BULLETIN DE LA S. M. F.

HENRI CARTAN

Sur les domaines d'existence des fonctions de plusieurs variables complexes

Bulletin de la S. M. F., tome 59 (1931), p. 46-69
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1931__59__46_0>

SUR LES DOMAINES D'EXISTENCE DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXES;

PAR M. HENRI CARTAN.

I. — Introduction.

1. On sait, depuis les travaux de F. Hartogs (1) et E. E. Levi (2), que les domaines d'existence des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes ne sont pas des domaines quelconques. En particulier, si le domaine d'existence d'une fonction analytique d'une variable complexe a pour frontière une hypersurface (à trois dimensions réelles) qui satisfait à certaines conditions de régularité, il existe une expression différentielle qui fait intervenir les dérivées partielles du premier membre de l'équation de l'hypersurface et qui doit posséder un signe déterminé.

G. Julia (3) a montré plus tard que l'ensemble des points où une famille de fonctions holomorphes est normale jouit de propriétés tout à fait analogues. Cela est assez naturel, car les propriétés des domaines d'existence des fonctions holomorphes ont un rapport étroit avec celles des domaines de convergence des séries de fonctions holomorphes.

Malheureusement, le fait de connaître des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une hypersurface soit, *au voisinage d'un de ses points*, la frontière d'existence d'une fonction analytique, n'entraîne pas la connaissance de conditions nécessaires et *suffisantes* pour qu'un domaine donné soit le domaine *total* d'existence d'une fonction analytique. A l'heure actuelle, le problème de la recherche de telles conditions nécessaires et suffi-

(1) *Voir*, notamment, *Ueber analytische Funktionen mehrerer unabhäng. Veränd.* (*Math. Ann.*, t. 62, 1906, p. 1-88).

(2) *Annali di Matematica,* série IIIª, t. 17, 1910, p. 61-87, et t. 18, 1911, p. 69-79.

(3) *Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables* (*Acta mathematica*, t. 47, 1926, p. 53-115).

santes n'est résolu que dans certains cas particuliers ([1]). Une classification des domaines s'impose à ce sujet; elle sera indiquée au n° 2.

Le présent travail est une contribution à la recherche de conditions nécessaires et suffisantes. Nous en trouverons dans des cas très étendus. C'est en étudiant les propriétés des domaines de convergence uniforme des séries de fonctions holomorphes que nous obtiendrons de telles conditions. En passant, nous apporterons quelques compléments aux théorèmes de G. Julia.

Les problèmes dont nous venons de parler sont en relation avec un problème important, non encore résolu : « Est-il vrai qu'étant donné un domaine univalent ([2]) quelconque, toute fonction holomorphe dans ce domaine y soit développable en série uniformément convergente de polynomes ? » Appelons *normal* tout domaine D qui jouit de la propriété suivante : « Toute fonction holomorphe dans D admet un développement en série de polynomes, qui converge uniformément au voisinage de tout point intérieur à D. » La question est de savoir si tous les domaines univalents sont normaux. Or, nous verrons que les domaines normaux jouissent de propriétés remarquables qui, vraisemblablement, n'appartiennent pas à tous les domaines univalents. Il suffirait donc de donner l'exemple d'un domaine univalent qui ne possède pas l'une de ces propriétés, pour montrer du même coup l'existence de domaines non normaux. Encore resterait-il à caractériser les domaines non normaux.

2. Sauf avis contraire, nous n'envisagerons, pour simplifier, que des domaines *univalents* et *ouverts*, dont tous les points intérieurs sont à distance finie ([3]). Nous raisonnerons sur l'espace de deux variables complexes x et y, mais nos raisonnements s'appliqueront à un nombre quelconque de variables. Nous nous bor-

---

([1]) Il en est ainsi, notamment, dans le cas des domaines de Reinhardt et, plus généralement, des domaines cerclés. *Voir* H. CARTAN, *Les fonctions de deux variables complèxes et le problème de la représentation analytique*, Chapitre V (*Journ. de Math.*, 9ᵉ série, t. 10, 1931, p. 1-114). Ce Mémoire sera désigné par la lettre [C] dans le présent article.

([2]) Un domaine *univalent* est un domaine tel qu'un point quelconque de l'espace appartienne au plus une fois au domaine.

([3]) Cela ne veut pas dire que nous n'envisagerons que des domaines bornés.

nerons à considérer des fonctions *holomorphes*, laissant de côté les fonctions méromorphes pour ne pas compliquer des questions déjà difficiles.

Nous dirons qu'un domaine D est *maximum* s'il existe une fonction $f(x, y)$, holomorphe dans D, qui n'est holomorphe en aucun point frontière de D.

Un domaine D sera dit *maximum au sens large* si, étant donné un point frontière quelconque x_0, y_0 de D, il existe une fonction $f(x, y)$ holomorphe dans D et non holomorphe en x_0, y_0. Comme cette fonction f peut dépendre du point x_0, y_0, *il n'est nullement certain qu'un domaine maximum au sens large soit maximum*. Nous verrons cependant que tout domaine normal, maximum au sens large, est maximum.

Un domaine D sera dit *pseudo-convexe* (¹) *en un point frontière* x_0, y_0, s'il existe une hypersphère S, de centre x_0, y_0, et une fonction $f(x, y)$, holomorphe dans la région commune à D et S, et non holomorphe en x_0, y_0. Un domaine qui est pseudo-convexe en chacun de ses points frontières sera dit *partout pseudo-convexe*. Il est clair qu'un domaine maximum au sens large, et *a fortiori* un domaine maximum, est partout pseudo-convexe. Rien ne prouve que la réciproque soit exacte.

E. E. Levi a précisément donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'un domaine soit pseudo-convexe en un point de sa frontière, dans le cas où celle-ci est une hypersurface à trois dimensions qui satisfait, au voisinage du point considéré, à certaines conditions de régularité. Pour qu'un domaine à frontière régulière soit maximum, il faut donc que la condition de Levi soit vérifiée en chaque point de la frontière.

Mais nous voulons des conditions *nécessaires et suffisantes* pour qu'un domaine soit maximum. Nous en trouverons pour tous les domaines normaux (sans faire aucune hypothèse restrictive sur la nature de la frontière), en introduisant une nouvelle catégorie de domaines, qui sera définie au nº 6 : celle des domaines *strictement convexes*. Mais, alors que la catégorie des domaines partout pseudo-convexes contient celle des domaines maxima, celle des domaines maxima contient celle des domaines strictement

(¹) Ce terme semble avoir été adopté par les mathématiciens allemands.

convexes. Autrement dit, tout domaine strictement convexe est maximum (théorème V). La proposition réciproque est vraie pour les domaines *normaux*.

Voici une autre question : Étant donné un domaine qui appartient à l'une des quatre catégories précédentes (partout pseudo-convexe, maximum au sens large, maximum, strictement convexe), les propriétés qui caractérisent sa catégorie se conservent-elles par une transformation analytique arbitraire de l'intérieur du domaine en un autre? Nous verrons au n° 9 qu'il en est bien ainsi, *sans faire aucune hypothèse sur la façon dont se comporte la transformation au voisinage de la frontière.*

Voici enfin un dernier problème : Étant donné un domaine D, non maximum, toute fonction holomorphe dans D est holomorphe dans un domaine plus grand, d'après la définition même d'un domaine maximum. Mais cela ne prouve pas qu'il existe un domaine maximum Δ, tel que toute fonction holomorphe dans D soit aussi holomorphe dans Δ. Il en est pourtant ainsi pour des classes fort générales de domaines ([1]), en particulier pour tous les domaines normaux.

II. — Domaines convexes relativement à une famille de fonctions.

3. Plaçons-nous dans un espace $\mathcal{E}$ à un nombre quelconque de dimensions réelles. Sois $\mathcal{F}$ une famille de fonctions (réelles ou complexes) *continues* dans un domaine ouvert Σ, borné ou non, dont tous les points sont à distance finie.

Par exemple, si $\mathcal{E}$ a quatre dimensions, on pourra le considérer comme l'espace de deux variables complexes x et y, et envisager, par exemple, la famille $\mathcal{F}$ de toutes les fonctions holomorphes dans un domaine Σ ([2]), ou même la famille formée par les fonctions d'une classe particulière de fonctions holomorphes dans Σ; c'est ainsi que nous envisagerons parfois la famille de tous les polynomes en x et y, le domaine Σ étant alors tout l'espace à distance finie.

([1]) *Voir* aussi, à ce sujet, mon Mémoire du *Journal de Math.* déjà cité.

([2]) Lorsque nous parlons de *toutes* les fonctions holomorphes dans Σ, nous n'entendons pas nous limiter aux fonctions qui ne sont pas holomorphes ailleurs.

Définition. — *Un domaine* D *sera dit* **convexe relativement** *à une famille* $\mathfrak{F}$ *de fonctions continues dans* Σ *si* D *est intérieur* (1) *à* Σ, *et si, étant donnés arbitrairement un domaine fermé* D_0 *complètement intérieur* (2) *à* D, *un point frontière* M *de* D, *intérieur à* Σ (*s'il existe de tels points*), *et une hypersphère* S *de centre* M, *intérieure à* Σ, *il existe au moins une fonction* f *de la famille* $\mathfrak{F}$, *telle que le maximum de son module dans* S *soit supérieur au maximum de son module dans* D_0.

Par exemple, un domaine borné convexe (au sens ordinaire du mot) n'est autre qu'un domaine convexe relativement à la famille des fonctions linéaires à coefficients réels des coordonnées de l'espace.

Dans l'espace de deux variables complexes x et y, un domaine cerclé convexe centré à l'origine (3) n'est autre qu'un domaine convexe relativement à la famille des polynomes homogènes du premier degré en x et y.

Dans le même espace, un domaine cerclé maximum, centré à l'origine, n'est autre qu'un domaine convexe relativement à la famille de tous les polynomes homogènes en x et y. C'est une conséquence immédiate des résultats que j'ai établis dans mon Mémoire [C] [*voir* la note (1) de la page 47].

De même, un domaine de Reinhardt (4) maximum n'est autre qu'un domaine convexe relativement à la famille des monomes $x^m y^p$ (m et p entiers, positifs ou nuls). On en déduit aussitôt la propriété caractéristique de la relation entre les rayons de convergence associés d'une série double de Taylor.

---

(1) Il est entendu, dans tout ce qui suit, que par « domaine *intérieur* à Σ », nous entendons un domaine dont tous les points intérieurs sont intérieurs à Σ, sans rien préjuger des points frontières.

(2) Un domaine fermé est dit *complètement intérieur* à un autre si tous ses points frontières sont intérieurs à l'autre.

(3) Un domaine cerclé centré à l'origine est défini par les propriétés suivantes : 1° l'origine ($x = y = 0$) est un point intérieur; 2° si x_0, y_0 est un point du domaine, $x = x_0 e^{i\theta}$, $y = y_0 e^{i\theta}$ est aussi un point du domaine quel que soit le nombre réel θ.

(4) Un domaine de Reinhardt (centré à l'origine) est défini par les propriétés suivantes : 1° l'origine est un point intérieur; 2° si x_0, y_0 est un point du domaine, $x = x_0 e^{i\theta}$, $y = y_0 e^{i\varphi}$ est aussi un point du domaine, quels que soient les nombres réels θ et φ.

Quelques conséquences immédiates de la définition précédente. — 1° Si une famille $\mathcal{F}$ de fonctions continues dans Σ fait partie d'une famille plus étendue $\mathcal{F}_1$ de fonctions continues dans Σ, tout domaine convexe relativement à $\mathcal{F}$ est, *a fortiori*, convexe relativement à $\mathcal{F}_1$.

2° Soit une suite infinie de domaines fermés $D_1, \ldots, D_p, \ldots$, dont chacun est complètement intérieur à Σ et complètement intérieur au suivant. Soit D le domaine formé de l'ensemble de tous ces domaines. *Si chaque* D_p *est convexe relativement à une famille* $\mathcal{F}$ *de fonctions continues dans* Σ (la même pour tous les D_p), *le domaine* D *est lui-même convexe relativement à* $\mathcal{F}$.

Cette proposition est une conséquence immédiate de la définition : nous laissons au lecteur le soin de l'établir.

4. Théorème I. — *Soit* $\mathcal{F}$ *une famille de fonctions continues dans un domaine* Σ, *et soit* D *un domaine intérieur à* Σ. *Parmi tous les domaines, convexes relativement à* $\mathcal{F}$, *qui contiennent* D, *il en est un*, Δ, *qui est intérieur à tous les autres.* Nous l'appellerons *le plus petit domaine convexe* (*relativement à* $\mathcal{F}$) *qui contient* D.

Si D est convexe relativement à $\mathcal{F}$, Δ ne sera autre que D lui-même. Un autre cas limite serait celui où Δ est confondu avec Σ.

Démonstration. — D peut évidemment être considéré comme le domaine limite d'une suite infinie de domaines fermés $D_1, \ldots, D_p, \ldots$, dont chacun est complètement intérieur à D et complètement intérieur au suivant ; ces domaines doivent être choisis de façon que tout point intérieur à D soit intérieur à l'un au moins des D_p, et, par suite, à tous les suivants.

Étant donnée une fonction quelconque f de la famille $\mathcal{F}$, soit $\alpha_{f,p}$ la borne supérieure de son module dans D_p, et soit $E_{f,p}$ l'ensemble des points de Σ où l'on a

$$|f| \leqq \alpha_{f,p}.$$

Soit E_p l'ensemble commun aux $E_{f,p}$ relatifs à toutes les fonctions de la famille $\mathcal{F}$, et soit A_p l'ensemble des points intérieurs à E_p ; A_p se compose d'un ou plusieurs domaines connexes, dont l'un, Δ_p, contient évidemment l'intérieur de D_p. Chaque domaine Δ_p

est intérieur au domaine suivant Δ_{p+1}; l'ensemble des Δ_p, correspondant à toutes les valeurs de p, définit un domaine Δ qui contient D.

Je vais montrer : 1° que Δ est convexe relativement à $\mathcal{F}$; 2° que tout domaine qui contient D et est convexe relativement à $\mathcal{F}$ contient aussi Δ. J'aurai alors établi le théorème I.

1° *Δ est convexe relativement à $\mathcal{F}$.* — En effet, soient Δ_0 un domaine fermé complètement intérieur à Δ, et S une hypersphère, intérieure à Σ, dont le centre M est un point frontière de Δ. Si p est assez grand, Δ_p contient Δ_0 et des points intérieurs à S; l'hypersphère S, contenant alors au moins un point frontière de Δ_p, contient au moins un point frontière de l'un des $E_{f,\,p}$ définis plus haut. Il existe donc un point P de S, en lequel une fonction f de la famille $\mathcal{F}$ a son module plus grand qu'en tout point de D_p, et même qu'en tout point de Δ_p, d'après la définition de Δ_p. *A fortiori*, le module de f au point P est plus grand que la borne supérieure de ce module dans Δ_0. Le domaine Δ est donc convexe relativement à $\mathcal{F}$.

2° Supposons qu'il existe un domaine Δ', qui soit convexe relativement à $\mathcal{F}$, contienne D et admette un point frontière M intérieur à Δ. Montrons qu'une telle supposition est absurde. En effet, M serait intérieur à Δ_p pour des valeurs assez grandes de p; p étant ainsi choisi, soit Δ'_0 un domaine fermé complètement intérieur à Δ' et tel que D_p soit complètement intérieur à Δ'_0. Soit aussi S une hypersphère, de centre M, tout entière intérieure à Δ_p. Puisque Δ' est convexe relativement à $\mathcal{F}$, il existe une fonction f de la famille $\mathcal{F}$ dont le module en un point P de S est plus grand qu'en tout point de Δ'_0. La borne supérieure de f serait donc plus grande dans Δ_p que dans D_p. Or ceci est en contradiction avec la façon dont on a défini Δ_p.

C. Q. F. D.

III. — Domaines strictement convexes relativement à une famille de fonctions.

5. Définition. — *Étant donnée une famille $\mathcal{F}$ de fonctions continues dans un domaine ouvert* D, D *sera dit* **strictement convexe relativement à la famille $\mathcal{F}$**, *si à chaque domaine*

fermé D_0, *complètement intérieur à* D, *on peut associer un domaine fermé* D'_0, *complètement intérieur à* D, *qui jouit de la propriété suivante : étant donné arbitrairement un point* M *intérieur à* D, *mais extérieur à* D'_0, *il existe une fonction de la famille* $\mathcal{F}$ *dont le module en* M *est plus grand qu'en tout point de* D_0.

D'après cette définition, il est clair que si D est strictement convexe relativement à une famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes dans un domaine Σ (contenant D), il est convexe relativement à $\mathcal{F}$. Nous verrons au n° 6 que, dans certains cas, la réciproque est vraie.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un domaine ne soit pas strictement convexe. — Elle va résulter immédiatement de la définition; aussi l'énoncerons-nous sans démonstration.

Pour qu'un domaine D ne soit pas strictement convexe relativement à une famille $\mathcal{F}$, il faut et il suffit qu'il existe un domaine fermé D_0, complètement intérieur à D, et une suite infinie de points $M_1, \ldots, M_p, \ldots$, intérieurs à D, n'ayant aucun point limite intérieur à D, et tels que, étant donnée une fonction quelconque de $\mathcal{F}$, son module en chacun des points M_p soit au plus égal à la borne supérieure de ce même module dans D_0.

6. *Plaçons-nous dans l'espace de deux variables complexes* x *et* y. Pour abréger le langage, nous dirons que D est *convexe relativement à* Σ, si D est convexe relativement à la famille de toutes les fonctions holomorphes dans Σ. De même, nous dirons que D est *strictement convexe* s'il est strictement convexe relativement à la famille de toutes les fonctions holomorphes dans D.

Théorème II. — *Si un domaine fermé* D *est complètement intérieur à un domaine* Σ, *et si* D *est convexe relativement à* Σ, *il est strictement convexe.*

Supposons, en effet, que D ne soit pas strictement convexe, et servons-nous de la condition nécessaire et suffisante énoncée à la fin du numéro précédent. Conservons les mêmes notations. Toute fonction holomorphe dans D, et de module au plus égal à *un* dans

D_0, aura son module au plus égal à *un* en chacun des points M_p. Désignons par M un point frontière de D qui soit point limite des M_p.

Cela posé, donnons-nous un domaine fermé D_1, complètement intérieur à D, et tel que D_0 soit complètement intérieur à D_1. Soit aussi S une hypersphère de centre M et de rayon ρ assez petit pour que S soit intérieure à Σ. Supposons, en outre, ρ assez petit pour que toute translation, de longueur inférieure à 2ρ, transforme D_1 en un domaine contenant encore le domaine D_0, et transforme Σ en un domaine contenant encore le domaine D.

Puisque D est convexe relativement à Σ, il existe une fonction $f(x, y)$, holomorphe dans Σ, de module au plus égal à *un* dans D_1 et de module plus grand que *un* en un point (ξ, η) de S. Or, il existe un point $M_p(x_p, y_p)$ intérieur à S. Je considère alors la fonction

$$\varphi(x, y) \equiv f(x - x_p + \xi, y - y_p + \eta);$$

elle est holomorphe dans D ; son module est au plus égal à *un* dans D_0 et plus grand que *un* en M_p. On arrive ainsi à une contradiction. C. Q. F. D.

Théorème III. — *Si un domaine est convexe relativement à la famille $\mathcal{F}$ des polynomes en x et y, il est strictement convexe relativement à $\mathcal{F}$, et, a fortiori,* strictement convexe.

Comme plus haut, on raisonnera par l'absurde, avec cette différence que, le domaine D n'étant plus supposé borné, les points M_p pourraient n'avoir cette fois aucun point limite à distance finie. Or, cette dernière éventualité est à rejeter, car si les points M_p tendent vers l'infini, on peut évidemment trouver des polynomes du premier degré (x ou y par exemple) qui soient bornés dans le domaine D_0 (en effet D_0, étant fermé, est borné) et ne soient pas bornés sur l'ensemble des points M_p. Comme plus haut, on arrive à une contradiction, et le théorème est démontré.

La démonstration marche, en somme, grâce au fait suivant : si l'on effectue une translation de l'espace, tout polynome en x et y reste un polynome. En remplaçant les translations par des homothéties, on retrouverait des propositions qui m'ont servi dans mon Mémoire cité [C] :

Théorème III *bis.* — *Si un domaine est convexe relativement à la famille des polynomes homogènes en x et y, il est cerclé et strictement convexe relativement à cette famille.*

Théorème III *ter.* — *Si un domaine est convexe relativement à la famille des monomes $x^m y^p$* (m et p entiers positifs ou nuls), *c'est un domaine de Reinhardt, et il est strictement convexe relativement à cette famille.*

7. Restons toujours dans l'espace de deux variables complexes x et y.

Théorème IV. — *Si un domaine Σ est strictement convexe, et si un domaine fermé D est complètement intérieur à Σ, le plus petit domaine convexe (relativement à Σ) contenant D est lui-même complètement intérieur à Σ, et, par suite, est strictement convexe* (théorème II).

En effet, Σ étant strictement convexe, au domaine D est associé un domaine fermé D′, complètement intérieur à Σ, qui jouit de la propriété suivante : M étant un point quelconque de Σ, extérieur à D′, il existe une fonction holomorphe dans Σ, dont le module est plus grand en M qu'en tout point de D.

Reportons-nous alors à la façon dont est défini le domaine Δ, plus petit domaine convexe (relativement à Σ) contenant D (n° 4). Nous voyons que Δ est certainement intérieur à D′.

C. Q. F. D.

IV. — Les domaines d'existence des fonctions holomorphes de deux variables.

8. **Théorème V.** — *Tout domaine strictement convexe est maximum.*

Ce théorème se déduit du théorème suivant :

Théorème VI. — *Soit* D *un domaine strictement convexe relativement à une famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes dans* D. *Étant donnée une suite infinie quelconque de points* $M_1, \ldots, M_p, \ldots$, *intérieurs à* D, *n'ayant aucun point limite intérieur à* D, *on peut construire une fonction* $F(x, y)$, *holomorphe* *dans D, qui s'annule en chacun des points* M_p, *et cela de façon que les variétés sur lesquelles* F *s'annule soient obtenues en égalant à des constantes certaines fonctions de la famille* $\mathcal{F}$.

Montrons d'abord que le théorème V est une conséquence du théorème VI.

Appliquons en effet ce dernier au cas où la famille $\mathcal{F}$ est celle de toutes les fonctions holomorphes dans D, et où les points M_p admettent comme points limites tous les points frontières de D.

Je dis que la fonction $F(x, y)$ correspondante n'est holomorphe en aucun point frontière de D. Supposons en effet que F soit holomorphe en un point frontière M_0, et par suite en tous les points frontières voisins (1). Comme chaque point frontière est point limite de points M_p, la fonction F serait nulle en tout point de la frontière voisin de M_0. D'autre part, au voisinage de M_0, F s'annulerait sur des caractéristiques régulières, en nombre fini, ayant un nombre fini de points d'intersection; la frontière se composerait d'un certain nombre de ces caractéristiques. Soit P un point frontière appartenant à l'une de ces caractéristiques et à une seule; au voisinage de P, la fonction F ne s'annulerait pas ailleurs que sur la frontière. C'est impossible, puisque F s'annule aux points M_p, intérieurs à D. L'hypothèse faite est donc absurde : $F(x, y)$ n'est holomorphe en aucun point frontière de D, et par suite D est maximum. C. Q. F. D.

Passons à la démonstration du théorème VI. Considérons D comme le domaine limite d'une suite infinie de domaines fermés $D_1, \ldots, D_n, \ldots$, dont chacun est complètement intérieur à D et complètement intérieur au suivant. La définition d'un domaine D strictement convexe relativement à une famille $\mathcal{F}$ associe à chaque domaine D_n un domaine fermé D'_n, complètement intérieur à D. Soit alors n_p la plus grande valeur de n telle que M_p soit extérieur à D'_n. Puisque les points M_p n'ont aucun point limite intérieur à D, n_p tend vers l'infini avec p.

Cela posé, il existe, dans la famille $\mathcal{F}$, une fonction $f_p(x, y)$, égale à α_p au point M_p, et dont la borne supérieure dans D_{n_p} est

(1) Nous supposons donc que D n'a pas de point frontière isolé. Il est d'ailleurs facile de montrer que si D avait un point frontière isolé, D ne serait pas strictement convexe. Le théorème V est donc valable sans aucune restriction.

plus petite que $|\alpha_p|$. Il en résulte qu'on peut construire un produit infini

$$\prod_{p=1}^{\infty}\left(1-\frac{f_p(x,y)}{\alpha_p}\right)e^{R_p(x,y)}.$$

avec

$$R_p(x,y)\equiv\frac{f_p}{\alpha_p}+\frac{1}{2}\left(\frac{f_p}{\alpha_p}\right)^2+\ldots+\frac{1}{k_p}\left(\frac{f_p}{\alpha_p}\right)^{k_p},$$

de façon que ce produit converge uniformément au voisinage de tout point intérieur à D (il suffit de répéter le raisonnement classique de Weierstrass). Ce produit représente une fonction $F(x, y)$, holomorphe dans D, qui remplit toutes les conditions de l'énoncé. C. Q. F. D.

9. Comme nous l'avons dit dans l'introduction, on est amené à considérer, dans l'espace x, y, les quatre catégories suivantes de domaines :

1° partout pseudo-convexes;
2° maxima au sens large;
3° maxima;
4° strictement convexes.

Tous les domaines d'une quelconque de ces catégories appartiennent à la catégorie précédente.

Nous allons montrer maintenant que *chacune de ces catégories se conserve par une transformation analytique arbitraire.* D'une façon précise, soit D un domaine univalent appartenant à la catégorie α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$), et soit

$$X = f(x,y), \qquad Y = g(x,y)$$

un système de deux fonctions, holomorphes dans D, qui transforment D en un domaine univalent Δ (1). *Sans rien supposer sur la façon dont se comportent f et g sur la frontière de* D, je dis que Δ *est, lui aussi, de la catégorie* α.

La proposition est presque évidente pour $\alpha = 4$, car il résulte,

(1) Le raisonnement que nous allons faire s'applique également au cas des domaines non univalents, pourvu qu'ils ne soient *pas ramifiés*, c'est-à-dire qu'ils soient univalents au voisinage de chaque point intérieur.

de la définition même d'un domaine strictement convexe, que la propriété, pour un domaine, d'être strictement convexe, se conserve par toute transformation analytique.

Montrons, en second lieu, que *le transformé d'un domaine* D *partout pseudo-convexe est un domaine* Δ *partout pseudo-convexe*. Soit

$$(1) \qquad X = f(x, y), \qquad Y = g(x, y)$$

la transformation de D en Δ, et soit

$$(2) \qquad x = F(X, Y), \qquad y = G(X, Y)$$

la transformation inverse de Δ en D. Les domaines D et Δ étant supposés univalents, on a partout

$$\frac{D(f, g)}{D(x, y)} \neq 0, \qquad \frac{D(F, G)}{D(X, Y)} \neq 0.$$

Si Δ n'était pas partout pseudo-convexe, il existerait un point frontière X_0, Y_0 de Δ, jouissant de la propriété suivante : étant donnée une hypersphère quelconque Σ, de centre X_0, Y_0, toute fonction de X et Y, holomorphe dans la région commune à Δ et Σ, est holomorphe en X_0, Y_0. Alors les fonctions

$$F(X, Y), \quad G(X, Y), \quad \frac{1}{\frac{D(F, G)}{D(X, Y)}}$$

seraient holomorphes en X_0, Y_0. La transformation (2) serait donc régulière en X_0, Y_0, et transformerait le voisinage de X_0, Y_0 en un voisinage univalent V d'un point frontière x_0, y_0 de D. Inversement, dans la région V, $f(x, y)$ et $g(x, y)$ seraient holomorphes, avec

$$\frac{D(f, g)}{D(x, y)} \neq 0.$$

Soit alors S une hypersphère de centre x_0, y_0, intérieure à V. Puisque D est partout pseudo-convexe, il existe une hypersphère S′ intérieure à S, et une fonction $\varphi(x, y)$, holomorphe dans la région commune à D et S′, et non holomorphe en x_0, y_0. Posons

$$\Phi(X, Y) \equiv \varphi[F(X, Y), G(X, Y)].$$

$\Phi(X, Y)$ serait holomorphe dans la région commune à Δ et à une certaine hypersphère Σ de centre X_0, Y_0; elle serait donc holomorphe en X_0, Y_0. Or on a

$$\varphi(x, y) \equiv \Phi[f(x, y), g(x, y)],$$

et, par suite, $\varphi(x, y)$ serait holomorphe en x_0, y_0. Nous arrivons à une contradiction. C. Q. F. D.

On montrerait de la même façon que *le transformé analytique d'un domaine maximum au sens large est maximum au sens large.*

10. Il nous reste enfin à montrer que *le transformé analytique d'un domaine maximum est maximum.* Nous établirons d'abord le lemme suivant :

Lemme. — *Soient k fonctions holomorphes dans un domaine Δ. Si, en chaque point frontière de Δ, l'une au moins de ces fonctions n'est pas holomorphe, il existe une combinaison linéaire de ces fonctions qui n'est holomorphe en aucun point frontière de Δ; Δ est donc maximum.*

Soient en effet $f_1, \ldots, f_k$ ces fonctions. Donnons-nous une suite infinie de points frontières de Δ, $M_1, \ldots, M_p, \ldots$, telle que tout point frontière de Δ soit point limite de cette suite. Il suffit de trouver une combinaison linéaire des f_i qui ne soit holomorphe en aucun point M_p.

Or, en un point frontière donné M_p, il existe au plus $k-1$ combinaisons linéaires homogènes distinctes

$$\Sigma \alpha_i f_i$$

qui soient holomorphes en M_p; sinon, les f_i seraient toutes holomorphes en M_p. Pour qu'une combinaison $\Sigma \alpha_i f_i$ soit holomorphe en M_p, il doit donc exister au moins une relation linéaire homogène entre les α_i.

A chaque M_p est ainsi associée une telle relation; toutes ces relations étant en infinité dénombrable, il est clair qu'on peut choisir les constantes α_i de manière qu'aucune de ces relations ne soit satisfaite. La fonction correspondante $\Sigma \alpha_i f_i$ ne sera holomorphe en aucun point M_p, et le lemme est démontré.

Cela posé, soit D un domaine maximum, et soit Δ le transformé de D par une transformation

$$X = f(x, y), \qquad Y = g(x, y); \tag{1}$$

soit

$$x = F(X, Y), \qquad y = G(X, Y) \tag{2}$$

la transformation inverse.

D et Δ sont supposés univalents (nous l'avons dit plus haut une fois pour toutes). On a donc

$$\frac{D(f, g)}{D(x, y)} \neq 0, \qquad \frac{D(F, G)}{D(X, Y)} \neq 0.$$

Je vais montrer que Δ est maximum. Je considère pour cela une fonction $\varphi(x, y)$, holomorphe dans D, et non prolongeable au delà de D (par hypothèse, il existe une telle fonction). Je pose

$$\Phi(X, Y) \equiv \varphi[F(X, Y), G(X, Y)].$$

Les quatre fonctions

$$\Phi(X, Y), \quad F(X, Y), \quad G(X, Y), \quad \frac{1}{\frac{D(F, G)}{D(X, Y)}}$$

sont holomorphes dans Δ. Je dis que, X_0, Y_0 étant un point frontière quelconque de Δ, l'une au moins de ces quatre fonctions n'est pas holomorphe en X_0, Y_0. Sinon, en raisonnant comme plus haut, on verrait que $\varphi(x, y)$ serait holomorphe en un point frontière x_0, y_0 de D, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il suffit donc d'appliquer à ces quatre fonctions et au domaine Δ le lemme qu'on vient d'établir. Ainsi Δ est maximum.

C. Q. F. D.

Corollaire du lemme. — *Le domaine commun à plusieurs domaines maxima (en nombre fini) est lui-même maximum.*

V. — Les domaines de convergence uniforme des séries de fonctions.

11. Soit Σ un domaine ouvert d'un espace $\mathcal{E}$ à un nombre quelconque de dimensions. Considérons une série de fonctions (réelles

ou complexes) continues dans Σ

$$f_1+f_2+\ldots+f_n+\ldots$$

qui converge uniformément (vers une fonction finie) au voisinage d'un point O intérieur à Σ. L'ensemble des points de Σ au voisinage desquels la série converge uniformément constitue un domaine qui n'est peut-être pas connexe; soit D la partie connexe de ce domaine qui contient O. Nous appellerons D le *domaine de convergence uniforme* de la série.

Théorème VII. — *Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions continues dans un domaine Σ. Étant donnée une série de fonctions de la famille $\mathcal{F}$, qui converge uniformément au voisinage d'un point* O *intérieur à Σ, le domaine de convergence uniforme de cette série est convexe relativement à la famille $\mathcal{F}$.*

En effet, soit D_0 un domaine fermé complètement intérieur au domaine de convergence uniforme D, et soit S une hypersphère, intérieure à Σ, ayant pour centre un point frontière de D. Nous allons montrer qu'il existe une fonction de la famille $\mathcal{F}$ telle que le maximum de son module dans S soit supérieur au maximum de son module dans D_0.

Envisageons à cet effet un domaine fermé D_1, complètement intérieur à D, qui contienne D_0 et des points intérieurs à S. Il suffit de montrer l'existence d'une fonction de $\mathcal{F}$ telle que le maximum de son module dans S soit supérieur au maximum de son module dans D_1. Or, soit

$$f_1+\ldots+f_n+\ldots$$

la série envisagée, et soit ε_n le maximum de $|f_n|$ dans D_1. La série $\sum_1^\infty \varepsilon_n$ est convergente, à cause de la convergence uniforme. Soit E l'ensemble des points de Σ où l'on a, quel que soit n,

$$|f_n| \leqq \varepsilon_n;$$

soit A l'ensemble des points intérieurs à E, et soit Δ la partie connexe de A qui contient le point O.

Il est clair que Δ contient D_1 et est contenu dans D. Puisque Δ

contient D_1, Δ contient des points intérieurs à S; il existe donc au moins un point frontière de Δ intérieur à S, soit M. Dans un voisinage arbitraire de M, il existe un point où l'on a

$$|f_n| > \varepsilon_n,$$

pour une certaine valeur de n (sinon M serait intérieur à Δ). On peut supposer qu'un tel point est intérieur à S.

En résumé, on a $|f_n| > \varepsilon_n$ en un point de S, et $|f_n| \leqq \varepsilon_n$ en tout point de D_1. Comme f_n appartient à la famille $\mathcal{F}$, le théorème est démontré.

12. Plaçons-nous dans l'espace de deux variables complexes x et y.

Théorème VII *bis*. — *Si une série de fonctions holomorphes dans un domaine* Σ *converge uniformément* (*vers une fonction finie*) *au voisinage d'un point* O *intérieur à* Σ, *le domaine de convergence uniforme de la série est convexe relativement à* Σ.

Il suffit en effet d'appliquer le théorème VII au cas envisagé.

Réciproque du théorème VII *bis*. — *Si un domaine* D *est convexe relativement à un domaine* Σ, *c'est le domaine de convergence uniforme d'une certaine série de fonctions holomorphes dans* Σ.

Considérons en effet une suite infinie de domaines fermés $D_1, \ldots, D_p, \ldots$, complètement intérieurs à D, dont chacun est complètement intérieur au suivant, tout point intérieur à D étant intérieur à l'un d'entre eux (et par suite à tous les suivants). Donnons-nous aussi une suite infinie de points $M_1, \ldots, M_p, \ldots$, intérieurs à Σ, appartenant à la frontière de D, et admettant comme points limites tous les points frontières de D intérieurs à Σ. A chaque M_p associons une hypersphère S_p, intérieure à Σ, de centre M_p et de rayon ρ_p $\left(\lim\limits_{p\to\infty} \rho_p = 0\right)$.

Par hypothèse, il existe une fonction $f_p(x, y)$, holomorphe dans Σ, telle que la borne supérieure α_p de son module dans D_p soit plus petite que la borne supérieure β_p de son module dans S_p; en multipliant au besoin f_p par une constante, on peut supposer $\beta_p = 1$.

Soit alors k_p un entier tel que la série $\sum_{p=1}^{\infty}(\alpha_p)^{k_p}$ soit convergente. La série

$$\Sigma[f_p(x,y)]^{k_p}$$

converge uniformément au voisinage de tout point intérieur à D. Je dis qu'elle ne converge uniformément au voisinage d'aucun point frontière de D. Soient en effet P un tel point, et K une hypersphère de centre P; il existe une infinité d'hypersphères S_p intérieures à K, et, par suite, il existe une infinité de fonctions f_p dont le module est égal à *un* en un point de K (ce point peut varier avec la fonction f_p). La convergence n'est donc pas uniforme dans K.

C. Q. F. D.

13. Il est à peine besoin de rappeler que la somme d'une série de fonctions holomorphes est une fonction holomorphe dans le domaine de convergence uniforme (puisqu'on a exclu l'hypothèse de la convergence vers l'infini).

Faisons encore la remarque suivante : une série de fonctions holomorphes dans Σ étant supposée converger uniformément au voisinage d'un point O, l'ensemble des points de Σ où cette famille est normale constitue un domaine; *la partie connexe* D′ *qui contient* O *est identique au domaine de convergence uniforme* D défini plus haut.

Il est clair, en effet, que D′ contient D. Inversement, D contient D′, car si une série de fonctions, appartenant à une famille normale dans D′, converge dans un domaine intérieur à D′, elle converge uniformément dans D′.

14. Combinons maintenant le théorème VII *bis* avec le théorème II. Il vient immédiatement :

Théorème VIII. — *Si le domaine de convergence uniforme d'une série de fonctions holomorphes dans un domaine Σ est complètement intérieur* [1] *à Σ, il est strictement convexe, et, en particulier, maximum.*

---

[1] Par « domaine ouvert *complètement intérieur* à un domaine Σ », il faut entendre un domaine intérieur à un domaine fermé lui-même complètement intérieur à Σ.

Cette proposition complète le théorème de G. Julia, relatif à l'ensemble des points où une famille est normale.

En combinant le théorème VII avec le théorème III, nous trouvons :

Théorème IX. — *Le domaine de convergence uniforme d'une série de polynomes est strictement convexe relativement à la famille des polynomes, et, en particulier, maximum.*

Réciproquement, tout domaine strictement convexe relativement à la famille des polynomes est le domaine de convergence uniforme d'une certaine série de polynomes (1).

J'avais déjà montré, dans mon Mémoire [C], que le domaine de convergence uniforme d'une série de polynomes homogènes est maximum. D'une façon précise, en combinant le théorème VII avec l'un des théorèmes III *bis* et III *ter*, nous trouvons :

Théorème IX *bis*. — *Le domaine de convergence uniforme d'une série de polynomes homogènes est strictement convexe relativement à la famille des polynomes homogènes. Réciproquement, tout domaine strictement convexe relativement à la famille des polynomes homogènes est le domaine de convergence d'une certaine série de polynomes homogènes.*

Théorème IX *ter*. — *Le domaine de convergence uniforme d'une série double de Taylor est strictement convexe relativement à la famille $\mathcal{F}$ des monomes $x^m y^p$* (m et p entiers positifs ou nuls). *Réciproquement, tout domaine strictement convexe relativement à $\mathcal{F}$ est le domaine de convergence uniforme d'une certaine série de Taylor.*

Comme je l'ai déjà dit, on déduit de là la propriété caractéristique de la relation entre les rayons des cercles de convergence associés.

VI. — Les domaines normaux.

13. Nous resterons désormais dans l'espace de deux variables complexes x et y.

---

(1) Cette réciproque s'établit comme la réciproque du théorème VII *bis* (no 12).

Rappelons la définition donnée dans l'Introduction : « un domaine univalent D est dit *normal* si toute fonction holomorphe dans D y est développable en série uniformément convergente de polynomes. »

Tous les domaines cerclés (et *a fortiori* les domaines de Reinhardt) sont normaux, puisque toute fonction holomorphe dans un domaine cerclé y est développable en série uniformément convergente de polynomes homogènes ([C], théorème II).

Théorème X. — *Tout domaine normal maximum est strictement convexe relativement à la famille des polynomes.*

Soient en effet D un tel domaine, et $f(x, y)$ une fonction holomorphe dans D et non prolongable au delà. Son développement en série de polynomes aura évidemment D pour domaine de convergence uniforme; le théorème IX entraîne le théorème X.

En somme, *pour qu'un domaine normal soit maximum, il faut et il suffit qu'il soit strictement convexe relativement à la famille des polynomes* (conséquence des théorèmes V et X).

Théorème XI. — *Soit* D *un domaine normal. Il existe un domaine normal maximum* Δ, *qui jouit de la propriété suivante : toute fonction holomorphe dans* D *est aussi holomorphe dans* Δ.

En effet, le plus petit domaine convexe (relativement à la famille des polynomes) contenant D est strictement convexe (théorème III), donc maximum (théorème V). Soit Δ ce domaine.

Soit alors $f(x, y)$ une fonction holomorphe dans D. Son développement en série de polynomes a pour domaine de convergence uniforme Δ' un domaine convexe relativement à la famille des polynomes (théorème VII). Comme Δ' contient D, Δ' contient Δ, et $f(x, y)$ est holomorphe dans Δ.

Il reste à montrer que Δ est normal. Or, toute fonction holomorphe dans Δ est *a fortiori* holomorphe dans D, et admet par suite un développement en série de polynomes qui converge uniformément dans D, donc dans Δ. C. Q. F. D.

16. Les domaines majorables. — J'ai introduit cette classe de domaines dans mon Mémoire [C] (Chap V, § 5). *Par définition, un domaine non ramifié* D *est « majorable », s'il existe un*

domaine Δ, *non ramifié, maximum au sens large, qui contient* D *et jouit de la propriété suivante : toute fonction holomorphe dans* D *est aussi holomorphe dans* Δ. Le domaine Δ est dit *associé* au domaine D. Dans le cas où le domaine associé est *maximum*, le domaine D sera dit « strictement majorable ».

Le théorème XI peut alors s'énoncer ainsi : *tout domaine normal est strictement majorable*, et le domaine associé est *normal*.

Nous allons indiquer quelques propriétés communes à tous les domaines majorables; elles appartiendront en particulier à tous les domaines normaux.

Théorème XII. — *Tout domaine, maximum au sens large, qui contient un domaine majorable, contient le domaine associé.*

Soient en effet D un domaine majorable, Δ le domaine associé, Δ' un domaine maximum au sens large qui contient D. Si le domaine Δ' ne contenait pas Δ, il aurait un point frontière M intérieur à Δ. Soit $f(x, y)$ une fonction holomorphe dans Δ' et non holomorphe en M; $f(x, y)$, étant holomorphe dans D, serait holomorphe dans Δ, donc en M. Il y a contradiction.

C. Q. F. D.

Corollaire. — Le domaine *associé* à un domaine majorable est *unique*: en effet, si un domaine Δ' jouit, vis-à-vis de D, de la même propriété que le domaine associé Δ, il contient Δ, d'après le théorème précédent. Pour la même raison, Δ contient Δ'.

C. Q. F. D.

Théorème XIII. — *Si un domaine strictement majorable est maximum au sens large, il est maximum.*

Soit en effet D un tel domaine; il est, par hypothèse, maximum au sens large; comme D se contient lui-même, on peut lui appliquer le théorème précédent. Donc D contient le domaine associé Δ; mais Δ contient D. Le domaine D est donc identique à Δ, qui par hypothèse est maximum. C. Q. F. D.

Corollaire. — *Si un domaine normal est maximum au sens large, il est maximum;* il est même *strictement convexe* relativement à la famille des polynomes (théorème X).

THÉORÈME XIV. — *Soient* D *un domaine majorable*, Δ *le domaine associé. Si une fonction, méromorphe dans* D, *n'y prend pas la valeur* a, *elle est méromorphe dans* Δ *et n'y prend pas la valeur* a; *si une fonction est holomorphe et bornée dans* D, *elle est holomorphe et admet la même borne dans* Δ.

En effet, si $f(x, y)$ ne prend pas la valeur a dans D, la fonction

$$\varphi(x, y) \equiv \frac{1}{f(x, y) - a}$$

est homolorphe dans D, et par suite dans Δ. C. Q. F. D.

Si maintenant l'on a

$$|f(x, y)| \leqq M$$

dans D, la fonction $f(x, y)$ ne prend dans D aucune valeur de module plus grand que M; elle ne prend alors dans Δ aucune de ces valeurs, et l'on a aussi, dans Δ,

$$|f(x, y)| \leqq M. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

COROLLAIRE. — *Si un domaine majorable est borné, le domaine associé est borné.*

En effet, les fonctions x et y, étant bornées dans le premier domaine, sont bornées dans le second. C. Q. F. D.

THÉORÈME XV ([1]). — *Soient* D *un domaine majorable, et* Δ *le domaine associé. Si une transformation analytique transforme* D *en un domaine* D' *non ramifié*, D' *est majorable, et la même transformation transforme* Δ *en* Δ', *domaine associé à* D'.

Soit en effet

$$(1) \qquad X = f(x, y), \qquad Y = g(x, y)$$

la transformation de D en D'. Les fonctions f et g, étant holomorphes dans D, sont aussi holomorphes dans Δ; puisque leur déterminant fonctionnel ne s'annule pas dans D, il ne s'annule pas dans Δ. La transformation (1) transforme donc Δ en un domaine non ramifié Δ'. Puisque Δ est maximum au sens large, Δ' est aussi maximum au sens large (*cf.* n° 9).

([1]) *Cf.* [C], Chapitre V, théorème XLIII.

Il reste à montrer que toute fonction $\Phi(X, Y)$, holomorphe dans D′, est aussi holomorphe dans Δ'. Or, posons

$$\varphi(x, y) = \Phi[f(x, y), g(x, y)].$$

La fonction $\varphi(x, y)$ est holomorphe dans D, donc dans Δ. On en déduit aussitôt que $\Phi(X, Y)$ est holomorphe dans Δ'.

C. Q. F. D.

Remarque. — Si D est strictement majorable, D′ est strictement majorable. En effet, Δ étant maximum, son transformé Δ' est maximum (n° 9).

Corollaire du théorème XV. — *Toute transformation analytique biunivoque d'un domaine majorable en lui-même est en même temps une transformation analytique biunivoque du domaine associé en lui-même.*

Remarquons enfin que tout domaine qui contient un domaine majorable D et est contenu dans le domaine associé Δ est lui-même majorable et admet Δ comme domaine associé. A l'aide de cette remarque et du corollaire précédent, j'ai indiqué dans mon Mémoire [C] (Chap. V, § 5) un procédé général de construction de domaines qui n'admettent aucune transformation analytique en eux-mêmes.

17. La notion de domaine normal est susceptible de généralisation. Par définition, un domaine D, intérieur à un domaine Σ, sera dit *normal relativement à* Σ, si toute fonction holomorphe dans D y est développable en série uniformément convergente de fonctions holomorphes dans Σ. Les domaines normaux considérés plus haut se présentent alors comme les domaines normaux relativement à tout l'espace à distance finie ([1]).

Théorème XVI. — *Soit* D *un domaine normal relativement à un domaine* Σ. *Soit* Δ *le plus petit domaine convexe (relativement à* Σ*) contenant* D. *Le domaine* Δ *est normal, et toute fonction holomorphe dans* D *est aussi holomorphe dans* Δ.

([1]) Il est clair, en effet, que si une fonction est développable en série uniformément convergente de fonctions entières, elle est développable en série uniformément convergente de polynomes.

En effet, soit $f(x, y)$ une fonction holomorphe dans D. Elle y admet un développement en série de fonctions holomorphes dans Σ. Cette série admet un domaine de convergence uniforme Δ' qui contient D (par hypothèse) et est convexe relativement à Σ (théorème VII *bis*). Il contient donc Δ (théorème I), et $f(x, y)$ est holomorphe dans Δ. Le domaine Δ est normal, car toute fonction holomorphe dans Δ est *a fortiori* holomorphe dans D, et, par suite, admet un développement en série de fonctions holomorphes dans Σ, qui converge uniformément dans D, donc dans Δ.

C. Q. F. D.

THÉORÈME XVII. — *Soient Σ un domaine strictement convexe, et D un domaine complètement intérieur à Σ. Si D est normal relativement à Σ, D est strictement majorable.*

Soit en effet Δ le plus petit domaine convexe (relativement à Σ) contenant D. D'après le théorème IV (n° 7), Δ est complètement intérieur à Σ, donc strictement convexe (théorème II), et, en particulier, maximum. D'après le théorème XVI, toute fonction holomorphe dans D est aussi holomorphe dans Δ.

C. Q. F. D.

Puisque D est strictement majorable, D jouit de toutes les propriétés énoncées au n° 16.