BULLETIN DE LA S. M. F.

P. LEVY

# Sur les caractères invariants des transformations corrélatives

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 57 (1929), p. 42-49
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1929__57__42_0>

# SUR LES CARACTÈRES INVARIANTS DES TRANSFORMATIONS CORRÉLATIVES;

PAR M. PAUL LÉVY.

L'objet de ce travail est de définir les différents types de transformations corrélatives, se distinguant les uns des autres par des caractères invariants au point de vue projectif. Les principaux résultats sont tirés d'un travail fait en 1904 et qui n'a pas été publié.

Nous traiterons complètement le cas du plan et sommairement le cas de l'espace. L'extension aux hyperespaces ne présente pas d'autre difficulté que l'augmentation du nombre des cas particuliers à énumérer.

## LE CAS DU PLAN.

1. Désignons par T la transformation corrélative

$$(1)\quad \begin{cases} u = ax + by + cz, \\ v = a'x + b'y + c'z, \\ w = a''x + b''y + c''z \end{cases}$$

(à déterminant $\delta$ essentiellement différent de zéro), c'est-à-dire la transformation faisant correspondre au point M, de coordonnées homogènes $x$, $y$, $z$, la droite D d'équation

$$uX + vY + wZ = 0,$$

$u$, $v$, $w$, ayant les valeurs (1).

La droite D contient le point M si l'on a

$$(2)\quad ux + vy + wz = 0,$$

c'est-à-dire

$$(2^{bis})\quad ax^2 + b'y^2 + c''z^2 + (c' + b'')yz + (a'' + c)zx + (b + a')xy = 0.$$

Le déterminant $\delta$ ne pouvant être symétrique gauche, cette condition n'est jamais une identité en $x$, $y$, $z$. Elle exprime donc que le point M est sur une conique C, que nous supposerons d'abord non dégénérée; nous reviendrons ensuite sur les cas particuliers ainsi écartés.

On peut dire aussi que la condition (2) exprime que le point M est son propre conjugué, et il en est naturellement ainsi pour la transformation inverse $T^{-1}$ aussi bien que pour la transformation T; la conique C est donc la même pour ces deux transformations. La droite D, transformée d'un point M mobile sur C, enveloppe une autre conique C′, et les deux coniques C et C′ se transforment l'une dans l'autre par la transformation T. La droite D, tangente à C′, coupe C en deux points M et $M_1$ qui sont ses transformés par les transformations $T^{-1}$ et T; $M_1$ est donc le transformé de M par la transformation $T^2$.

En dehors du cas bien connu de la transformation par polaires réciproques, pour lequel M et $M_1$ sont confondus, la relation homographique ainsi obtenue admet deux points doubles A et B. Traitons d'abord le cas où ces points sont distincts, et où par suite les coniques C et C′ sont bitangentes: ce cas se divise en deux suivant la réalité de ces points.

2. Premier cas. — *Les points* A *et* B *sont imaginaires conjugués* (*cas elliptique*). — On peut, sans que cela soit une restriction au point de vue projectif, supposer que A et B soient les points cycliques. Les coniques non dégénérées C et C′ sont alors deux cercles concentriques; leurs rayons R et R′ ne sont ni nuls, ni infinis, et, la transformation étant réelle, sont tous deux réels ou tous deux imaginaires purs.

On voit aisément dans ce cas, en posant

$$(3) \qquad \rho = \sqrt{RR'}, \qquad \cos\alpha = \frac{R'}{R} < 1 \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right),$$

que T est le produit de la transformation par polaires réciproques par rapport au cercle Γ concentrique à C et C′ et de rayon $\rho$, et d'une rotation d'angle $\alpha$ autour de ce cercle $\left(\text{c'est parce que cet angle est nécessairement réel que nous avons pu écrire } \frac{R'}{R} < 1\right)$; le produit considéré est commutatif; suivant le sens de la rotation on obtient l'une ou l'autre des transformations inverses $T^{-1}$ et T.

Si R et R', et par suite $\rho$, sont imaginaires purs, on peut, au lieu du cercle $\Gamma$, considérer le cercle réel $\Gamma'$ de rayon $i\rho$, et remplacer $\alpha$ par $\alpha - \pi$.

En introduisant la notion de *pseudo-rotation elliptique d'angle* $\alpha$, c'est-à-dire d'une transformation équivalente au point de vue projectif, et sans introduction d'imaginaire, à une rotation d'angle $\alpha$, on voit que toute transformation corrélative du type considéré peut être définie d'une manière et d'une seule, comme le produit d'une transformation par polaires réciproques par rapport à une conique réelle ($\Gamma$ ou $\Gamma'$) et d'une pseudo-rotation d'angle $\alpha$ compris entre $-\pi$ et $+\pi$ et non multiple de $\frac{\pi}{2}$. Pour $\alpha = 0$ ou $\pm\pi$, on a une transformation par polaires réciproques, et pour $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ (donc $R' = 0$, $R = \infty$), on a aussi une transformation d'un type différent, la conique C se réduisant à une droite double, et la conique tangentielle C' à un point double.

Ces transformations T ont évidemment un invariant projectif, l'angle $\alpha$. On peut aussi prendre comme invariant le rapport anharmonique $\lambda = \cos^2\alpha$ des coniques C et C' par rapport aux coniques dégénérées du faisceau linéaire qu'elles forment, ou le rapport anharmonique $k = e^{i\alpha}$ des points M et $M_1$ par rapport aux points A et B sur la conique C.

La transformation $T^2$ est une pseudo-rotation elliptique, c'est-à-dire une transformation homographique ayant un point double réel O, deux points doubles imaginaires conjugués A et B, et telle en outre, si $\mu$ et $\mu'$ sont les rapports anharmoniques définissant la transformation, c'est-à-dire si

$$\mu = \mathcal{R}(M, M', O, A), \qquad \mu' = \mathcal{R}(N, N', O, B),$$

M, M' étant deux points conjugués sur OA et N, N' étant deux points conjugués sur OB, que l'on ait $\mu\mu' = 1$. De même $T^{2n}$ est une pseudo-rotation d'angle $2n\alpha = \beta$.

Si $T^{2n}$ est donné, on peut prendre pour $\Gamma$ n'importe quelle conique tangente à OA en A et à OB en B, et pour $\alpha$ n'importe laquelle des valeurs

$$\frac{\beta}{2n}, \quad \frac{\beta + 2\pi}{2n}, \quad \ldots, \quad \frac{\beta + 2(n-1)\pi}{2n}.$$

On a ainsi $2n$ transformations dépendant chacune d'un paramètre arbitraire. La généralité est plus grande si $\beta = \pi$, c'est-à-dire si $T^{2n}$ est du type d'une symétrie par rapport à un point O, car dans ce cas tous les points de AB étant doubles, on peut prendre pour $\Gamma$ n'importe quelle conique par rapport à laquelle AB soit la polaire de O (et ne coupant pas AB si l'on veut rester dans le type de transformations considéré); on a ainsi trois paramètres au lieu d'un. Si $\beta = 2\pi$, c'est-à-dire si $T^{2n} = 1$, la généralité est plus grande encore; on peut prendre pour $\Gamma$ une conique quelconque; on a $2n$ transformations dépendant chacune de cinq paramètres.

On traite de même le problème de la recherche des transformations T du type considéré ayant pour puissance d'ordre $2n+1$ une transformation donnée; la solution résulte de la remarque que $T^{2n+1}$ est du même type, formée avec la même conique $\Gamma$, les mêmes points doubles A et B, mais une pseudo-rotation d'angle

$$\beta = (2n+1)\pi.$$

3. Deuxième cas. — *Les points* A *et* B *sont réels et distincts* (*cas hyperbolique*). — Dans ce cas, on peut les supposer placés à l'infini, dans la direction des axes $Ox$ et $Oy$, supposés rectangulaires. Les deux coniques C et C′ sont alors des hyperboles équilatères homothétiques et concentriques

$$xy = \lambda, \qquad xy = \lambda'.$$

Supposons d'abord $\lambda\lambda' > 0$, c'est-à-dire que C et C′ sont dans le même angle de leurs asymptotes. La conique $\Gamma$ est alors l'hyperbole

$$xy = \mu, \qquad \left(\frac{\lambda'}{\mu} = \frac{\mu}{\lambda} = \operatorname{ch}\alpha\right),$$

et la transformation T est le produit de la transformation par polaires réciproques par rapport à $\Gamma$ (qui transforme C et C′ l'une dans l'autre), et d'une *pseudo-rotation hyperbolique d'argument* $\alpha$, c'est-à-dire de la transformation

$$x' = xe^{\alpha}, \qquad y' = ye^{-\alpha},$$

qui fait glisser sur elle-même chacune des hyperboles C, C′ et $\gamma$.

Le nombre $\mu$ étant défini par $\mu^2 = \lambda\lambda'$, on prendra la valeur de $\mu$ du signe de $\lambda$ et $\lambda'$. L'inégalité $\frac{\lambda}{\mu} > 1$ étant impossible si T est une transformation réelle, $\alpha$ est réel, et l'on a une définition réelle de la transformation. En prenant la seconde valeur de $\mu$, l'hyperbole $\Gamma$ est remplacée par sa conjuguée, $\alpha$ par $\alpha + \pi i$, et naturellement le produit des deux transformations partielles reste le même.

Dans le cas où $\lambda\lambda' < 0$, $\mu$ est imaginaire pure, et l'hyperbole $\Gamma$ a son équation imaginaire. Mais on peut considérer l'hyperbole réelle $\Gamma_1$ d'équation

$$xy = i\mu, \qquad \left(\frac{\lambda'}{i\mu} = \frac{i\mu}{\lambda} = \operatorname{ch}\beta\right),$$

et dans ce cas la transformation étudiée apparaît comme le produit de la transformation par polaires réciproques par rapport à $\Gamma_1$, d'une pseudo-rotation hyperbolique d'angle $\beta$, et d'une symétrie par rapport à l'un des axes $Ox$ et $Oy$.

Dans tous les cas la transformation $T^2$ est une pseudo-rotation hyperbolique d'argument $2\alpha$, et ses puissances successives, comme l'on sait, forment un groupe d'une structure différente de celle observée dans le cas elliptique.

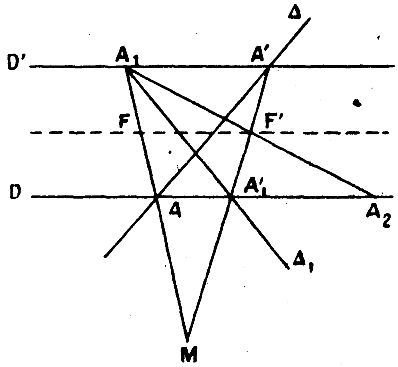
4. Troisième cas. — *Les points* A *et* B *sont confondus* (*cas parabolique*). — On peut dans ce cas supposer la tangente commune à C et C' située à l'infini ; ces deux coniques sont alors deux paraboles égales, de même axe et de même sens. On peut les amener l'une sur l'autre par une translation parallèle à l'axe ; en désignant par $\Gamma$ la position moyenne de la parabole ainsi transportée par un mouvement de translation de C à C', C et C' sont transformées l'une de l'autre dans la transformation par polaires réciproques par rapport à $\Gamma$. On voit sans peine dans ce cas que la transformation étudiée T est le produit de la transformation par polaires réciproques par rapport à $\Gamma$, et d'une transformation homographique sans autre point double que A faisant glisser sur elle-même chacune des paraboles C, C', $\Gamma$, l'abscisse d'un point (comptée perpendiculairement à l'axe) augmentant d'une quantité constante.

La transformation $T^2$ est alors un glissement parabolique analogue à celui que nous venons de définir, mais d'amplitude double.

5. *Cas où les deux coniques sont dégénérées.* — Nous avons déjà défini un cas où la conique ponctuelle C se réduit à une droite double, la conique tangentielle C′ se réduisant à un point double. Nous l'avons défini comme cas particulier du cas elliptique, et il peut tout aussi bien se déduire du cas parabolique. Les propriétés de ce cas résultent aisément de celles indiquées dans le cas général.

Il est possible aussi que C se réduise à un couple de droites D, D′ et C′ à un couple de points F, F′. Le point O, intersection de F et F′ est évidemment sur sa transformée F, F′; à cela près on peut choisir arbitrairement D, D′, F, F′. La transformation est alors bien définie, du moins si l'on sait lequel des points F et F′ est le transformé de D (autrement, comme dans le cas général, on ne pourrait pas séparer T et $T^{-1}$); supposons que F soit le transformé de D.

Soit alors une droite Δ coupant D et D′ en des points A et A′.




Son transformé est le point M, intersection de FA (droite transformée de A) et de F′A′ (transformée de A′).

La figure ci-dessus est faite en supposant D et D′ parallèles, et les points F et F′ équidistants de ces deux droites. Elle indique la construction des points $A_1$, $A'_1$ transformés de A et A′ par la transformation $T^2$, et le point $A_2$, transformé de A par $T^4$. Cette transformation $T^4$ est très simple : c'est une homologie, laissant invariants tous les points de FF′ et toutes les droites parallèles à FF′, et faisant glisser chacune de ses droites sur elle-même d'une quantité proportionnelle à sa distance à FF′. La transformation analogue, formée avec un glissement moitié du précédent, dont le carré est $T^1$, est distincte de $T^2$ ; on peut définir $T^2$ comme le produit (commutatif) de cette transformation et d'une symétrie par rapport au milieu de $FF'$.

Ce cas peut naturellement être défini comme limite du cas général : il suffit de prendre pour $C'$ une ellipse de foyers F et F′ et de petit axe tendant vers zéro, et pour C une ellipse homothétique et concentrique de la précédente dont le petit axe ait une valeur constante.

Nous avons donc en définitive les conclusions suivantes : dans tous les cas, l'ensemble des transformations inverses l'une de l'autre T et $T^{-1}$ est bien défini par la donnée des coniques C et C′, la droite transformée d'un point M de C étant l'une des tangentes menées de ce point à C′. Ces deux coniques, dans le cas général, sont bitangentes, et le système comporte un invariant projectif, le rapport anharmonique de C, C′, et des coniques dégénérées du faisceau qu'elles forment. Il y a différents cas particuliers, dans lesquels il n'y a aucun invariant projectif.

### LE CAS DE L'ESPACE.

Dans ce cas, nous introduirons la quadrique S, lieu des points M situés sur les plans P qui leur correspondent, la quadrique S′ enveloppe de ces plans ; S et S′ se transforment l'une dans l'autre par la transformation étudiée T.

Proposons-nous de mettre en évidence la situation relative de ces quadriques dans le cas général, où elles ne sont pas dégénérées. Nous allons montrer *qu'elles sont circonscrites l'une à l'autre.*

Les relations qui expriment qu'il en est ainsi étant algébriques par rapport aux coefficients de la transformation T, pour montrer qu'elles sont identiquement vérifiées, il suffit de montrer qu'en supposant les quadriques S et S′ circonscrites l'une à l'autre, on obtient bien des transformations dépendant de 15 paramètres.

Considérons d'abord la transformation T définie comme produit de la transformation par polaires réciproques par rapport à une sphère $\Sigma$ et d'une rotation d'angle $\alpha$ autour d'un diamètre $\Delta$ de cette sphère. Les quadriques S et S′ sont alors des sphères concentriques à la sphère $\Sigma$, de rayons R et R′ liés au rayon $\rho$ de $\Sigma$ et à l'angle $\alpha$ par les mêmes formules (3) que dans le cas du plan. La transformation $T^2$ est une rotation d'angle $2\alpha$ autour de $\Delta$.

En faisant varier la direction du diamètre $\Delta$, sans changer les sphères S et S′, on obtient une double infinité de transformations T. Par une homographie, l'ensemble S, S′ se transforme en un ensemble de deux quadriques circonscrites l'une à l'autre; compte tenu de ce qu'on peut faire varier $\alpha$, cela introduit 13 nouveaux paramètres. On a bien en tout les 15 paramètres voulus.

On peut dire aussi qu'une homographie U laissant T invariant, devant laisser invariantes les surfaces S et S′ et la droite $\Delta$ (lieu de points doubles de $T^2$), ne peut être qu'une rotation autour de $\Delta$. Il en résulte qu'en transformant T par une transformation homographique arbitraire, on obtient des transformations T' dépendant de $15 - 1 = 14$ paramètres; mais il y a un invariant projectif ($\alpha$ ou $\lambda = \cos^2 \alpha$, comme dans le cas du plan); en le faisant varier on a bien en tout 15 paramètres.

Les quadriques S et S′ sont donc circonscrites, la réduction à deux sphères réelles concentriques n'étant évidemment possible par une homographie réelle que dans le cas où, ces quadriques étant réelles, leur conique de contact est imaginaire. La discussion complète comprend un assez grand nombre de cas, qu'il nous paraît inutile d'énumérer complètement. Indiquons seulement un cas très différent de ceux indiqués dans l'étude du plan : un déterminant d'ordre pair pouvant être symétrique gauche sans s'annuler, il est possible que l'équation de la quadrique S soit identiquement vérifiée : c'est le cas bien connu de la transformation par rapport à un complexe linéaire.