BULLETIN DE LA S. M. F.

S. MANDELBROJT

Sur la recherche des points singuliers d'une série de Dirichlet

Bulletin de la S. M. F., tome 57 (1929), p. 78-103
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1929__57__78_0>

SUR LA RECHERCHE DES POINTS SINGULIERS D'UNE SÉRIE DE DIRICHLET;

PAR M. S. MANDELBROJT.

Introduction.

La recherche des points singuliers d'une série de Dirichlet $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ présente comme on sait des difficultés insurmontables. Déjà la série de Taylor $\Sigma a_n z^n = \Sigma a_n e^{-ns}$ ($z = e^{-s}$) où une seule suite arbitraire a_n intervient n'est pas facile à traiter à ce point de vue.

On gagnerait pourtant considérablement si l'on pouvait ramener l'étude de la série $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ d'une part à une série de Taylor qui lui est associée d'une manière ou d'une autre et d'autre part à la série $\Sigma e^{-\lambda_n s}$ qui joue le rôle de la série « *géométrique* » correspondant à $\lambda_n (n = 1, 2, \ldots)$.

Le but de ce travail est d'aborder et même de pousser assez loin une telle étude.

Les résultats ici établis sont beaucoup plus généraux et plus précis que ceux de ma seconde Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* concernant le même sujet (¹). (Sans parler de la première où j'ai énoncé des résultats élémentaires qui n'ont pas besoin pour leurs démonstrations de l'appareil que j'ai appliqué alors, et dont plusieurs hypothèses peuvent être abandonnées).

Au contraire, les résultats de la seconde Note ainsi que ceux de ce Mémoire (dont une autre partie a été exposée dans une troisième Note plus récente) exigent un appareil assez compliqué, mais je crois que ces méthodes peuvent être utiles dans d'autres branches de fonctions analytiques.

Au début de ce travail je ne fais aucune hypothèse sur les λ_n. Pourtant la notion des « moyennes typiques » de M. Riesz me

(¹) Tome 186, 1928, p. 1039.

permet d'énoncer des résultats même dans ce cas général sous une forme bien simple (*voir* § 2, 3, 4).

A partir du paragraphe 5 je pose $n < \lambda_n \leq n + 1$, alors on peut introduire des équations intégrales et intégro-différentielles qui vont m'être d'un certain secours : elles nous permettront de donner des solutions simples dans des cas où $\lambda_n = h(u)$ est tel que $h(z)$ est une fonction spéciale en z. Les hypothèses qu'on faisait sur les a_n pour l'étude de $\Sigma a_n z^n$ et transportables à des séries $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ en les faisant sur les a_n d'une part et les λ_n d'autre part donnent des résultats. Cette méthode me permet d'ailleurs de désigner des points qui sont *certainement* points singuliers de $H(f, \varphi)$ en connaissant ceux de f et de φ, en posant toutefois des conditions supplémentaires sur f.

Remarquons que l'introduction des points spéciaux dont le caractère est déterminé par le théorème classique de M. Picard me permet d'énoncer des résultats d'un caractère définitif. Ce Mémoire constitue la première partie de mon travail, la seconde paraîtra dans un autre recueil.

1. Une suite de nombres a_n étant donnée on appelle moyenne typique de cette suite d'ordre $k > 0$ de première espèce associée à la suite $n = 1, 2, \ldots$ la fonction en ω,

$$F_k(\omega) = \omega^{-k} \sum_{n<\omega} (\omega - n)^k a_n = k\omega^{-k} \int_0^{\omega} c(\tau)(\omega - \tau)^{k-1} d\tau,$$

où

$$c(\tau) = \sum_{n<\tau} a_n.$$

Cette notion n'est qu'un cas particulier de celle de la moyenne typique associée à la suite $l_n (l_{n+1} > l_n) \lim l_n = \infty$, qui est due à M. Marcel Riesz et qui s'introduit dans la théorie des séries de Dirichlet très naturellement. On démontre dès l'introduction de cette notion que si Σa_n converge et est égale à A, $\lim\limits_{\omega=\infty} F_k(\omega)$ existe et est aussi égale à A. De même pour la moyenne typique associée à $l_n (n = 1, 2 \ldots)$.

Considérons les suites

$$a_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad \text{et} \qquad \lambda_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$\lambda_n < \lambda_{n+1} \quad \lim_{n=\infty} \lambda_n = \infty.$$

et la suite

$$F_k(\lambda_n) = \sum_{m<\lambda_n} \left(1 - \frac{m}{\lambda_n}\right)^k a_m = k\lambda_n^{-k} \int_0^{\lambda_n} c(\tau)(\omega - \tau)^{k-1}\, d\tau.$$

Quand il n'aura pas d'ambiguïté (la suite a_n étant donnée et k étant fixe) nous appellerons $F_k(\lambda_n)$ la $\lambda_n^{\text{ième}}$ moyenne d'ordre k de la suite a_m (même si λ_n n'est pas entier ce qui sera notre cas).

Une suite b_n étant donnée, *s'il existe* une suite a_n telle que b_n en est la $\lambda_n^{\text{ième}}$ moyenne d'ordre k (la suite λ_n et le nombre k étant donnés) nous dirons que la *suite a_m est génératrice de la suite b_n d'ordre k relative à la suite λ_n*. Quelle que soit la suite λ_n on peut évidemment former des suites b_n qui admettent des génératrices d'un ordre donné relatives à λ_n.

Si la suite λ_n est telle qu'entre deux entiers consécutifs quelconques il existe au plus un λ_n, toute suite b_n admet une génératrice de tout ordre positif relative à $\lambda_n (n = 1, 2, \ldots)$.

Si

$$n < \lambda_n \leqq n + 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

toute suite b_n admet une et une seule génératrice relative à $\lambda_n (n = 1, 2, \ldots)$ d'un ordre k positif quelconque.

Si entre deux entiers consécutifs il existe au moins un λ_n, c'est-à dire quel que soit l'entier m il existe toujours un terme λ_{n_p} tel que $m < \lambda_{n_p} \leqq m + 1$ (et nous pouvons le supposer sans aucune atteinte à la généralité des résultats qui suivent). On peut écrire

$$a_{E(\lambda_{n_i})} = \frac{\lambda_{n_i}^k D_{n_1 n_2 \ldots n_i}}{\prod_{i=1}^{i} [\lambda_{n_j} - E(\lambda_n)]^k}, \tag{1}$$

où $E(x)$ désigne le plus grand entier *inférieur* (et non égal) à x, les entiers n_i étant choisis sont tels que $1 < \lambda_{n_1} \leqq 2$,

$$E(\lambda_{n_{j-1}}) - E(\lambda_{n_j}) = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, i)$$

et par $D_{n_1 n_2 \ldots n_i}$, on désigne le déterminant

$$D_{n_1 n_2 \ldots n_i} = \begin{vmatrix} (\lambda_{n_1} - 1)^k & 0 & \ldots & b_{n_1} \\ (\lambda_{n_2} - 1)^k & (\lambda_{n_2} - 2)^k & \ldots & b_{n_2} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & b_{n_i} \end{vmatrix}.$$

Pour que la suite génératrice a_m existe il faut donc et il suffit que l'expression (1) conserve la même valeur quelle que soit la suite n_i vérifiant les conditions précédentes.

Il est évident que si $n < \lambda_n \leq n+1$ *cette condition est vérifiée, c'est-à-dire les* a_n *sont obtenus d'une seule manière, donc ils existent.*

Nous avons tout intérêt d'étudier les singularités de $\Sigma a_n z^n$ quand celles de $\Sigma b_n z^n$ sont données où a_m est la suite génératrice de la suite b_n d'un ordre k donné relative à une suite λ_n donnée. Ceci me sera utile pour l'étude des séries de Dirichlet $\Sigma b_n e^{-\lambda_n s}$; nous le faisons dans le paragraphe 5.

2. Posons

$$f(s) = \Sigma b_n e^{-\lambda_n s} \qquad (s = \sigma + it).$$

Nous supposerons que la série $\Sigma e^{-\lambda_n s}$ admet un axe de convergence absolue à distance finie, c'est-à-dire que la quantité $\overline{\lim} \frac{Ln}{\lambda_n}$ est bornée supérieurement.

Soit E l'ensemble de points singuliers de la fonction $\varphi(s) = \Sigma e^{-\lambda_n s}$ et soit k un entier positif tel que quel que soit $\varepsilon > 0$ fixe on ait pour μ fixe $(\mu < k)$,

$$\overline{\lim_{|t|=\infty}} \frac{|\varphi(s)|}{|t|^\mu} < +\infty,$$

quand s parcourt dans le demi-plan $\sigma > \sigma_1$ la quantité σ_1 étant fixe tous les points sauf ceux qui sont contenus dans les cercles de rayon ε, arbitraire mais fixe, tracés autour de tous les points de E.

Nous écrirons même dans ce cas

$$|\varphi(s)| = O|t^\mu| \qquad (\mu < k,\ \sigma > \sigma_1).$$

Nous supposerons évidemment que $\sigma_1 < \sigma_0$ où σ_0 est l'axe de convergence absolue de $\varphi(s)$.

Faisons encore la remarque suivante : $F(z)$ étant une fonction holomorphe dans un domaine D contenant le point autour duquel nous développons $F(z)$ (dans le cas présent le point $+\infty$) nous conviendrons, comme on le fait fréquemment, d'appeler point singulier de $F(z)$ tout point qui n'est pas à l'intérieur d'un domaine connexe avec D et dont tous les points sont réguliers. En disant donc qu'un ensemble A est un ensemble de points singulier de $F(z)$ nous entendons par là implicitement que tout point limite de A ainsi que tout point qui n'est dans aucun domaine connexe avec D et ne contenant aucun point de A est un point singulier de $F(z)$. Nous commençons par démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Si la fonction $\varphi(s) = \Sigma e^{-\lambda_n s}$ est telle que*

$$(\alpha) \qquad \varphi(s) = O(t^{\mu}) \qquad (\mu < k)$$

pour $\sigma > \sigma_1$, les seuls points singuliers possibles de la fonction représentée par la série $\Sigma b_n e^{-\lambda_n s}$ dans le demi-plan $\sigma > \sigma_1 + \max(C, 0)$, sont les points $\alpha + \beta$ et β où α est un point singulier quelconque, la série de Taylor en e^{-s} dont les coefficients sont les termes de la génératrice d'ordre k relative à la suite λ_n de la suite b_n, C étant l'abscisse de convergence de cette série de Taylor, et où β est un point singulier quelconque de $\Sigma e^{-\lambda_n s}$ dans le demi-plan $\sigma > \sigma_1$.

REMARQUE. — *Dans ce théorème comme dans tous ceux qui suivent on peut remplacer $\Sigma e^{-\lambda_n s}$ par $\varphi_1(s) = \Sigma c_n e^{-\lambda_n s}$ où la suite c_n est fixe convenablement choisie de sorte que les singularités de $\varphi_1(s)$ et la distribution des valeurs qu'elle prend soient connues, en considérant la série de Taylor avec les coefficients qui forment la suite génératrice de la suite $\frac{b_n}{c_n}$.*

Démonstration. — Rappelons d'abord le théorème suivant dû à M. Hadamard et généralisé par M. Perron :

Si la série $\psi(s) = \Sigma c_n e^{-l_n s}$ possède une abscisse de convergence $C_1 < +\infty$ et si $c > 0$ est supérieur à C_1, k étant positif, on a

$$\sum_{l_p < u} c_p (u - l_p)^k = \frac{\Gamma(k+1)}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \psi(s)\, e^{us} \frac{ds}{s^{1+k}}.$$

Considérons maintenant, outre la fonction $\psi(s)$, la fonction $\theta(s) = \Sigma k_n e^{-\lambda_n s}$; j'ai introduit l'intégrale

$$\frac{\Gamma(k+1)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \psi(s)\, \theta(z-s) \frac{ds}{s^{1+k}}$$

(1) R(x) désigne la partie réelle de x.

qui représente pour $R(z)$ (¹) et c assez grands la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[k_p \sum_{l_p<\lambda_n}(\lambda_n - l_p)^k\right] e^{-\lambda_n z}.$$

On a en effet comme on le constate facilement

$$\frac{\Gamma(k+1)}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\psi(s)\,\theta(z-s)\,\frac{ds}{s^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} k_n\, e^{-\lambda_n z}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\psi(s)\, e^{\lambda_n s}\,\frac{ds}{s^{1+k}}.$$

Il est maintenant naturel d'opérer avec l'intégrale

$$(2)\qquad \int \psi(s(\,\theta(z-s)\,\frac{ds}{s^{1+k}},$$

comme on le fait dans l'opération H de M. Hadamard avec l'intégrale de Parseval ou bien encore comme on le fait avec l'intégrale de dell' Agnola dans l'opération de Hurwitz.

On prévoit que dans les cas où sur des contours analogues à ceux qu'on considère dans les deux intégrales citées, et pour des valeurs de z convenablement choisies l'intégrale (2) converge uniformément, elle représente une fonction holomorphe en z. Cette fonction ne peut d'ailleurs converger que lorsque s est différent de tout point a singulier de $\psi(s)$ et du point o et lorsque $z - s$ est différent de tout point b singulier de $\theta(s)$. Il est aussi évident que pour la convergence il faut poser des conditions du genre (α). C'est d'ailleurs en lui exposant les idées qui précèdent que j'ai proposé à un de mes auditeurs, M. Widder, de chercher les cas de convergence de cette intégrale et d'obtenir ainsi un théorème de composition (²) pour deux séries de Dirichlet et qui ressemblerait à celui de M. Hadamard. Il a d'ailleurs posé des conditions assez restrictives pour la distribution des singularités de $\psi(s)$ et $\Theta(s)$.

Pour démontrer le théorème I de ce paragraphe je pars en partie de la même intégrale que j'ai donnée alors.

Nous allons donc démontrer que

Si la série de Taylor $F(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ admet un axe de convergence $C < +\infty$ et si pour $\sigma > \sigma_1$

$$|\varphi(s)| = O\,|t^{\mu}| \qquad (\mu < k),$$

(¹) $R(a)$ désigne la partie réelle de x.

(²) *Journal of Math.*, 1927; *Bul. of the American Math. Society*, 1927.

la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m<\lambda_n}\left(1-\frac{m}{\lambda_n}\right)^k a_m\right]e^{-ns}$$

n'a pas pour $\sigma > \sigma_1 + \max(C, 0)$ d'autres points singuliers que $\alpha + \beta$ et β où α est un point singulier quelconque $\Sigma a_n e^{-ns}$ et β un point singulier quelconque de $\Sigma e^{-\lambda_n s}$.

Considérons l'intégrale

$$(3)\qquad \frac{\Gamma(k+1)}{2i\pi}\int_{(C)} F(s)\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{k+1}},$$

où (C) est une courbe définie de la manière suivante :

Un cercle C_R de rayon R arbitraire mais fixe autour de l'origine étant donné, traçons autour de chaque point singulier a de la fonction $\Sigma a_n t^n$ qui est à l'intérieur de C_R ainsi qu'autour de chaque point de la circonférence de C_R un cercle de rayon $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de MM. Borel-Lebesgue, on peut extraire de cet ensemble de cercles un nombre fini et tel que tout point a ainsi que tout point $Re^{i\varphi}(0 < \varphi \leqq 2\pi)$ soient à l'intérieur d'au moins un de ces cercles extraits. Soit $D_{R,\varepsilon}$ l'ensemble de domaines qui en général n'est pas connexe balayé par l'intermédiaire d'un de ces choix. Faisons la transformation $s = -\log t$ (en prenant toutes les déterminations du logarithme) le domaine $D_{R,\varepsilon}$ se transforme en une série de domaines $\Delta_{R,\varepsilon}$ qui contiennent à leur intérieur tous les points singuliers de $\Sigma a_n e^{-ns}$ et qui se trouvent dans le demi-plan $\sigma \geqq -\log(R+\varepsilon)$. Ajoutons à ces domaines les points du cercle de rayon ε autour de l'origine. Dans la frontière de cet ensemble de domaines $\Delta_{R,\varepsilon}$ situés dans le plan de s entre aussi la droite $\sigma = -\log(R+\varepsilon)$. La courbe (C) est l'ensemble de tous les contours pris dans le sens positif de ce domaine dans le plan de s en y enlevant préalablement la droite $\sigma = -\log(R+\varepsilon)$.

Soit L_ε la longueur de la partie de cette courbe contenue dans la bande $0 \leqq t < 2\pi$ $(s = \sigma + it)$.

Quel que soit le point s de (C) il est évident qu'on peut trouver un point γ qui est soit un point α (c'est-à-dire un point singulier de $\Sigma a_n e^{-ns}$), soit un point d'affixe $-\log R + it(-\infty < t < +\infty)$, soit le point d'affixe 0 et tel qu'on ait

$$(4)\qquad |s-\gamma| < \varepsilon'.$$

ε' étant une quantité fixe qui tend vers zéro avec ε. Il en résulte que pour tous les points z d'un domaine Δ qui satisfont à la condition

$$(5) \qquad |z-\gamma-\beta|>2\varepsilon', \qquad R(z)>\sigma_1+\max(C_1,0)+\varepsilon'$$

avec un γ et un β quelconques on a pour s quelconque de la courbe

$$|z-s-\beta|>\varepsilon', \qquad R(z-s)>\sigma_1.$$

Donc

$$\overline{\lim_{t=\infty}}\frac{|\varphi(z-s)|}{t^{\mu}}<A<+\infty.$$

D'autre part sur la partie de (C) contenue dans les deux bandes $2\,m\pi<|t|\leqq 2(m+1),\pi$ correspondant à un entier m, on a

$$\left|\frac{1}{s^{k+1}}\right|<\frac{B}{m^{1+k}} \qquad (m=1,2,\ldots;\ k>0)$$

où $B<+\infty$ est fixe, et comme sur (C),

$$|F(s)|<H<+\infty,$$

on tire immédiatement la conclusion que l'intégrale (3) converge et pas moins rapidement que la série

$$2L_{\xi}BA\sum\frac{1}{m^{1+k}}.$$

L'intégrale (3) présente donc pour tous les z vérifiant (5) une fonction analytique.

Si $R(z)$ est assez grand la fonction (3) pour ces valeurs de z peut être mise sous la forme

$$\frac{\Gamma(k+1)}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{1+k}},$$

où $c>0$ est plus grand que C.

Il suffit pour le voir d'appliquer le théorème de Cauchy sur des courbes C^k qui sont formées de la manière suivante : relions les domaines $\Delta_{R,\xi}$ qui sont complètement intérieurs à la bande $-2k\pi<t<2k\pi$, pour k assez grand, et la partie de cet ensemble formant un domaine contenue dans la même bande et qui contient la droite $\sigma=-\log R$ par des courbes rectifiables qui sont comptées dans deux directions; soit C_k une courbe rectifiable de longueur $<$ L(un nombre fixe) quel que soit k et située dans la bande

$$2(k-1)\pi < t < 2k\pi,$$

et qui relie un point d'un des domaines simplement connexes spécifiés avec un point $s = \sigma + it(\sigma = c)$ sans avoir d'autres points communs ni avec $\Delta_{R,\varepsilon}$ ni avec la droite $\sigma = c$; soit C_{-k} la courbe ayant la même propriété et située dans la bande $-2k\pi < t < -2(k-1)\pi$. La courbe C^k est composée des frontières de tous les domaines simplement connexes spécifiés dont la partie du domaine contenant la droite $\sigma = -\log R$ et contenue dans $-2k\pi < t < 2k\pi$ fait partie, sans compter la droite $\sigma = -\log(R+\varepsilon)$, des courbes de liaison entre ces domaines et comptées deux fois, des courbes C_k et C_{-k}, enfin du segment $\sigma = c$ qui relie C_{-k} à C_k.

On remarque que notre intégrale étendue sur C_k et C_{-k} tend vers zéro avec $\frac{1}{k}$ quand $R(z)$ est positif et très grand.

En choisissant z de sorte que $R(z-s) > \sigma_2$ où σ_2 est un axe de convergence absolue de $\varphi(s)$ on voit immédiatement que (3) peut être mis sous la forme

$$\sum e^{-\lambda_n z} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \varphi(s)\, e^{\lambda_n s} \frac{ds}{s^{1+k}},$$

d'où en appliquant le théorème de M. Hadamard et en intégrant k fois on obtient notre théorème.

3. Nous démontrons dans ce chapitre un lemme important qui nous permettra d'avoir des théorèmes analogues au précédent sans toutefois qu'on soit obligé de tenir compte de la propriété (α).

Il est difficile d'étudier les fonctions exprimées par des séries de Dirichlet au point de vue de leur croissance, comme la propriété (α) l'exige, il est donc de beaucoup préférable de pouvoir ne pas faire intervenir la propriété (α).

Nous démontrons le lemme suivant :

Lemme I. — *Soient a et b deux quantités finies et distinctes fixes quelconques. Soit* E *l'ensemble de points situés dans le demi-plan* $\sigma > \sigma_2$ *et où la fonction* (1)

$$\varphi(s) = \Sigma\, e^{-\lambda_n s}$$

(1) *Voir* la Remarque page 82.

prend les valeurs a et b, la fonction

$$f(s) = \Sigma\, b_n\, e^{-\lambda_n s}$$

avec

$$b_n = \lambda_n^{-1} \sum_{m<\lambda_n} (\lambda_n - m) a_m \qquad \overline{\lim} \frac{\log |a_n|}{n} = C_1 < +\infty$$

n'a pas d'autres points singuliers dans le demi-plan

$$\sigma > \sigma_2 + \max(C_1, o)$$

que les points de l'ensemble $\mathcal{E}_1$ *composé de tous les points* $\alpha+\beta, \alpha+\rho, \beta$, *où* α *est un point singulier quelconque de la série de Taylor* $\Sigma a_n e^{-ns}$ *(dont les coefficients sont les termes de la suite génératrice de premier ordre de* b_n *relative à* λ_n*) où* β *est un point singulier quelconque de* $\varphi(s) = \Sigma e^{-\lambda_n s}$ *et où* ρ *est un point quelconque de* E.

Démonstration. — Construisons comme pour la démonstration du théorème I le domaine $\Delta_{R,\varepsilon}$ et soit comme auparavant (C) la frontière de ce domaine (en enlevant toujours la droite

$$\sigma = -\log(R+\varepsilon).$$

Désignons par ν un point quelconque de l'ensemble E_2 composé de tous les points β et ρ. Désignons comme dans la démonstration du théorème I par γ un point quelconque qui est soit un α, soit le point o, soit un point $-\log R + it$.

Soit Δ un domaine connexe des points z tels que pour tout γ et tout ν on ait

$$(6) \qquad |z-\gamma-\nu| > 2\varepsilon', \qquad R(z) > \sigma_2 + \max(C_1, o) + \varepsilon'$$

quel que soit s de la courbe (C) et quel que soit ν, on a

$$|z-s-\nu| > \varepsilon', \qquad R(z-s) > \sigma_2.$$

Ceci résulte de (4) et de (6).

Posons

$$z - s = x.$$

Il est évident que des inégalités

$$(7) \qquad |x-\nu| > \varepsilon', \qquad R(x) > \sigma_2$$

résulte l'existence d'un entier positif l et d'une quantité ε_1 ($\varepsilon' > \varepsilon_1 > 0$), tous les deux fixes et qui possèdent les propriétés suivantes : soit $\sigma = \sigma' > \sigma_2$ l'équation d'une droite où la série $\Sigma e^{-\lambda_n s}$ converge absolument, pour tout x vérifiant (7) on peut choisir un nombre non supérieur à l de cercles $C_1 C_2 \ldots C_m$ ($m \leq l$) dont les centres sont sur un des polygones parallèles et égaux entre eux et parallèles à un polygone qui se trouve tout entier dans Δ, tous ces cercles empiétant les uns sur les autres de sorte que le centre d'un cercle C_{i+1} se trouve dans le cercle concentrique à C_i et de rayon $\frac{\varepsilon_1}{2}$, le cercle C_1 a comme centre un point $\sigma' + it$ et le cercle de rayon $\frac{\varepsilon_1}{2}$ et concentrique à C_m contient le point x, à l'intérieur de cereles $C_1 C_2 \ldots C_m$ la fonction $\varphi(x)$ ne prend ni valeur a ni la valeur b.

En remarquant que la série $\Sigma e^{-\lambda_n(\sigma'+it)}$ est bornée pour

$$(-\infty < t < +\infty)$$

nous pouvons appliquer le théoréme de Schauttky sous la forme que lui a donnée M. Montel : si la fonction F (z) ne prend pas deux valeurs distinctes à l'intérieur d'un cercle et si cette fonction est inférieure en module à une quantité fixe au centre, elle est inférieure à une quantité fixe dans tout cercle concentrique et de rayon inférieur au premier.

Il suffit d'appliquer ce théorème au plus l fois pour tirer la conclusion suivante :

Dans tout domaine de z vérifiant les inégalités (6) on a

$$|\varphi(z-s)| < N < +\infty.$$

D'autre part il suffit de remplacer N par un nombre N' plus grand pour pouvoir enlever de l'inégalité (6) toutes les combinaisons correspondant à ν parcourant un nombre fini mais fixe de ρ et $\gamma = 0$, c'est-à-dire si l'inégalité $|z - \rho| \leq 2\varepsilon'$ n'a lieu que pour un nombre fini de ρ.

On peut donc achever la démonstration du lemme énoncé exactement de la même manière que pour la démonstration du théorème I et en opérant sur l'intégrale

$$\int_C F(s)\,\varphi(z-s)\frac{ds}{s^2}.$$

4. Les considérations précédentes nous permettent d'énoncer un théorème tout à fait général où la condition (α) n'intervient plus.

Désignons par ρ_a l'affixe d'un point quelconque où la fonction $\varphi(s) = \Sigma e^{-\lambda_n s}$ prend la valeur a; α étant comme auparavant un point singulier quelconque de la fonction $F(s) = \Sigma a_n e^{-ns}$; désignons par A_a, soit un point quelconque de la forme $\rho_a + \alpha$, soit un point limite de l'ensemble de ces points.

Nous désignons par $P[\alpha, \{\lambda_n\}]$ un point quelconque qui jouit de la propriété suivante : quelle que soit la quantité $\varepsilon > 0$, dans un cercle de rayon ε autour de ce point il existe un point d'affixe $\alpha + \rho_a$ et ceci pour toutes les valeurs de a, sauf au plus une (pour le même $P[\alpha, \{\lambda_n\}]$ α varie en général avec a).

Remarquons immédiatement que si β_1 est un point singulier essentiel de $\varphi(s)$, tout point de la forme $\alpha + \beta_1$ est d'après le théorème de M. Picard un point $P[\alpha, \{\lambda_n\}]$. (Dans ce cas, α reste le même pour tout a). Mais *a priori* un point $P[\alpha, \{\lambda_n\}]$ peut n'être ni un point $\alpha + \beta$ ni point limite de tels points. Remarquons enfin que si $\lambda_n = n$, les points $P[\alpha, \{\lambda_n\}]$ n'existent pas.

On peut profiter du lemme I, où il n'y a qu'à répéter le raisonnement employé pour démontrer le théorème suivant :

Théorème II. — *Les seuls points singuliers possibles de la fonction représentée par la série $\Sigma b_n e^{-\lambda_n s}$ sont les points $\alpha + \beta$, β et les points $P[\alpha, \{\lambda_n\}]$ où α est un point singulier quelconque de la série de Taylor en e^{-s} dont les coefficients sont les termes de la génératrice de premier ordre (ou d'un ordre $k > 0$ fixe entier quelconque) de la suite b_n relative à λ_n et où β est un point singulier quelconque de $\Sigma e^{-\lambda_n s}$.*

5. Nous allons maintenant faire des hypothèses sur les λ_n. Nous supposerons dans ce paragraphe et les paragraphes suivants que

$$(8) \qquad n < \lambda_n \leq n + 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Nous avons fait la remarque que si cette condition est vérifiée, quelle que soit la suite b_n elle admet une, et une seule, suite génératrice d'ordre k (quelconque fixe) relative à la suite λ_n.

Faisons encore les remarques suivantes :

En posant

$$C_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$
$$C(\tau) = \sum_{m<\tau} a_m,$$

on a

$$\sum_{m<\lambda_n} (\lambda_n - m) a_m = \int_0^{\lambda_n} C(\tau)\, d\tau = C_1 + C_2 + \ldots + C_{n-1} + (\lambda_n - n) C_n.$$

Soit

$$F_1(z) = \Sigma\, a_n z^n,$$

On a

$$\sum [C_1 + C_2 + \ldots + C_{n-1}] z^n = \frac{F_1(z)}{(1-z)^2} - \frac{F_1(z)}{1-z} = \frac{z\, F_1(z)}{(1-z)^2}$$

et

$$\sum (\lambda_n - n) C_n z^n = H\left[\sum (\lambda_n - n) z^n, \frac{F_1(z)}{1-z}\right],$$

où H est le symbole de la composition connue de M. Hadamard. En posant $\Sigma\, b_n z^n$, où

$$b_n = \sum_{m<\lambda_n} (\lambda_n - m) a_m,$$

on peut écrire cette égalité sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f\left(\frac{x}{z}\right) \psi(z) \frac{dz}{z} + \frac{x\,\psi(x)}{1-x} = T(x),$$

où

$$f(\zeta) = \sum (\lambda_n - n) \zeta^n, \qquad \psi(z) = \frac{F_1(z)}{1-z}, \qquad T(z) = \sum b_n z^n;$$

C étant un cercle de rayon assez petit autour de l'origine.

On voit donc que quand (8) est vérifié les théorèmes I et II peuvent être énoncés de la manière suivante :

Théorème I *bis*. — *Si*

$$(8) \qquad n < \lambda_n \leq n + 1$$

et si pour $\sigma > \sigma_1$

$$|\varphi(s)| = |\Sigma\, e^{-\lambda_n s}| = O|t^\mu| \qquad (\mu < 1),$$

alors les seules singularités de $\Sigma\, b_n e^{-\lambda_n s}$ *pour* $\sigma > \sigma_1 + c_1$ *sont les points* $-\log\alpha + \beta$ *et* β *où* α *est un point singulier d'une* *solution fixe quelconque holomorphe à l'origine* $\psi(z)$ *de l'équation intégrale*

$$(9)\qquad \frac{1}{2i\pi}\int_C f\left(\frac{x}{z}\right)\psi(z)\frac{dz}{z}+\frac{x\psi(x)}{1-x}=\mathrm{T}(x)$$

avec $\mathrm{T}(x)=\Sigma b_n x^n$, $f(\zeta)=\Sigma(\lambda_n-n)\zeta^n$, *où* β *est un point singulier quelconque de* $\varphi(s)=\Sigma e^{-\lambda_n s}$, *où* c_1 *est l'abscisse de convergence de* $\Sigma a_n e^{-ns}$ *et où* C *est un cercle assez petit autour de l'origine.*

On voit donc que le caractère des singularités de $f(\zeta)$ joue un rôle important. Ainsi si $f(\zeta)$ ne possède que le point d'affixe *un* comme point singulier qui conserve les singularités de $\psi(z)$ quand on applique l'opération (9) les singularités de $\Sigma b_n e^{-\lambda_n s}$ se ramènent à la somme des singularités de $\Sigma b_n e^{-ns}$ et de $\Sigma e^{-\lambda_n s}$. On voit donc qu'une étude semblable à celle qui a été faite relativement à l'opération H (f_2, φ_2) et qui permet d'élucider les points α, β qui sont *nécessairement* singuliers de H si α sont ceux de f_2 et β ceux de φ_2, s'impose

Théorème II *bis*. — *Si*

$$n<\lambda_n\leqq n+1,$$

la fonction $\Sigma b_n e^{-\lambda_n s}$ *n'a pas d'autres points singuliers que les points* $-\log\alpha+\beta$, β *et les points* $\mathrm{P}[\alpha, \{\lambda_n\}]$ (α et β *étant les mêmes que dans le théorème* I *bis*).

Dans le théorème II *bis*, la condition (α) n'intervient pas.

6. Nous allons maintenant entreprendre une étude de l'équation intégrale (9) et nous allons donner des conditions relatives à λ_n pour que cette équation admette une solution holomorphe à l'origine ainsi que la liaison entre les points singuliers d'une telle solution et les singularités des fonctions connues qui interviennent dans cette équation. Ces considérations nous auraient permis de remplacer les théorèmes I *bis* et II *bis* par des théorèmes où la fonction $\Sigma a_n z^n$ est remplacée par les deux fonctions $\Sigma b_n z^n$ et $\Sigma\lambda_n z^n$ mais nous obtiendrons des théorèmes concernant le cas $n<\lambda_n\leqq n+1$, sans passer par cette étude, ces théorèmes seront d'ailleurs plus généraux que ceux qu'on obtiendrait en n'appliquant que le lemme II. Mais les considérations de ce numéro présentent peut-être un intérêt pour elles-mêmes.

Faisons quelques conventions qui vont nous être d'une grande utilité.

Nous appellerons étoile de Mittag-Leffler d'un ensemble de points E l'étoile au sens classique d'une fonction développée autour de l'origine dont l'ensemble de points singuliers est l'ensemble $E + E'$ (E' étant l'ensemble dérivé de l'ensemble E).

Soit C' un cercle de rayon R autour de l'origine. Soit $\mathcal{E}_{R,E}$ la partie de la frontière de l'étoile de Mittag-Leffler de E qui est à l'intérieur de C'.

Si $\mathcal{E}_{R,E}$ est composé d'un nombre fini k de segments de longueurs respectives $l_1, l_2, \ldots, l_k$ et d'un nombre fini p de domaines $D_1, D_2, \ldots, D_p$ dont les longueurs de frontières, sans compter les arcs du cercle C' qui forment une partie de la frontière de chacun de ces domaines, sont $l'_1, \ldots, l'_p$, nous poserons

$$C_{R,E} = 2\sum_1^k l_i + \sum_1^p l'_i.$$

Si k ou p est infini (ou tous les deux), nous écrirons

$$C_{R,E} = \infty.$$

Attachons, d'autre part, à $\mathcal{E}_{R,E}$ (même si $C_{R,E} = \infty$) le domaine qui peut être multiplement connexe et balayé par un cercle de rayon ε autour de chaque point de $\mathcal{E}_{R,E}$. Soit $C_{R,E,\varepsilon}$ la longueur totale de la frontière de ce domaine sans compter la partie de cette frontière qui se trouve à l'extérieur du cercle C. Il est évident que

$$\lim_{\varepsilon=0} C_{R,E,\varepsilon} = C_{R,E};$$

nous pouvons maintenant énoncer les deux lemmes suivants :

Lemme II. — *Soient χ un point singulier quelconque de $\Pi(x) = \Sigma d_n x^n$, ω un multiple d'un nombre quelconque de facteurs dont chacun est une puissance $q \geqq 0$ quelconque d'un affixe d'un point singulier quelconque de $\theta(x) = \Sigma c_n x^n$, les deux fonctions ayant un comme rayon de convergence.*

En désignant par E *l'ensemble de points χ, ω, supposons que* *la fonction $\theta(x)$ vérifie dans toute la partie de son étoile de Mittag-Leffler sa frontière comprise et contenue dans un cercle c' de rayon R autour de l'origine l'inégalité*

$$\frac{(1+R)(C_{R.E}+2\pi R)|\theta(x)|}{2\pi R}<\delta<1, \tag{β}$$

l'équation

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\theta\left(\frac{x}{z}\right)\psi(z)\frac{dz}{z}+\frac{x\,\psi(x)}{1-x}=\Pi(x) \tag{10}$$

avec

$$\theta(0)=0, \qquad \Pi(0)=0$$

et où L_1 est un cercle de rayon $r<1$, admet une solution holomorphe à l'origine dont les seules singularités possibles sont les points de la frontière de l'étoile de Mittag-Leffler relative à l'ensemble E.

Remarquons d'abord que la condition (β) est réalisable [(par un certain choix toujours possible, de $\theta(x)$] pour un R donné à l'avance et quel que soit l'ensemble E donné également.

Il suffit, en effet, de prendre pour $\theta(x)$ une fonction de la forme

$$\theta(x)=M\sum_{1}^{\infty}K_n(x-\alpha_n)^{\beta_n}, \tag{10 bis}$$

où β_n sont réels fractionnaires et où les α_n, tout en pouvant prendre plusieurs fois la même valeur, parcourent un ensemble A tel que $A+A'=E+E'$ à condition que la série

$$\sum_n |K_n|\,|x-\alpha_n|^{\beta_n}$$

avec les déterminations positives pour $|x-\alpha_n|^{\beta_n}$ soit convergente quand $|x|<R$ et que M soit assez petit en module.

Un autre exemple des fonctions $\theta(x)$ vérifiant les hypothèses du lemme précédent est donné par une des trois constructions suivantes :

1° T étant un ensemble de points fermés quelconques intérieurs à un cercle C_1 (de rayon R autour de l'origine) soit $D_{T,R}$ la partie de l'étoile relative à T comprise dans C_1.

Soit $\Sigma\alpha_n z^n = P(z)$ une fonction telle que pour $|z|\leqq 1$ on ait

$$|P(z)|\leqq 1.$$

Soit $\zeta(z)$ la fonction qui fait la représentation conforme du domaine $D_{T,R}$ sur le cercle $|z|<1$.

La fonction

$$\theta(x) = \frac{2\pi R P[\zeta(x)]}{(1+R)(C_{R,E}+2\pi R)}$$

vérifie les conditions du lemme admettant l'ensemble T comme son ensemble de points singuliers.

2° En désignant par $\zeta_1(x)$ la fonction qui fait la représentation conforme de l'étoile de T sur $|z|<1$, on peut encore poser

$$\theta(x) = \frac{2\pi R P[\zeta_1(x)]}{(1+R)(C_{R,E}+2\pi R)}.$$

3° Considérons un segment quelconque fixe; par exemple, le segment $(1, \tau)$, $\tau > 1$.

On peut évidemment poser

$$\theta(x) = \frac{2\pi R P[\zeta_2(x)]}{(1+R)(C_{R,E}+2\pi R)},$$

où $\zeta_2(x)$ fait la représentation conforme du plan coupé par le segment $(1, \tau)$ sur le cercle $|z|<1$.

Si $\tau < +\infty$ soit $h = \frac{\tau-1}{2}$, on a donc

$$z = \frac{x-h-1}{h} + \sqrt{\left(\frac{x-h-1}{h}\right)^2 - 1};$$

si $\tau = \infty$ (on retombe à un cas particulier de 2°), on a

$$z = \frac{2-x+2\sqrt{1-x}}{x}.$$

On voit donc qu'on peut poser soit

$$\theta(x) = \frac{2\pi R}{(1+R)(C_{R,E}+2\pi R)} \sum_1^\infty \alpha_n \left[\frac{x-h-1}{h} + \sqrt{\left(\frac{x-h-1}{h}\right)^2 - 1}\right]^n,$$

soit

$$\theta(x) = \frac{2\pi R}{(1+R)(C_{R,E}+2\pi R)} \sum \alpha_n \left(\frac{2-x+2\sqrt{1-x}}{x}\right)^n,$$

à condition que, dans les deux cas, on ait

$$|\Sigma \alpha_n z^n| = |P(z)| < 1 \qquad \text{pour } |z| \leqq 1.$$

Démontrons maintenant le lemme II.

Considérons une suite de fonctions

$$\psi_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

définies de la manière suivante :

$$\psi_0(x) = 0,$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{L_1} \theta\left(\frac{x}{z}\right)\psi_{n-1}(z)\frac{dz}{z} + \frac{x\,\psi_n(x)}{1-x} = \Pi(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

On a, pour $n \geqq 1$,

$$(11) \qquad \psi_{n+1}(x) - \psi_n(x) = \frac{1-x}{x\,2i\pi}\int_{L_1} \theta\left(\frac{x}{z}\right)[\psi_{n-1}(z) - \psi_n(z)]\frac{dz}{z},$$

$$\psi_1(x) = \frac{\Pi(x)}{x}(1-x) = \Pi_1(x).$$

Il suffit de se rappeler que $\theta(0) = \Pi(0) = 0$ pour conclure immédiatement que les fonctions

$$\Pi_n(x) = \psi_n(x) - \psi_{n-1}(x) \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

$$\Pi_1(x) = \frac{\Pi(x)}{x}(1-x)$$

sont des fonctions holomorphes à l'origine.

On a évidemment

$$(12) \qquad \psi_n(x) = \Pi_1(x) + \ldots + \Pi_n(x).$$

La fonction $\psi_1(x)$ n'a pas d'autres singularités que la fonction $\Pi(x)$, c'est-à-dire les points χ, en appliquant maintenant successivement $n-1$ fois le principe H de M. Hadamard, on voit, d'après (11), que $\Pi_n(x)$ n'a pas d'autres singularités que les points $\chi.(\omega)^{n-1}$ où $(\omega)^{n-1}$ désigne un point ω qui est un produit de $n-1$ facteurs différents ou non qui sont les affixes de points singuliers de $\theta(x)$.

Toutes les fonctions $\Pi_n(x)\,(n = 1, 2, \ldots)$ sont donc holomorphes dans l'étoile de E.

Balayons le cercle C′ par des quadrilatères curvilignes qui sont définis de la manière suivante : A chaque segment $r\,e^{i\varphi_0}\,(r_0 \leqq r \leqq R)$,

$r_0 e^{i\varphi_0}$ étant un point quelconque de E, faisons correspondre les deux droites $re^{i(\varphi_0+\varepsilon)}$, $re^{i(\varphi_0-\varepsilon)}$, $\varepsilon > 0$ étant fixe et assez petit, $(0 \leqq r \leqq +\infty)$, et le cercle C_0 de rayon $r_0(1-\varepsilon)$ autour de l'origine.

Notre quadrilatère aura comme frontière les arcs de la circonférence du rayon R autour de l'origine, et de la circonférence C_0 et les segments de deux droites $re^{i(\varphi_0-\varepsilon)}$ et $re^{i(\varphi_0+\varepsilon)}$.

Nous balayerons donc le cercle C' par tous ces quadrilatères en faisant parcourir à $r_0 e^{i\varphi_0}$ tous les points de E.

Soit C_ε la partie de C' qui reste après ce balayage et après avoir balayé la circonférence de C' par un cercle de rayon t autour d'un point quelconque de cette circonférence.

Soit L_ε la frontière de C_ε.

Considérons l'égalité

$$(12\ bis) \qquad H_{n+1}(x) = -\frac{1-x}{2i\pi x}\int_{L_\varepsilon} \theta\left(\frac{x}{z}\right) H_n(z)\frac{dz}{z}.$$

Si la longueur de L_ε est l_ε, il est évident qu'on peut choisir un ε assez petit pour qu'on ait

$$(\beta') \qquad \frac{(1+R)l_\varepsilon}{2\pi(1-\varepsilon)R}|\theta(x)| < \delta' < 1.$$

Quand z parcourt L_ε et quand x est un point quelconque intérieur à C_ε, on a

$$\left|\frac{x}{z}\right| < R.$$

D'autre part, il résulte de la manière dont nous avons construit le domaine C_ε que l'égalité (12 *bis*) elle-même (sans avoir besoin de recourir au prolongement analytique) définit la fonction $H_{n+1}(x)$ dans le domaine C_ε.

De (β) et de (13) résulte immédiatement l'inégalité suivante :

$$\text{Max.}\,|H_{n+1}(x)| < \delta\,\text{Max.}\,|H_n(x)| < \delta^{n-1}\,\text{Max.}\,|H_2(x)|$$

valable dans le domaine fermé C_ε.

La série

$$\sum_1^\infty H_n(x)$$

converge donc uniformément dans C_ε.

Elle nous fournit une fonction $\psi(x)$ holomorphe dans C_ε qui est évidemment une solution de (10) et qui correspond à notre lemme.

Nous avons en même temps démontré le lemme suivant :

LEMME II *bis.* — *L'équation* (10) *admet une solution* $\psi(x)$ *holomorphe dans* C_ε *si* (β') *a lieu.*

Ce lemme peut avoir un sens sans que le lemme II ait un sens réel et notamment dans le cas où

$$C_{R,E} = \infty.$$

7. La méthode que nous venons d'exposer peut conduire en outre aux théorèmes concernant l'opération H.

Si, en effet, au lieu de l'équation (10) on avait l'équation intégro-différentielle

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \theta\left(\frac{x}{z}\right)\psi(z)\frac{dz}{z} + x\,\psi'(x) = \mathrm{H}(x), \tag{13}$$

le raisonnement précédent s'appliquerait presque tel que. Nous sommes pourtant obligés de faire de nouvelles conventions.

Soit E_1 un ensemble de points situé à l'intérieur de C_1. Soit E_2 l'ensemble des points de C_1 qui ne sont pas des points de E_1, et soit ζ un point quelconque de E_2. Soit L_ζ la longueur d'une courbe rectifiable quelconque qui ne possède aucun point de E_1 et qui relie ζ à l'origine. Le point ζ étant fixe, soit $L(\zeta)$ la limite inférieure de tous les L_ζ. En faisant passer ζ par tous les points de E_2, soit $L(E_1)$ la limite supérieure de tous les $L(\zeta)$.

Les lemmes II et II *bis* ont encore lieu pour une solution de l'équation intégro-différentielle (13) en remplaçant respectivement (β) et (β') par

$$\frac{L(E)(C_{R,E} + 2\pi R)}{2\pi R}\,|\theta(x)| < \delta < 1 \tag{β bis}$$

et

$$\frac{L(E)\,l_\varepsilon\,|\theta(x)|}{2\pi(1-\varepsilon)R} < \delta' < 1. \tag{β' bis}$$

Pour le voir, il suffit de rappeler le raisonnement des lemmes précédents en tenant en plus compte du fait que si

$$H_n(x) = \int_0^x H'_n(x)\,dx$$

et si

$$|H'(x)| < M$$

pour tous les points x de C_ε, alors

$$|H_n(x)| < L(E)M$$

et en partant de l'équation

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\varepsilon} \theta\left(\frac{x}{z}\right)\psi_{n-1}(x)\frac{dz}{z} + x\,\psi'_n(x) = H(x).$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Si la fonction* $\theta_1(x) = \Sigma(\mu_n - n)x_n$ *vérifie l'inégalité* (β *bis*), *la fonction*

$$H(\Sigma\mu_n x^n, \Sigma a_n x^n)$$

admet certainement des points singuliers α *tels que la frontière de l'étoile relative à l'ensemble de points* $\alpha\omega$ *où* ω *est soit un multiple quelconque d'un nombre de facteurs quelconques égaux ou non qui sont les points singuliers de* $\theta_1(x)$ *dans* C', *soit le point un, contient tous les points singuliers de* $\Sigma a_n x^n$ *dans le cercle* C'.

On peut aussi formuler un énoncé analogue en partant de (β' *bis*).

THÉORÈME III *bis*. — *Si* $\theta_1(x)$ *vérifie* (β' *bis*), *la fonction*

$$H(\Sigma\mu_n x^n, \Sigma a_n x^n)$$

admet certainement des points singuliers χ *tels que le domaine complémentaire au domaine* C_ε *formé à partir de l'ensemble composé des points* $\chi\omega$ *où* ω *est un multiple quelconque des facteurs en nombre quelconque différents ou non qui sont les affixes des singularités de* $\Sigma(\mu_n - n)x^n$ *où le point* un *contient certainement tous les points singuliers dans le cercle* C_1 *de la fonction* $\Sigma a_n x^n$.

Théorème III *ter*. — *En particulier, si* $\Sigma\mu_n x^n$ *n'admet que le point un comme point singulier et si* (β *bis*) *a lieu* (*qui se simplifie considérablement du fait que* ω *prend la seule valeur* un) *les parties correspondantes des étoiles de Mittag-Leffler contenues à l'intérieur de* C_1 *de deux fonctions* $H(\Sigma a_n x^n, \Sigma\mu_n x^n)$ *et* $\Sigma a_n x^n$ *sont les mêmes.*

Comme exemple de fonctions vérifiant les conditions exigées, on prendra, par exemple, les fonctions de la forme

$$\Sigma\mu_n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2\pi R P[\zeta_i(x)]}{L(E)(C_{R,E}+2\pi R)},$$

où $P(z)$ est la même fonction qmi intervenait à la page et où ζ_i est une des fonctions ζ, ζ_1, ζ_2 de la même page.

On voit donc en particulier que les fonctions

$$H\left\{\frac{x}{(1-x)^2} + M\Sigma\alpha_n\left[\frac{x-h-1}{h} + \sqrt{\left(\frac{x-h-1}{h}\right)^2 - 1}\right]^n, \Sigma a_n x^n\right\}$$

avec un h positif quelconque et M positif

$$H\left\{\left[\frac{x}{(1-x)^2} + M\Sigma\alpha_n\left(\frac{2-x+2\sqrt{1-x}}{x}\right)^n\right], \Sigma a_n x^n\right\},$$

où $\sum_0^\infty |\alpha_n| < 1$ conservent la partie de l'étoile de Mittag-Leffler à l'intérieur d'une circonférence de rayon R autour de l'origine de toutes les fonctions $\Sigma a_n x^n$ pour lesquelles on a

$$L(E_1)(C_{R,E_1} + 2\pi R) < \frac{2\pi R}{M},$$

E_1 étant l'ensemble de points singuliers de $\Sigma a_n x^n$ dans C_1.

Le raisonnement du paragraphe 7, et même considérablement simplifié, permet d'établir ce lemme :

Lemme III. — *Si pour* $|z| \leq 1$, *on a*

$$2|\theta_1(z)| < \delta < 1,$$

où

$$\theta_1(z) = \Sigma(\mu_n - n)z^n,$$

il existe des solutions de (10) *et* (13) *holomorphes à l'origine.*

8. Par un raisonnement semblable à celui que nous employons précédemment nous pouvons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Si*

$$n < \lambda_n \leqq n + 1$$

et si dans l'étoile fermée contenue dans un cercle C_1 *de rayon* R *autour de l'origine, on a*

$$(\beta\ ter) \qquad |\theta(x)| < M < +\infty$$

où

$$\theta(x) = \Sigma(\lambda_n - n)x^n,$$

la fonction $\Sigma b_n e^{-\lambda_n s}$ *n'a pas d'autres points singulier dans le demi-plan*

$$\sigma > -\log R,$$

que les points d'affixes

$$-\log \omega - \log \chi$$

où ω *est un multiple quelconque d'un nombre de facteurs quelconque égaux ou non qui sont les affixes de points de la frontière de l'étoile de* $\theta(x)$ *ou le point d'affixe un, et où* χ *est un point singulier quelconque de* $\Sigma b_n x^n$.

On démontre ce théorème en écrivant :

$$\Sigma b_n e^{-\lambda_n s} = \Sigma b_n e^{-ns} e^{-(\lambda_n - n)s},$$

et en posant $e^{-s} = z$ on a

$$\Sigma b_n e^{-\lambda_n s} = \Sigma b_n e^{(\lambda_n - n)\log z} z^n,$$

d'où l'on a formellement

$$(13\ bis) \qquad \Sigma b_n e^{-\lambda_n s} = \sum_n b_n \left(\sum_m \frac{[(\lambda_n - n)\log z]^m}{m!} \right) z^n =$$
$$= \sum_m \frac{[\log z]^m}{m!} \sum_n b_n (\lambda_n - n)^m z^n.$$

En posant

$$H_m = H_m(\theta, \Pi) = H(\Sigma(\lambda_n - n)^{m-1} z^n, \theta);\ H_1 = H(\Pi, \theta),$$

on voit que pour déterminer la valeur de H_m on peut prendre l'intégrale de Parseval le long de la courbe L_ε du n° 6 et l'on voit immédiatement que H_m est holomorphe à l'intérieur de cette courbe. L'inégalité $|\theta(x)| < M$ montre que l'égalité (13 *bis*) a un sens car la double somme qui y intervient converge absolument dans C_ε, d'où résulte le théorème.

Ce théorème établit, en outre, l'existence des séries de la forme $\Sigma e^{\lambda_n s}$ $(n < \lambda_n < n+1)$ *qui admettent un ensemble de points singuliers qui n'est pas dense.*

9. Dans la théorie des séries de Taylor, on établit souvent la relation entre l'allure d'une fonction $g(z)$ et les singularités de la fonction déterminée par le développement $\Sigma g(n) z^n$.

On peut se demander si des hypothèses analogues concernant les λ_n, c'est-à-dire des hypothèses où l'on pose $\lambda_n = g(n)$, $g(z)$ étant une fonction spéciale, ne conduisent pas aux résultats intéressants concernant les singularités des séries $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$.

La réponse est affirmative, et l'on voit d'après le théorème V, que les mêmes fonctions $g(z)$ qui interviennent dans les séries de Taylor doivent intervenir ici.

Ainsi, du théorème IV et d'un théorème de Lindelöf-Carlson concernant les séries de Taylor de la forme $\Sigma g(n) z^n$, résulte l théorème suivant :

Théorème V. — *Si* λ_n *est tel que*

$$\left.\begin{array}{l} n < \lambda_n \leqq n+1 \\ \lambda_n = n + g(n) \end{array}\right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

où $g(z)$ *est une fonction holomorphe dans le demi-plan* $R(x) = x > \alpha$ *et ayant la propriété que dans ce demi-plan* $\limsup \frac{\operatorname{Log} |\varphi(z)|}{|z|} < \infty$ *et* $|\varphi(\beta + iy)| < e^{\varepsilon |y|}$ *pour tout* $\beta > \alpha$ *pour* $\varepsilon > 0$ *et* $|y|$ *assez grand et si la propriété* (β *ter*) *est vérifiée, la série* $\Sigma b_n e^{-\lambda_n s}$ *n'a pas dans le demi-plan* $\sigma > -\log R$ *d'autres points singuliers que l'étoile horizontale relative à l'ensemble de points* α *où* α *est un point singulier quelconque de la série de Taylor* $\Sigma b_n e^{-ns}$.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de remarquer que, du fait que la fonction $\Sigma g(n) z^n$ admet comme étoile de Mittag-Leffler le plan entier, sauf la demi-droite $(1, +\infty)$, il résulte immédiatement que le théorème V est un cas particulier du théorème IV.

Remarquons que les hypothèses du théorème V sont bien réalisables toutes à la fois.

Il suffit de remarquer qu'une fonction de la forme (10 *bis*) où n ne prend qu'un nombre fini de valeurs et où les α_n sont réels positifs plus grands ou égaux à un et où $\beta_n < 1$ est *telle* que l'on a

$$(14) \qquad \theta(x) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n) x^n = \sum g(n) x^n,$$

toutes les propriétés de la suite λ_n qui sont exigées par le théorème V étant vérifiées.

Pour le voir, rappelons que la réciproque du théorème de M. Lindelöf a été démontrée par M. Carlson et M. Vl. Bernstein. Précisément, la fonction (14), ainsi que les fonctions $\theta(x)$ de la page 94, vérifient toutes les conditions pour que l'on puisse conclure que la fonction $g(z)$ vérifie l'inégalité

$$|g(\alpha + \rho e^{i\varphi})| < e^{\rho\varepsilon},$$

que $\theta(x) - 1$ vérifie les autres propriétés voulues résulte de ce que nous avons dit à la page 93.

Considérons maintenant le cas où

$$\lambda_n = n + Q\left(\frac{1}{n}\right),$$

où $Q(x)$ est un polynome.

Posons

$$Q(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3 + \ldots + \alpha_{q+1} x^q \qquad (\alpha_i \geqq 0),$$

les quantités $\alpha_i (i = 1, 2, \ldots, q-1)$ étant choisies de sorte qu'on ait

$$(15) \qquad 2\sum_{n=1}^{\infty} Q\left(\frac{1}{n}\right) < \delta < 1.$$

Il résulte du lemme III qu'il existe alors une solution de (10) où l'on pose $\theta(x) = \Sigma(\lambda_n - n)x^n$, holomorphe à l'origine.

Dans le cas où nous nous plaçons, l'équation intégrale (10) se réduit d'ailleurs par la répétition q fois de l'opération qui consiste à la différentier et à la multiplier ensuite par x à une équation différentielle qui admet grâce à (15) une solution holomorphe à l'origine, et l'on voit, d'autre part, de la forme même de cette équation que cette solution n'a pas d'autres singularités que le point d'affixe un et les points singuliers de $\mathrm{H}(x)$.

D'où l'on peut tirer le théorème suivant :

Théorème VII. — *Si* $Q(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3 + \ldots + \alpha_{q-1} x^q$ *est un polynome avec des coefficients positifs et tel que*

$$2\sum_{n=1}^{\infty} Q\left(\frac{1}{n}\right) < \delta < 1,$$

la fonction

$$\Sigma a_n e^{-\left[n+Q\left(\frac{1}{n}\right)\right]s}$$

admet comme étoile horizontale, relative à ses singularités, l'étoile horizontale relative à l'ensemble de points $\alpha + \beta$ *et* β *et* $\mathrm{P}\,[\alpha, \{\lambda_n\}]$ *où* α *est un point singulier quelconque de la série de Taylor* $\Sigma a_n e^{-ns}$ *et où* β *est un point singulier quelconque de* $\Sigma e^{-\lambda_n s}$.

Remarquons enfin que, dans le cas où $Q\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{\alpha}{n}\right)$ $(\alpha > 0)$ quoique la méthode précédente ne s'applique pas on a néanmoins le même théorème, la démonstration étant différente.

Dans un Mémoire, qui paraîtra prochainement dans un autre recueil, je tire plusieurs conclusions des théorèmes établis ici. Quelques-uns de ces nouveaux résultats ont paru dans une Note aux *Comptes rendus* de mars 1929.