BULLETIN DE LA S. M. F.

M. GEBBIA

Résolution théorique d'un problème de phoronomie

Bulletin de la S. M. F., tome 57 (1929), p. 125-159

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1929__57__125_0>

RÉSOLUTION THÉORIQUE D'UN PROBLÈME DE PHORONOMIE (¹);

PAR MICHELE GEBBIA.

PRÉFACE.

Le but que je me propose d'atteindre dans ce Mémoire est d'étudier l'écoulement d'un liquide pesant par un orifice circulaire ouvert dans le fond horizontal d'un réservoir indéfini. Il s'agit de traiter cet argument par déduction, et surtout de déterminer théoriquement le coefficient d'écoulement, sur lequel l'expérience est bien riche de résultats. Mais je fais cela d'une manière plus modeste qu'on ne pourrait croire. Après avoir posé une conception fondamentale, que je crois neuve, je ne puis pas en déduire un développement univoque, mais j'y ajoute arbitrairement quelques positions, que je démontre suffisantes, mais que je ne puis pas démontrer nécessaires. Le criterium que j'adopte pour l'acceptation de mes résultats, c'est leur coïncidence avec ceux de l'expérience, qui constituent, pour ainsi dire, mon modèle. Néanmoins je crois que mon travail, malgré ces défauts, ne manque pas de prix, celui surtout de coordonner en un raisonnement unique les deux façons possibles du phénomène, savoir l'écoulement *à pleine bouche* et celui *par gouffre*, coordination qui, à mon avis, n'a jamais été faite. Je me flatte que le lecteur ne jugera pas mon travail indigne d'être soumis au public.

I. — POSITION DU PROBLÈME ET GÉNÉRALITÉS SUR SA RÉSOLUTION.

1. Le mouvement stationnaire d'un liquide pesant contenu dans un réservoir, et s'écoulant par un orifice ouvert dans une paroi ou dans le fond, est considéré pour des raisons connues comme irrotationnel, c'est-à-dire dérivant d'un potentiel de vitesse. Dans ce

---

(¹) Michele Gebbia est décédé à Palerme le 27 décembre 1929, pendant l'impression de ce Mémoire. M. Corradino Mineo, son collègue à l'Université de Palerme, a bien voulu en revoir les épreuves : la Société Mathématique exprime ici à M. Mineo ses sincères remerciements. (*N. D. L. R.*)

Mémoire je traiterai théoriquement par approximation le cas que le réservoir ait un fond plan horizontal, dans lequel soit ouvert un orifice circulaire de rayon R, et que les dimensions horizontales du réservoir soient très grandes en comparaison de ce rayon, de façon qu'on puisse les traiter dans le calcul comme infinies.

Nous appellerons *axe* du système la verticale élevée du centre de l'orifice. Le mouvement sera naturellement symétrique par rapport à l'axe. Déterminons la position d'un point quelconque du liquide au moyen de coordonnées cylindriques, savoir : 1° l'ordonnée z partant d'un plan horizontal préfixé et positive quand directe en bas; 2° le rayon r normal à l'axe compté dès celui-ci; 3° l'angle θ, que ce rayon fait avec un plan vertical préfixé passant par l'axe et en un sens rotatoire choisi à volonté.

2. Nous supposons que l'alimentation du réservoir se fasse à une grande distance de l'axe.

L'expérience nous apprend que pour un réservoir donné, c'est-à-dire pour un R donné, il faut distinguer deux manières de mouvement :

a. Si le débit d'alimentation, et par là celui d'écoulement, est suffisamment grand, l'écoulement advient par tout l'orifice, ou, comme nous dirons, *à pleine bouche*. Alors le liquide est limité au-dessus par un plan horizontal, où il est sensiblement immobile, et que nous dirons *plan de charge*. Ceci est caractérisé par ces deux propriétés : que la vitesse y est presque nulle, et que la pression y est celle de l'ambiant (atmosphérique si cet ambiant est l'air extérieur).

b. Si le débit d'alimentation est inférieur à une certaine valeur, le liquide ne s'écoule pas par tout l'orifice, mais seulement par une couronne circulaire contournée par le bord de celui-ci et par un autre cercle concentrique, duquel nous indiquerons par R_0 le rayon. Dans ce cas l'expérience nous apprend que les molécules liquides possèdent, outre les mouvements vertical et radial, un considérable mouvement de rotation autour de l'axe, et il se forme ce que nous appelons *gouffre*. La surface supérieure du liquide est de révolution autour de l'axe, et elle a presque la forme de la corolle d'une fleur. Puisque à une grande distance de l'axe le liquide est sensiblement immobile et la surface supérieure sensiblement plane et horizontale, ce plan-ci, qui résultera asymptotique de la surface, doit être pris comme plan de charge, parce qu'il possède les deux propriétés caractéristiques remarquées dans le plan analogue relatif au cas précédent. Dans un cas et dans l'autre nous prenons l'origine des z dans le plan de charge et son sens positif dirigé en bas. Désignons par h la *charge*, c'est-à-dire l'ordonnée du plan de fond au-dessous du plan de charge.

3. La vitesse du point générique du liquide a trois composantes orthogonales entre elles, savoir : une V_z parallèle à l'axe, une V_r dans la direction du rayon et une troisième V_θ tangente au cercle horizontal de rayon r. Désignons par φ le *potentiel* de vitesse, et puisque $r\,d\theta$ est l'arc infinitésimal de ce cercle, sera $V_\theta = \frac{\partial\varphi}{r\,\partial\theta}\cdot$ Mais, par la symétrie du mouvement par rapport à l'axe, aucune des grandeurs qui le déterminent ne peut dépendre de θ, d'où il suit que $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$ ne peut être qu'une fonction de z, r, et nous la désignerons par Θ :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \Theta, \qquad V_\theta = \frac{\Theta}{r}\cdot$$

Quant à V_z, V_r, pour la même raison, elles sont fonctions des seules z, r.

On peut démontrer que Θ est une constante. En effet, à cause de l'existence d'un potentiel de vitesse, la différentielle

$$V_r\,dr + V_z\,dz + V_\theta\,r\,d\theta$$

est exacte, et partant subsistent les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial V_r}{\partial\theta} = \frac{\partial V_\theta r}{\partial r}, \qquad \frac{\partial V_z}{\partial\theta} = \frac{\partial V_\theta r}{\partial z}.$$

Mais les premiers membres de celle-ci sont nuls, et le sont encore les deuxièmes, c'est-à-dire que $V_\theta r$, ou Θ, ne dépend ni de r ni de z; donc

$$\Theta = c \text{ (constante)}, \qquad V_\theta = \frac{\ }{r}\cdot$$

La vitesse angulaire ω de la particule générique est variable, savoir :

$$\omega = \frac{V_\theta}{r} = \frac{c}{r^2}.$$

4. Pensons φ, et partant V_r, V_z, développées en séries de Maclaurin suivant les puissances de r, et poussons l'approximation aux termes en r^2. Cela équivaut à prendre h comme unité de longueur, et alors en supposant h beaucoup plus grand que R, à proximité de l'axe, r, r^2, ... seront des nombres très petits.

Introduisons la condition que φ soit harmonique (condition de continuité); dans nos coordonnées elle est notoirement

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0,$$

ou, puisque par la symétrie le dernier terme est nul,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0.$$

Resal (¹) démontre que cette équation a la solution

$$\varphi = a + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{(2.4\ldots 2n)^2} r^{2n} \frac{d^{2n}a}{dz^{2n}},$$

où a est une fonction arbitraire de la seule z. Il en suit

$$(1)\quad \begin{cases} V_r = \dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = \displaystyle\sum_1^\infty \frac{(-1)^n 2n}{(2.4\ldots 2n)^2} r^{2n-1} \frac{d^{2n}a}{dz^{2n}}, \\ V_z = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = \dfrac{da}{dz} + \displaystyle\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{(2.4\ldots 2n)^2} r^{2n} \frac{d^{2n+1}a}{dz^{2n+1}}, \end{cases}$$

et en posant

$$\frac{da}{dz} = \psi,$$

$$V_n = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n 2n}{(2.4\ldots 2n)^2} r^{2n-1} \frac{d^{2n-1}\psi}{dz^{2n-1}},$$

$$V_z = \psi + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{(2.4\ldots 2n)^2} r^{2n} \frac{d^{2n}\psi}{dz^{2n}}.$$

(¹) *Traité de Mécanique générale*, t. II, p. 204.

Limiter l'approximation jusqu'à r^2, cela équivaut à prendre dans ces séries les seuls termes avec l'indice $n = 1$, d'où

$$(2) \qquad V_r = -\frac{1}{2}\frac{d\psi}{dz}r, \qquad V_z = \psi - \frac{1}{4}\frac{d^2\psi}{dz^2}r^2.$$

Nous prenons pour ψ un trinome de deuxième degré, savoir :

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2$$

où ψ_0, ψ_1, ψ_2 sont des constantes, qu'il faut déterminer. Il en suit

$$\frac{d\psi}{dz} = \psi_1 + 2\psi_2 z, \qquad \frac{d^2\psi}{dz^2} = 2\psi_2,$$

et il en résulte

$$(1') \qquad V_r = -\frac{1}{2}(\psi_1 + 2\psi_2 z)r. \qquad V_z = \psi - \frac{1}{2}\psi_2 r^2.$$

5. *Lignes de flux.* — Les équations différentielles de ces lignes sont

$$(3) \qquad \frac{dr}{V_r} = \frac{dz}{V_z} = \frac{r^2 d\theta}{C}.$$

L'égalité des deux premiers membres peut s'écrire

$$(4) \qquad V_z dr - V_r dz = 0.$$

Celle-ci est l'équation différentielle d'une famille de lignes planes placées dans le plan méridien, qui ne sont pas les vraies lignes de flux, mais qui peuvent en être déduites en les projectant sur le plan méridien au moyen de projectantes circulaires de rayon r. Nous appelons aussi lignes de flux (en sens restreint) ces lignes planes. En multipliant la (4) par r, on a

$$(4') \qquad V_z r\,dr - V_r r\,dz = 0.$$

Démontrons que le premier membre de celle-ci est une différentielle exacte, c'est-à-dire que r est un facteur intégrant de la (4). En effet on a, en faisant usage des (2),

$$\frac{\partial}{\partial z}(V_z r) + \frac{\partial}{\partial r}(V_r r) = \frac{\partial V_z}{\partial z}r + V_r + \frac{\partial V_r}{\partial r}r$$
$$= \frac{\partial\psi}{\partial z}r - \frac{1}{4}\frac{d^3\psi}{dz^3}r^3 - \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial z}r - \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial z}r = -\frac{1}{4}\frac{d^3\psi}{dz^3}r^3,$$

qui est nulle, parce que telle est la troisième dérivée de ψ.

On peut donc intégrer la (4′) par une méthode connue, qui est la suivante. Regardons d'abord z comme constante, et intégrons le premier membre de la (4′) par rapport à r, ce qui donne

$$\frac{\psi r^2}{2} - \frac{1}{16} \frac{d^2\psi}{dz^2} r^4 + \chi(z),$$

où χ est une fonction arbitraire de la seule z. En dérivant cette expression par rapport à z, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d\psi}{dz} r^2 - \frac{1}{16} \frac{d^3\psi}{dz^3} r^4 + \frac{d\chi}{dz}.$$

Égalons cette dernière au coefficient de dz dans la (4′), qui est

$$-V_r r = \frac{1}{2} \frac{d\psi}{dz} r^2.$$

et, en réduisant, nous obtenons

$$\frac{d\chi}{dz} = 0,$$

ce qui donne

$$\chi = \text{const}.$$

Donc l'intégrale de (4′) est

$$\frac{\psi r^2}{2} - \frac{1}{16} \frac{d^2\psi}{dz^2} r^4 = \text{const}.$$

En négligeant le terme en r^4, et compénétrant le coefficient $\frac{1}{2}$ dans la constante, nous prendrons définitivement comme intégrale (appproximative) de la (4)

$$\psi r^2 - c = 0, \tag{5′}$$

qui représente les lignes de flux en sens restreint. Ce sont des courbes du quatrième ordre.

Les diverses valeurs de c distinguent les diverses courbes de flux. Nous désignons par G la valeur de c, qui distingue la ligne de flux *supérieure*, celle qui limite le liquide supérieurement, et nous écrivons l'équation de cette ligne dans la forme

$$\psi r^2 - G = 0. \tag{5}$$

6. *Équation de la ligne à pression ambiante.* — L'équation

de Bernoulli ou de la force vive donne

$$\frac{1}{2}\left(V_z^2 + V_r^2 + \frac{c^2}{r^2}\right) - gz + \frac{p - p_a}{\rho} = 0.$$

où ρ est la densité du liquide, p la pression locale, et p_a la pression ambiante. On obtient l'équation cherchée en posant dans celle-ci $p = p_a$, d'où

$$V_z^2 + V_r^2 + \frac{c^2}{r^2} - 2gz = 0,$$

et en forme entière [en excluant de considérer les points de l'axe ($r = 0$)],

$$(5) \qquad (V_z^2 + V_r^2 - 2gz)\,r^2 + c^2 = 0.$$

7. *Conception fondamentale de la méthode qu'on suit ici.* — On sait que les points matériels, qui dans un instant quelconque se trouvent sur la surface extérieure du liquide, y restent toujours, et par conséquent la surface supérieure est lieu de courbes de flux. La surface supérieure est extérieure, et pourtant elle est lieu de courbes de flux. Cependant pas toutes les courbes de flux à pression ambiante ne sont situées sur la surface supérieure. En effet, les points qui se trouvent sur le bord de l'orifice sont à pression ambiante, et par eux passent des courbes de flux à pression ambiante, lesquelles cependant ne sont pas situées sur la surface supérieure. Il s'ensuit que la surface à pression ambiante doit se décomposer en deux : l'une est la surface supérieure et l'autre passe par le bord de l'orifice. Nous appellerons cette dernière *surface résiduale*, et *courbe résiduale* sa courbe méridienne. Donc le premier membre de la (5) doit être le produit de celui de la (4) et du premier membre d'une autre équation, qui représente la courbe résiduale, et qui aura la forme

$$(6) \qquad K r^2 - H = 0,$$

où K est un polynome en z et H une constante, qu'on doit déterminer. Voici la base de la méthode, que nous adopterons.

Il faut assigner un degré à K. Rigoureusement celui-ci devrait être la différence des degrés des équations (5) et (4). Mais dans le but d'obtenir un nombre d'équations égal au nombre des inconnues, nous attribuerons à K le quatrième degré (le double de celui de ψ), en faisant quelques négligements. Nous poserons donc

$$K = K_0 + K_1 z + K_2 z^2 + K_3 z^3 + K_4 z^4.$$

Ainsi nous avons

$$(7) \qquad \begin{aligned}(V_z^2 + V_r^2 - 2gz) r^2 + c^2 &= (\psi r^2 - G)(K r^2 - H) \\ &= \psi K r^4 - (\psi H + GK) r^2 + GH.\end{aligned}$$

8. *Application de la méthode.* — Dans la (7) nous devons égaler les coefficients de r^0, r^1, r^2. L'égalité des coefficients de r^0 nous donne

$$(8') \qquad c^2 = GH,$$

laquelle nous dit que, quand G est nulle, c l'est aussi et vice versa (parce que nous verrons que H n'est jamais nul). Donc l'écoulement arrive par gouffre ou à pleine bouche, selon qu'il est $G \neq 0$ ou $G = 0$.

Puis, en faisant dans la (7) le développement de ψ et de K, nous devons, en chacun des coefficients de r^2 et de r^4, égaler les coefficients des mêmes puissances de z. Cela exigerait des calculs un peu compliqués et fâcheux; mais nous les rendrons plus faciles au moyen de quelques remarques.

Commençons par le terme en r^2. La parenthèse au premier membre de la (7) y est multipliée par r^2; partant, pour obtenir le coefficient du terme en r^2 de la (7), il suffit de limiter les développements (2) de V_r, V_z aux seuls termes indépendants de r, savoir, prendre

$$V_r = 0, \qquad V_z = \psi.$$

L'égalité des termes en r^2 donne donc

$$\psi^2 - 2gz = -(\psi H + GK),$$

et en développant,

$$\begin{aligned}&\psi_0^2 + \psi_1^2 z^2 + \psi_2^2 z^4 + 2\psi_0\psi_1 z + 2\psi_0\psi_2 z^2 + 2\psi_1\psi_2 z^3 - 2gz \\ &+ (\psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2) H + (K_0 + K_1 z + K_2 z^2 + K_3 z^3 + K_4 z^4) G = 0.\end{aligned}$$

Dans celle-ci nous devons égaler à zéro les coefficients des termes en z^0, z^1, z^2, z^3, z^4, et nous obtenons ainsi les cinq équations

$$(8)\begin{cases}(z^0) & \psi_0^2+\psi_0 H+GK_0=0,\\ (z_1) & 2\psi_0\psi_1-2g+\psi_1 H+GK_1=0,\\ (z^2) & \psi_1^2+2\psi_0\psi_2+\psi_2 H+GK_2=0,\\ (z^3) & 2\psi_1\psi_2+GK_3=0,\\ (z^4) & \psi_2^2+GK_4=0.\end{cases}$$

Pour passer aux termes en r^4 de la (7), nous faisons les remarques que voici :

1° Dans la parenthèse au premier membre nous pouvons limiter les développements (1′) aux seuls termes en r^2, savoir, prendre

$$V_r=-\frac{1}{2}(\psi_1+2\psi_2 z)r, \qquad V_z=\psi-\frac{1}{2}\psi_2 r^2.$$

2° Nous voulons négliger les termes en z^3, z^4 en comparaison des autres. Cela est permis, parce que d'une part ceux-là sont multipliés par r^4, qui est très petit, et d'autre part nous considérons le mouvement au dedans du réservoir, où, en prenant comme unité de longueur h, le nombre z est partout $\leqq 1$. Avec cela nous devons prendre aussi

$$\begin{aligned}\psi K = {} & \psi_0 K_0+\psi_0 K_1 z+\psi_0 K_2 z^2,\\ & +\psi_1 K_0 z+\psi_1 K_1 z^2+\psi_2 K_0 z^2;\end{aligned}$$

en remplaçant et en égalant à zéro les coefficients des termes en z^0, z^1, z^2, nous obtenons les trois équations

$$(9)\begin{cases}(z^0) & \frac{1}{4}\psi_1^2-\psi_0\psi_2+\psi_0 K_0=0,\\ (z^1) & \psi_0 K_1+\psi_1 K_0=0,\\ (z^2) & \psi_0 K_2+\psi_1 K_1+\psi_2 K_0=0.\end{cases}$$

G étant donnée, ces huit équations, (8), (9), suffisent pour déterminer les huit inconnues ψ_0, ψ_1, ψ_2, K_0, ..., K_4, sauf à déterminer H.

9. Nous passons à la solution de ces équations. De la première (9), en posant, pour abréger,

$$\frac{1}{4}\psi_1^2-\psi_0\psi_2=\Delta,$$

on obtient

$$K_0 = -\frac{1}{\psi_0}\Delta, \tag{10}$$

et, en remplaçant dans la deuxième :

$$K_1 = \frac{\psi_1}{\psi_0^2}\Delta \tag{10}$$

et, en remplaçant dans la troisième :

$$K_2 = -\frac{\psi_1^2 - \psi_0\psi_2}{\psi_0^3}\Delta.$$

Les trois premières (8), en y remplaçant par K_0, K_1, K_2 les valeurs précédentes, deviennent

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &\psi_0^2 + \psi_0 H - \frac{1}{\psi_0} G\Delta = 0, \\ &2\psi_0\psi_1 - 2g + \psi_1 H + \frac{\psi_1}{\psi_0^2} G\Delta = 0, \\ &\psi_1^2 + 2\psi_0\psi_2 + \psi_2 H - \frac{\psi_1^2 - \psi_0\psi_2}{\psi_0^3} G\Delta = 0. \end{aligned}\right.$$

De la première on obtient

$$G\Delta = \psi_0(\psi_0^2 + \psi_0 H).$$

En remplaçant dans la deuxième, par un simple calcul, il vient

$$\psi_1 = \frac{2g}{3\psi_0 + 2H} \tag{12}$$

[en effectuant ce calcul on remarquera qu'il ne peut pas être $\psi_0 = 0$, parce qu'alors les (10) donneraient pour K_0, K_1, K_2 des valeurs infinies].

En remplaçant dans la troisième, on obtient le même résultat

$$\psi_2 = \frac{4g^2 H}{\psi_0(3\psi_0 + 2H)^3}. \tag{12}$$

Avec ces expressions on obtient facilement

$$\Delta = g^2 \frac{3\psi_0 - 2H}{(3\psi_0 + 2H)^3}.$$

Alors la première (11) devient

$$\psi_0^3 + \psi_0^2 H + G g^2 \frac{3\psi_0 - 2H}{(3\psi_0 + 2H)^3} = 0.$$

Nous pouvons multiplier par le dénominateur, lequel ne peut pas être nul, parce qu'alors il serait, par les (12), $\psi_1 = \infty$, $\psi_2 = \infty$; et l'on a

$$\psi_0^2(\psi_0 + H)(3\psi_0 + 2H)^3 + G g^2 (3\psi_0 - 2H) = 0. \tag{13}$$

Enfin les deux derniers (8), avec les expressions précédentes de ψ_1, ψ_2, nous donnent

$$\left\{ \begin{aligned} GK_3 &= -\frac{16 g^3 H}{\psi_0 (3\psi_0 + 2H)^4}, \\ GK_4 &= -\frac{16 g^4 H^2}{\psi_0^3 (3\psi_0 + 2H)^6}. \end{aligned} \right. \tag{14}$$

10. *Détermination de* H. — Il faut maintenant procéder à la détermination de H, pour laquelle est nécessaire une seconde relation entre ψ_0 et H outre la (13). Celle-ci sera fournie par la prédite condition, que la courbe résiduale passe par le bord de l'orifice, c'est-à-dire que l'équation (6), avec le développement de K, soit satisfaite par $r = R$, $z = h$. En excluant pour le moment le cas de l'écoulement à pleine bouche, savoir en supposant $G \neq 0$, nous écrivons cette condition comme suit :

$$GK_h = \frac{GH}{R^2}, \tag{15}$$

où K_h dénote la valeur de K pour $z = h$. Pour la calculer en fonction de ψ_0, H, nous avons déjà les expressions de K_3, K_4. Puis, pour déduire des (10) celles de K_0, K_1, K_2, nous déduisons d'abord

$$\psi_1^2 - \psi_0 \psi_2 = \frac{4 g^2 (3\psi_0 + H)}{(3\psi_0 + 2H)^3},$$

et ensuite, des (10)

$$\left\{ \begin{aligned} K_0 &= g^2 \frac{3\psi_0 - 2H}{\psi_0 (3\psi_0 + 2H)^3}, \\ K_1 &= -2 g^3 \frac{3\psi_0 - H}{\psi_0^2 (3\psi_0 + 2H)^4}, \\ K_2 &= 4 g^4 \frac{(3\psi_0 + H)(3\psi_0 - 2H)}{\psi_0^3 (3\psi_0 + 2H)^6}. \end{aligned} \right. \tag{16}$$

Au moyen des (14), (16), la (15) devient

$$
(17)\quad \frac{Gg^2}{\psi_0(3\psi_0+2H)^3}\left\{(3\psi_0-2H)-2\frac{3\psi_0-H}{\psi_0(3\psi_0+2H)}gh + \frac{4(3\psi_0+H)(3\psi_0-2H)}{(3\psi_0+2H)^3}g^2h^2\right\}
- 16\frac{Hg^3h^3}{\psi_0(3\psi_0+2H)^4}\left[1+H\frac{gh}{\psi_0(3\psi_0+2H)^2}\right]=\frac{GH}{R^2}.
$$

Celle-ci est la relation entre ψ_0 et H, fournie par la condition relative au bord de l'origine.

Résumons ce que nous avons prescrit pour la détermination des constantes. G et h étant connues, nous avons d'abord les (13), (17) qui lient ψ_0 et H, et servent à les déterminer. Alors les (14) déterminent K_3, K_1, les (16) K_0, K_1, K_2 et les (12) ψ_1, ψ_2. On rencontre la difficulté pratique provenant du haut degré des deux premières équations; en effet la (13) est du sixième degré en ψ_0 et du quatrième en H, et la (17) du neuvième en ψ_0 et du septième en H.

11. Suivons l'intuition du phénomène pour un débit croissant à partir de zéro. Pour un débit nul, on a $h=0$, il n'y a pas de mouvement, $\psi_0=\psi_1=\psi_2=0$, $G=0$. A mesure que le débit croît, l'écoulement commence d'abord par une couronne circulaire au rayon intérieur R_0 exprimé par

$$R_0=\frac{G}{2B_h},$$

par l'extrémité duquel passe la ligne supérieure. A mesure que G diminue, R_0 diminue aussi, et la ligne supérieure s'approche de plus en plus de l'axe, jusqu'à ce que, le débit ayant atteint une certaine valeur, R_0 et G vont ensemble à zéro, et l'écoulement commence à arriver à pleine bouche. En conclusion le gouffre peut subsister parmi deux états limites, ceux-ci exclus; un *état limite inférieur*, dans lequel il n'y a pas de mouvement, et un *état limite supérieur*, dans lequel l'écoulement commence à arriver à pleine bouche. La constante G a des valeurs diverses de zéro seulement dans cet intervalle.

12. *Formes des lignes de flux.* — Nous complétons l'étude du gouffre en déterminant la forme approximative d'une courbe de flux quelconque dans l'espace en proximité de l'axe. Les équations différentielles de ces courbes sont

$$\frac{dr}{-\frac{1}{2}(\psi_1+2\psi_2 z)r}=\frac{dz}{\psi-\frac{1}{2}\psi_2 r^2}=\frac{r^2 d\theta}{c}.$$

Nous avons déduit (n° 5) l'intégrale de l'équation, qu'on obtient en égalant les deux premiers membres : elle est

$$\frac{1}{2}\psi r^2 = C, \tag{4'}$$

et lie z et r. Pour obtenir l'équation qui lie z et θ, égalons le deuxième et le troisième membre et, en posant par la (4′) même, $\psi=\frac{2C}{r^2}$, nous obtenons successivement

$$\frac{dz}{\frac{2C}{r^2}-\frac{1}{2}\psi_2 r^2}=\frac{r^2 d\theta}{c}, \qquad c\,dz=\left(2C-\frac{1}{2}\psi_2 r^4\right)d\theta,$$

et en négligeant le terme en r^4,

$$dz=\frac{2C}{c}d\theta.$$

L'intégrale est

$$z=\frac{2C}{c}\theta, \tag{18}$$

où la constante est déterminée de manière que pour $z=0$ on ait $\theta=0$. Celle-ci dit que les ordonnées des points d'une ligne de flux mesurées à partir du plan de charge sont proportionnelles aux déplacements angulaires θ mesurés à partir de la position qu'occupe le point sur le plan de charge. Ce départ de la ligne du plan de charge aurait lieu, pour ainsi dire, virtuellement, c'est-à-dire à une telle distance de l'axe, que les formules ne sont plus applicables.

Pour avoir la relation, qui lie r et θ, égalons le premier et le troisième terme des équations différentielles et, en remplaçant z par la valeur (18), nous obtenons

$$c\,dr=-\frac{1}{2}\left(\psi_1+4\psi_2\frac{C}{c}\theta\right)r^3 d\theta$$

En séparant les variables, il vient

$$-c\frac{dr}{r^3} = \frac{1}{2}\left(\psi_1 + 4\psi_2\frac{C}{c}\theta\right)d\theta,$$

et en intégrant

$$\frac{c}{r^2} = \psi_1\theta + 2\psi_2\frac{C}{c}\theta^2.$$

et, en y remplaçant ψ_1, ψ_2 par les valeurs (12) :

$$\frac{c}{r^2} = \left(\frac{2g}{3\psi_0 + 2H}\theta + \frac{8g^2H}{\psi_0(3\psi_0 + 2H)^3}\right)\frac{C}{c}\theta^2. \tag{19}$$

Celle-ci est donc l'équation de la projection de la courbe sur un plan horizontal quelconque, et représente une spirale, qui s'entortille autour du pôle situé sur la trace de l'axe, et y tend asymptotiquement, pendant qu'elle tend aussi asymptotiquement à l'infini, mais virtuellement.

II. — Cas particulier de l'écoulement a pleine bouche.

13. *La phase transitoire.* — Nous avons vu au n° 11 que, en croissant l'alimentation à partir de zéro, on passe du cas du gouffre à celui de l'écoulement à pleine bouche, quand on atteint la limite supérieure du gouffre, pour laquelle G, en décroissant, parvient à la valeur zéro. Examinons plus à fond ce qui arrive quand elle atteint cette limite.

Alors la ($4'$) se décompose dans les deux

$$r = 0, \qquad \psi = 0,$$

qui représentent les asymptotes communes à toutes les courbes de flux (dans le plan méridien). Le premier est l'axe. Le second représente la courbe supérieure. Celle-ci, dans notre champ d'approximation, se présente comme une droite horizontale, dont l'ordonnée est une opportune racine de l'équation $\psi = 0$. La vraie courbe supérieure sera tangente à cette droite dans son point d'intersection avec l'axe. On peut remarquer, cependant, qu'avant la limite la courbe supérieure est ouverte vers l'axe, qu'elle rencontre à l'infini au dehors de l'orifice ; dans l'état limite elle se ferme sur l'axe.

Dans le point d'intersection de la droite avec l'axe on a ensemble $\psi = 0$, $r = 0$, pendant que, étant $G = 0$, on a aussi $c = 0$, et partant, ayant en vue les (1'), on s'aperçoit que dans ce point la vitesse est nulle. Mais alors l'équation de Bernoulli donnerait

$$\frac{p - p_a}{\rho g} = z, \tag{20}$$

et puisqu'il est aussi $p = p_a$, il en suivrait $z = 0$, c'est-à-dire la droite devrait coïncider avec celle de charge. Cela exigerait qu'il fût $\psi_0 = 0$; mais cela a été reconnu impossible (n° 9). Donc on rencontre une contradiction.

Pour démontrer que dans le phénomène réel cette contradiction n'a pas lieu, nous remarquons d'une part que, si dans ce point la pression n'était pas ambiante, le premier membre de la (20) la donnerait sous forme d'une pression hydrostatique exercée sur le point et due à du liquide immobile superposé jusqu'au plan de charge. D'autre part remarquons que, si d'après la valeur limite la pression reste telle qu'elle est, puisque le liquide survenant ne peut pas sortir par l'orifice, parce que la clôture de la ligne supérieure en empêche l'accès, ladite surélévation du liquide doit réellement arriver. Mais pendant cette surélévation le mouvement cesse d'être stationnaire, parce que dans la région interposée entre la surface supérieure et le plan de charge, tandis qu'auparavant il n'y avait pas de liquide, puis il en survient. Donc la contradiction disparaît si nous pensons que la surface supérieure ne coïncide pas avec le plan de charge, mais lui reste dessous, et que le liquide va en s'élevant au-dessus d'elle jusqu'à atteindre le plan de charge, après quoi il s'arrête, et alors il exerce sur le point considéré la pression qu'exige l'équation (20).

En conclusion, quand le débit d'alimentation croît continuellement à partir de zéro, la phase du gouffre étant passée, commence une phase transitoire. Pendant celle-ci le mouvement cesse d'être stationnaire et la phase dure jusqu'à ce que le liquide ait atteint le plan de charge et qu'il s'arrête. Le mouvement recommence à être stationnaire aussitôt que cette phase est passée, et alors celle, qui était ligne supérieure, n'est plus à pression ambiante, mais *à vitesse nulle*. Dans la région interposée entre elle et le plan de charge le liquide reste immobile. Le mouvement se fait par-dessous de cette ligne, et il est celui d'un gouffre à l'état limite supérieur. Ce résultat est confirmé par le fait expérimental, que, quand, en augmentant l'alimentation, un gouffre se ferme, on remarque d'abord un graduel rétrécissement du trou existant dans la surface supérieure au-dessus de l'orifice; puis ce trou-ci se clôt, la surface de clôture monte jusqu'au plan de charge, en donnant l'apparence qu'il surgit du liquide du fond du réservoir.

14. De premier abord la discussion précédente peut faire croire que l'écoulement à pleine bouche ne puisse arriver qu'avec une seule valeur de la charge, celle qui s'établit quand, en augmentant le débit, le gouffre se ferme. Mais il n'en est pas ainsi : il peut arriver avec une charge quelconque plus grande que celle-ci. En effet, si depuis cet état le débit ne reste pas constant, mais continue à croître, le liquide survenu se superpose par de nouvelles couches horizontales. Alors l'ordonnée de chaque point du liquide augmente par l'exhaussement de l'origine des z, mais de la même valeur augmente la hauteur due à la pression, savoir de celle produite par le liquide survenu, et ces accroissements sont égaux. L'équation de Bernoulli, qui maintenant est la (20), conserve son expression; on a donc $c = 0$, $G = 0$. Le mouvement est aussi à pleine bouche.

15. Nous pouvons maintenant particulariser la solution du problème développée en général dans le chapitre précédent, en la pliant au cas de l'écoulement à pleine bouche.

Puisque alors $G = 0$, la solution se simplifie de beaucoup, et l'on peut l'épuiser, parce que n'a plus lieu la difficulté provenant de l'élimination entre des équations de haut degré. En effet alors la (13) devient

$$\psi_0^2(\psi_0 + H)(3\psi_0 + 2H) = 0.$$

Les deux solutions $\psi_0 = 0$, $3\psi_0 + 2H = 0$ ont été repoussées, et il reste la troisième

$$\psi_0 + H = 0, \qquad \psi_0 = -H. \tag{21}$$

Dans la (17) le second terme devient nul, et dans le premier reste le seul premier terme complexif, où en y supprimant, comme on peut, les facteurs communs, elle devient

$$1+\frac{Hgh}{\psi_0(3\psi_0+2H)^2}=0,$$

et, par la (21)

(22) $$1-\frac{gh}{H^2}=0, \qquad H^2=gh, \qquad H=\sqrt{gh}.$$

où nous prenons le radical avec le signe + par la raison que tantôt nous dirons.

Avec cela les (12) donnent

(21′) $$\psi_1=-\frac{2g}{H}, \qquad \psi_2=\frac{4g^2}{H^3};$$

les (14) donnent

(21″) $$GK_3=\frac{16g^3}{H^4}, \qquad GK_4=-\frac{16g_4}{H^6},$$

et les (16) donnent

$$K_0=-5\frac{g^2}{H^3}, \qquad K_1=\frac{8g^3}{H^5}, \qquad K_2=-40\frac{g^4}{H^7}.$$

Avec la valeur (22) de H et les (21), (21′), on a

(23) $$\begin{cases}\psi_0=-\sqrt{gh}.\\ \psi_1=-\frac{2}{h}\sqrt{gh}.\\ \psi_2=+\frac{4}{h^2}\sqrt{gh}.\end{cases}$$

Voici la raison par laquelle il faut prendre le radical avec le signe +. Où il y a mouvement, et certainement sur le plan de l'orifice ($z=h$) la composante V_r de la vitesse doit être évidemment dirigée vers l'axe, et partant, avec l'expression (1′) de V_r, doit être

$$\psi_1+2\psi_2 h=\left(-\frac{2}{h}+\frac{8}{h}\right)\sqrt{gh}=\frac{6}{h}\sqrt{gh}>0,$$

ce qui exige que le radical soit pris avec le signe +. Comme confirmation remarquons que sur le plan de l'orifice, et en particulier sur son centre ($z>h$, $r=0$), la composante V_z doit être positive, et partant par la (1′) doit être

(24) $$\psi_h=(-1-2+4)\sqrt{gh}=\sqrt{gh}>0.$$

En somme le signe — du radical correspondrait à une entrée au lieu d'une issue, par l'orifice.

16. *La ligne de flux supérieure et les autres.* — La ligne (dans le plan méridien) qui dans l'état de gouffre était supérieure est maintenant devenue une vitesse nulle (n° 13), a pour ordonnée sur l'axe une convenable racine de l'équation $\psi = 0$, savoir :

$$\psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 = 0.$$

et par les valeurs (23)

$$-1 - 2\frac{z}{h} + 4\frac{z^2}{h^2} = 0.$$

d'où

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} h.$$

et la racine convenable est la positive, ou

$$z = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} h = 0,809.\ h.$$

Donc cette ligne (fermée) rencontre l'axe à presque $\frac{4}{5}$ de h au-dessous de la droite de charge, ou à presque $\frac{1}{5}$ au-dessus du fond. Sous cette ligne se trouvent les autres de flux (ouvertes), dont l'équation complète est la (5') avec la constante *différente* de zéro et variable jusqu'à la valeur relative à la ligne, qui passe par le bord, qui est $\psi_h R^2$. Ces lignes du quatrième ordre ont comme asymptotes communes l'axe et l'horizontale ayant ladite ordonnée.

Ces résultats démontrent un fait expérimental constaté par les physiciens et les hydrauliciens, savoir que dans l'écoulement d'un liquide passant par un trou ouvert dans le fond d'un réservoir le mouvement arrive seulement dans les couches très rapprochées de l'orifice, pendant que dans les autres le liquide est croupissant. Le chiffre actuel de $\frac{1}{5}$ sur le fond est trop haut, et sera beaucoup diminué dans la deuxième approximation.

17. *La courbe résiduale.* — L'équation de cette courbe est la (6), et multipliée par G devient

$$GK = \frac{GH}{R^2}.$$

Cette multiplication par G est permise, parce que des formules obtenues au n° 15 il résulte que les produits GK_i ne sont pas tous nuls. Ainsi l'équation de la courbe devient

$$\frac{16g^3z^3}{H^4} - \frac{16g^4z^4}{H^6} = 0,$$

et, en y supprimant les facteurs communs non nuls,

$$z^3\left(1 - \frac{gz}{H^2}\right) = 0,$$

et, puisque $H^2 = gh$,

$$z^3\left(1 - \frac{z}{h}\right) = 0.$$

La première solution, $z = 0$, représente la droite de charge, et l'on doit la repousser, parce que cette droite ne passe pas par le bord. Donc la résiduale se réduit à la seule droite de fond. On en déduit l'importante conséquence que sur tout le cercle de l'orifice la pression est ambiante. Les hydrauliciens ont posé et cherché de résoudre la question, de savoir quelle est la pression dans le centre de l'orifice. Notre résultat la résout théoriquement.

18. *Le débit et le coefficient d'écoulement.* — Le débit, désigné par $\mathfrak{Q}$, a l'expression

$$\mathfrak{Q} = \int_\omega (V_z)_h \, d\omega,$$

où ω est l'aire de l'orifice, et $d\omega = r\,dr\,d\theta$, d'où, par la deuxième (1'),

$$\mathfrak{Q} = 2\pi\psi_h \int_0^R r\,dr - 2\pi\psi_2 \int_0^R r^3\,dr,$$

et, avec les valeurs (24) de ψ_h et (23) de ψ_2,

$$\mathfrak{Q} = \pi R^2 \sqrt{gh}\left(1 - 2\frac{R^2}{h^2}\right). \tag{25}$$

Le coefficient d'écoulement est par définition

$$\mu = \frac{\mathfrak{Q}}{\pi R^2 \sqrt{2gh}},$$

et partant

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - 2\frac{R^2}{h^2}\right). \tag{26}$$

Pour des valeurs très grandes de h en comparaison de R, en négligeant le rapport $\frac{R}{h}$, on a

$$\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707,$$

qui est la valeur donnée par Euler au coefficient d'écoulement. Elle est trop grande en comparaison des résultats expérimentaux. En outre pour des valeurs pas trop grandes et croissantes de ce rapport la valeur de μ donnée par la (26) diminue de peu au-dessous de μ_0, ce qui est aussi contraire aux résultats de l'expérience.

19. *Remarques.* — Si h, en diminuant à partir de grandes valeurs, atteint $R\sqrt{2}$, les formules (25), (26) donnent $\mathfrak{Q} = 0$, $\mu = 0$, résultats inacceptables. Cela s'explique en remarquant que notre approximation se fonde sur l'hypothèse que h est grand en comparaison de R, et partant, non seulement pour $h = R\sqrt{2}$, mais aussi pour des valeurs de h pas beaucoup plus grandes de R, ils doivent être repoussés. Réellement il doit arriver que pour une certaine valeur de h l'écoulement commence, et continue ensuite, à se faire par gouffre, de sorte que, pour un R donné, cette valeur est *critique*, en marquant le passage de l'écoulement à pleine bouche à celui par gouffre. Il serait très intéressant de connaître cette valeur, et pour l'avoir il faut une nouvelle relation, qui lie G et h dans le cas du gouffre; mais notre méthode ne fournit pas une telle relation, et d'ailleurs il serait pratiquement inutile qu'elle la fournisse par le fait expérimental que cette valeur critique ne dépend pas seulement de R, mais de maintes autres circonstances. Nous nous passons de combler cette lacune, et nous nous contentons d'affirmer par intuition que cette valeur doit être plus grande que R, mais pas beaucoup, et en effet c'est un résultat d'expérience que, quand un ample vase se vide par un trou ouvert dans le fond, le gouffre commence à arriver vers la fin du videment quand la charge est devenue très petite et voisine de R.

Mais il y a de plus. Cette dernière remarque nous apprend que le développement, que nous avons donné dans le chapitre précédent de l'étude du gouffre, est, au point de vue de la correspondance à la réalité, peu ou point utile, de sorte que nous avons peu à regretter la difficulté algébrique qu'on y rencontre. Néanmoins ce que nous avons dit constitue certainement une intéressante introduction à l'étude de l'écoulement à pleine bouche.

20. *La forme de la veine fluante.* — Nous avons trouvé (n° 17) que la pression sur le plan de l'orifice, savoir sur la base supérieure de la veine, est ambiante, ou, disons même, atmosphérique; et puisqu'il est naturel d'admettre la continuité du phénomène à travers la base de la veine, la pression en dedans d'elle ne peut être que plus petite que l'atmosphérique. Mais dans une masse liquide en contact avec l'atmosphère la pression ne peut pas être plus petite que l'atmosphérique sans qu'il y arrive de l'introduction d'air. L'expérience confirme en partie cette conséquence.

Réellement il arrive qu'à l'issue de l'orifice la veine se maintient continue et transparente seulement dans un petit trait, au delà duquel elle se trouble, et enfin se divise en gouttes, phénomènes dus tous les deux à l'introduction de l'air. Les hydrauliciens, en constatant l'existence de cette première partie transparente de la veine, l'appellent *veine contractée*, et appellent contractée la section extrême, jusqu'à laquelle elle s'étend; et, dans le but d'obtenir le débit, ils appliquent le théorème de Toricelli jusqu'à cette section et non pas à celle de l'orifice. L'existence d'une partie transparente, malgré que la pression y soit inférieure à l'atmosphérique, peut s'expliquer en pensant que pour un certain trait depuis l'issue de l'orifice, des filets de flux restent adhérents, et seulement au delà de ce trait la pression extérieure prend le dessus sur l'adhérence, et produit le troublement et la division en gouttes.

Donc nous chercherons la forme de la courbe méridienne de la veine à valoir comme réelle pour un certain trait, sans pouvoir préciser combien il s'étend. Cette courbe sera un prolongement de la plus basse ligne de flux intérieure au réservoir, savoir de celle qui passe par le bord de l'orifice, en se raccordant avec elle, parce qu'il n'y a aucune raison pour soupçonner une dicontinuité dans l'inclinaison de la tangente sur le bord. Nous nous passons aussi de la circonstance, que notre théorie vaut strictement à l'intérieur du réservoir.

En partant de la (4'), où l'on détermine la constante par la condition $z = h$ pour $r = R$, l'équation de la courbe cherchée est donc

(27) $$\psi r^2 = \psi_h R^2.$$

En remplaçant en ψ les coefficients, et faisant $z = h$, on obtient enfin l'équation de la courbe dans la forme

(28) $$(4z^2 - 2hz - h^2)\, r^2 = h^2 R^2;$$

la courbe est donc une quartique [1].

Cette courbe, comme les autres de flux, a pour asymptotes l'axe et l'horizontal $\psi = 0$ (n° 16). Mais, puisqu'on en considère un trait extérieur à l'orifice, il faut remarquer que l'approchement asymptotique à l'axe arrive où déjà la veine s'est troublée.

Il est intéressant de connaître l'angle i, que la tangente à cette courbe, sur le bord, fait avec l'axe, parce que cet angle mesure l'inclination, avec laquelle la courbe sort de l'orifice. De l'équation précédente on déduit par un calcul facile

(29) $$\operatorname{tang} i = -\frac{3R}{h}.$$

21. *Traitement direct du cas de l'écoulement à pleine bouche.* — Pour donner à ce Mémoire une allure systématique, nous avons voulu déduire le traitement de l'écoulement à pleine bouche comme cas particulier de celui du gouffre, qui est le plus général. Mais la (7) posée, la (8′) dit que l'écoulement advient à pleine bouche quand $G = 0$, et en déduisant aussi les (8), on peut procéder directement, en évitant les complications que l'on rencontre dans le cas général.

Alors des cinq équations (8) nous devons traiter diversement les trois premières et les deux dernières. Puisqu'on doit faire $G = 0$, dans les trois premières posons $= 0$ les derniers termes GK_0, GK_1, GK_2, et il reste un système déterminé, qui donne pour ψ_0, ψ_1, ψ_2 des valeurs finies. Mais alors dans les deux dernières on ne peut pas omettre les derniers termes, malgré qu'elles contiennent le facteur G, parce qu'ils prennent des valeurs finies et non nulles.

---

[1] M. le professeur Cisotti, dans une intéressante Note publiée dans les *Rendic. dell'Acc. dei Lincei*, 1914, p. 324, et suiv., trouve une équation différente qui représente une quintique. Dans une Note à la fin de ce Mémoire j'examinerai les raisons de cette divergence.

Ainsi des équations (8) nous pouvons déduire les valeurs de ψ_0, ψ_1, ψ_2, GK_3, GK_4, qui sont

$$\psi_0 = -H, \qquad \psi_1 = -\frac{2g}{H}, \qquad \psi_2 = \frac{4g^2}{H^3},$$

$$GK_3 = \frac{16g^3}{H^4}, \qquad GK_4 = -\frac{16g^4}{H^6}.$$

Quant à GK_0, GK_1, GK_2, il est confirmé qu'elles vont à zéro avec G, parce que, en vertu des équations (9), dont on prévoit la forme sans les écrire, K_0, K_1, K_2 sont finies.

En conclusion il suffit d'opérer sur les (8).

Pour déterminer H on a l'équation (6)

$$Kr^2 - H = 0,$$

où l'on pose $z = h$, $r = R$, et, par ce qui précède, il est permis de la multiplier pour G et de l'écrire

$$GK_h = \frac{GH}{R^2}.$$

Ici le deuxième membre va à zéro avec G, et il en suit

$$GK_3 h^3 + GK_4 h^4 = 0,$$

savoir

$$\frac{16g^3h^3}{H^4} - \frac{16g^4h^4}{H^6} = 0,$$

et, en supprimant les facteurs communs :

$$(22) \qquad 1 - \frac{gh}{H^2} = 0, \qquad H^2 = gh, \qquad H = \sqrt{gh}.$$

Nous voulons ici toucher à une manière d'envisager la détermination de H, qui ici pourra sembler banale, mais ne sera plus telle dans la deuxième approximation, où elle se généralise et devient nécessaire. Si nous posons

$$(30) \qquad \frac{gh}{H^2} = \alpha.$$

la (22) prend la forme

$$\alpha - 1 = 0.$$

une équation linéaire en α. Celle-ci résolue, la (30) détermine H.

Les déterminations du débit et du coefficient d'écoulement précèdent comme auparavant.

III. — Deuxième approximation.

22. Il est peut-être impropre d'appeler deuxième approximation ce qui suit. C'est un caractère essentiel d'une méthode d'approximations successives, qu'elle donne successivement des valeurs de plus en plus proches à une même valeur, qu'on présume être la vraie d'une grandeur qu'on veut connaître. La nouveauté, que j'apporte ici, c'est de prendre le polynome ψ du quatrième degré au lieu du deuxième. J'obtiens ainsi une valeur du coefficient d'écoulement presque coïncidant avec celle fournie par l'expérience. Mais pour suivre cette méthode par degrés encore plus élevés de ψ, pour s'assurer si elle est vraiment d'approximations successives, il faudrait faire des calculs tellement compliqués, que moi, conforté par la coïncidence susdite, j'y renonce.

Je n'étudierai pas ici le problème le plus général du gouffre, parce que les complications et les difficultés rencontrées seraient ici plus graves, et d'ailleurs j'en ai fait remarquer l'inutilité. Je traiterai le seul problème de l'écoulement à pleine bouche directement, en suivant le procédé indiqué au n° 21 pour la première approximation. Je supposerai que la phase transitoire est outrepassée.

Retenons encore les séries de Resal limitées aux termes d'index $n = 1$, c'est-à-dire limitons l'approximation de V_r, V_z jusqu'à r^2. Alors valent encore les (2), que nous transcrivons

$$(2)\qquad V_r = -\frac{1}{2}\frac{d\psi}{dz}r, \qquad V_z = \psi - \frac{1}{4}\frac{d^2\psi}{dz^2}r^2.$$

Mais nous prenons pour ψ un polynome du quatrième degré

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \psi_3 z^3 + \psi_4 z^4,$$

d'où

$$\frac{d\psi}{dz} = \psi_1 + 2\psi_2 z + 3\psi_3 z^2 + 4\psi_4 z^3,$$

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = 2\psi_2 + 6\psi_3 z + 12\psi_4 z^2.$$

et par cela

$$(34)\qquad \begin{cases} V_r = -\frac{1}{2}(\psi_1 + 2\psi_2 z + 3\psi_3 z^2 + 4\psi_4 z^3)r, \\ V_z = \psi - \frac{1}{2}(\psi_2 + 3\psi_3 z + 6\psi_4 z^2)r^2. \end{cases}$$

Pour la composante V_θ de la vitesse selon la tangente au parallèle nous entendons développer les considérations analogues à celles faites au n° 3, qui conduiront à la même conclusion, savoir

$$V_\theta = \frac{c}{r}, \qquad (c = \text{const.}).$$

23. *Lignes de flux.* — Partons des équations différentielles de ces lignes :

$$\frac{dr}{V_r} = \frac{dz}{V_z} = \frac{r^2 d\theta}{c}.$$

L'égalité des deux premiers membres peut s'écrire

$$V_z dr - V_r dz = 0. \tag{4}$$

En multipliant par r, nous l'écrivons

$$V_z r dr - V_r r dz = 0. \tag{4'}$$

Mais, contrairement à ce qui arrivait dans la première approximation, le premier membre de celle-ci n'est pas une différentielle exacte, c'est-à-dire r n'est pas un facteur intégrant de la (4). En effet on a, au n° 5,

$$\frac{\partial(V_z r)}{\partial z} + \frac{\partial(V_r r)}{\partial r} = -\frac{1}{2}\frac{d^3\psi}{dz^3} r^3,$$

mais dans ce cas-ci la dérivée troisième de ψ n'est pas nulle.

On peut néanmoins négliger cette valeur, parce qu'elle contient le facteur r^3 multiplié par un coefficient, qui n'est pas très grand. En faisant cela nous conduirons l'intégration de la (4′) par la même méthode suivie au n° 5, comme s'il y avait un facteur intégrant.

Regardons d'abord z comme une constante, et intégrons le coefficient de dr dans la (4′) par rapport à r, ce qui nous donne

$$\psi \frac{r^2}{2} - \frac{1}{16}\frac{d^2\psi}{dz^2} r^4 + \chi(z).$$

Puis, en dérivant cette expression par rapport à z, nous obtenons

$$\frac{d\psi}{dz}\frac{r^2}{2} - \frac{1}{16}\frac{d^3\psi}{dz^3} r^4 + \frac{d\chi}{dz}.$$

Égalons cette dernière au coefficient de dz dans la (4'), et il vient

$$-\frac{1}{16}\frac{d^3\psi}{dz^3}r^4+\frac{d\chi}{dz}=0.$$

$\frac{d\chi}{dz}$ prend donc une valeur, que nous négligeons, et nous retenons

$$\frac{d\chi}{dz}=0, \qquad \chi=\text{const}.$$

L'intégrale (approximée) de la (4') aura donc la même forme qu'auparavant

$$\psi r^2-C=0,$$

et pour la ligne supérieure

$$(35) \qquad \psi r^2-G=0.$$

Celle-ci ne diffère donc pas de la (5) que par le degré en z, qui est le quatrième au lieu du deuxième.

24. *Application de la méthode*. — L'équation de la ligne à pression ambiante est, comme au n° 6,

$$(36) \qquad (V_z^2+V_r^2-2gz)r^2+c^2=0.$$

En suivant la conception fondamentale exposée au n° 7, en développant la méthode qui en dérive, nous devons égaliser le premier membre de la (36) avec le produit de celui de la (35) pour celui de l'équation d'une courbe résiduale

$$(37) \qquad Kr^2-H=0,$$

où K est un polynome en z, auquel nous assignons le huitième dégré (le double de celui de ψ) :

$$K=K_0+K_1z+K_2z^2+K_3z^3+K_4z^4+K_5z^5+K_6z^6+K_7z^7+K_8z^8.$$

Nous avons donc

$$(38) \quad (V_z^2+V_r^2-2gz)r^2+c^2=\psi Kr^4-(\psi H+GK)r^2+GH=0.$$

L'égalité des termes indépendants de r nous donne

$$c^2=GH,$$

laquelle démontre que $G\neq 0$ caractérise le mouvement par gouffre et $G=0$ celui à pleine bouche.

Égalons dans la (38) les termes en r^2. On devrait remplacer V_z, V_r par leurs expressions (34). Mais on simplifie le calcul en remarquant que la parenthèse au premier membre est multiplié par r^2, et partant, en devant retenir les termes en r^2, il suffit de limiter V_z, V_r aux seuls termes indépendants de r, savoir, prendre

$$V_r = 0, \qquad V_z = \psi.$$

Ainsi le coefficient du terme en r^2 au premier membre est simplement $\psi^2 - 2gz$, et l'égalité des termes en r^2 donne

$$\psi^2 - 2gz + \psi H + GK = 0,$$

et en développant ψ,

$$\begin{aligned}\psi_0^2 &+ \psi_1^2 z^2 + \psi_2^2 z^4 + \psi_3^2 z^6 + \psi_4^2 z^8 + 2\psi_0\psi_1 z + 2\psi_0\psi_2 z^2 + 2\psi_0\psi_3 z^3 \\ &+ 2\psi_0\psi_4 z^4 + 2\psi_1\psi_2 z^3 + 2\psi_1\psi_3 z^4 + 2\psi_1\psi_4 z^5 + 2\psi_2\psi_3 z^5 + 2\psi_2\psi_4 z^6 \\ &+ 2\psi_3\psi_4 z^7 - 2gz + (\psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \psi_3 z^3 + \psi_4 z^4) H \\ &\qquad\qquad + (K_0 + K_1 z + \ldots + K_8 z^8) G = 0.\end{aligned}$$

En celle-ci nous devons égaler à zéro les cefficients des termes en z^0, z^1, ..., z^8, et nous obtenons les neuf équations

$$(39)\quad \left\{\begin{array}{ll} (z^0) & \psi_0^2 + \psi_0 H + GK_0 = 0, \\ (z^1) & 2\psi_0\psi_1 - 2g + \psi_1 H + GK_1 = 0, \\ (z^2) & \psi_1^2 + 2\psi_0\psi_2 + \psi_2 H + GK_2 = 0, \\ (z^3) & 2\psi_0\psi_3 + 2\psi_1\psi_2 + \psi_3 H + GK_3 = 0, \\ (z^4) & \psi_2^2 + 2\psi_0\psi_4 + 2\psi_1\psi_3 + \psi_4 H + GK_4 = 0, \\ (z^5) & 2\psi_1\psi_4 + 2\psi_2\psi_3 + GK_5 = 0, \\ (z^6) & \psi_3^2 + 2\psi_2\psi_4 + GK_6 = 0, \\ (z^7) & 2\psi_3\psi_4 + GK_4 = 0, \\ (z^8) & \psi_4^2 + GK_8 = 0. \end{array}\right.$$

En généralisant le procédé suivi au n° **21**, nous devons traiter diversement les cinq premières et les quatre dernières de ces équations. Des cinq premières, en y posant $G = 0$, nous avons un système déterminé entre les cinq inconnues ψ_0, ψ_1, ..., ψ_4, qui donnent pour ces grandeurs des valeurs finies. Il s'ensuit que les quatre dernières donnent pour GK_5, GK_6, GK_7, GK_8 des valeurs déterminées et finies, et que partant elles ne s'annulent pas avec G. Au contraire les produits GK_0, ..., GK_4 s'annulent avec G, et cela est confirmé par la forme des cinq équations obtenues en égalisant les coefficients des termes en r^4, où l'on néglige les puissances $z^5, \ldots, z^8$, parce que ces équations donnent pour $K_0, \ldots, K_4$ des valeurs déterminées et finies.

Les cinq premières équations (39) deviennent donc

$$(39') \quad \left\{ \begin{aligned} &\psi_0(\psi_0 + H) = 0, \\ &2\psi_0\psi_1 - 2g + \psi_1 H = 0, \\ &\psi_1^2 + 2\psi_0\psi_2 + \psi_2 H = 0, \\ &2\psi_0\psi_3 + 2\psi_1\psi_2 + \psi_3 H = 0, \\ &\psi_2^2 + 2\psi_0\psi_4 + 2\psi_1\psi_2 + \psi_4 H = 0. \end{aligned} \right.$$

Celles-ci peuvent être résolues par récurrence, quand on a résolu la première. Mais celle-ci a deux solutions : l'une, $\psi_0 = 0$, doit être repoussée pour une raison que nous dirons après; l'autre donne

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} &\psi_0 = -H, \qquad \psi_1 = -\frac{2g}{H}, \qquad \psi_2 = \frac{4g^2}{H^3}, \\ &\psi_3 = -16\frac{g^3}{H^5}, \qquad \psi_4 = 80\frac{g^4}{H^7}. \end{aligned} \right.$$

Avec ces valeurs nous pouvons déduire des ultérieures quatre équations $GK_5, \ldots, GK_8$, et nous obtenons

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} &GK_5 = 448\frac{g^5}{H^8}, \qquad GK_6 = -896\frac{g^6}{H^{10}}, \\ &GK_7 = 2560\frac{g^7}{H^{12}}, \qquad GK_8 = -6400\frac{g^8}{H^{14}}. \end{aligned} \right.$$

25. *Détermination de* H. — A ce but sert l'équation de la courbe résiduale

$$Kr^2 - H = 0.$$

Celle-ci peut être multipliée par G, parce que les produits $GK_5, \ldots, GK_8$ ne sont pas nuls. Et puisque GH s'annule avec G, on obtient

$$G(K_5 z^5 + K_6 z^6 + K_7 z^7 + K_8 z^8) = 0,$$

et en y remplaçant $GK_5, \ldots, GK_8$ par leurs valeurs (41), et en y faisant $z = h$,

$$448\frac{g^5 h^5}{H^8} - 896\frac{g^6 h^6}{H^{10}} + 2560\frac{g^7 h^7}{H^{12}} - 6400\frac{g^8 h^8}{H^{14}} = 0.$$

En y supprimant les facteurs communs non nuls, en remarquant que les facteurs numériques ont commun le maximum 64, celle-ci devient

$$7 - 14\frac{gh}{H^2} + 40\frac{g^2h^2}{H} - 100\frac{g^3h^3}{H^6} = 0.$$

Si maintenant nous posons (*cf.* le n° 21 en fin)

$$\frac{gh}{H^2} = \alpha, \tag{42}$$

nous obtenons l'équation cubique en α

$$100\alpha^3 - 40\alpha^2 + 14\alpha - 7 = 0, \tag{43}$$

qui détermine α, et puis la (42) détermine H.

26. Bien que tout ce qu'on a exposé jusqu'à présent suffise pour arriver au résultat final, qui est la formule pour le coefficient d'écoulement, néanmoins, pour être complet, nous voulons ici donner les équations, qu'on obtient en égalant dans la (38) les termes en r^4. Le lecteur pourra encore vérifier, d'après ces équations, que la solution $\psi_0 = 0$ est à repousser.

Pour faciliter le calcul, la remarque que voici est utile. Puisque dans le premier membre de la (36) la parenthèse est multipliée pour r^2, il suffit de retenir en elle les seuls termes en r^2, c'est-à-dire, en vertu des (2), prendre

$$V_r^2 + V_z^2 = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2 - \frac{1}{2}\psi\frac{d^2\psi}{dz^2}\right]r^2,$$

et les développer avec les valeurs de ψ et de ses dérivées. Cela fait, nous devons égaler les coefficients des mêmes puissances de z. Mais, puisqu'il s'agit de termes en r^4, par la raison déclarée au n° 8, nous pouvons négliger $z^5, \ldots, z^8$ en comparaison des puissances plus basses, et égaler les coefficients de $z^0, \ldots, z^4$ seulement. Ainsi nous obtenons les cinq équations

$$(44)\quad\left\{\begin{array}{ll}
(z^0) & \frac{1}{4}\psi_1^2 - \psi_0\psi_2 - \psi_0 K_0 = 0,\\
(z^1) & -3\psi_0\psi_3 - \psi_0 K_1 - \psi_1 K_0 = 0,\\
(z^2) & \psi_2^2 - \frac{3}{2}\psi_1\psi_3 - 6\psi_0\psi_4 - \psi_0 K_2 - \psi_1 K_1 - \psi_2 K_0 = 0,\\
(z^3) & -4\psi_1\psi_4 - \psi_2\psi_3 - \psi_0 K_3 - \psi_1 K_2 - \psi_2 K_1 - \psi_3 K_0 = 0,\\
(z^4) & \frac{9}{4}\psi_3^2 - 3\psi_2\psi_4 - \psi_0 K_4 - \psi_1 K_3 - \psi_2 K_2 - \psi_3 K_1 - \psi_4 K_0 = 0.
\end{array}\right.$$

Celles-ci se résolvent par récurrence pour les K_i, et donnent

$$K_0 = -5\frac{g^2}{H^3}, \qquad K_1 = 58\frac{g^3}{H^5}, \qquad K_2 = -584\frac{g^4}{H^7},$$
$$K_3 = 7760\frac{g^5}{H^9}, \qquad K_4 = -4832\frac{g^6}{H^{11}}.$$

Tant de celle-ci que des (44) on s'aperçoit que $GK_0, \ldots, GK_4$ sont nulles pour $G = 0$.

Nous constatons que les (39) avec les (39′) constituent un système de quatorze équations pour déterminer les quatorze inconnues $\psi_0, \ldots, \psi_4, K_0, \ldots, K_8$.

27. En revenant à la détermination de H, reprenons l'équation cubique (43). Sa racine utile approximée jusqu'à la quatrième décimale est

$$\alpha = 0.4426. \tag{45}$$

d'où il vient

$$\left\{\begin{aligned} \alpha^2 &= 0{,}1958, \\ \alpha^3 &= 0.0867, \\ \alpha^4 &= 0.0384, \\ \sqrt{\alpha} &= 0.6653. \end{aligned}\right. \tag{46}$$

Après cela, de la (42) on obtient

$$H = \frac{\sqrt{gh}}{\sqrt{\alpha}}.$$

Puis en introduisant cette valeur de H dans les (40), nous obtenons

$$\left\{\begin{aligned} \psi_0 &= -\frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha}\sqrt{gh}, \\ \psi_1 &= -\frac{2}{h}\sqrt{\alpha}\sqrt{gh}, \\ \psi_2 &= \frac{4}{h^2}\alpha\sqrt{\alpha}\sqrt{gh}, \\ \psi_3 &= -\frac{16}{h^3}\alpha^2\sqrt{\alpha}\sqrt{gh}, \\ \psi_4 &= \frac{80}{h^4}\alpha^3\sqrt{\alpha}\sqrt{gh}. \end{aligned}\right. \tag{47}$$

28. *La ligne de flux supérieure.* — Cette ligne, désormais à

vitesse nulle, a pour ordonnée sur l'axe une convenable racine de l'équation $\psi = 0$. Celle-ci, avec les substitutions (47) et la suppression des facteurs communs, devient

$$(48) \qquad -1 - 2\alpha\frac{z}{h} + 4\alpha^2\frac{z^2}{h^2} - 16\alpha^3\frac{z^3}{h^3} + 80\alpha^4\frac{z^4}{h^4} = 0,$$

et en posant

$$\alpha\frac{z}{h} = \beta.$$

$$(48') \qquad 80\beta^4 - 16\beta^3 + 4\beta^2 - 2\beta - 1 = 0.$$

La racine utile de cette équation approximée jusqu'à la quatrième décimale est

$$\beta = 0,4146,$$

d'où dérive

$$z = \frac{\beta}{\alpha}h = \frac{0,4146}{0,4426}h = 0,936\,h.$$

Donc la ligne en discours est située (sur l'axe) à presque $\frac{9}{10}$ de h sous la ligne de charge ou à presque $\frac{1}{10}$ sur le fond.

29. *Le débit et le coefficient d'écoulement.* — Le débit a l'expression, comme au n° **18**,

$$\mathfrak{Q} = \int_{\alpha}(V_z)_h\,d\omega.$$

Par la deuxième des (34) on a donc

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q} &= 2\pi\left[\psi_h\int_0^R r\,dr - \frac{1}{2}(\psi_2 + 3\psi_3 h + 6\psi_4 h^2)\int_0^R r^3\,dr\right]\\ &= \pi R^2\left[\psi_h - \frac{1}{8}(\psi_2 h^2 + 3\psi_3 h^3 + 6\psi_4 h^4)\frac{R^2}{h^2}\right].\end{aligned}$$

Or de l'expression de ψ_h et des (47) on déduit

$$\begin{aligned}(49') \qquad \psi_h &= \left(-\frac{1}{\alpha} - 2 + 4\alpha - 16\alpha^2 + 80\alpha^3\right)\sqrt{\alpha}\sqrt{gh}\\ &= \frac{1}{\alpha}(-1 - 2\alpha + 4\alpha^2 - 16\alpha^3 + 80\alpha^4)\sqrt{\alpha}\sqrt{gh}.\end{aligned}$$

Avec les valeurs (45), (46) de α et de ses puissances, et par un facile calcul numérique, on obtient

$$\psi_h = 0{,}876\sqrt{gh},$$

$$\frac{1}{8}(\psi_2 h^2 + 3\psi_3 h^3 + 6\psi_4 h^4) = \frac{1}{8}(4\alpha - 48\alpha^2 + 480\alpha^3)\sqrt{\alpha}\sqrt{gh} = 2{,}8265\sqrt{gh},$$

d'où

$$(49)\qquad \mathfrak{Q} = \left(0{,}876 - 2{,}8265\,\frac{R^2}{h^2}\right)\pi R^2\sqrt{gh},$$

qui donne $\mathfrak{Q}$. Puis on a

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\mathfrak{Q}}{\pi R^2\sqrt{gh}} = 0{,}707\left(0{,}876 - 2{,}8265\,\frac{R^2}{h^2}\right),$$

savoir

$$(50)\qquad \mu = 0{,}619 - 1{,}291\,\frac{R^2}{h^2}.$$

C'est celle-ci la formule, que je donne comme définitive pour le calcul du coefficient d'écoulement. Son terme principal, $\mu_0 = 0{,}619$, coïncide presque exactement avec la valeur 0,62, qu'on donne généralement comme valeur moyenne dans les traités de mécanique rationnelle.

30. Faisons des remarques analogues à celle du n° 19. La formule (50) donne $\mu = 0$ pour $h = 0{,}724$ diamètres. Nous commençons à accepter l'applicabilité de la formule à partir de $h = 3$ diamètres, et ainsi nous obtenons les valeurs suivantes de μ étendues jusqu'à la quatrième décimale par défaut ou par excès :

$h =$ 3 diam.	$\mu = 0{,}585$
4	0,598
5	0,600
6	0,610
7 à 9	0,615
10 à 12	0,616
13	0,617
14 à 22	0,618
$\geqq$ 23	0,619

Ces chiffres sont suffisamment approchants de ceux de l'expérience pour déposer en faveur de nos déductions théoriques.

31. *La forme da la veine fluante.* — Par les considérations faites au n° **18**, l'équation de la courbe méridienne de la veine dans la partie continue est

$$\psi r^2 = \psi_h R^2. \tag{51}$$

On y doit remplacer les développements de ψ et de ψ_h et les valeurs (47) des coefficients, d'où elle devient

$$\begin{aligned}(51')\qquad &\left(-1 - 2\frac{\alpha}{h}z + 4\frac{\alpha^2}{h^2}z^2 - 16\frac{\alpha^3}{h^3}z^3 + 80\frac{\alpha^4}{h^4}z^4\right)r^2 \\ &= (-1 - 2\alpha + 4\alpha^2 - 16\alpha^3 + 80\alpha^4)R^2,\end{aligned}$$

et multipliée par h^4

$$\begin{aligned}&(80\alpha^4 z^4 - 16\alpha^3 h z^3 + 4\alpha^2 h^2 z^2 - 2\alpha h^3 z - h^4)r^2 \\ &= (80\alpha^4 - 16\alpha^3 + 4\alpha^2 - 2\alpha - 1)R^2 h^4,\end{aligned}$$

qui représente une sextique. Ici les puissances de α ont les valeurs numériques (45), (46).

Cette courbe, comme toutes les autres de flux, a pour asymptotes les droites

$$r = 0, \qquad \psi = 0$$

(*cf.* n° **13**). La première est l'axe; la seconde est la tangente horizontale à la courbe, qui borne la partie mobile du liquide.

Enfin l'angle i, qui la tangente à cette courbe sur le bord fait avec l'axe, est déterminé par

$$\operatorname{tang} i = \left(\frac{dr}{dz}\right)_h.$$

L'équation de la courbe méridienne de la veine est

$$\psi r^2 = \psi_h R^2,$$

et en la dérivant complètement par rapport à z, puis y faisant $z = h$, $r = R$, il vient

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_h = -\frac{\left(\frac{d\psi}{dz}\right)_h R}{2\psi_h}.$$

Maintenant, en appliquant les (40), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dz} &= \psi_1 + 2\psi_2 z + 3\psi_3 z^2 + 4\psi_4 z^3 \\ &= -\frac{2g}{H} + \frac{8g^2}{H^3}z - \frac{3.16 g^3 z^2}{H^5} + 4.80\frac{g^4 z^3}{H^7}.\end{aligned}$$

et pour $z = h$,

$$\left(\frac{d\psi}{dz}\right)_h = -\frac{2g}{H} + \frac{8g^2h}{H^3} - \frac{48g^3h^2}{H^5} + \frac{320g^4h^3}{H^7}.$$

En multipliant et divisant par $\frac{H}{h}$,

$$\left(\frac{d\psi}{dz}\right)_h = \frac{H}{h}\left(-2\frac{gh}{H^2} + 8\frac{g^2h^2}{H^4} - 48\frac{g^3h^3}{H^6} + 320\frac{g^4h^4}{H^8}\right).$$

Alors, en faisant usage de la (42), on obtient

$$\left(\frac{d\psi}{dz}\right)_h = \sqrt{\frac{g}{h}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(-2\alpha + 8\alpha^2 - 48\alpha^3 + 320\alpha^4)$$

$$= \sqrt{\frac{g}{h}}\frac{8,8676}{0,6653} = 13,3854\frac{\sqrt{gh}}{h}.$$

On en déduit

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_h = -\frac{13,3854}{2\psi_h}\frac{\sqrt{gh}}{h}.$$

Mais

$$\psi_h = 0,876\sqrt{gh}, \qquad 2\psi_h = 1,772\sqrt{gh},$$

d'où

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_h = -\frac{13,3854}{1,772}\cdot\frac{R}{h},$$

et enfin

$$\operatorname{tang} i = -7,5538\frac{R}{h}.$$

En comparant cette formule avec la (29), on voit qu'avec le passage de la première à la deuxième approximation la surface extérieure de la veine sort de l'orifice beaucoup plus inclinée avec l'axe. Cela ne doit pas nous étonner, parce que dans la deuxième approximation, la région où arrive le mouvement en étant plus étroite, la ligne de flux passant par le bord est, en dedans du réservoir et à proximité de l'axe, plus proche de l'horizontalité.

NOTE.

M. le professeur Cisotti dans la Note surcitée (n° 18) trouve pour la courbe méridienne de la veine l'équation

$$z = \frac{c^2}{2g}\left(\frac{R^4}{r^4} - 1\right),$$

où les z, positives quand elles sont dirigées en bas, sont comptées à partir du mouvement de l'orifice, et c désigne la vitesse moyenne sur celui-ci. La courbe serait donc un quintique. En comptant, comme je fais, les z à partir du plan de charge, on doit remplacer $z + h$ à z, et l'équation devient

$$z + h = \frac{c^2}{2g}\left(\frac{R^4}{r^4} - 1\right).$$

Mon résultat est différent de celui-ci (nº 20). La raison de la divergence réside en cela, que M. Cisotti, ne considérant pas le mouvement au dedans du réservoir, fait usage de la condition que la surface extérieure de la veine soit à pression constante (ambiante). Et en vérité le fait, que dans le premier trait après l'issue la veine est continue, conduirait à s'appuyer sur cette condition. Mais, au contraire, je parviens au résultat (nº 17) qu'en dedans de la veine, et partant aussi sur son profil, la pression est plus petite que l'ambiante, et l'on s'explique la continuité du premier trait de la veine par l'adhérence transitoire des filets de flux un peu avant que l'air commence à s'introduire.

En défense de ma manière de voir je constate que le professeur Cisotti lui-même dans une remarque à la fin de sa Note dit : « Il est bien manifeste que dans les cas pratiques ces conclusions ne sont pas applicables, que jusqu'à ce que le mouvement de la veine devienne discontinu. » Mais des déductions théoriques de M. Cisotti il ne s'ensuit aucune raison, pour laquelle à un certain point il doit arriver une discontinuité dans le mouvement, tandis que cette raison existe bien si, selon mon résultat, la pression en dedans de la veine est plus petite que l'ambiante.