y'-\eta')}{\partial\theta}\right] s'\,ds\,ds'$$
$$(0 < s < s' < L)$$

ou, en intégrant par rapport à s,

$$(68)\qquad K = \int_0^L \left[(x'-\xi')\frac{\partial(x'-\xi')}{\partial\theta} + (y'-\eta')\frac{\partial(y'-\eta')}{\partial\theta}\right] s'^2\, ds'.$$

En comparant à (66), on voit que

$$(69)\qquad K = \frac{1}{2}\frac{dH}{d\theta}.$$

22. Autre méthode. — On peut obtenir le même résultat en *appliquant le théorème des forces vives au système balancier-spiral* (1).

D'après (63) et (66), la force vive du spiral est

$$\frac{mH}{L^3}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

D'autre part, le travail des forces appliquées au système se réduit à la diminution de l'énergie de déformation du spiral. L'équation différentielle du mouvement est donc, en appelant A le moment d'inertie du balancier et θ', θ'' les dérivées de θ par rapport au temps,

$$(70)\qquad A\,\theta'\theta'' + \frac{mH}{L^3}\theta'\theta'' + \frac{m}{2L^3}\frac{dH}{d\theta}\theta'^3 = -\frac{1}{2}\frac{dW}{dt}.$$

D'autre part, W nous est donné par le n° 11. Il suffit d'y faire $s = L$ et d'y remplacer X, Y, M par les réactions d'encastrement actuelles δX_1, δY_1, $M_1 + \delta M_1$ et μ par le moment fléchissant des forces d'inertie. Comme ξ_1 et η_1 sont supposés nuls et que δX_1, δY_1, δM_1 sont très petits, il vient, *au second ordre près*,

$$W = \frac{L}{EI}(M_1^2 + 2M_1\,\delta M_1) + 2\,\delta c.M_1.$$

D'après (60), ceci se réduit à

$$W = \frac{LM_1^2}{EI} = \frac{EI}{L}\theta^2.$$

(1) C'est aussi ce qu'a fait M. Bouasse, dans le cas particulier du spiral circulaire (*Pendule, spiral, diapason*, t. II, p. 178).

Dès lors, (70) devient, en divisant par θ',

$$\left(A + \frac{mH}{L^3}\right)\theta'' + \frac{m}{2L^3}\frac{dH}{d\theta}\theta'^2 + \frac{EI}{L}\theta = 0. \tag{71}$$

En se reportant à (65) et (69), on retrouve bien le couple perturbateur $-\delta M_1$.

On peut interpréter l'équation (71), en disant que *l'inertie du spiral équivaut à augmenter le moment d'inertie du balancier de* $\frac{mH}{L^3}$ *et à introduire un couple perturbateur proportionnel au carré de la vitesse angulaire du balancier.*

23. Méthode de Caspari (1). — Caspari a employé une troisième méthode, qui consiste à appliquer le théorème du moment cinétique au système balancier-spiral. Mais, il a admis que le moment des réactions d'encastrement du piton n'était pas affecté par l'inertie du spiral. M. Andrade a montré le premier, dès 1903, que l'on commet ainsi une erreur du même ordre que la perturbation que l'on se propose d'évaluer (2).

Il nous est facile de calculer cette erreur. D'après (63), le *moment cinétique du spiral* est

$$\sigma = \frac{m}{L^2}\frac{d\theta}{dt}\int_0^L [x(x-\xi) + y(y-\eta)]s\,ds.$$

Or, on a

$$\int_0^L s\xi x\,ds = \int_0^L s\xi\,d(s\xi) = \frac{1}{2}L^2\xi_1^2 = 0,$$

puisque nous admettons que le spiral est parfaitement centré. On verrait de même que l'autre intégrale analogue est nulle et il reste

$$\sigma = \frac{mQ}{L^2}\frac{d\theta}{dt}, \tag{72}$$

en posant

$$Q = \int_0^L r^2 s\,ds \qquad (r = OP). \tag{73}$$

(1) *Cf.* Grossmann, *Horlogerie théorique*, t. II, p. 300 à 311.
(2) *Cf.* Andrade, *Horlogerie et Chronométrie*, p. 274.

La méthode de Caspari conduit dès lors à l'équation

$$\left(A + \frac{mQ}{L^2}\right)\theta'' + \frac{m}{L^2}\frac{dQ}{d\theta}\theta'^2 + \frac{EI}{L}\theta = 0. \tag{71'}$$

En comparant avec (71), on voit que l'erreur revient à remplacer H par LQ et à doubler ensuite le couple perturbateur proportionnel au carré de la vitesse. Il serait facile d'en déduire l'accroissement du moment des réactions du piton, imputable aux forces d'inertie.

Nous avons cru utile de revenir sur cette erreur de méthode, parce qu'elle ne semble pas avoir été reconnue par tout le monde, malgré les excellentes raisons données par M. Andrade (¹).

24. Calcul de la fonction H. — Pour évaluer la perturbation de la durée d'oscillation, nous verrons (nº 25) qu'il faut connaître le *développement de* H *suivant les puissances croissantes de* θ.

Lorsqu'on peut calculer la valeur exacte de H en fonction de θ, comme dans le cas du spiral cylindrique par exemple, cela ne présente pas de difficulté. Mais, lorsqu'on ne peut faire ce calcul, il faut effectuer directement le développement.

Puisque nous négligeons toutes les perturbations, nous pouvons adopter la formule (39). Nous allons, dès lors, chercher une expression de H en fonction de l'angle φ.

On a, d'après (40) et (41).

$$s(x-\xi) = \int^{s} s\cos\varphi'\,ds' - \int_0^{s}(s-s')\cos\varphi'\,ds' = \int_0^{s} s'\cos\varphi'\,ds'.$$

D'où

$$s^2\rho^2 = \int\int s's''\cos(\varphi'-\varphi'')\,ds'\,ds''$$
$$(0 < s' < s,\ 0 < s'' < s).$$

En intervertissant s' et s'', on voit que

$$s^2\rho^2 = 2\int\int s's''\cos(\varphi'-\varphi'')\,ds'\,ds''$$
$$(0 < s'' < s' < s).$$

(¹) *Cf.* Grossmann, *loc. cit.*, p. 311; Keelhoff, *La formule d'Airy* (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique : Classe des Sciences*, 2ᵉ série, t. VI, fasc. 13, p. 47).

D'où

$$H = 2\int\int\int s's'' \cos(\varphi' - \varphi'')\, ds\, ds'\, ds''$$
$$(0 \leqq s'' < s' < s < L).$$

Intégrons par rapport à s

$$H = 2\int\int (L - s')s's'' \cos(\varphi' - \varphi'')\, ds'\, ds''$$
$$(0 < s'' < s' < L)$$

ou, en changeant les notations,

$$(75) \qquad H = 2\int\int (L - s)ss' \cos(\varphi - \varphi')\, ds\, ds'$$
$$(0 < s' < s < L).$$

En remplaçant φ et φ' par leurs valeurs tirées de (39) et développant $\cos(\varphi - \varphi')$ suivant les puissances de θ, on a

$$(76) \qquad \frac{H}{L^3} = \Sigma A_n \theta^n.$$

en posant

$$(77) \quad A_n = \frac{2}{n!\, L^{n+3}} \int\int (L - s)ss'(s - s')^n \cos\left(\varphi_0 - \varphi'_0 + n\frac{\pi}{2}\right) ds\, ds'$$
$$(0 < s' < s < L).$$

Tous ces coefficients peuvent se calculer sur la forme naturelle du spiral.

IV. — PERTURBATION DE LA DURÉE D'OSCILLATION.

25. THÉORIE GÉNÉRALE. — Supposons le balancier soumis à un couple perturbateur *très petit*, dépendant à la fois de θ et de θ', soit $f(\theta, \theta')$. L'équation différentielle du mouvement est

$$(78) \qquad A\theta'' + \frac{EI}{L}\theta = f(\theta, \theta').$$

On peut intégrer approximativement cette équation de différentes manières.

Une *première méthode* consiste à employer la *méthode des approximations successives*. On remplace, au second membre, qui est très petit, θ et θ' par les valeurs correspondant au mouve-

ment non perturbé. On développe ce second membre en série de Fourier et l'on intègre l'équation linéaire obtenue par la méthode habituelle.

Une *seconde méthode* consiste à remplacer seulement θ' par sa valeur en fonction de θ et de θ_0. Cette valeur est de la forme $k\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}$, k désignant un certain facteur constant. Le second membre devient alors une simple fonction de θ et l'équation (78) peut s'intégrer par quadratures, au moyen du théorème des forces vives. La durée d'oscillation est donnée par une intégrale définie et l'accroissement de cette intégrale qui est imputable au couple perturbateur peut être évalué aisément au moyen d'un développement en série.

Une *troisième méthode* est la *méthode de la variation des constantes*, qui est classique en Mécanique céleste et qui a été employée en Chronométrie par M. Andrade [1]. C'est elle qui nous paraît la plus simple et que nous allons développer rapidement.

Posons

$$\frac{\text{EI}}{\text{LA}} = \alpha^2, \qquad \frac{f(\theta, \theta')}{\text{A}} = g(\theta, \theta'). \tag{79}$$

L'équation (78) s'écrit

$$\theta'' + \alpha^2\theta = g(\theta, \theta'). \tag{80}$$

L'intégrale générale de l'équation sans second membre est de la forme

$$\theta = \text{R} \sin\alpha(t + m), \tag{81}$$

R et m désignant les constantes d'intégration. La vitesse θ' est alors donnée par la formule

$$\theta' = \text{R}\alpha \cos\alpha(t + m). \tag{82}$$

Pour intégrer l'équation avec second membre, considérons R et m comme deux fonctions inconnues du temps et cherchons à les déterminer de manière à satisfaire aux équations (80) et (82).

On a d'abord, en posant $\alpha(t+m) = \varphi$, pour simplifier l'écri-

---

(1) *Loc. cit.*, p. 224.

ture,

$$\theta' = R' \sin\varphi + R\alpha(1 + m') \cos\varphi$$

ou, en tenant compte de (82),

$$(83) \qquad R' \sin\varphi + R\alpha m' \cos\varphi = 0.$$

Dérivons maintenant (82)

$$\theta'' = \alpha[R' \cos\varphi - R\alpha(1 + m') \sin\varphi].$$

Portant dans (80), il vient

$$(84) \qquad R' \cos\varphi - R\alpha m' \sin\varphi = \frac{1}{\alpha} g(R \sin\varphi, R\alpha \cos\varphi).$$

Nous avons maintenant à intégrer le système (83), (84). Au point de vue mathématique, la difficulté est restée la même. Mais, l'intérêt de cette transformation consiste en ce que les nouvelles variables sont des *variables lentes*, puisque, sans la perturbation, elles seraient rigoureusement constantes.

Au surplus, il nous est facile, si nous connaissons m, d'évaluer la durée d'oscillation. Une oscillation *double* est comprise entre deux racines consécutives du système $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = 1$, c'est-à-dire $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Si t_1 et t_2 sont de telles racines, on a

$$t_1 + m_1 = \frac{\pi}{2\alpha} + 2k\frac{\pi}{\alpha}, \qquad t_2 + m_2 = \frac{\pi}{2\alpha} + 2(k+1)\frac{\pi}{\alpha};$$

d'où

$$t_2 - t_1 + m_2 - m_1 = \frac{2\pi}{\alpha} = T,$$

en appelant T la durée de l'oscillation double non perturbée. Si ΔT est la perturbation que nous nous proposons de calculer, on a

$$(85) \qquad \Delta T = -(m_2 - m_1) = -\int_{t_1}^{t_2} m'\, dt.$$

Or, de (83) et (84), on tire

$$m' = \frac{-1}{R\alpha^2} g(R \sin\varphi, R\alpha \cos\varphi) \sin\varphi.$$

En principe, nous ne connaisons pas le second membre, puisque nous ne connaissons ni R, ni m, qui figurent dans g. Mais, *pen-*

dant la durée d'une oscillation, ces quantités varient très peu et nous pouvons les remplacer par des constantes. Dès lors, nous avons $\alpha\, dt = d\varphi$ et (85) devient

$$\Delta T = \frac{1}{R\alpha^3}\int_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{\pi}{2}+2(k+1)\pi} g(R\sin\varphi,\ R\alpha\cos\varphi)\sin\varphi\, d\varphi.$$

Si nous faisons le changement de variable $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + \lambda$, ceci s'écrit

(86) $$\Delta T = \frac{1}{R\alpha^3}\int_0^{2\pi} g(R\cos\lambda,\ -R\alpha\sin\lambda)\cos\lambda\, d\lambda.$$

Telle est la *formule fondamentale* ([1]).

On peut calculer cette intégrale définie, en supposant la fonction g développée en série entière. Soit

(87) $$g(\theta, \theta') = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} A_{p,q}\theta^p\theta'^q.$$

Portons dans (86), il vient

$$\Delta T = \frac{1}{R\alpha^3}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} A_{p,q}R^{p+q}(-\alpha)^q\int_0^{2\pi}\cos^{p+1}\lambda\sin^q\lambda\, d\lambda.$$

L'intégrale qui figure au second menbre n'est différente de zéro que si $p+1$ et q sont pairs. Donc, *les termes du développement* (87) *qui sont impairs en θ' ou pairs en θ n'influent pas sur la durée d'oscillation*. Dès lors, on peut écrire

$$\Delta T = \frac{1}{\alpha^3}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} A_{2p+1,2q}R^{2(p+q)}\alpha^{2q}I_{p+1,q},$$

en posant

$$I_{p,q} = \int_0^{2\pi}\cos^{2p}\lambda\sin^{2q}\lambda\, d\lambda.$$

([1]) Dans le cas particulier où g est seulement fonction de θ, cette formule ne diffère pas de la *formule d'Airy*, dont M. Keelhoff a développé les conséquences chronométriques (*loc. cit.*, t. VI, fasc. 13). *Voir* aussi Bouasse (*loc. cit.*, t. I, p. 201).

En faisant le changement de variable $\sin^2\lambda = t$, cette intégrale se ramène à l'intégrale eulérienne

$$I_{p,q} = 2\int_0^1 t^{q-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-\frac{1}{2}}\,dt = 2\,\mathrm{B}\left(p + \frac{1}{2},\ q + \frac{1}{2}\right)$$

ou

$$I_{p,q} = \frac{2\,\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(q + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p + q + 1)}.$$

En définitive, nous avons la formule

$$(88)\qquad \frac{\Delta T}{T} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} A_{2p+1,2q}\, R^{2p+2q}\,\alpha^{2q-2}\, \frac{(2p+1)!\,(2q)!}{2^{2p+2q+1}(p+q+1)!\,p!\,q!}.$$

26. Perturbation d'isochronisme due a l'excentricite du spiral. — On a, d'après (59),

$$g = -\frac{2EI}{LA}\int_0^{\theta}\frac{\xi_1^2+\eta_1^2}{k^2}\,d\theta.$$

Nous connaissons, par (58), les deux premiers termes du développement de $\xi_1^2+\eta_1^2$. Mais, le terme pair seul nous intéresse. Donc au point de vue de la durée d'oscillation, le second terme des développements (58) est inutile, si l'on ne pousse pas ces développements plus loin.

Pour la même raison, k peut être réduit à sa valeur naturelle (¹). On a donc

$$g = -\frac{2\alpha^2}{k^2}\,\frac{(a_n^2+b_n^2)}{L^{2n+2}(n!)^2}\,\frac{\theta^{2n+1}}{2n+1}.$$

La formule (88) nous donne alors

$$(89)\qquad \frac{\Delta T}{T} = -\theta_0^{2n}\,\frac{a_n^2+b_n^2}{k^2L^{2n+2}}\,\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^3(n+1)!}.$$

(¹) Pour le spiral cylindrique, $k = R$. Pour un spiral plat, tel que celui du n° 32, on a

$$Lk^2 = \int_0^L r^2\,ds = \int_0^L (R^2 - 2as)\,ds = L\,\frac{R^2+R'^2}{2};$$

d'où

$$k^2 = \frac{R^2+R'^2}{2}.$$

D'après ce qu'on a vu au n° 18, on pourrait calculer les termes suivants du développement; mais, cela serait extrêmement compliqué et probablement sans intérêt pratique.

D'après la formule ci-dessus, la perturbation semble décroître rapidement quand n augmente. Pour s'en rendre compte d'une manière certaine, il faudrait faire des évaluations numériques sur des exemples concrets.

27. Perturbation d'isochronisme due a l'inertie du spiral. — D'après (65), on a

$$g = -\frac{m}{L^3 A}\left(H\theta'' + \frac{1}{2}\frac{dH}{d\theta}\theta'^2\right). \tag{90}$$

Au second ordre près en $\frac{mL^2}{A}$, on peut remplacer, dans cette expression, θ'' par $-\frac{EI\theta}{LA}$. On a alors

$$g(\theta, \theta') = \frac{m}{AL^3}\left(\alpha^2 H\theta - \frac{1}{2}\frac{dH}{d\theta}\theta'^2\right). \tag{91}$$

En utilisant (76), ont voit que l'on a, avec les notations de (87),

$$A_{2p+1,0} = \frac{mL^2\alpha^2}{A}A_{2p}, \qquad A_{2p-1,2} = -\frac{mL^2}{A}pA_{2p}.$$

Portant dans (88), il vient

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{mL^2}{A}\left[\sum_{p=0}^{\infty} A_{2p}\theta_0^{2p}\frac{(2p+1)!}{2^{2p+1}(p+1)!\,p!} - \sum_{p=1}^{\infty} pA_{2p}\theta_0^{2p}\frac{(2p-1)!}{2^{2p}(p+1)!\,(p-1)!}\right]$$

ou

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{mL^2}{2A}\left[A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} A_{2p}\theta_0^{2p}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\right]. \tag{92}$$

(*à suivre*)