BULLETIN DE LA S. M. F.

R. WAVRE

Figures planétaires

Bulletin de la S. M. F., tome 57 (1929), p. 222-250
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1929__57__222_0>

FIGURES PLANÉTAIRES ET PROBLÈME DE POINCARÉ;

PAR M. ROLIN WAVRE.

1. *Introduction.* — Nous voudrions attirer l'attention des mathématiciens sur un problème un peu délaissé de nos jours, parce que relatif au champ de Newton, celui des figures d'équilibre d'une masse fluide hétérogène. Il conserve tout son intérêt physique puisque, dans le cas de la Terre, les corrections d'Einstein seraient très faibles, et il garde avant tout son aspect captivant au point de vue mathématique.

Nous exposerons ici, sous une forme très concise (¹), une méthode, qui satisfait à un desideratum formulé par Tisserand, et qui fournit le fil conducteur permettant de sérier les résultats classiques et d'en obtenir d'autres.

En particulier, ce procédé supprime le désaccord bien connu signalé par Poincaré (²) entre la géodésie et la théorie de la précession. L'illustre savant n'avait critiqué que la première approximation. La seconde réduit l'écart considérablement.

2. *Les rotations permanentes.* — Envisageons une masse fluide dont les particules s'attirent suivant la loi de Newton. Supposons ce corps isolé. Quant au mouvement, nous ferons l'hypothèse que chaque particule du fluide décrit une circonférence perpendiculaire à un axe Oz et centrée sur cet axe.

La vitesse de la particule sur la circonférence sera constante. Mais la vitesse angulaire pourra varier quand on passe d'un parallèle à un autre. Si l désigne le rayon du parallèle, la vitesse angulaire ω dépendra de l et de z

$$\omega = \omega(l, z).$$

Nous appellerons ces mouvements des rotations permanentes. L'équilibre relatif, $\omega = \text{const.}$, est un cas particulier.

(¹) Pour le détail, voir *Archives des Sciences physiques et naturelles*, t. 10, 1928, et t. 11, 1929, Genève.

(²) *Figures d'équilibre*, p. 92-96.

L'observation nous apprend que le Soleil, Saturne et Jupiter n'ont pas encore atteint l'état d'équilibre relatif, ces astres sont animés de rotations permanentes.

Si Ox et Oy forment avec Oz un trièdre trirectangle, si ρ désigne la densité, p la pression et U le potentiel newtonien, les équations du mouvement s'écrivent

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial x} - x'', \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y} - y'', \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial z} - z''. \end{aligned}\right.$$

Les accélérations s'expriment au moyen de la vitesse angulaire et le système (1) devient

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial x} + \omega^2 x, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \omega^2 y, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Les seconds membres représentent les composantes g_x, g_y, g_z de la pesanteur et les équations (2) impliquent la relation

$$\frac{1}{\rho}\,dp = g_x\,dx + g_y\,dy + g_z\,dz.$$

De cette dernière expression on déduit facilement l'équivalence des six propriétés suivantes :

1° Il existe un potentiel Φ du champ de la pesanteur;
2° Il existe un potentiel Q de la force centrifuge;
3° Il existe un potentiel A des accélérations;
4° La vitesse angulaire ne dépend que de la distance à l'axe;
5° Les couches d'égale densité sont normales à la pesanteur;
6° La densité n'est fonction que de la pression.

Chacune de ces propositions entraîne les autres.

J'appellerai mouvement du premier genre, les rotations permanentes pour lesquelles elles sont vraies. M. Dive (1) a montré, par un

(1) *Archives des Sciences physiques et naturelles*, t. 9, 1927, p. 264-279, Genève.

artifice fort habile, qu'il existe des rotations permanentes plus générales. Le potentiel de la pesanteur n'existe pas pour les mouvements de M. Dive, ou de genre deux.

Les mouvements de genre un sont caractérisés par les équations équivalentes

$$\frac{\partial\omega}{\partial z} = 0, \qquad \rho = f(p).$$

Il n'y a pas lieu d'introduire l'équation de continuité et l'équation caractéristique n'est pas donnée à l'avance.

Si le fluide se compose d'un nombre fini de fluides compressibles, le mouvement est de genre un.

Les potentiels de la pesanteur et de la force centrifuge s'écrivent

$$(3) \qquad \Phi = \int \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\,d\rho,$$

$$(4) \qquad Q = \frac{1}{2}\int \omega^2(l)\,dl^2,$$

et les équations (2) se résument entre la relation entre les potentiels

$$(5) \qquad \Phi = U + Q.$$

Le potentiel Φ ne dépend que de ρ. Les surfaces équipotentielles $\Phi =$ const. seront dites surfaces de niveau.

Elles sont définies à l'extérieur de l'astre par l'équation (5), à l'intérieur elles coïncident avec les surfaces d'égale densité et d'égale pression.

Nous appellerons stratification la répartition des surfaces de niveau envisagées au point de vue strictement géométrique.

Nous supposerons, et c'est le cas des planètes, ces surfaces de connexion sphérique et emboîtées les unes dans les autres de telle sorte que la densité ne décroisse jamais de la surface vers l'intérieur.

En plus nous supposerons qu'elles se réduisent à un seul point, le centre de l'astre, quand la densité tend vers son maximum.

Nous supposons que la densité ρ est continue et admet des dérivées partielles continues. Nous admettons aussi la continuité de la dérivée $\frac{d\omega}{dl}$. Alors la fonction Φ est régulière, c'est-à-dire continue ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres et les surfaces de niveau sont régulières, elles admettent un plan tangent qui varie d'une manière continue.

En vertu d'un théorème très remarquable de M. Lichtenstein [1] la stratification admet un même plan de symétrie droite, perpendiculaire à l'axe, c'est le plan équatorial.

Ceci dit, l'équation (5), qui s'écrit plus explicitement

$$\Phi(\rho) = U + Q, \tag{6}$$

représente la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait rotation permanente de genre un.

3. *Le desideratum formulé par Tisserand.* — Certains auteurs, Laplace notamment, développent l'inverse de la distance r en polynomes de Legendre X_q pour le calcul du potentiel newtonien.

Si P représente le point potentié, P′ le point potentiant, O l'origine et γ l'angle POP′, on peut écrire

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\overline{OP}} \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} \right)^q X_q(\cos\gamma) \qquad \text{pour} \quad \overline{OP'} < \overline{OP},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\overline{OP'}} \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\frac{\overline{OP}}{\overline{OP'}} \right)^q X_q(\cos\gamma) \qquad \text{pour} \quad \overline{OP} < \overline{OP'}.$$

Ces développements divergent si les inégalités sont renversées. Il n'est pas possible de n'employer qu'une seule de ces séries pour calculer le potentiel U en un point P à l'intérieur de la masse. Il faudrait diviser cette dernière en deux parties par une sphère de rayon $\overline{OP}$, employer la première série à l'intérieur et la seconde à l'extérieur. Mais cette sphère n'est pas d'égale densité et cette méthode, conduite avec rigueur, se heurterait à d'énormes difficultés.

Certes, on pourrait légitimer, dans certains cas, l'emploi du développement divergent. Poisson a émis d'intéressantes suggestions à cet égard. On pourrait peut-être remplacer la sphère en question par une surface de niveau, pourvu que l'aplatissement soit faible.

Mais il est préférable de satisfaire au desideratum de Tisserand qui demandait que ces difficultés fussent définitivement vaincues.

---

[1] *Mathematische Zeitschrift*, B. 28, H. 4, 1928, p. 635-640.

Pour répondre à ce vœu, nous creuserons une cavité variable à l'intérieur de l'astre limitée par une surface de niveau. Nous remplacerons la matière enlevée par une couche étalée sur la frontière.

Le point potentié, grâce à une propriété d'analyticité, pourra dès ce moment être placé aussi près que l'on voudra de l'origine et le premier développement ci-dessus pourra être employé en toute sécurité.

4. *Usage d'une identité de Green.* — Si φ et ψ représentent deux fonctions régulières dans un volume V limité par une ou plusieurs surfaces fermées S, une identité bien connue de Green permet d'écrire

$$\int(\varphi\Delta\psi-\psi\Delta\varphi)\,dV+\int\left(\varphi\frac{d\psi}{dn}-\psi\frac{d\varphi}{dn}\right)dS=0.$$

Les dérivées normales sont prises de S vers V. Soient, maintenant, S une surface de niveau et Φ le potentiel de la pesanteur.

L'usage précautionneux de l'identité de Green permet d'écrire

$$(7)\qquad \int\frac{1}{r}\Delta\Phi\,dV+\int\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}dS=\begin{cases}4\pi(\Phi_S-\Phi_P) & \mathfrak{J},\\ 0 & \mathrm{E}.\end{cases}$$

Le symbole Φ_S représente la valeur de Φ sur S, Φ_P indique que Φ doit être pris au point potentié P et enfin les lettres $\mathfrak{J}$ et E, qui suivent une formule, indiquent que la relation exprimée est vraie quand le point P est à l'extérieur E de S, ou à l'intérieur $\mathfrak{J}$.

Si la surface S est extérieure à l'astre la fonction Φ n'est plus régulière sur la surface libre S_1 de l'astre. Mais l'identité de Green s'étend à ces cas-là et les relations (7) n'en sont pas moins valables.

5. *La transformation fondamentale.* — L'équation (5) entre les potentiels donne en vertu de l'équation de Poisson

$$(8)\qquad \Delta\Phi=-4\pi i\rho+\Delta Q,$$

i étant la constante de l'attraction universelle. Portons, alors, la valeur de ρ extraite de (8) dans l'expression du potentiel newtonien

$$(9)\qquad \mathrm{U}=i\int\frac{1}{r}\rho\,dV.$$

Cette dernière se sépare en deux parties bien distinctes :

$$U = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\,\Delta Q\, dV - \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\,\Delta \Phi\, dV. \tag{10}$$

Remplaçons la seconde intégrale par sa valeur extraite de (7). On trouve facilement

$$U_P = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\,\Delta Q\, dV + \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\,\frac{d\Phi}{dn}\, dS + \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_P - \Phi_S & \mathcal{I}, \\ 0 & \mathrm{E}. \end{array} \right. \tag{11}$$

Puis remplaçons U_P par sa valeur $\Phi_P - Q_P$ extraite de (5). L'équation obtenue s'écrit

$$0 = \int \frac{1}{r}\,\frac{d\Phi}{dn}\, dS + \int \frac{1}{r}\,\Delta Q\, dV + 4\pi Q_P - 4\pi \times \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_S & \mathcal{I}, \\ \Phi_P & \mathrm{E}. \end{array} \right. \tag{12}$$

Dans ces relations, S représente la surface libre S_1 et V le volume total V_1 de la planète. M. Jeans [1] a déjà indiqué une transformation de ce genre.

Décomposons, maintenant, le volume total par une surface de niveau quelconque S. Soient C la cavité intérieure à S, et Z la zone comprise entre S et la surface libre S_1. Si S est extérieure à l'astre, la zone devient soustractive, la densité y est d'ailleurs nulle.

Le potentiel U s'écrit

$$U = i\int \frac{1}{r}\,\rho\, dC + i\int \frac{1}{r}\,\rho\, dZ. \tag{13}$$

Faisons subir à la première intégrale seulement la transformation précédente. On obtient au lieu de (10)

$$U = i\int \frac{1}{r}\,\rho\, dZ + \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\,\Delta Q\, dC - \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\,\Delta \Phi\, dC, \tag{10'}$$

et au lieu de (12)

$$0 = i\int \frac{1}{r}\,\rho\, dZ + \int \frac{1}{r}\,\frac{d\Phi}{dn}\, dS + \int \frac{1}{r}\,\Delta Q\, dC + 4\pi Q_P - 4\pi \times \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_S, & \mathcal{I}. \\ \Phi_P & \mathrm{E}. \end{array} \right. \tag{12'}$$

6. *Une condition nécessaire et suffisante.* — Reprenons la relation précédente pour l'intérieur C de S

$$0 = i\int \frac{1}{r}\,\rho\, dZ + \int \frac{1}{r}\,\frac{d\Phi}{dn}\, dS + \int \frac{1}{r}\,\Delta Q\, dC + 4\pi (Q_P - \Phi_S) \qquad \mathrm{C}. \tag{14}$$

---

(1) *Astronomy and Cosmogony*, 1929, p. 247.

La vitesse angulaire $\omega(l)$ sera supposée donnée et l'équation (14) devra être satisfaite par deux fonctions ρ et Φ, la première dérivable, la seconde régulière et toutes deux constantes sur les surfaces inconnues S. Il s'agit de déterminer à la fois ρ, Φ et les S.

C'est une équation fonctionnelle d'un genre nouveau.

Je dis que l'équation (14) représente la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait rotation du premier genre.

La condition est nécessaire, puisque l'équation (14) est une conséquence de l'équation (6), et de celle-là seulement.

La condition est suffisante. En effet, en vertu de l'identité (7) prise pour I, c'est-à-dire C, la formule (14) s'écrit

$$o = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}(\Delta Q - \Delta\Phi)\,dC + i\int \frac{1}{r}\rho\,dZ + Q_P - \Phi_P \qquad C.$$

Considérons une nouvelle surface de niveau S', et soient C' et Z' la cavité et la zone correspondantes. On aura

$$o = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}(\Delta Q - \Delta\Phi)\,dC' + i\int \frac{1}{r}\rho\,dZ' + Q_P - \Phi_P \qquad C'.$$

Soustrayons membre à membre les deux équations précédentes. On trouve, Z'' étant la zone comprise entre S et S', et C'' la partie commune à C et C',

$$(15) \qquad o = \int \frac{1}{r}(\Delta Q - \Delta\Phi - 4\pi i\rho)\,dZ'' \qquad C''.$$

Le potentiel créé par la densité indiquée par la parenthèse est donc nul dans C''. A la limite, quand S' tend vers S, c'est un potentiel de simple couche, nul à l'intérieur de la couche; c'est encore une charge électrique en équilibre à la surface d'un conducteur. Le potentiel étant nul, la charge est nulle partout. On a donc

$$\Delta\Phi = -4\pi i\rho + \Delta Q,$$

dans l'astre entier. Alors, la relation (10') donne

$$o = i\int \frac{1}{r}\rho\,dC + i\int \frac{1}{r}\rho\,dZ + Q_P - \Phi_P,$$

dans la masse entière. Mais cette dernière équation s'écrit

$$\Phi(\rho) = U + Q.$$

Il y a bien rotation de genre un. C. Q. F. D.

7. *Un caractère d'analyticité.* — L'artifice précédent revient à supprimer la matière intérieure à la cavité et à la remplacer par une couche étalée sur la frontière et de densité égale à la pesanteur :

$$g = \frac{d\Phi}{dn}. \tag{17}$$

L'équation (14) s'écrit encore :

$$i\int \frac{1}{r}\rho\, dZ + \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r} g\, dS + \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\Delta Q\, dC + Q_P - \Phi_S = 0, \qquad C. \tag{18}$$

Le premier membre est une fonction harmonique du point P dans la cavité. C'est donc une fonction analytique. Pour satisfaire à (17) il suffira d'annuler le premier membre au voisinage de l'origine.

Décomposons C en une sphère C′ de même pôle que S et une marge C″; l'équation (18) s'écrira :

$$\begin{aligned} i\int \frac{1}{r}\rho\, dZ + \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r} g\, dS + \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\Delta Q\, dC'' - \Phi_S \\ = -Q_P - \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\Delta Q\, dC'. \end{aligned} \tag{19}$$

Le second membre est connu. Aucune des intégrales du premier membre ne porte sur le voisinage de l'origine. On peut donc développer l'inverse de la distance suivant les puissances de la distance $\tau = \overline{OP}$ du point potentié à l'origine

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\frac{\tau}{R}\right)^q X_q(\cos\gamma). \tag{20}$$

Le rayon vecteur R du point potentiant qui décrit Z, S, C″ est pour chaque surface S supérieur à un nombre positif et l'on peut supposer que l'on ait

$$\frac{\tau}{R} < \frac{1}{2}.$$

Le développement (20) est absolument et uniformément convergent. On peut l'employer en toute sécurité. Le desideratum de Tisserand est ainsi satisfait.

8. *Figures d'équilibre et système fondamental.* — Supposons

pour simplifier que la vitesse angulaire soit constante; c'est le cas des figures d'équilibre. Transportons le développement (20) de $\frac{1}{r}$ dans le premier membre de (19); quant au second il se calcule sans peine. Il faudra donc identifier les coefficients de toutes les puissances de τ dans les deux membres. On obtient, ainsi, tout d'abord, l étant le rayon polaire de la surface S et θ la colatitude géocentrique :

$$(21)\qquad \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r} g\, dS + i\int \frac{1}{r}\rho\, dZ + \frac{\omega^2}{2\pi}\int \frac{1}{r}\, dC'' = \Phi_S - \omega^2 l^2 + \tau^2\frac{\omega^2}{3} X_2(\cos\theta).$$

Il est plus commode de faire passer Φ_S dans le second membre. L'identification donne ensuite :

$$(22)\qquad \frac{1}{4\pi}\int X_q \frac{g}{R^{q+1}}\, dS + i\int X_q \frac{\rho}{R^{q+1}}\, dZ + \frac{\omega^2}{2\pi}\int X_q \frac{1}{R^{q+1}}\, dC''$$
$$\begin{aligned} &= \Phi_S - \omega^2 l^2 && \text{si } q = 0, \\ &= \frac{\omega^2}{3} X_2(\cos\theta) && \text{si } q = 2, \\ &= 0 && \text{si } q = 1, 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}$$

Ce système exprime lui aussi la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre relatif.

9. *Introduction de la masse totale.* — Intégrons l'équation de Poisson pour la pesanteur

$$\Delta\Phi = -4\pi i\rho + \Delta Q,$$

dans l'astre entier on trouve facilement la relation

$$(23)\qquad \int g\, dS = +4\pi i M - \int \Delta Q\, dV,$$

M est la masse totale du fluide. Si ω est constant, $\Delta Q = 2\omega^2$ et l'équation (23) donne l'équation de Poincaré, pour l'équilibre relatif.

En subdivisant V en une cavité C et une zone Z on trouverait

$$(24)\qquad \frac{1}{4\pi}\int g\, dS + i\int \rho\, dZ + \frac{1}{4\pi}\int \Delta Q\, dC = iM.$$

cette équation donne, dans le cas des figures d'équilibre, l'équation de Poincaré transformée

$$(25) \qquad \frac{1}{4\pi}\int g\,dS + i\int \rho\,dZ + \frac{\omega^2}{2\pi}\int dC'' = iM - \frac{2}{3}\omega^2 t^3.$$

Cette relation s'incorpore à notre système (22), elle correspond à $q = -1$, à condition de faire $X_{-1} = 1$. Le système s'écrit :

$$(26) \qquad \frac{1}{4\pi}\int X_q \frac{g}{R^{q+1}}\,dS + i\int X_q \frac{\rho}{R^{q+1}}\,dZ + \frac{\omega^2}{2\pi}\int X_q \frac{dC''}{R^{q+1}}$$

$$\begin{aligned} &= iM - \frac{2}{3}\omega^3 t^2 && \text{si } q = -1,\\ &= \Phi_S - \omega^2 t^2 && \text{si } q = 0,\\ &= \frac{\omega^2}{3} X_2(\cos\theta) && \text{si } q = 3,\\ &= 0 && \text{si } q = 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots. \end{aligned}$$

Pendant que nous en sommes là, donnons l'extension du théorème de Stokes au mouvement de genre un.

10. ***Le théorème de Stokes.*** — Reproduisons les équations (11), (12) et (23) relatives au volume total et à la surface libre :

$$(27) \qquad U = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r} g\,dS + \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\Delta Q\,dV,$$

$$(28) \qquad \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r} g\,dS = \Phi_S - Q_P - \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\Delta Q\,dV,$$

$$(29) \qquad \frac{1}{4\pi}\int g\,dS = iM - \frac{1}{4\pi}\int \Delta Q\,dV.$$

Supposons connues la masse totale M, la surface libre S_1 et la vitesse angulaire $\omega(l)$. Ces éléments seront dits stokiens. La couche de densité g étalée sur S crée un potentiel dans $\mathcal{J}$ qui est défini par le second membre de (28) et connu à la constante Φ_S près.

S'il existait deux couches différentes g' et g'' une soustraction donnerait

$$(30) \qquad \int \frac{1}{r}(g' - g'')\,dS = \Phi'_S - \Phi''_S.$$

Mais l'équation (29), dont le second membre est entièrement connu, donnerait

$$(31) \qquad \int (g' - g'')\,dS = 0.$$

La charge électrique $g' - g''$ créerait un potentiel constant. Elle devrait avoir partout le même signe. Mais, alors, l'équation (31) prouverait que g' est identique à g''. Les éléments stokiens déterminent entièrement g sur S. La formule (27) définit ensuite U à l'extérieur de l'astre à partir des mêmes éléments.

Le potentiel newtonien à l'extérieur de l'astre ne dépend que de la masse totale, de la vitesse angulaire et de la surface libre,

$$U = F\,|\,M,\ \omega(l),\ S_1\,|, \qquad E.$$

Stokes avait omis la masse totale, c'est Poincaré qui l'a introduite.

Le potentiel de la pesanteur Φ est, en vertu de la relation fondamentale,

$$\Phi = U + Q,$$

entièrement déterminé par les éléments stokiens. Ces potentiels U et Φ sont donc invariants à l'extérieur de l'astre pour toutes les répartitions de la matière qui laissent inaltérées les éléments stokiens M, $\omega(l)$, S_1. Dans la suite nous appellerons constante stokienne une constante dont la valeur est entièrement déterminée par ces éléments.

11. *Quelques données géométriques.* — Le rayon polaire t d'une surface de niveau S sera le paramètre servant à distinguer ces surfaces les unes des autres. Si θ désigne comme précédemment le complément de la latitude géocentrique et ψ la longitude d'un point de S, le rayon vecteur de ce point sera

$$R(t,\ \theta,\ \psi),$$

l'angle V, que fait le rayon vecteur prolongé avec la normale à S dirigée vers l'extérieur, sera donné par la relation

$$\sec^2 V = 1 + \left(\frac{\frac{\partial R}{\partial \theta}}{R}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\frac{\partial R}{\partial \psi}}{R}\right)^2$$

Soit, maintenant, dn un élément de normale à S dirigé vers l'extérieur. La pesanteur est comptée positivement vers l'intérieur, aussi faut-il écrire

$$g = -\frac{d\Phi}{dn}.$$

Or, Φ ne dépend que de S, c'est-à-dire de t, et la pesanteur s'écrit

$$g = -\frac{d\Phi}{dt}\frac{dt}{dn}.$$

Le segment de normale dn donne lieu à la relation

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t}\cos V.$$

Si $d\Omega$ est un angle solide élémentaire, les éléments de surface et de volume sont :

$$dS = R^2\frac{1}{\cos V}\,d\Omega, \qquad d\mathcal{L} = R^2\frac{\partial R}{\partial t}\,dt\,dn.$$

Le cosinus de l'angle V n'intervient dans le système (26) que par son carré et dans le terme

$$g\,dS = -\frac{d\Phi}{dt}R^2\frac{1}{\dfrac{\partial R}{\partial t}\cos^2 V}\,d\Omega.$$

12. *Transformation du système.* — Le système (26) s'écrit, avec les expressions du paragraphe précédent :

$$(32)\quad -\frac{1}{4\pi}\frac{d\Phi}{dt}\int X_q R^{1-q}\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)^{-1}\left[1+\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial R}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{R^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial R}{\partial \psi}\right)^2\right]d\Omega$$

$$+\,i\int X_q\,d\Omega\int_t^{t_1}\rho R^{1-q}\frac{\partial R}{\partial t}\,dt+\frac{\omega^2}{2\pi}\int X_q\,d\Omega\int_t^{R} R^{1-q}\frac{\partial R}{\partial t}\,dt$$

$$\begin{aligned}
&= iM-\frac{2}{3}\omega^2 t^3 && \text{si } q=-1,\\
&= \Phi(t)-\omega^2 t^2 && \text{si } q=0,\\
&= \frac{\omega^2}{3}X_2(\cos\theta) && \text{si } q=2,\\
&= 0 && \text{si } q=1,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots.
\end{aligned}$$

Enfin, on pourrait mettre en évidence la déformation e, différence entre le rayon vecteur et le rayon polaire, rapportée à ce dernier

$$R = t(1+e)$$

et ordonner les fonctions sous les signes d'intégration du système (32) suivant les puissances des variables

$$e,\quad \frac{\partial e}{\partial t},\quad \frac{\partial e}{\partial \theta},\quad \frac{\partial e}{\partial \psi}.$$

13. *Le principe des approximations.* — Nous supposerons à partir d'ici la vitesse angulaire petite ainsi que la déformation e. C'est le cas du Soleil et des planètes. Posons

$$\Phi = \Phi^{(0)} + \omega^2\Phi^{(1)} + \omega^4\Phi^{(2)} + \ldots,$$
$$e = 0 + \omega^2 e^{(1)} + \omega^4 e^{(2)} + \ldots.$$

Le théorème de Lichtenstein permet d'affirmer qu'il n'y a que les sphères concentriques qui répondent au repos absolu $\omega = 0$, puisque tout plan passant par le centre devient plan de symétrie, aussi pouvons-nous supposer $e^{(0)} = 0$. En remplaçant Φ et e par ces développements dans le système (32) exprimé en e, on pourra identifier en ω, t, θ et ψ les équations obtenues.

L'identification des termes indépendants de ω donnera évidemment les sphères concentriques;

L'identification des termes en ω^2 fournit un système qui domine la théorie classique;

L'identification des termes en ω^4 donnera la seconde approximation;

L'identification des termes en ω^6, ω^8, ... donnerait les approximations suivantes sans difficulté théorique.

Nous verrons que les équations relatives à $q = 1, 2, 3, 4, \ldots$ déterminent la stratification. Après quoi, les équations relatives à $q = 0$ et $q = -1$ donnent Φ et $\frac{d\Phi}{dt}$ séparément. En guise de vérification, on pourra constater après coup que la seconde de ces expressions est bien la dérivée de la première. Ce principe est utile car les calculs sont assez longs. Mais il convient de rappeler que l'équation relative à $q = -1$, la première du système (32), ne figurait pas dans la condition nécessaire et suffisante d'équilibre relatif.

On peut déterminer Φ par l'équation différentielle du premier ordre relative à $q = 0$. Ensuite la constante d'intégration restera arbitraire et joue le même rôle que la masse totale qui figure dans l'équation de Poincaré transformée.

14. *Les fonctions sphériques.* — Soit $Y_n(t, \theta, \psi)$ une fonction sphérique d'ordre n dépendant d'un paramètre t. Soit, enfin, γ l'angle des deux directions θ, ψ et θ', ψ'. On sait qu'une fonction

$e(t, \theta, \psi)$ continue sur la sphère unité est développable en série de fonctions sphériques

$$e(t, \theta, \psi) = \sum_{n=0}^{+\infty} Y_n(t, \theta, \psi).$$

On a d'ailleurs

$$Y_n(t, \theta, \psi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int e(t, \theta', \psi') X_n(\cos\gamma)\, d\Omega.$$

Si l'on a le droit à dériver sous le signe somme par rapport au paramètre t; si, notamment, la fonction e ainsi que sa dérivée partielle $\frac{\partial e}{\partial t}$ sont continues en t, θ et ψ, on a évidemment

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial Y_n(t, \theta, \psi)}{\partial t},$$

ces conditions sont remplies dans le problème des figures d'équilibre voisines des sphères.

Enfin, on sait qu'une fonction sphérique d'ordre n est une forme linéaire des fonctions sphériques fondamentales et peut s'écrire

$$Y_n(t, \theta, \psi) = e_n X_n(\cos\theta) + \sum_{p=1}^{n} e_{n,p} X_{n,p}(\cos\theta) \cos p\psi + \sum_{p=1}^{n} e_{n,-p} X_{n,-p}(\cos\theta) \sin p\psi.$$

Les coefficients du développement e_n, $e_{n,p}$, $e_{n,-p}$ seront ici fonction du paramètre t.

Remarquons enfin que l'unité est orthogonale à X_1, X_2, X_3, ..., parce que égale, ainsi que X_{-1}, à X_0.

15. *L'approximation d'ordre zéro.* — Identifions les termes indépendants de ω dans le système (32). Il ne subsiste que deux équations relatives à $q = -1$ et $q = 0$, à cause des relations d'orthogonalité mentionnées ci-dessus. Ce sont :

$$-t^2 \frac{d\Phi^{(0)}}{dt} = iM - 4\pi i \int_t^1 \rho t^2 dt, \tag{33}$$

$$\Phi^{(0)} + t \frac{d\Phi^{(0)}}{dt} = 4\pi i \int_t^1 \rho t dt. \tag{34}$$

La déformation e est nulle, la stratification est sphérique et la pesanteur s'écrit en exprimant M au moyen de ρ :

$$g^{(0)} = -\frac{d\Phi^{(0)}}{dt} = 4\pi i t^{-2} \int_0^t \rho t^2 dt.$$

Si D désigne la densité moyenne de la matière intérieure à la sphère t, on a

$$g^{(0)} = -\frac{d\Phi^{(0)}}{dt} = \frac{4}{3}\pi i t \mathrm{D}, \tag{35}$$

expression de la dérivée de $\Phi^{(0)}$ que nous utiliserons plus tard.

16. *L'approximation d'ordre un.* — L'identification des termes en ω^2 du système (32) donne

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{d\Phi^{(0)}}{dt} t^{1-q} \int \mathrm{E}(e^{(1)}) \mathrm{X}_q d\Omega - i\int_t^1 \rho t^{1-q} dt \int \mathrm{F}(e^{(1)}) \mathrm{X}_q d\Omega \tag{36}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{3} t^3 - t^2 \frac{d\Phi^{(1)}}{dt} && \text{si } q = -1, \\ &= t^2 - t\frac{d\Phi^{(1)}}{dt} - \Phi^{(1)} && \text{si } q = 0, \\ &= -\frac{1}{3}\mathrm{X}_2(\cos\theta) && \text{si } q = 2, \\ &= 0 && \text{si } q = 1, 3, 4, 5, \ldots. \end{aligned}$$

Les fonctions $\mathrm{E}(e)$ et $\mathrm{F}(e)$ sont linéaires en e et $\frac{\partial e}{\partial t}$:

$$\mathrm{E}(e) = qe + t\frac{\partial e}{\partial t}, \qquad \mathrm{F}(e) = (2-q)e + t\frac{\partial e}{\partial t}.$$

En vertu des propriétés signalées au paragraphe **14** le système (36) ne fait intervenir que les coefficients $e_q(t)$, $e_{q,p}$, $e_{q,-p}(t)$ et il s'écrit, débarrassé des intégrales sphériques,

$$\frac{d\Phi^{(0)}}{dt} t^{1-q}\left(qe + t\frac{de}{dt}\right) + 4\pi i \int_t^1 \rho t^{1-q}\left[(2-q)e + t\frac{de}{dt}\right] dt \tag{37}$$

$$= |2q+1| \times \begin{cases} -\frac{2}{3}t^3 + t^2\frac{d\Phi^{(1)}}{dt} & \text{si } q = -1 \quad \text{et} \quad e = e_0^{(1)}, \\ -t^2 + t\frac{d\Phi^{(1)}}{dt} - \Phi^{(1)} & \text{si } q = 0 \quad \text{et} \quad e = e_0^{(1)}, \\ \frac{1}{3}\mathrm{X}_2(\cos\theta) & \text{si } q = 2 \quad \text{et} \quad e = e_2^{(1)}, \\ 0 \quad \text{pour tous les autres coefficients } e_q^{(1)},\ e_{q,p}^{(1)},\ e_{q,-p}^{(1)}. \end{cases}$$

Ce système domine les théorèmes classiques. La dernière ligne permet de démontrer en toute rigueur une proposition de Laplace, l'avant-dernière n'est autre qu'une importante équation de Clairaut, enfin les deux premières ne seront reprises ici que plus tard, elles donnent une équation de d'Alembert.

17. *Les théorèmes de Laplace et de Clairaut.* — A l'aide de l'équation (35) la dernière ligne du système (37) s'écrit

$$(38) \qquad \frac{1}{3}\mathrm{D}t^{2-q}\left(qe+t\frac{de}{dt}\right)=4\pi i\int_t^1 \rho t^{1-q}\left[(2-q)e+t\frac{de}{dt}\right]dt$$

Cette équation n'admet pas d'autre solution que $e\equiv 0$ pour $q=1, 2, 3, 4, \ldots$. Les coefficients correspondants $e_{1,1}$, $e_{1,-1}$, $e_{2,1}$, ... sont donc identiquement nuls. Il n'y a que e_0 et e_2 qui ne le soient pas. La déformation est

$$e^{(1)}=e_0^{(1)}+e_2^{(1)}\mathrm{X}_2(\cos\theta).$$

Mais $e^{(1)}$ doit être nul sur l'axe polaire $e^{(1)}=0$ pour $\theta=0$. On a donc

$$(39) \qquad e^{(1)}=a(t)\sin^2\theta,$$

et il n'y a que des ellipsoïdes de révolution voisins des sphères qui donnent lieu à cette expression de $e^{(1)}$.

En première approximation, c'est-à-dire en négligeant les termes en ω^4, *la stratification est composée d'ellipsoïdes de révolution.*

Cette propriété fut énoncée par Laplace. Si l'on y regarde de près, la démonstration qu'en donne Poincaré dans ses *Figures d'équilibre* est extrêmement longue.

L'équation relative à $q=2$ du système (36) donne en a

$$(40) \qquad \mathrm{D}(2a+ta')=\frac{15}{8\pi i}+3\int_t^1 \rho a'\,dt.$$

L'accent (′) désigne une dérivée par rapport à t. Cette équation, dérivée à son tour, donne *l'équation de Clairaut* liant les variations de l'aplatissement à la densité

$$(41) \qquad 2\mathrm{D}'a+6\rho a'+t\mathrm{D}a''=0.$$

L'équation (40) s'écrit encore, par une transformation élémentaire,

$$(42)\qquad t\,\mathrm{D}a' = 3t^{-6}\int_0^t t^5 a\rho'\,dt.$$

A l'extérieur de l'astre, l'équation (40) se simplifie, l'intégrale disparaît. Elle s'intégre et donne

$$(43)\qquad a = \lambda(t^2 + u\,t^{-2}),\qquad ta' = \lambda(3t^3 - 2ut^{-2}),$$

u est une constante dont le sens apparaîtra plus tard et λ représente la quantité

$$\lambda = \frac{1}{2i\mathrm{M}}.$$

A partir des équations (40), ..., (43), on démontre très rapidement les relations $a \geqq 0$, $a' \geqq 0$. Elles expriment *un théorème de Clairaut*. Les couches sont aplaties et l'aplatissement décroît quand on se rapproche du centre.

18. *L'approximation d'ordre deux.* — L'identification des termes en ω^4 du tableau (32) donne

$$(44)\qquad -\frac{1}{4\pi}\frac{d\Phi^{(0)}}{dt}t^{1-q}\int \mathrm{E}(e^{(2)})\mathrm{X}_q\,d\Omega - i\int_t^{t_1}\rho\,t^{1-q}\,dt\int \mathrm{F}(e^{(2)})\mathrm{X}_q\,d\Omega$$
$$= \frac{1}{4\pi}\frac{d\Phi^{(1)}}{dt}t^{1-q}\int \mathrm{E}(e^{(1)})\mathrm{X}_q\,d\Omega - \frac{1}{4\pi}\frac{d\Phi^{(0)}}{dt}t^{1-q}\int \mathrm{G}(e^{(1)})\mathrm{X}_q\,d\Omega$$
$$+\,i\int_t^{1}\rho\,t^{1-q}\,dt\int \mathrm{H}(e^{(1)})\mathrm{X}_q\,d\Omega + \frac{1}{2\pi}t^{2-q}\int e^{(1)}\mathrm{X}_q\,d\Omega$$
$$+\begin{cases} -t^2\dfrac{d\Phi^{(2)}}{dt} & \text{si } q = -1,\\[2ex] -t\dfrac{d\Phi^{(2)}}{dt} - \Phi^{(2)} & \text{si } q = 0,\\[2ex] 0 & \text{si } q = 1, 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

A part les termes sous l'accolade, les seconds membres sont calculables à partir de la première approximation. La dernière ligne donne $e^{(2)}$; ensuite les deux premières donneront $\Phi^{(2)}$ et $\dfrac{d\Phi^{(2)}}{dt}$.

Les fonctions G et H sont quadratiques

$$\mathrm{G} = \frac{1}{2}q(q+1)e^2 + (q+1)e\,t\frac{\partial e}{\partial t} + \left(t\frac{\partial e}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial e}{\partial \psi}\right)^2,$$
$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}(q-1)(q-2)e^2 + (1-q)e\,t\frac{\partial e}{\partial t}.$$

Les seconds membres du système (44) contiennent des termes de la forme $\sin^4\theta$, $\sin^2\theta\cos^2\theta$, que l'on convertira en polynome de Legendre X_2 et X_4.

Seuls les coefficients $e_q^2(t)$, ... interviennent et le système (44) s'écrit, débarrassé des intégrales sphériques,

$$(45)\quad -\frac{d\Phi^0}{dt}t^{1-q}\left(qe+t\frac{de}{dt}\right)-4\pi i\int_t^1 \rho t^{1-q}\left[(2-q)e+t\frac{de}{dt}\right]dt$$

$$= \text{à } +\frac{2}{3}t^2\frac{d\Phi^{(1)}}{dt}(-a+ta')-\frac{8}{15}t^2\frac{d\Phi^{(0)}}{dt}[a^2+(ta')^2]+\frac{4}{3}t^3a-t^2\frac{d\Phi^{(2)}}{dt}$$

$$+\frac{8}{15}4\pi i\int_t^1 \rho\, d(a^2t^3) \quad \text{pour } q=-1 \quad \text{et} \quad e=e_0^{2};$$

$$\text{à } +\frac{2}{3}t\frac{d\Phi^{(1)}}{dt}-\frac{8}{15}t\frac{d\Phi^{(0)}}{dt}[a^2+ata'+(ta')^2]$$

$$+\frac{4}{3}t^2a-t\frac{d\Phi^{(2)}}{dt}-\Phi^{(2)}$$

$$+\frac{4}{25}4\pi i\int_t^1 \rho\, d(a^2t^2) \quad \text{pour } q=0 \quad \text{et} \quad e=e_0^{(2)};$$

$$\text{à } -t^{-1}\frac{d\Phi^{(1)}}{dt}(2a+ta')+\frac{8}{21}t^{-1}\frac{d\Phi^{(0)}}{dt}[5a^2+6ata'+2(ta')^2]-\frac{4}{3}a$$

$$+\frac{8}{21}4\pi i\int_t^1 \rho\, d(a^2) \quad \text{pour } q=2 \quad \text{et} \quad e=e_2^{(2)};$$

$$\text{à } -\frac{8}{35}t^{-3}\frac{d\Phi^0}{dt}[6a^2+5ata'+(ta')^2]$$

$$-\frac{1}{12}4\pi i\int_t^1 \rho\, d(a^2t^{-2}) \quad \text{pour } q=4 \quad \text{et} \quad e=e_4^{2};$$

à o pour tous les autres coefficients et les valeurs $q=1, 2, 3, \ldots$ correspondantes.

19. *Le théorème sur la stratification.* — Prenons la dernière ligne du tableau précédent et remplaçons $\frac{d\Phi^{(0)}}{dt}$ par sa valeur en D. On trouvera l'équation (38)

$$\frac{1}{3}Dt^{2-q}\left(qe+t\frac{de}{dt}\right)=\int_t^1 \rho t^{1-q}\left[(2-q)e+t\frac{de}{dt}\right]dt.$$

Elle doit être satisfaite pour tous les coefficients autres que $e_0^{(2)}$, $e_2^{(2)}$ et $e_4^{(2)}$. Elle n'est vérifiée, on l'a dit, que par $e\equiv 0$. La déformation du second ordre doit être de la forme déjà mentionnée par Legendre

$$e^{(2)}=e_0^{(2)}(t)+e_2^{(2)}(t)X_2(\cos\theta)+e_4^{(2)}(t)X_4(\cos\theta).$$

Les surfaces d'égale densité sont encore de révolution, mais elle ne sont plus ellipsoïdales.

A l'extérieur de l'astre, les intégrales du tableau (45) disparaissent puisque $\rho = 0$. Les valeurs a et a', les fonctions $\Phi^{(0)}$ et $\Phi^{(1)}$ sont déterminées par les approximations précédentes. Les équations (45) s'intégrent et l'on trouve les expressions explicites des fonctions

$$e_0^{(2)}(t), \quad e_2^{(2)}(t), \quad e_4^{(2)}(t), \quad \Phi^{(2)}.$$

Nous ne reproduisons pas ces expressions [1].

Remarque. — Les approximations suivantes introduiront aussi des surfaces de révolution, car notre méthode *d'approximation* revient à partir du repos absolu $\omega = 0$, puis à donner à la masse une légère rotation ω.

L'approximation d'ordre un ayant fourni des surfaces de révolution, les suivantes n'introduiront jamais des surfaces qui ne soient pas de révolution; car il n'y a aucune raison pour qu'une dissymétrie apparaisse à une longitude plutôt qu'à une autre.

20. *Ellipsoïdes et corrections.* — Reprenons l'expression de e à ω^6 près. Elle s'écrit

$$e = \omega^2 a \sin^2\theta + \omega^4 [e_0^{(2)} + e_2^{(2)} X_2(\cos\theta) + e_4^{(2)} X_4(\cos\theta)].$$

En passant des polynomes de Legendre aux fonctions trigonométriques, la déformation s'écrit

$$(46) \qquad e = \omega^2 a \sin^2\theta + \omega^4 \alpha \sin^4\theta + \omega^4 \beta \sin^2\theta \cos^2\theta.$$

Les coefficients a, α, β sont fonctions de t. La fonction $\alpha(t)$ n'est pas identiquement nulle. Je ne puis pas prendre le parti de l'annuler. Elle augmente la déformation.

Mettons en évidence un ellipsoïde $s(t)$ tangent, au pôle et à l'équateur, à la surface $S(t)$ donnée par la formule précédente.

Soit $e_{\frac{\pi}{2}}$ la déformation équatoriale de $s(t)$. En négligeant les termes $e_{\frac{\pi}{2}}^{2}$ et les termes d'ordres supérieurs, c'est-à-dire à ω^6

---

[1] *Archives des Sciences physiques et naturelles*, t. 11, 1929, p. 30.

près, on trouve pour $s(t)$ la déformation e_s

$$e_s = e_{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta - \frac{3}{2} e_{\frac{\pi}{2}}^2 \sin^2\theta \cos^2\theta.$$

Dans le cas de la surface $S(t)$ la déformation e_S est donnée par (46); tandis que l'on a $e_{\frac{\pi}{2}} = \omega^2 a + \omega^4 \alpha$.

La différence s'écrit

$$e_S - e_s = -\omega^4 c(t) \sin^2\theta \cos^2\theta. \tag{47}$$

Multiplié par t le dernier terme donnerait la différence des rayons vecteurs de même direction θ, arrêtés à S et à s.

Un calcul simple montre que la fonction $c(t)$ est

$$c = \frac{35}{8} e_1^2 - \frac{3}{2} a^2.$$

L'équation du système (45) qui régit e_1^2 se simplifie si l'on prend $c(t)$ comme fonction inconnue. Elle devient

$$4c + tc' = \frac{3t^2}{D} \int_t^1 \rho\, d(ct^{-2}) + ta'(2a + ta'). \tag{48}$$

Si la masse est homogène, on a, c'est bien connu depuis Clairaut, $a' \equiv 0$; l'équation (48) se réduit alors à l'équation (38) pour $q = 4$; et l'on sait qu'elle n'admet pas d'autre solution que $c \equiv 0$. On retrouve ainsi *l'ellipsoïde de Maclaurin*.

Pour la Terre, une analyse de l'équation (48) montre que l'on a

$$c(1) \geqq 0 \qquad \text{et} \qquad c'(1) \geqq 0. \tag{49}$$

La surface libre est donc un ellipsoïde comprimé entre le pôle et l'équateur et cette correction diminue quand on passe de la surface libre aux surfaces d'égale densité voisines.

Callandreau [1] avait déjà, par une autre méthode, signalé cette compression.

A l'extérieur de l'astre, les fonctions a et ta' ont les expressions (42) et (43) et l'intégrale de (48) disparaît. On trouve simplement l'équation linéaire

$$4c + tc' = 5\lambda^2(3t^6 - 2ut),$$

---

[1] Obs. Paris, *Mém.* XIX, 1889.

qui par intégration donne, v étant une nouvelle constante,

$$\frac{2c}{\lambda^2} = 3t^6 - 4ut - 3u^2t^{-4} - 14vt^{-4}. \tag{50}$$

Les rélations (50) donnent deux limites de v au moyen de u

$$-\frac{9}{28} + \frac{1}{14}u - \frac{3}{14}u^2 \leqq v \leqq \frac{3}{14} - \frac{2}{7}u - \frac{3}{14}u^2. \tag{51}$$

La constante u intervient multipliée par ω^2 dans les expressions de e et de g; v n'intervient que multipliée par ω^4. Cette limitation (51) est en conséquence bonne.

Ces valeurs de e et de g seront transcrites tout à l'heure.

Demandons-nous, pour le moment, de combien de constantes dépend la seconde approximation?

21. *Le nombre des constantes déduit du théorème de Stokes.* — Supposons donnés les éléments stokiens ω, M, S_1. Ils déterminent entièrement les potentiels U et Φ à l'extérieur de l'astre. Les surfaces de niveau $\Phi = c$ sont donc connues ainsi que la déformation e et la pesanteur g.

Or la déformation de la surface libre est, nous l'avons vu, de la forme

$$e_1 = m_1 \sin^2\theta - n_1 \sin^2\theta \cos^2\theta,$$

m_1 et n_1 étant deux constantes. Si l'on se donne ω, M, t_1, puis m_1 et n_1, les éléments de Stokes sont donnés. A part ω, M et t_1 la déformation e et la pesanteur g ne peuvent dépendre à l'extérieur de l'astre que de m_1 et n_1.

Il n'y a donc que deux constantes. Celles que nous avons introduites u et v remplacent utilement m_1 et n_1 et ce sont des constantes stokiennes.

En première approximation la constante n_1 ne s'introduit pas, il n'en reste qu'une m_1 ou encore u.

Pour simplifier l'écriture posons

$$r = \frac{2}{7}u^2 - v, \tag{52}$$

$$\Lambda = \frac{\omega^2 t_1^3}{2iM}. \tag{53}$$

Ce sont aussi deux valeurs stokiennes, mais ce ne sont pas des constantes nouvelles et indépendantes des précédentes.

22. *Résolution du système à l'extérieur de l'astre, déformation et pesanteur.* — Le système (45) se résout sans difficultés théoriques à l'extérieur de l'astre $t > 1$ et $\rho = 0$. On trouve

$$e(t) = m(t)\sin^2\theta - n(t)\sin^2\theta\cos^2\theta, \tag{54}$$

$$m(t) = \Lambda(t^3 + ut^{-2}) + \Lambda^2(3t^3 + 3ut - rt^{-4}), \tag{55}$$

$$n(t) = \Lambda^2(3t^3 + ut - 7vt^{-4}). \tag{56}$$

Sur la surface libre $t = 1$ on trouve les formules particulières

$$e_1 = m_1\sin^2\theta - n_1\sin^2\theta\cos^2\theta, \tag{57}$$

$$m_1 = \Lambda(1 + u) + \Lambda^2(3 + 3u - r), \tag{58}$$

$$n_1 = \Lambda^2(3 + u - 7v). \tag{59}$$

La constante Λ est de l'ordre de ω^2, Λ^2 de l'ordre de ω^4. Le coefficient m_1 est la déformation équatoriale de l'ellipsoïde. Le terme en Λ^2 de (58) est celui que Callandreau supposait nul.

La pesanteur sur l'axe polaire g_p s'exprime ainsi :

$$g_p(t) = \frac{iM}{t_1^2}h \qquad \text{avec} \qquad h = t^{-2} - 2\Lambda ut^{-4} + 8\Lambda^2 rt^{-6}. \tag{60}$$

Quant aux variations de la pesanteur avec la colatitude géocentrique θ, elles obéissent à la relation

$$\frac{g_p}{g} = \frac{g(t, 0)}{g(t, \theta)} = \frac{dn}{dt} = \left(1 + e + t\frac{\partial e}{\partial t}\right)\cos V.$$

On trouvera, tout calcul fait, sur la couche t,

$$\frac{g}{g_p} = 1 - X(t)\sin^2\theta + Y(t)\sin^2\theta\cos^2\theta, \tag{61}$$

avec

$$X(t) = \Lambda(4t^3 - ut^{-2}) + \Lambda^2(5t^6 + 14ut - 3vt^{-4}), \tag{62}$$

$$Y(t) = \Lambda^2(7t^6 + 14ut + 21vt^{-4} + u^2t^{-4}). \tag{63}$$

Sur la surface libre $t = 1$ et à la latitude géographique θ' on trouve, g_{eq} étant la pesanteur à l'équateur,

$$\frac{g}{g_{eq}} = 1 + x\sin^2\theta' - y\sin^2\theta'\cos^2\theta', \tag{64}$$

avec

$$x = \Lambda(4 - u) + 3\Lambda^2(7 + 2u - r), \tag{65}$$

$$y = \Lambda^2(-9 - 2u - 5u^2 - 21v). \tag{66}$$

Les inégalités $0 \leq u \leq \frac{3}{2}$ *et* (51) *montrent que, pour la Terre, les coefficients* X, Y, x, y *sont positifs.*

Les géodésiens donnent quelquefois une formule semblable à (64) où le coefficient y est indiqué numériquement, mais avec un écart possible supérieur à sa valeur absolue. Il ne saurait être négatif en théorie.

23. *Les moments d'inertie et la constante u.* — Soient A, B, C les moments d'inertie du corps par rapport aux axes. On a

$$A = \int \rho(y^2 + z^2)\, dV, \tag{67}$$

et les autres s'obtiennent par permutation des lettres. Extrayons de nouveau la densité de l'équation de Poisson pour le champ de la pesanteur

$$\Delta\Phi = -4\pi i \rho + 2\omega^2, \tag{68}$$

et portons la valeur obtenue dans l'expression (67) de A. Par une application simple de l'identité de Green, on obtient :

$$4\pi i A = \int (\Phi_S - \Phi)\, dV + \int g(y^2 + z^2)\, dS + 2\omega^2 \int (x^2 + y^2)\, dV.$$

La surface S est de niveau, elle doit être extérieure à l'astre ou coïncider avec la surface libre.

Par soustraction de deux formules semblables, on trouve

$$4\pi i(A - B) = \int g(y^2 - x^2)\, dS + 2\omega^2 \int (y^2 - x^2)\, dV.$$

Ces trois différences sont stokiennes. Enfin, on peut mettre en évidence une sphère de même pôle que S et une marge V'. La différence C − A s'écrit

$$C - A = \frac{1}{4\pi i} \int g(x^2 - z^2)\, dS + \frac{\omega^2}{2\pi i} \int (x^2 - z^2)\, dV', \tag{69}$$

tandis que $A = B$. Le dernier terme est de l'ordre de ω^4, car la marge V' est de l'ordre de ω^2. Les expressions (54) et (61) de la déformation et de g donnent, tout calcul fait,

$$C - A = \frac{1}{3}\frac{\omega^2}{i} u t_1^5. \tag{70}$$

Si le rayon polaire est égal à l'unité, la relation (70) devient

$$u = \frac{3i}{\omega^2}(C - A). \tag{71}$$

La constante u est proportionnelle à la différence des moments d'inertie.

24. *Retour à la première approximation. Théorèmes de Clairaut et équation de d'Alembert.* — Les formules du paragraphe précédent auraient pu être écrites à propos de la première approximation. Nous aurions trouvé les relations (70) et (71). Mais il aurait fallu refaire ce calcul pour la seconde. Il était plus simple de procéder comme nous venons de le faire.

En première approximation et sur la surface libre on a, pour l'aplatissement e_1, les coefficients x et u, les diverses relations :

$$e_1 = A(1 + u), \tag{72}$$

$$x = A(4 - u), \tag{73}$$

$$0 \leqq u \leqq \frac{3}{2}, \tag{74}$$

$$u = \frac{3i}{\omega^2}(C - A), \tag{75}$$

$$x = \frac{g_{\text{pôle}} - g_{\text{équa}}}{g}. \tag{76}$$

Ces équations expriment avec d'autres notations des théorêmes classiques.

En effet, introduisons avec Clairaut le rapport φ

$$\varphi = \frac{\omega^2 t_1}{g}.$$

Ce rapport est égal au *premier ordre* à $2A$. Dès lors, si l'on élimine u entre (72) et (75), on trouve l'*équation de d'Alembert*

$$e_1 = \frac{1}{2}\varphi = \frac{3}{2}\frac{i}{g}(C - A)t_1^4. \tag{77}$$

En additionnant membre à membre (72) et (73), on trouve

$$e_1 + x = 5A, \tag{78}$$

ou, avec les notations plus explicites, la *relation de Clairaut*

$$e_1 + \frac{g_{\text{pôle}} - g_{\text{équa}}}{g} = \frac{5}{2}\varphi. \tag{79}$$

Les équations (72) et (73) donnent, en vertu des inégalités (74),

$$\frac{1}{2}\varphi \leqq e_1 \leqq \frac{5}{4}\varphi \leqq x \leqq 2\varphi. \tag{80}$$

Ces relations expriment un remarquable *théorème de Clairaut*. Enfin, on peut calculer les moments d'inertie sans faire usage de l'équation de Poisson, on trouve les deux *expressions de Clairaut* :

$$\left.\begin{matrix} C \\ A \end{matrix}\right\} = \frac{8\pi}{3}\int_0^1 \rho t^4\,dt + \left.\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix}\right\} \times \frac{8\pi}{3}\omega^2\int_0^1 \rho\,d(at^5), \tag{81}$$

4 convient à C et 3 à A. Elles sont valables au premier ordre.

La différence

$$C - A = \frac{8\pi}{15}\omega^2\int_0^1 \rho\,d(at^5) \tag{82}$$

est de l'ordre de ω^2. C'est un invariant stokien, relativement à toute répartition des densités qui laisse invariable ω, M et S_1.

25. *Constante u et constante $\mathfrak{I}$.* — Introduisons le rapport $\mathfrak{I}$ qui, on le sait, est lié aux mesures de la précession

$$\mathfrak{I} = \frac{C - A}{C}. \tag{83}$$

Comme C — A il est de l'ordre de ω^2. Posons, en conséquence,

$$\mathfrak{I} = \omega^2\mathfrak{I}'. \tag{84}$$

Les formules (81), (82), (83) donnent sans peine, au premier ordre,

$$\text{(85)} \qquad C = \frac{8\pi}{3}(1 + 4\omega^2 \mathfrak{I}')\int_0^1 \rho t^4 dt,$$

tandis que les formules (71), (83) et (84) donnent :

$$\text{(86)} \qquad u = 3 i \mathfrak{I}' C.$$

On trouve, ainsi, une expression de u à ω^4 près :

$$\text{(87)} \qquad u = 8\pi i \mathfrak{I}'(1 + 4\omega^2 \mathfrak{I}')\int_0^1 \rho t^4 dt.$$

La connaissance de u, à ω^4 près, donne, on le sait, e et g à ω^6 près, c'est ce que nous cherchons.

L'intégrale

$$\int_0^1 \rho t^4 dt$$

et la valeur $\mathfrak{I}'$ ne sont pas des valeurs stokiennes. Mais Radau, par un artifice très remarquable, a calculé cette intégrale. On trouve, avec nos notations, la relation

$$\text{(88)} \qquad \int_0^1 \rho t^4 dt = \frac{1}{3} D_1 \left(1 - \frac{2}{5}\frac{1}{\psi}\sqrt{\frac{4-u}{1+u}}\right),$$

où D_1 est la densité moyenne de toutes les sphères de densité $\rho(t)$ et ψ un nombre égal à l'unité, à moins de $\frac{1}{1000}$ près, dans le cas de la Terre.

Les équations (87) et (88) donnent ensuite :

$$\text{(89)} \qquad u = \frac{8\pi i}{3} \mathfrak{I}'(1 + 4\omega^2 \mathfrak{I}') D_1 \left(1 - \frac{2}{5}\frac{1}{\psi}\sqrt{\frac{4-u}{1+u}}\right).$$

Il faut ensuite tenir compte que D_1 se réfère à la stratification sphérique et prendre des précautions pour revenir à la masse totale. L'équation (89) donne lieu, de ce fait, à des inégalités

$$\text{(90)} \qquad \frac{\mathfrak{I}}{\Lambda}(1 + 4\mathfrak{I}) \gtrless f(u) \gtrless \frac{\mathfrak{I}}{\Lambda}(1 + 4\mathfrak{I} - 5\Lambda).$$

A l'ordre zéro, les parenthèses se réduiraient à l'unité. Nous avons posé

$$f(u) = \frac{u}{1 - \frac{2}{5}\frac{1}{\psi}\sqrt{\frac{4-u}{1+u}}}.$$

26. *Rappel des relations les plus importantes pour la géodésie.* — Sur la surface libre nous avons trouvé, en seconde approximation,

$$m_1 = \Lambda(1+u) + \Lambda^2(3 + 3u - r), \tag{91}$$

$$x = \Lambda(4-u) + 3\Lambda^2(7 + 2u + r), \tag{92}$$

$$h = 1 - 2\Lambda u + 8\Lambda^2 r. \tag{93}$$

La constante r est limitée par les valeurs suivantes :

$$-\frac{3}{14} + \frac{2}{7}u + \frac{1}{2}u^2 \leqq r \leqq \frac{9}{28} - \frac{1}{14}u + \frac{1}{2}u^2. \tag{94}$$

Rappelons que m_1 est la déformation équatoriale de l'ellipsoïde tangent aux surfaces océaniques, aux pôles et à l'équateur. Rappelons aussi que l'on a posé, en seconde approximation,

$$\Lambda = \frac{\omega^2 t_1^3}{2iM}, \tag{95}$$

$$x = \frac{g_{\text{pôle}} - g_{\text{équa}}}{g_{\text{équa}}}, \tag{96}$$

$$g_{\text{pôle}} = \frac{iM}{t_1^2}h. \tag{97}$$

La relation (90) entre $\mathfrak{J}$, u et Λ s'écrit :

$$\frac{\mathfrak{J}}{\Lambda}(1 + 4\mathfrak{J}) \geqq f(u) \geqq \frac{\mathfrak{J}}{\Lambda}(1 + 4\mathfrak{J} - 5\Lambda). \tag{98}$$

Enfin, en éliminant iM entre (95) et (97), on trouve

$$\Lambda = \frac{\omega^2}{2}\frac{t_1}{g_{\text{pôle}}}h. \tag{99}$$

27. *Les valeurs les plus précises pour le cas de la Terre.* — Les géodésiens paraissent s'accorder sur les chiffres suivants du

rayon polaire et de la pesanteur au pôle :

$$t_1 = 6356^{\mathrm{km}},5, \qquad g_{\text{pôle}} = 983^{\mathrm{cm}},20.$$
$$\pm 5 \qquad\qquad \pm 5$$

D'autre part, Poincaré attribuait à la constante $\mathcal{J}$, liée aux mesures précessionnelles, la valeur

$$\mathcal{J} = \frac{1}{305,31}$$

que nous discuterons plus loin. En supposant $h = 1$ on trouvera par (98) et (99) des valeurs approximatives de Λ et de u. En calculant ensuite h avec ces valeurs-là, on obtient deux limites de Λ :

$$\frac{1}{583,8} < \Lambda < \frac{1}{583,55}.$$

L'écart provient des écarts possibles sur t_1, $g_{\text{pôle}}$ et sur le coefficient ψ de $f(u)$.

La valeur de u trouvée déterminerait l'aplatissement avec un écart possible par la formule (91). On calculerait aussi x. Mais comme la valeur de $\mathcal{J}$ n'est elle-même qu'approchée, il vaut mieux indiquer la correction, admissible ou inadmissible, à faire subir à $\mathcal{J}$ pour avoir un aplatissement donné.

28. *Aplatissement et précession.* — Voici les inverses des aplatissements admis par différents géodésiens :

Bessel, 299 en 1841; Clarke, 293,5 en 1880; Helmert, 298,3 en 1907; Hayford, 297 en 1909; Helmert, 296 en 1915; Helbronner, 293,3 en 1929, par le réseau des Alpes françaises.

Mettons alors, en regard, différents chiffres marquant l'inverse de la déformation équatoriale supposée et les valeurs de x correspondantes. En même temps, posons

$$\mathcal{J} = \frac{1}{305,31}\,\theta_{\mathcal{J}}$$

et indiquons les limites entre lesquelles devrait être comprise la quantité $-\mathrm{L}\theta_{\mathcal{J}}$, pour que ces déformations soient possibles.

On passe de notre déformation équatoriale à l'*aplatissement au sens ordinaire* en ajoutant l'unité au dénominateur.

On trouve, en portant à gauche l'inverse de l'aplatissement supposé :

	x.			
300.........	0,005321	+ 0,01004	$\geqq - L\theta_3 \geqq$	+ 0,00660
299.........	5311	+ 0,00847	»	+ 0,00503
298.........	5299	+ 0000648	»	+ 0,00304
297.........	5292	+ 0,00533	»	+ 0,00189
296.........	5275	+ 0,00284	»	— 0,00060
295.........	5265	+ 0,00108	»	— 0,00236
294.........	5253	— 0,00078	»	— 0,00422

Les chiffres du tableau précédent sont exacts à $\pm$ 0,00042 près. Pour que l'aplatissement d'inverse 297 pût convenir, il faudrait admettre une correction $L\theta_3 \leqq -0{,}00146$, cela paraît inadmissible au point de vue des mesures précessionnelles.

Il faut en conclure : *si l'on s'en tient aux nombres entiers l'aplatissement* $\frac{1}{295}$ *est celui qui convient le mieux à la théorie de la précession.*

Les chiffres 294 *et* 296 *pourraient, éventuellement, convenir aussi; les autres sont exclus.*

Le chiffre 294 est celui qui convient le mieux à la théorie de la Lune ainsi que M. E. Brown l'a montré [1].

Le chiffre 296 est celui que Helmert adoptait en 1915 pour des raisons géodésiques.

Nous trouvons le chiffre 295 avec un écart possible comprenant les valeurs de Brown et de Helmert. Tandis que la première approximation ne permettrait pas de rendre compte à la fois des mesures de l'aplatissement, de la pesanteur et de la précession, comme Poincaré l'a signalé.

L'accord entre la géodésie et la théorie de la précession se réalise en seconde approximation.

---

[1] *London Astr. Soc. Month. Not.*, 75, 1915, p. 508.