J. HAAG

Sur le calcul de certaines déformations élastiques, avec application au spirale de montre (suite et fin)

Bulletin de la S. M. F., tome 57 (1929), p. 1-25

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1929__57__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR LE CALCUL DE CERTAINES DÉFORMATIONS ÉLASTIQUES, AVEC APPLICATION AU SPIRALE DE MONTRE (*suite et fin*).

Par M. J. HAAG.

28. CAS DU SPIRAL CYLINDRIQUE [1]. — On sait que, pendant la déformation, *les spires restent circulaires*. Admettons, d'autre part, que l'on puisse *négliger les courbes terminales*. Nous allons donc calculer H pour un arc de cercle de rayon R et d'angle au centre $\lambda = \frac{L}{R}$.

Soit u l'angle polaire du point P. On a $s = Ru$. Quant au point G, il a pour angle polaire $\frac{u}{2}$ et pour rayon vecteur

$$OG = \frac{2R\sin\frac{u}{2}}{u}.$$

On en déduit

$$\rho^2 = \overline{PG}^2 = R^2\left[1 + \frac{4\sin^2\frac{u}{2}}{u^2} - \frac{4\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}{u}\right].$$

D'où

$$H = R^5\int_0^\lambda [u^2 + 2(1-\cos u) - 2u\sin u]\,du$$

ou

$$(93)\qquad H = \frac{L^5}{\lambda^5}\left(\frac{\lambda^3}{3} + 2\lambda + 2\lambda\cos\lambda - 4\sin\lambda\right).$$

[1] Tous les calculs qui suivent, jusqu'au n° 36, étaient imprimés, lorsque j'ai découvert qu'il était possible de les simplifier considérablement, tout en les rendant plus exacts. Cette nouvelle solution a été ajoutée à la fin du Mémoire.

Au premier abord, *comme on suppose λ très grand, on peut être tenté de réduire la parenthèse à son premier terme*. Ce serait parfaitement légitime si l'on s'en tenait au simple calcul de H pour une valeur déterminée de λ. Mais, si l'on veut calculer les termes en θ_0 de la formule (92), il faut évaluer les coefficients A_n du développement en série de $\frac{H}{L^5}$ suivant les puissances croissantes de θ. A cet effet, on peut, par exemple, employer la formule de Taylor. Or, en dérivant $\frac{H}{L^5}$ par rapport à λ, on voit que l'ordre infinitésimal des termes obtenus en dérivant les facteurs $\cos\lambda$ ou $\sin\lambda$ reste toujours le même, tandis que l'ordre infinitésimal des termes obtenus en dérivant $\frac{1}{3\lambda^2}$ augmente chaque fois d'une unité. Au bout de deux dérivations, le terme en $\cos\lambda$ a le même ordre que le terme déduit de $\frac{1}{3\lambda^2}$. Puis, il devient d'un ordre inférieur. On voit donc que *le calcul des coefficients de la formule* (92) *serait complètement faussé, si l'on faisait immédiatement l'approximation précédente*. Il faut *dériver d'abord* et seulement ensuite négliger les termes d'ordre supérieur en $\frac{1}{\lambda}$.

Posons

$$\frac{H}{L^5} = F(\lambda) = \frac{1}{3\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^4} + \frac{2}{\lambda^4}\cos\lambda - \frac{4}{\lambda^5}\sin\lambda.$$

En appliquant la formule de Leibnitz, on a

$$(94)\quad F^{(2n)}(\lambda) = \frac{(2n+1)!}{3\lambda^{2n+2}} + \frac{(2n+3)!}{3\lambda^{2n+4}} + \frac{1}{3}\sum_{h=0}^{2n} C_{2n}^{h}\,\frac{\cos\left(\lambda + h\frac{\pi}{2}\right)(-1)^h(2n-h+3)!}{\lambda^{2n-h+4}} - \frac{1}{6}\sum_{h=0}^{2n} C_{2n}^{h}\,\frac{\sin\left(\lambda + h\frac{\pi}{2}\right)(-1)^h(2n-h+4)!}{\lambda^{2n-h+5}}.$$

Cherchons le terme d'ordre minimum, en considérant $\frac{1}{\lambda}$ comme infiniment petit principal.

Les termes de la seconde ligne sont au moins d'ordre 4 et ceux de la troisième ligne sont au moins d'ordre 5. Donc, si $n = 0$, le terme principal est le premier. Autrement dit, $F(\lambda)$ est asymptotique à $\frac{1}{3\lambda^2}$, comme nous le savions déjà.

Pour $n = 1$, nous avons deux termes en $\frac{1}{\lambda^4}$, dont la somme algébrique est $\frac{2(1-\cos\lambda)}{\lambda^4}$. Si $\cos\lambda$ est égal à *un* ou en est très voisin, il faut prendre aussi les termes en $\frac{1}{\lambda^5}$, ce qui donne $\frac{20\sin\lambda}{\lambda^5}$. Mais, dans ce cas. $\sin\lambda$ est nul ou très petit. Il nous faut donc pousser jusqu'au terme en $\frac{1}{\lambda^6}$, ce qui nous donne $\frac{40(1+2\cos\lambda)}{\lambda^6}$. Dès lors, on peut écrire asymptotiquement, *dans tous les cas*,

$$(95)\qquad F''(\lambda) = \frac{2}{\lambda^4}\left[1-\cos\lambda+\frac{10\sin\lambda}{\lambda}+\frac{20(1+2\cos\lambda)}{\lambda^2}\right].$$

Pour $n \geqq 2$, nous n'avons plus qu'un terme en $\frac{1}{\lambda^4}$, qui est $\frac{2(-1)^n\cos\lambda}{\lambda^4}$. Si $\cos\lambda$ est nul ou très petit, il faut prendre les termes en $\frac{1}{\lambda^5}$, ce qui donne $-\frac{4(-1)^n(4n+1)\sin\lambda}{\lambda^5}$. Dans tous les cas, on a donc asymptotiquement

$$(96)\qquad F^{(2n)}(\lambda) = \frac{2(-1)^n}{\lambda^4}\left[\cos\lambda-2(4n+1)\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right]\qquad (n>1).$$

Portant dans (92), il vient, en appelant R_0 le rayon naturel,

$$(97)\qquad \frac{\Delta T}{T} = \frac{mR_0^2}{6A}\left\{1+\frac{3}{2}\frac{\theta_0^2}{\lambda_0^2}\left[1-\cos\lambda_0+\frac{10\sin\lambda_0}{\lambda_0}+\frac{20(1+2\cos\lambda_0)}{\lambda_0^2}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{3}{\lambda_0^2}\sum_{p=2}^{\infty}\frac{\theta_0^{2p}(-1)^p}{2^{2p-1}(p!)^2}\left[\cos\lambda_0-2(4p+1)\frac{\sin\lambda_0}{\lambda_0}\right]\right\}.$$

Cette série est évidemment convergente.

Si l'on s'en tient aux deux premiers termes, on a

$$(98)\qquad \frac{\Delta T}{T} = \frac{mR_0^2}{6A}\left\{1+\frac{3}{2}\frac{\theta_0^2}{\lambda_0^2}\left[1-\cos\lambda_0+\frac{10\sin\lambda_0}{\lambda_0}+\frac{20(1+2\cos\lambda_0)}{\lambda_0^2}\right]\right\}.$$

29. Si l'on commet l'erreur d'approximation qui consiste à réduire $F(\lambda)$ à son premier terme, c'est-à-dire à remplacer chaque couple perturbateur par sa partie principale, sans prendre garde à la répercussion sur la partie variable ΔT ([1]), le coefficient de $\frac{\theta_0^2}{\lambda_0^2}$ dans la formule (98) est égal à $\frac{3}{2}$. C'est plus simple. Mais, ce n'est asymptotiquement exact que si λ_0 est à la fois très grand et multiple impair de $\frac{\pi}{2}$ ([2]). Si λ_0 est un multiple entier de 2π, on voit, au contraire, que le coefficient de θ_0^2 devient $\frac{90}{\lambda_0^4}$. Si λ_0 est un multiple impair de π, il est asymptotique à $\frac{3}{\lambda_0^2}$.

La formule (98) est pratiquement suffisante si θ_0 est très petit. Mais, en réalité, les oscillations du balancier atteignent fréquemment l'ordre de un tour et demi, soit $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$. Dans ce cas, il faut prendre en considération un assez grand nombre de termes de la formule (97), car ces termes ne décroissent pas rapidement. Ils peuvent même commencer par augmenter. Si l'on prend, par exemple ([3]), $\lambda_0 = 20\pi$ et $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$, la série s'écrit

$$1 + 0{,}00013 + 0{,}0116 - 0{,}0072 + 0{,}0024 - 0{,}0006 + 0{,}0001 = 1{,}0064.$$

On voit qu'il faut pousser jusqu'au septième terme pour obtenir un terme inférieur au second. Il est vrai que celui-ci est accidentellement très petit.

Si l'on prend $\lambda_0 = 20\pi + \frac{\pi}{2}$, la série s'écrit approximativement

$$1 + 0{,}008 + 0{,}0013 - 0{,}0031 + 0{,}0028 - 0{,}0013 + 0{,}0003 = 1{,}0080.$$

Le deuxième terme est à peine trois fois plus grand que le quatrième, lequel est presque trois fois plus grand que le troisième.

30. A titre de contrôle de nos calculs, nous allons évaluer les

---

([1]) Sans commettre, bien entendu, d'autres erreurs. M. Andrade serait effectivement parvenu au coefficient $\frac{3}{2}$, s'il n'avait laissé échapper une faute de signe (*loc. cit.*, p. 283, ligne 21; le premier terme du second membre doit être précédé du signe —), qui l'a conduit au coefficient $\frac{5}{4}$.

([2]) C'est-à-dire pour un spiral de Le Roy. On verra, à la fin de ce Mémoire, qu'il en est pratiquement de même si l'on tient compte des courbes terminales précédemment négligées.

([3]) *Cf.* Grossmann, t. II, p. 312 et 316.

coefficients A_{2n} du développement de $\frac{H}{L^5}$ par la formule (77). On a

$$A_{2n} = \frac{2(-1)^n}{(2n)!\,\lambda^{2n+5}} \int\int (\lambda - u) u u' (u - u')^{2n} \cos(u - u')\, du\, du'$$
$$(0 < u' < u < \lambda).$$

Faisons le changement de variable $u - u' = v$; il vient

$$A_{2n} = \frac{2(-1)^n}{(2n)!\,\lambda^{2n+5}} \int\int (\lambda - u) u (u - v) v^{2n} \cos v\, du\, dv$$
$$(0 < v < u < \lambda).$$

Intégrons par rapport à u :

$$(99) \qquad A_{2n} = \frac{(-1)^n}{6(2n)!\,\lambda^{2n+5}} \int_0^{\lambda} (\lambda + v)(\lambda - v)^3 v^{2n} \cos v\, dv.$$

Si nous posons

$$P(v) = v^{2n}(\lambda - v)^3(\lambda + v),$$

l'intégrale indéfinie s'écrit, en intégrant par parties,

$$(100) \qquad \begin{aligned} Q(v) = {} & \sin v\, P(v) + \cos v\, P'(v) \\ & - \sin v\, P''(v) - \cos v\, P'''(v) + \sin v\, P^{(4)}(v) + \ldots. \end{aligned}$$

Les trois premiers termes non nuls de $Q(\lambda)$ sont

$$-\cos\lambda\, P'''(\lambda) + \sin\lambda\, P^{(4)}(\lambda) + \cos\lambda\, P^{(5)}(\lambda),$$

soit, en appliquant la formule de Leibnitz,

$$(101) \qquad 12[\lambda^{2n+1}\cos\lambda - 2(4n+1)\lambda^{2n}\sin\lambda - 40n^2\lambda^{2n-1}\cos\lambda].$$

Les deux premiers termes non nuls de $-Q(0)$ sont

$$(-1)^{n+1} P^{(2n+1)}(0) + (-1)^n P^{(2n+3)}(0),$$

soit

$$(102) \qquad (-1)^n 2(2n+1)!\,\lambda^3 + (-1)^n 2(2n+3)!\,\lambda.$$

Pour $n = 0$, (101) est négligeable devant (102) et l'on a asymptotiquement

$$A_0 = \frac{1}{3\lambda^2}.$$

Pour $n = 1$, on a asymptotiquement

$$(103) \qquad A_2 = \frac{1}{\lambda^4}\left[1 - \cos\lambda + 10\,\frac{\sin\lambda}{\lambda} + 20\,\frac{1 + 2\cos\lambda}{\lambda^2}\right],$$

ce qui confirme (95).

Pour $n > 1$, on a asymptotiquement

$$A_{2n} = \frac{2(-1)^n}{(2n)!\,\lambda^4}\left[\cos\lambda - 2(4n+1)\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right], \tag{104}$$

ce qui confirme (96).

31. Influence des courbes terminales. — Nous avons admis, dès le début du n° 28, que l'on pouvait négliger les courbes terminales. Cela paraît assez justifié, au premier abord, par le fait que la longueur de ces courbes est très faible, vis-à-vis de la longueur totale du spiral. Mais les résultats que nous venons d'obtenir font naître de sérieuses inquiétudes quant à la légitimité de cette hypothèse.

Nous avons vu, en effet, que le seul fait d'allonger le spiral d'un quart de spire, par exemple, peut modifier complètement l'influence de θ_0 sur la durée d'oscillation. Or, les courbes terminales atteignent largement cet ordre de grandeur. Il est donc vraisemblable de supposer que *leur adjonction au spiral apporte des corrections notables aux coefficients de la série* (97). Malheureusement, le calcul de ces corrections paraît compliqué. Nous avons pu le faire dans le seul cas où les courbes terminales sont uniquement constituées par des arcs de cercle. Ce calcul est trop long pour pouvoir être exposé dans le présent Mémoire. Au surplus, des applications numériques concrètes sont nécessaires pour permettre d'en apprécier l'importance. Enfin, il y a lieu d'examiner quelle forme il convient de donner auxdites courbes pour diminuer le plus possible la perturbation globale d'isochronisme due à l'inertie du spiral. Nous espérons pouvoir élucider ces questions dans un travail ultérieur [1].

32. Cas du spiral plat. — Supposons que la forme naturelle soit une *développante de cercle* (*cf.* Moulin, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 19 mai 1913). Après déformation, nous n'avons plus une telle courbe et le *calcul exact de* H *en fonction de* θ *paraît impraticable* [2]. Nous allons donc employer la formule (77).

---

[1] *Voir* à la fin du Mémoire.
[2] *Voir* à la fin du Mémoire.

Soient R le rayon de courbure au piton, R′ le rayon de courbure à la virole, r le rayon de courbure en un point quelconque, u l'angle polaire de la tangente en ce point, λ l'angle polaire de la tangente à la virole. Nous avons, en choisissant l'axe Ox de telle manière que u s'annule au piton,

$$r = \mathrm{R} - au, \tag{105}$$

avec

$$a = \frac{\mathrm{R} - \mathrm{R}'}{\lambda}. \tag{106}$$

D'autre part,

$$ds = r\,du; \tag{107}$$

d'où

$$s = \mathrm{R}\,u - \frac{au^2}{2} = \frac{\mathrm{R} + r}{2}u = \frac{\mathrm{R}^2 - r^2}{2a}. \tag{108}$$

En particulier,

$$\mathrm{L} = \frac{\mathrm{R} + \mathrm{R}'}{2}\lambda = \frac{\mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2}{2a}. \tag{109}$$

Calcul approché de A_0. — Tant que s est petit, $\frac{\rho^2 s^2}{4}$ est très petit. D'autre part, dès que le rapport $\frac{s}{\mathrm{L}}$ atteint une valeur appréciable, le centre de gravité G de l'arc AP est voisin de O. On peut donc remplacer approximativement ρ par r et l'on a la formule approchée

$$\mathrm{H} = \int_0^{\mathrm{L}} r^2 s^2\,ds = \int_0^{\mathrm{L}} (\mathrm{R}^2 - 2as)s^2\,ds = \frac{\mathrm{R}^2\mathrm{L}^3}{3} - \frac{a\mathrm{L}^4}{\mathrm{L}^4}, \tag{110}$$

en tenant compte de (108). Si l'on élimine a au moyen de (109), on trouve [1]

$$\mathrm{A}_0 = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{L}^5} = \frac{\mathrm{R}^2 + 3\mathrm{R}'^2}{(\mathrm{R} + \mathrm{R}')^2}\,\frac{1}{3\lambda^2}. \tag{111}$$

Calcul approché de A_{2n}. — Appliquons la formule générale (77), en utilisant (107) :

$$\mathrm{A}_{2n} = \frac{2(-1)^n}{(2n)!\,\mathrm{L}^{2n+5}} \int\!\!\int (\mathrm{L} - s)ss'(s - s')^{2n} rr' \cos(u - u')\,du\,du'$$
$$(0 < u' < u < \lambda).$$

---

[1] Pour $\mathrm{R}' = \mathrm{R}$, on retrouve, bien entendu, le premier terme de (93). Pour $\mathrm{R}' = 0$, il en est fortuitement de même.

Faisons le changement de variables $u - u' = v$; l'intégrale devient

$$I = \int\int (L - s) ss'(s - s')^{2n} rr' \cos v \, du \, dv$$
$$(o < v < u < \lambda).$$

Si l'on utilise les formules (105) et (108), on voit que le coefficient de $\cos v$ est un polynome en u et v, soit

$$(112) \qquad Q(u, v) = (L - s) ss'(s - s')^{2n} rr'.$$

Intégrons par rapport à u; il vient

$$(113) \qquad I = \int_0^\lambda P(v) \cos v \, dv,$$

en posant

$$(114) \qquad P(v) = \int_v^\lambda Q(u, v) \, du.$$

D'où, en intégrant par parties,

$$(115) \qquad I = [P(\lambda) \sin \lambda] + [P'(\lambda) \cos \lambda - P'(o)] - [P''(\lambda) \sin \lambda] - [P'''(\lambda) \cos \lambda - P'''(o)] + [P^{(4)}(\lambda) \sin \lambda] + \ldots.$$

Si l'on considère u, v, λ comme des infiniment grands du premier ordre et a comme un infiniment petit du même ordre [1], la formule (112) montre que $Q(u, v)$ est d'ordre $2n + 3$. Donc, $P(v)$ est d'ordre $2n + 4$ et les dérivées successives $P'(v)$, $P''(v)$, ... sont d'ordre $2n + 3$, $2n + 2$, ... Dès lors, les crochets de la formule (115) ont des ordres de grandeur qui vont constamment en décroissant. Nous aurons donc la partie principale de I en gardant simplement le premier crochet non identiquement nul.

33. Pour faciliter le calcul des dérivées successives de $P(v)$, posons

$$H_p(u, v) = \frac{\partial^p Q}{\partial v^p}.$$

En vertu des identités

$$(116) \qquad \frac{\partial s'}{\partial v} = - r', \qquad \frac{\partial r'}{\partial v} = a,$$

---

(1) D'après (105), $au = R - r$ est une quantité finie.

on voit que, comme Q, H_p est un polynome en s' et r', obéissant à la formule de récurrence

$$(117) \qquad H_{p+1} = a\frac{\partial H_p}{\partial r'} - r'\frac{\partial H_p}{\partial s'}.$$

Il contient en facteur $(L - s)sr$ et z^{2n-p}, en posant, pour simplifier l'écriture,

$$(118) \qquad z = s - s'.$$

Posons maintenant

$$(119) \qquad G_p(v) = -H_p(v, v).$$

Faire $u = v$ revient à faire $u' = 0$, donc $s' = 0$ et $r' = R$.. La présence du facteur s' dans Q nous montre que

$$(120) \qquad G_0(v) \equiv 0.$$

Pour $p > 0$, $G_p(v)$ se présente sous la forme d'un polynome en s'' et r'', en représentant par ces lettres ce que deviennent s et r quand on y remplace u par v. Les dérivées successives de G_p par rapport à v sont des polynomes analogues, en vertu du symbole opératoire

$$(121) \qquad \frac{d}{dv} = -a\frac{\partial}{\partial r''} + r''\frac{\partial}{\partial s''}.$$

Observons encore que *le polynome* $G_p(v)$ *contient le facteur* $(L - s'')s''r''$, provenant du facteur $(L - s)sr$ de H_p et le facteur s''^{2n-p}, provenant de z^{2n-p}. Il contient donc le facteur $(L - s'')s''^{2n-p+1}r''$. D'après (121), la dérivée $G_p^{(q)}(v)$ contient en facteur $s''^{2n-p-q+1}$.

Cela posé, si l'on dérive p fois la formule (114), on obtient, en tenant compte de (120),

$$(122) \qquad \begin{aligned} P^{(p)}(v) = {} & G_1^{p-2}(v) + G_2^{p-3}(v) + \ldots \\ & + G_{p-1}(v) + \int_v^{\lambda} H_p(u, v)\,du. \end{aligned}$$

Pour $v = \lambda$, on doit remplacer s'' par L et r'' par R', de sorte que

$$(123) \qquad G_p(\lambda) = 0.$$

Dès lors, (122) devient

$$P^{(p)}(\lambda) = G_1^{p-2}(\lambda) + \ldots + G'_{p-2}(\lambda) \qquad (p > 2); \tag{124}$$

$$P(\lambda) = P'(\lambda) = P''(\lambda) = 0. \tag{125}$$

Pour $v = 0$, on doit remplacer u' par u, donc s' par s, r' par r et z par zéro, dans H_p. Dans G_p et ses dérivées, il faut remplacer s'' par zéro et r'' par R. On en conclut que

$$H_p(u, 0) = 0, \qquad \text{si } p < 2n; \tag{126}$$

$$G_p^q(0) = 0, \qquad \text{si } p + q < 2n + 1. \tag{127}$$

34. Ces préliminaires étant établis, le premier crochet non nul de (115) est $-P'(0)$. Les formules (122) et (120) nous donnent

$$P'(0) = \int_0^\lambda H_1(u, 0)\, du.$$

En appliquant (117) on trouve

$$H_1(u, v) = (L - s) s r z^{2n-1} [a s' z - r'^2 (z - 2 n s')]. \tag{128}$$

Si $n = 0$, on a

$$H_1(u, 0) = (L - s) s r (a s - r^2).$$

En utilisant (108) et (109), il vient

$$P'(0) = \int_0^L (L - s)(3as - R^2) s\, ds = \frac{a L^4}{4} - \frac{R^2 L^3}{6}.$$

On retrouve (110), donc (111).

Supposons maintenant $n > 0$. On a

$$H_1(u, 0) = 0.$$

Donc

$$P'(0) = 0.$$

Le premier crochet non nul de (115) est

$$P'''(0) - P'''(\lambda) \cos \lambda.$$

La formule (124) donne

$$P'''(\lambda) = G'_1(\lambda).$$

Or, d'après (119) et (128),

$$G_1(v) = R^2 (L - s'') s''^{2n+1} r''. \tag{129}$$

En appliquant (121), on a

$$(130)\qquad G'_1(v) = -aR^2(L-s'')s''^{2n+1} + R^2r''^2s''^{2n}[(2n+1)L-(2n+2)s''].$$

D'où

$$(131)\qquad P'''(\lambda) = G'_1(\lambda) = -R^2R'^2L^{2n+1}.$$

Nous avons maintenant, d'après (122) et (127),

$$(132)\qquad P'''(o) = \int_0^\lambda H_3(u, o)\,du.$$

La formule (126) nous montre que $P'''(o) = o$, si $n > 1$.

Pour $n = 1$, il faut calculer $H_3(u, o)$.

Calculons d'abord $H_2(u, v)$ pour n quelconque, ce calcul devant nous servir ultérieurement. En appliquant (117) et (128), on trouve

$$(133)\qquad H_2(u, v) = (L-s)srr'[-3az^{2n} + 2n(3as'-2r'^2)z^{2n-1} + 2n(2n-1)r'^2s'z^{2n-2}].$$

En appliquant de nouveau (117) et faisant tout de suite $n = 1$, $z = o$, il vient

$$H_3(u, o) = 6(L-s)sr^3(2as-r^2).$$

D'où, en portant dans (132) et tenant compte de (108),

$$P'''(o) = 6\int_0^L (L-s)s(R^2-2as)(4as-R^2)\,ds$$

ou, tous calculs faits,

$$P'''(o) = -L^3\left(R^4 - 3R^2aL + \frac{12}{5}a^2L^2\right)$$

ou enfin, en éliminant a par (109),

$$P'''(o) = -\frac{L^3}{10}(R^4 + 3R^2R'^2 + 6R'^4).$$

On a dès lors

$$(134)\qquad A_2 = \frac{8}{5\lambda^4}\,\frac{R^4 + 3R^2R'^2 + 6R'^4 - 10R^2R'^2\cos\lambda_0}{(R+R')^4},$$

à condition que le numérateur ne soit pas nul. Mais, cette circonstance ne se présentera jamais pour un spiral plat, car la valeur que devrait prendre $\cos\lambda$ est > 1 pour $R^2 > 6R'^2$, inégalité certainement vérifiée.

Pour $R = R'$, on retrouve le premier terme de (103).

Pour $n > 1$, la partie principale de l'intégrale I se réduit à $-P'''(\lambda)\cos\lambda$, à condition que $\cos\lambda$ ne soit pas nul. Si $\cos\lambda = 0$, elle devient $P^{(4)}(\lambda)\sin\lambda$. Or, (124) nous donne

$$(135) \qquad P^{(4)}(\lambda) = G_1''(\lambda) + G_2'(\lambda).$$

Dérivons (130), au moyen du symbole (121) et faisons immédiatement $v = \lambda$; il vient

$$(136) \qquad G_1''(\lambda) = 3aR^2R'L^{2n+1} - 2(2n+1)R'^3R^2L^{2n}.$$

En faisant $u = v$ dans (133), nous avons ensuite

$$(137) \qquad G_2(v) = Rr''(L - s'')s''^{2n}(3as'' + 4nR^2).$$

D'où, en appliquant (121),

$$(138) \qquad G_2'(\lambda) = -RR'^2L^{2n}(3aL + 4nR^2).$$

Portant (136) et (138) dans (135), on obtient, en éliminant toujours a par (109),

$$P^{(4)}(\lambda) = \frac{RR'L^{2n}}{2}[3(R^3 + R'^3) - (8n+3)R^2R' - (8n+7)RR'^2].$$

On a finalement

$$(139) \quad A_{2n} = \frac{32(-1)^n}{(2n)!\,\lambda^4}\left\{\frac{R^2R'^2}{(R+R')^4}\cos\lambda + \frac{\sin\lambda}{\lambda}\,\frac{RR'[3(R^3+R'^3)-(8n+3)R^2R'-(8n+7)RR'^2]}{(R+R')^5}\right\}.$$

Comme *vérification*, on retrouve (104) pour $R = R'$.

35. Cas où la spire centrale est très petite. — Si R' est négligeable devant R, la formule (134) se réduit à

$$(140) \qquad A_2 = \frac{8}{5\lambda^4}.$$

Quant à la formule (139), elle donnerait, pour $n > 1$, $A_{2n} = 0$. Cela prouve qu'elle ne représente plus la partie principale de A_{2n}

et qu'il faut pousser plus loin la formule (115). Le crochet suivant est

$$P^{(5)}(\lambda)\cos\lambda - P^{(5)}(0).$$

La formule (124) nous donne

$$P^{(5)}(\lambda) = G_1'''(\lambda) + G_2''(\lambda) + G_3'(\lambda).$$

D'autre part, si l'on applique une, deux, trois fois la formule (121) et si l'on fait ensuite $v = \lambda$, c'est-à-dire $s'' = L$, $r'' = R' = 0$, on obtient

$$(141)\qquad \left(\frac{d}{dv}\right)_{v=\lambda} = -a\frac{\partial}{\partial r''},$$

$$(142)\qquad \left(\frac{d^2}{dv^2}\right)_{v=\lambda} = -a\frac{\partial}{\partial s''} + a^2\frac{\partial^2}{\partial r''^2},$$

$$(143)\qquad \left(\frac{d^3}{dv^3}\right)_{v=\lambda} = 3a^2\frac{\partial^2}{\partial r''\,\partial s''} - a^3\frac{\partial^3}{\partial r''^3}.$$

Rappelons-nous maintenant (n° 33) que $G_p(v)$ est de la forme

$$G_p(v) = (L - s'')r''f_p(r'', s''),$$

f_p désignant un polynome. En lui appliquant (141), (142) et (143), on voit que

$$(144)\qquad G_p'(\lambda) = G_p''(\lambda) = 0,$$

$$(145)\qquad G_p'''(\lambda) = -3a^2 f_p(0, L).$$

On en conclut, en se reportant à (129),

$$(146)\qquad P^{(5)}(\lambda) = -3a^2R^2L^{2n+1} = -\frac{3}{4}R^6L^{2n-1}.$$

Nous avons maintenant, d'après (122) et (127), en nous souvenant que $n > 1$,

$$(147)\qquad P^{(5)}(0) = \int_0^\lambda H_5(u, 0)\,du.$$

Pour $n > 2$, on a $P^{(5)}(0) = 0$, d'après (126). Il faut alors pousser (115) jusqu'au septième crochet, à cause du cas où $\cos\lambda$ serait nul. Autrement dit, on prend

$$I = P^{(5)}(\lambda)\cos\lambda - P^{(6)}(\lambda)\sin\lambda.$$

Il faut donc calculer $P^{(6)}(\lambda)$, soit, d'après (124) et (144),

$$P^{(6)}(\lambda) = G_1^{(5)}(\lambda) + G_2'''(\lambda).$$

En appliqnant (143) à (130), on voit immédiatement que

$$G_1^{(5)}(\lambda) = 0.$$

D'autre part, en appliquant (145) à (137), on a

$$G_2'''(\lambda) = -3a^2RL^{2n}(3aL + 4nR^2) = -\frac{3}{8}(8n+3)R^7L^{2n-2}.$$

Finalement, on a, *pour* $n > 2$,

$$(148) \qquad A_{2n} = \frac{96(-1)^n}{(2n)!\,\lambda^6}\left[-\cos\lambda + (8n+3)\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right].$$

Il reste le *cas* $n = 2$, pour lequel il nous faut calculer $H_5(u, 0)$. En appliquant trois fois (117) à H_2, il vient

$$H_5(u, v) = 3a\left(-a\frac{\partial^2 H_2}{\partial r'\,\partial s'} + r'\frac{\partial^2 H_2}{\partial s'^2}\right) + a^3\frac{\partial^3 H_2}{\partial r'^3}$$
$$- 3a^2r'\frac{\partial^3 H_2}{\partial r'^2\,\partial s'} + 3ar'^2\frac{\partial^3 H_2}{\partial r'\,\partial s'^2} - r'^3\frac{\partial^3 H_2}{\partial s'^3}.$$

En se reportant à (133) et remarquant que H_2 contient z^2 en facteur, on en déduit

$$H_5(u, 0) = 3ar\frac{\partial^2 H_2}{\partial s'^2} + 3ar^2\frac{\partial^3 H_2}{\partial r'\,\partial s'^2} - r^3\frac{\partial^3 H_2}{\partial s'^3}$$

ou enfin

$$H_5(u, 0) = 120(L - s)sr^5(3as - r^2).$$

Portant dans (147), il vient

$$P^{(5)}(0) = 120\int_0^L (L - s)s(R^2 - 2as)^2(5as - R^2)\,ds$$

ou, tous calculs faits,

$$P^{(5)}(0) = 120\,L^3\left(-\frac{R^6}{6} + \frac{3}{4}R^4aL - \frac{6}{5}R^2a^2L^2 + \frac{2}{3}a^3L^3\right)$$

ou, en éliminant a,

$$P^{(6)}(0) = -L^3R^6.$$

Donc,

$$A_4 = \frac{16}{3\lambda^6}\left(1 - \frac{3}{4}\cos\lambda\right), \tag{149}$$

ce qui n'est jamais nul.

36. Les formules (111), (134), (149) et (148) nous donnent *tous les coefficients relatifs au spiral plat à spire centrale de rayon nul*. Mais, il est bien entendu que ces formules sont seulement des *formules asymptotiques pour* λ *infiniment grand*. On peut les appliquer approximativement aux spiraux des montres, à condition toutefois de ne pas pousser trop loin le développement (92). Si l'on examine, en effet, la formule (148), on voit que le second terme du crochet devient comparable au premier, dès que $(8n+3)$ est de l'ordre de λ. Ceci arrive déjà pour $n = 3$, si λ est de l'ordre de 27, c'est-à-dire pour un spiral de 4 à 5 spires. Dans ces conditions, il est fort possible que les termes négligés dans la formule (115) aient une influence appréciable.

Si l'on s'en tient aux deux premiers termes, la formule (92) nous donne

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{m R_0^2}{24 A}\left(1 + 2,4\frac{\theta_0^2}{\lambda_0^2}\right). \tag{150}$$

Cette formule est, en définitive, *plus simple que la formule* (98), *qui concerne le spiral cylindrique*. En outre, elle ne contient pas de lignes trigonométriques de λ_0. Il est donc vraisemblable d'admettre que *les courbes terminales ont, cette fois, une influence négligeable*. Toutefois, la question demande à être examinée de plus près.

37. Simplifications diverses concernant l'influence de l'inertie du spiral. — Tous les calculs précédents étaient imprimés, lorsque j'ai découvert le moyen de les simplifier considérablement, tout en les rendant plus exacts, tout au moins en ce qui concerne le spiral cylindrique.

Je signalerai tout d'abord une autre manière d'écrire la formule générale (92), qui est plus avantageuse à certains points de vue. D'après (86) et (91), on a

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{m}{2\pi\theta_0 A L^3}\int_0^{2\pi}\left(H\theta - \frac{1}{2}\frac{dH}{d\theta}\theta_0^2\sin^2\lambda\right)\cos\lambda\, d\lambda.$$

Or, en intégrant par parties, il vient

$$\int_0^{2\pi} \frac{dH}{d\theta}\theta_0 \sin^2\lambda \cos\lambda \, d\lambda = \Big[- H \sin\lambda \cos\lambda \Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} H(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda)\, d\lambda.$$

Le terme intégré étant nul, on a

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{m}{4\pi AL^3} \int_0^{2\pi} H\, d\lambda$$

ou

(151) $$\Delta T = \frac{m}{2AL^3} \int_0^T H\, dt.$$

Cette formule peut être obtenue directement à partir du théorème des forces vives. D'après le n° **22**, la durée d'une oscillation simple est

$$\sqrt{\frac{A}{EI}} \int_{\theta_0}^{\theta_0} \frac{\sqrt{1 + \frac{mH}{AL^3}}}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}}\, d\theta.$$

L'augmentation due à l'inertie du spiral s'écrit, au second ordre près,

$$\sqrt{\frac{A}{EI}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{mH}{2AL^3} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{mH}{2AL^3}\, dt.$$

Pour l'oscillation suivante, on a une augmentation analogue, l'intégrale étant prise de $\frac{T}{2}$ à T. En groupant les deux oscillations, on obtient l'augmentation de période sous la forme (151).

En y remplaçant H par la série (76), on retrouve immédiatement le développement (92).

La formule (151) nous montre que ΔT est positif, puisqu'il en est ainsi de H. Donc, *l'inertie du spiral provoque un retard de la montre.*

Si l'on connaît une limite supérieure H′ *de la fonction* H, on a

(152) $$\frac{\Delta T}{T} < \frac{mH'}{2AL^3}.$$

Observons enfin qu'en se reportant à (67), on peut écrire (151) sous la forme

(153) $$\Delta T = \frac{m}{2AL^3} \int_0^L s^2\, ds \int_0^T \rho^2\, dt.$$

Donc, si l'on appelle ρ'^2 la *valeur moyenne* de la fonction périodique ρ^2, on a

(154) $$\frac{\Delta T}{T} = \frac{m}{2AL^3}\int_0^L \rho'^2 s^2\,ds.$$

38. Spiral cylindrique. — Revenons maintenant au calcul du n° 28.

Dans un but de simplification, j'avais cru devoir négliger les courbes terminales. En réalité, je n'ai fait que compliquer la question. *Le calcul exact est plus simple que le calcul approché* fait au n° 28.

Si le point P est un point quelconque *d'une spire circulaire*, on peut considérer l'arc AP comme une courbe de Phillips [1]. Le point G se trouve donc sur la perpendiculaire à OP et à la distance $OG = \frac{R^2}{s}$. On a dès lors

(155) $$\rho^2 = R^2 + \frac{R^4}{s^2}.$$

D'où

(156) $$H = R^2\int_0^L (s^2 + R^2)\,ds = R^2\left(\frac{L^3}{3} + LR^2\right) = L^5\left(\frac{1}{3\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^4}\right),$$

formule plus simple que la formule (93).

Le développement de cette fonction suivant les puissances de θ est immédiat et l'on a, avec les notations de la formule (76),

$$A_{2n} = \frac{2n+1}{3\lambda_0^{2n+2}}\left[1 + \frac{(n+1)(2n+3)}{\lambda_0^2}\right].$$

Portant dans (92), il vient

(157) $$\frac{\Delta T}{T} = \frac{mR_0^2}{6A}\left[f(z) + \frac{1}{\lambda_0^2}g(z)\right],$$

où l'on a posé

$$z = \frac{\theta_0^2}{4\lambda_0^2}$$

---

[1] A vrai dire, ceci n'est rigoureusement exact qu'à l'état naturel, c'est-à-dire pour $\theta = 0$. Si la courbe terminale était parfaite, c'est-à-dire si le spiral restait bien centré pendant tout le mouvement, cela serait exact quel que soit θ. Dans la pratique, on s'approche plus ou moins de cette dernière condition et cela prouve qu'il ne faut pas chercher une précision exagérée dans les formules qui vont suivre.

et

$$(158)\quad \begin{cases} f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}z^n, \\ g(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!(n+1)(2n+3)}{(n!)^2}z^n \end{cases}$$ (1).

Si l'on s'arrête au terme en θ_0^2 et si l'on néglige le second terme du crochet, on a la formule approchée

$$(159)\quad \frac{\Delta T}{T}=\frac{mR_0^2}{6A}\left(1+\frac{3}{2}\frac{\theta_0^2}{\lambda_0^2}\right).$$

On peut aussi appliquer la formule (151). En négligeant le second terme de H, il vient

$$\frac{\Delta T}{T}=\frac{mL^2}{12\pi A}\int_0^{2\pi}\frac{du}{(\lambda_0+\theta_0\cos u)^2}$$

ou, tous calculs faits,

$$(160)\quad \frac{\Delta T}{T}=\frac{mR_0^2}{6A}\left(1-\frac{\theta_0^2}{\lambda_0^2}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

En appliquant la formule du binome au second facteur, on retrouve la série $f(z)$ de la formule (157).

39. La formule (159) est, comme on le voit, *beaucoup plus simple* que la formule (98). Elle est, en outre, *plus exacte* et *l'influence des courbes terminales*, que j'avais soupçonnée au n° 31, *existe réellement*, *à partir du terme en* θ_0^2. L'explication en est d'ailleurs très simple. Si l'on se reporte à la formule (153), on voit que la partie de ΔT qui varie avec θ_0 dépend de la manière dont ρ^2 varie avec t. Or, si l'on néglige les courbes terminales, on modifie la loi de déformation du spiral et, par conséquent, la manière dont ρ^2 dépend de t. On fausse ainsi le calcul des termes variables de ΔT, malgré que l'erreur commise soit, en pratique, très petite, ainsi qu'on le verra un peu plus loin.

---

(1) M. Keelhoff a établi une formule analogue (*loc. cit.*, p. 52); mais, comme il a reproduit l'erreur de Caspari, cette formule est inexacte.

40. Avec la méthode de Caspari, rectifiée par M. Andrade, on obtient le couple perturbateur

$$(161) \qquad m\mathrm{L}^2\left[-\theta''^2\left(\frac{1}{3\lambda^2}+2\frac{\lambda-\sin\lambda}{\lambda^5}\right)+\theta'^2\left(\frac{1}{3\lambda^3}+6\frac{\lambda-\sin\lambda}{\lambda^6}\right)\right],$$

à condition toutefois de ne négliger aucun terme, contrairement à ce que fait M. Andrade, qui réduit chaque parenthèse à son premier terme. Cela paraît légitime au premier abord, vu la grandeur de λ. Mais, en réalité, on modifie de la sorte les coefficients de la formule (88), à partir du terme en θ_0^4, et cela pour une raison analogue à celle qui a été expliquée au n° 28.

Le couple perturbateur exact, déduit de la formule (65), a pour valeur

$$(162) \qquad m\mathrm{L}^2\left[-\theta''\left(\frac{1}{3\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^4}\right)+\theta'^2\left(\frac{1}{3\lambda^3}+\frac{1}{\lambda^5}\right)\right].$$

Il est intéressant de chercher l'origine de la discordance entre les deux expressions (161) et (162), particulièrement en ce qui concerne la présence des termes en $\sin\lambda$.

Le calcul de M. Andrade est entièrement exact et conforme à notre formule (65), *avant la double intégration*. La divergence se produit dans l'intégration qui conduit à (66). M. Andrade intègre le long du cercle et cela introduit précisément des termes trigonométriques. Au contraire, *si la courbe terminale est comprise dans l'intégration*, on aboutit à (66) et ces termes disparaissent ([1]).

41. L'influence des courbes terminales signalée au n° 39 a une importance beaucoup plus théorique que pratique. La modification qu'elle apporte à la fonction ρ^2 est, en moyenne, extrême-

---

([1]) Si l'on prend un axe des x aboutissant au début des spires circulaires, on voit aisément qu'en négligeant la première courbe terminale, l'erreur commise sur $\int_0^{s'} y\,ds$ est égale à R^2, ce qui entraîne sur H une erreur égale à

$$-\mathrm{R}^2\int_0^{\mathrm{L}}(y'-\eta')s'\,ds' = -\mathrm{R}^2\int_0^{\mathrm{L}}(s'y'+\mathrm{R}x')\,ds' = \mathrm{R}^5(\lambda\cos\lambda-2\sin\lambda).$$

Le terme en $\lambda\cos\lambda$ n'existe pas dans (161), parce que M. Andrade calcule le moment fléchissant du point P au piton et non du point P à la virole.

ment petite et ne change pas beaucoup la valeur de H, ni de ΔT.

Par contre, lorsqu'on applique la formule (155) au spiral entier, on commet une erreur qui, comme on va le voir, est loin d'être négligeable.

Supposons, pour simplifier, les deux courbes terminales symétriques et soit l leur longueur commune. La valeur correcte de H est

$$H = \int_0^l \rho^2 s^2 ds + \int_{L-l}^{L} \rho^2 s^2 ds + \frac{R^2}{3}(L^3 - 3L^2 l + 3Ll^2 - 2l^3) + R^4(L - 2l).$$

D'autre part, si λ_0 désigne *l'angle au centre total des spires circulaires à l'état naturel*, on a

$$(163) \qquad \frac{R}{L} = \frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda'_0 + \theta},$$

en posant

$$(164) \qquad \lambda'_0 = \frac{\lambda_0}{1 - 2\varepsilon}, \qquad \varepsilon = \frac{l}{L}.$$

Dès lors, si H_1 et H_2 désignent les deux intégrales ci-dessus, on a

$$\frac{H}{L^5} = \frac{H_1 + H_2}{L^5} + \frac{1 - 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3}{3\lambda'^2} + \frac{1 - 2\varepsilon}{\lambda'^4}.$$

Pour évaluer H_1 et H_2, prenons un *exemple concret*. Supposons chaque courbe terminale constituée par un arc de cercle (¹). Soient r_0 son rayon et u_0 son angle au centre, à l'état naturel. On sait que $r_0 = 0,82679\,R_0$ et $u_0 = 245°26'$, soit 4,2835 radians.

Après déformation, ces quantités deviennent

$$(165) \qquad r = \frac{\varepsilon L}{u}, \qquad u = u_0 + \theta\varepsilon.$$

Pour la première courbe terminale, on a, d'après (93),

$$\frac{H_1}{L^5} = \varepsilon^5\left(\frac{1}{3u^2} + 2\frac{1 + \cos u}{u^4} - 4\frac{\sin u}{u^5}\right) = \varepsilon^5 \varphi(u).$$

Quand P décrit la deuxième courbe terminale, G est très voisin de O (²). On peut donc confondre ρ avec la distance OP

(¹) *Cf.* GROSSMANN, *loc. cit.*, p. 114.

(²) La distance OG décroît de $\frac{R^2}{L - l}$ à o.

et si t désigne l'angle du rayon CP avec le rayon qui passe à l'origine de la courbe, on a approximativement

$$\rho^2 = (R - r)^2 + r^2 + 2r(R - r)\cos t, \qquad s = L - l + rt.$$

D'où

$$H_2 = L^3(R^2 - 2Rr + 2r^2)\frac{3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{3}$$
$$+ 2r^2(R - r)[(L^2 - 2r^2)\sin u + 2r(L\cos u - L + l)],$$

ou, d'après (163) et (165),

$$\frac{H_2}{L^5} = \frac{3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{3}\left(\frac{1}{\lambda'^2} - \frac{2\varepsilon}{\lambda' u} + \frac{2\varepsilon^2}{u^2}\right)$$
$$+ \frac{2\varepsilon^2}{u^2}\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{\varepsilon}{u}\right)\left[\sin u + \frac{2\varepsilon}{u}(\cos u - 1 + \varepsilon) - \frac{2\varepsilon^2}{u^2}\sin u\right].$$

Finalement,

$$(166)\quad \frac{H}{L^5} = \frac{1 - \varepsilon^3}{3\lambda'^2} + \frac{1 - 2\varepsilon}{\lambda'^4} + \frac{2\varepsilon^2}{u}\left(\frac{\varepsilon}{u} - \frac{1}{\lambda'}\right)$$
$$\times\left[1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{3} - \frac{\sin u}{u} + \frac{2\varepsilon}{u^2}(1 - \varepsilon - \cos u) + \frac{2\varepsilon^2}{u^3}\sin u\right] + \varepsilon^5\varphi(u).$$

En développant cette fonction suivant les puissances de θ, on pourrait obtenir la formule générale donnant $\frac{\Delta T}{T}$. Mais, le calcul serait compliqué et sans intérêt pratique.

Afin de ne pas évaluer de termes sans importance, précisons les données numériques, en prenant le spiral suivant, considéré par Grossmann [1]. Les unités de longueur, de force et de temps étant le millimètre, le gramme-poids et la seconde, on a $R_0 = 4$; épaisseur $= 0{,}07$; hauteur $= 0{,}24$; $\lambda_0 = 20\pi$; densité $= 8$; $E = 26.10^6$; $T = 0{,}4$.

On en déduit $L = 279{,}66$ et $\varepsilon = 0{,}0507$.

Le moment d'inertie A se calcule par l'intermédiaire de T; on trouve

$$\frac{mL^2}{2A} = 57{,}97.$$

Le retard, en secondes par jour, est

$$x = 86400.\frac{\Delta T}{T}.$$

[1] *Loc. cit.*, p. 312. Cet auteur n'a pas considéré les courbes terminales.

Supposons que le balancier fasse un tour et demi, ce qui donne

$$\theta_0 = \frac{3\pi}{2} = 4{,}7124.$$

D'après (152), la correction correspondant au dernier terme de (166) est inférieure à

$$6.65.10^6.\,\varepsilon^3\left(\frac{1}{3u_0^2} + \frac{4}{u_0^4} + \frac{4}{u_0^5}\right),$$

ce qui est plus petit que 0,07, donc négligeable.

Considérons maintenant le terme

$$\frac{4\varepsilon^3}{u^3}\left(\frac{\varepsilon}{u} - \frac{1}{\lambda'}\right)\left(1 - \varepsilon - \cos u + \frac{\varepsilon \sin u}{u}\right).$$

Si l'on remarque que $\frac{\varepsilon}{u} - \frac{1}{\lambda'}$ reste compris entre

$$\frac{\varepsilon}{u_0} - \frac{1}{\lambda'_0 + \theta_0} = -0{,}0016 \qquad \text{et} \qquad \frac{\varepsilon}{u_0 + \varepsilon\theta_0} - \frac{1}{\lambda'_0} = -0{,}0031,$$

on voit que la correction correspondante a une valeur absolue inférieure à

$$6{,}65.10^6.\frac{4\varepsilon^3}{u_0^3}.0{,}0031.2 < 0{,}27.$$

Elle est également négligeable.

Pour le terme $\frac{1-2\varepsilon}{\lambda'^4}$, elle est inférieure à $\frac{6{,}65.10^6}{\lambda_0'^4} < 0{,}28$.

Pour $-\frac{\varepsilon^3}{3\lambda'^2}$, elle est inférieure à $2{,}22.10^6\,\frac{\varepsilon^3}{\lambda_0'^2} < 0{,}06$.

Pour le terme $\frac{2\varepsilon^4}{3u}\left(\frac{\varepsilon}{u} - \frac{1}{\lambda'}\right)$, elle est inférieure à

$$6.65.10^6.\frac{2\varepsilon^4}{3u_0}.0{,}0031 < 0{,}02.$$

Finalement, la formule (166) se trouve réduite à

$$\frac{H}{L^5} = \frac{1}{3\lambda'^2} + \frac{2\varepsilon^2}{u}\left(\frac{\varepsilon}{u} - \frac{1}{\lambda'}\right)\left(1 - \varepsilon - \frac{\sin u}{u}\right). \tag{167}$$

Calculons les termes successifs de (92), jusqu'au moment où ils seront négligeables. On trouve, en écrivant séparément les corrections relatives aux deux termes de (167) :

Terme constant : 431,5 — 10,8 = 330,7 ;

Terme en θ_0^2 : 2,3 — 0,2 = 2,1 ;

Terme en θ_0^4 : inférieur à 0,0003.

On voit que le second terme de (167) n'apporte qu'une contribution négligeable au terme en θ_0^2. Celui-ci peut donc être, sans inconvénient, évalué comme dans la formule (159), sous réserve de remplacer λ_0 par λ'_0, ce qui revient à lui donner la valeur $\frac{mR_0^4}{4AL^2}\theta_0^2$.

Par contre, la partie constante de ΔT doit être calculée d'après la forme exacte du spiral, courbes terminales comprises.

Dans ce calcul, on peut toutefois remplacer la distance ρ par la distance $r = OP$, puisque nous avons vu que l'influence du terme en $\frac{1}{\lambda'^4}$ était négligeable.

En définitive, il semble que *la perturbation d'inertie du spiral cylindrique peut être pratiquement évaluée au moyen de la formule suivante :*

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{mH_0}{2AL^3} + \frac{mR_0^4}{4AL^2}\theta_0^2, \tag{168}$$

où R_0 désigne le rayon naturel des spires circulaires, L la longueur *totale* du spiral et enfin H_0 l'intégrale $\int r^2 s^2 ds$, évaluée le long du spiral entier, à l'état naturel.

42. Au point de vue de *l'isochronisme*, qui est celui du régleur, la perturbation d'inertie est de minime importance (¹); car, si l'on réduit θ_0 de moitié, dans l'exemple précédent, le retard est seulement diminué de $1^s,6$.

Par contre, l'influence absolue sur la durée d'oscillation est assez grande, puisqu'elle se monte à 331 secondes, pour une amplitude infiniment petite.

La première courbe terminale (côté piton) *est négligeable à tous points de vue*, puisque nous avons trouvé que le terme correspondant était inférieur à $0^s,07$. Et cela s'explique par le fait que cette courbe est presque immobile.

Au contraire, *la seconde courbe apporte une contribution importante dans la perturbation*. Si l'on se reporte à l'expression de $\frac{H_2}{L^5}$, on trouve que cette contribution est d'environ 39 secondes.

(¹) *Cf.* GROSSMANN, *loc. cit.*, p. 317.

43. Spiral plat. — Comme pour le spiral cylindrique, on commet une erreur certainement négligeable en laissant de côté, pour le calcul de la fonction H, la courbe terminale extérieure [1].

Quant à la courbe intérieure, si elle existe, elle est très petite et très rapprochée de l'axe. Le chemin d'intégration correspondant est très petit, ainsi que le facteur ρ^2. Pour ces deux raisons, on peut également négliger cette deuxième courbe [2].

Enfin, on peut remplacer ρ par la distance $r = OP$, puisqu'on a vu que cela n'entraînait qu'une erreur très faible dans le cas du spiral cylindrique. D'autre part, si les spires sont sensiblement circulaires, on peut confondre r avec le rayon de courbure.

Dès lors, si r_0 désigne le rayon naturel, on a

$$r = \frac{r_0}{1 + \theta \frac{r_0}{L}};$$

d'où

$$H = \int_0^L \frac{r_0^2}{\left(1 + \theta \frac{r_0}{L}\right)^2} s^2 \, ds.$$

Le terme constant et le coefficient de θ^2 ont pour valeurs respectives

$$L^5 A_0 = \int_0^L r_0^2 s^2 \, ds, \qquad L^5 A_2 = 3 \int_0^L \frac{r_0^4}{L^2} s^2 \, ds.$$

Comme au n° 32, assimilons le spiral à une développante de cercle; nous obtenons

$$L^5 A_0 = \int_0^L (R_0^2 - 2 a_0 s) s^2 \, ds = \frac{L^3 (R_0^2 + 3 R_0'^2)}{10},$$

$$L^7 A_2 = 3 \int_0^L (R_0^2 - 2 a_0 s)^2 s^2 \, ds = \frac{L^3 (R_0^4 + 3 R_0^2 R_0'^2 + 6 R_0'^4)}{10}.$$

En remplaçant L par $\frac{R_0 + R_0'}{2} \lambda_0$, on retrouve les formules (111) et (134), abstraction faite du terme en $\cos \lambda_0$ de (134). Ce terme provient de ce que, dans notre premier calcul, nous n'avons pas tenu compte des courbes terminales pour l'évaluation de la

---

(1) *Cf.* Keelhoff, *loc. cit.*, p. 55.
(2) *Cf.* Keelhoff, *loc. cit.*

distance ρ. L'erreur est analogue à celle que nous avons déjà signalée au n° **39**.

En portant les valeurs ci-dessus de A_0 et de A_2 dans (92), il vient

$$\frac{\Delta T}{T} = m \frac{R_0^2 + 3R_0'^2}{24A} \left[1 + 2.4 \frac{R_0^2 + \dfrac{6R_0'^4}{R_0^2 + 3R_0'^2}}{(R_0 + R_0')^2} \right] \cdot \frac{\theta_0^2}{\lambda_0^2}.$$

Pour $R_0 = R_0'$, on retombe sur la formule (159). Pour $R_0' = 0$, on retrouve la formule (150).

Observons encore que, comme au n° **41**, il faut, en réalité, remplacer λ_0 par $\lambda_0' = \frac{\lambda_0}{1-\varepsilon}$, en appelant ε le rapport entre la longueur totale des courbes terminales et la longueur totale du spiral.

Si, au lieu d'une développante de cercle, on prend une *spirale d'Archimède*, on aboutit pratiquement au même résultat. En effet, si r et u sont les coordonnées polaires et R le rayon extérieur, on a, à l'état naturel,

$$r = R - au, \qquad a = \text{const.}$$

Puis, en négligeant a^2 devant r^2, $ds = rdu$; d'où

$$s = Ru - \frac{au^2}{2}.$$

On retrouve les équations (105) et (108). Donc, les valeurs de A_0 et de A_2 sont pratiquement les mêmes que ci-dessus.