F. LEJA

Sur une famille de séries trigonométriques doubles

Bulletin de la S. M. F., tome 59 (1931), p. 119-127
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1931__59__119_0>

SUR UNE FAMILLE DE SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES DOUBLES.

Par M. F. Leja.

1. Soient r et s deux nombres non négatifs assujettis à la relation

$$r+s=1, \qquad r \geqq 0, \qquad s \geqq 0, \tag{1}$$

et α et β deux variables réelles quelconques. Le but de cette Note est d'examiner la convergence [1] des séries trigonométriques doubles de la forme

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\,\nu!} \frac{r^\mu s^\nu}{\mu+\nu} e^{i(\mu\alpha+\nu\beta)}, \tag{2}$$

où la sommation s'étend à tous les indices μ, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ à l'exception des indices $\mu = \nu = 0$.

Observons que, si la série (2) converge, la convergence ne peut pas être absolue car, si l'on pose

$$A_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\,\nu!} \frac{r^\mu s^\nu}{\mu+\nu}$$

et

$$M = \min(m, n), \qquad N = m+n,$$

on obtient les inégalités

$$\sum_{k=1}^{M} \frac{(r+s)^k}{k} \leqq A_{mn} \leqq \sum_{k=1}^{N} \frac{(r+s)^k}{k}, \tag{3}$$

---

[1] Une série double $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}$ est dite convergente (au sens de M. Pringsheim) si la suite double $s_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}$ tend vers une limite s, c'est-à-dire si à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un indice p tel qu'on ait $|s_{mn} - s| < \varepsilon$ pour $m > p$ et $n > p$.

d'où il suit d'après (1) que la suite A_{mn} tend vers l'infini avec m et n.

2. La série (2) reste dans une intime liaison avec la fonction analytique de deux variables

$$ln \frac{1}{1-x-y},$$

dont le développement en série de Taylor a la forme suivante :

$$(4) \qquad \sum_{\mu, \nu = 0}^{\infty} \frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\,\nu!} \frac{x^\mu y^\nu}{\mu+\nu} \qquad (\mu+\nu > 0).$$

Cette série converge absolument dans le domaine [1]

$$(5) \qquad |x| + |y| < 1$$

et diverge dans le domaine complémentaire, ce qui résulte des inégalités (3) si l'on y pose $|x| = r$, $|y| = s$. Aux points frontières du domaine (5), où

$$x = r\,e^{i\alpha}, \qquad y = s\,e^{i\beta} \qquad (r+s=1),$$

la série (4) devient identique avec la série (2).

Je vais démontrer le théorème que voici :

Théorème. — *Quels que soient r et s assujettis aux conditions (1) et les variables α, β, où*

$$(6) \qquad 0 \leqq \alpha < 2\pi, \qquad 0 \leqq \beta < 2\pi,$$

la série trigonométrique (2) converge si

$$(7) \qquad r\alpha + s\beta > 0$$

et diverge si

$$r\alpha + s\beta = 0 \quad [2].$$

Avant de passer à la démonstration nous prouverons quelques

---

(1) Dans ce domaine la somme de la série (4) est égale à la valeur principale du $ln \dfrac{1}{1-x-y}$.

(2) Il est probable que ce théorème peut être généralisé aux séries trigonomé-

inégalités préliminaires. Posons $a_{00} = 0$ et

$$(8) \qquad a_{\mu\nu} = \frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\,\nu!}\,\frac{r^{\mu}s^{\nu}}{\mu+\nu} \qquad \text{pour } \mu+\nu>0;$$

on peut montrer que :

Quels que soient r et s, $r+s=1$, on a

$$(9) \qquad 0 \leqq a_{\mu\nu} \leqq \frac{1}{\sqrt{\mu\nu(\mu+\nu)}} \qquad \text{pour } \mu>0,\ \nu>0.$$

En effet, en vertu de la formule de Stirling

$$n! = e^{-n}\, n^{n}\sqrt{2\pi n}\, e^{\varepsilon_n},$$

où

$$0 < \varepsilon_n < \frac{1}{8n},$$

on obtient de (8)

$$a_{\mu\nu} = \left(\frac{\mu+\nu}{\mu}r\right)^{\mu}\left(\frac{\mu+\nu}{\nu}s\right)^{\nu}\frac{A}{\sqrt{\mu\nu(\mu+\nu)}} \qquad \text{si } \mu,\ \nu>0,$$

où l'on a posé

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\varepsilon_{\mu+\nu}-\varepsilon_{\mu}-\varepsilon_{\nu}}.$$

Or, si μ et ν sont fixes, la fonction de r

$$g(r) = \left(\frac{\mu+\nu}{\mu}r\right)^{\mu}\left(\frac{\mu+\nu}{\nu}s\right)^{\nu} \qquad (s=1-r)$$

atteint son maximum au point

$$r = \frac{\mu}{\mu+\nu}, \qquad s = \frac{\nu}{\mu+\nu}$$

---

triques n-uples que voici :

$$\sum_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n=0}^{\infty} \frac{(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n)!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_n!}\cdot\frac{r_1^{\nu_1}r_2^{\nu_2}\ldots r_n^{\nu_n}}{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n}\cdot e^{i(\nu_1\alpha_1+\ldots+\nu_n\alpha_n)},$$

où la sommation s'étend à tous les $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n = 0, 1, \ldots$ pour lesquels $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n>0$ et où $r_k \geqq 0$, $r_1+r_2+\ldots+r_n=1$.

Cette série semble être convergente si la somme $r_1\alpha_1+r_2\alpha_2+\ldots+r_n\alpha_n$ est positive et divergente dans le cas contraire, étant supposé que $0 \leqq \alpha_k < 2\pi$, pour $k=1, 2, \ldots, n$. Néanmoins la méthode dont je me sers plus bas n'est pas suffisante dans ce cas général.

donc on a $g(r) \leqq 1$, quels que soient μ, ν, r. D'autre part, on a $A < 1$ car $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{8n}$, donc les inégalités (9) sont vraies.

Nous aurons encore recours aux propriétés suivantes des expressions $a_{\mu\nu}$:

Si r et s sont positifs et fixes on a, quel que soit $\mu = 0, 1, \ldots,$

$$a_{\mu 0} < a_{\mu 1} < \ldots < a_{\mu,\nu_\mu} \geqq a_{\mu,\nu_\mu+1} > \ldots > a_{\mu,\nu_\mu+k} > \ldots \tag{10}$$

où l'on a posé (¹)

$$\begin{cases} \nu_\mu = E\left(\dfrac{\mu s - 1}{r}\right), & \text{si } \dfrac{\mu s - 1}{r} \geqq 0, \\ \nu_\mu = 0. & \text{si } \dfrac{\mu s - 1}{r} < 0. \end{cases} \tag{11}$$

Cela résulte immédiatement de (8). D'autre part, la série simple

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu,\nu_\mu}, \tag{12}$$

où r et s sont supposés positifs et fixes, est toujours convergente.

En effet, on a d'après (9)

$$0 \leqq a_{\mu,\nu_\mu} \leqq \frac{1}{\sqrt{\mu\nu_\mu(\mu+\nu_\mu)}};$$

donc, étant en vertu de (11)

$$\nu_\mu > \frac{\mu s - 1}{r} - 1 = \mu\frac{s}{r} - \frac{1+r}{r},$$

on a pour $\mu > \frac{1+r}{s}$

$$a_{\mu,\nu_\mu} < \frac{1}{\sqrt{\mu\left(\mu\frac{s}{r} - \frac{1+r}{r}\right)\left(\mu\frac{1}{r} - \frac{1+r}{r}\right)}}$$
$$< \frac{1}{\sqrt{\mu^3}} \frac{r}{\sqrt{\left(s - \frac{1+r}{\mu}\right)\left(1 - \frac{1+r}{\mu}\right)}},$$

d'où résulte la convergence de la série (12).

4. Démonstration du théorème. — Considérons deux nombres

(¹) $E(x)$ = le plus grand entier ne surpassant pas x.

fixes α et β satisfaisant à l'inégalité (6), et supposons que la somme (7) soit positive et, par suite, qu'un des produits $r\alpha$ ou $s\beta$ soit positif. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que

$$s\beta > 0. \tag{13}$$

Posons

$$b_{\mu\nu} = e^{i(\mu\alpha+\nu\beta)}$$

et

$$B_{\mu\nu} = b_{\mu 0} + b_{\mu 1} + \ldots + b_{\mu\nu} = e^{i\mu\alpha}\frac{1-e^{i(\nu+1)\beta}}{1-e^{i\beta}};$$

donc on a, quels que soient μ, $\nu = 0, 1, \ldots,$

$$|B_{\mu\nu}| < M, \tag{14}$$

où M est un nombre fixe, ne dépendant pas des μ, ν.

En vertu de (13) et (1) on a $0 < s \leqq 1$. Si $s = 1$, on a $r = 0$ et la série double (2) se réduit à la série simple

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{i\beta\nu}}{\nu},$$

bien connue, qui est convergente car $0 < \beta < 2\pi$. Supposons que $0 < s < 1$ et, par suite, que $0 < r < 1$.

Les sommes partielles de la série (2)

$$s_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\,\nu!}\,\frac{r^\mu s^\nu}{\mu+\nu}\,e^{i(\mu\alpha+\nu\beta)} \qquad (\mu+\nu > 0)$$

peuvent être écrites comme il suit

$$s_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} b_{\mu\nu} = \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}(B_{\mu\nu} - B_{\mu\nu-1})$$

ou

$$s_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n-1} B_{\mu\nu}(a_{\mu\nu} - a_{\mu,\nu+1}) + \sum_{\mu=0}^{m} B_{\mu n} a_{\mu n}. \tag{15}$$

Or, la suite double

$$v_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} B_{\mu n} a_{\mu n} \tag{16}$$

tend vers zéro, si m et $n \to \infty$, car, d'après (14) et (8), on a

$$|v_{mn}| < M\frac{s^n}{n}\sum_{\mu=0}^{m}\binom{\mu+n-1}{n-1} r^\mu < M\frac{s^n}{n}\,\frac{1}{(1-r)^n},$$

d'où

$$|v_{mn}| < \frac{M}{n},$$

car $1 - r = s$. D'autre part, la suite double

$$(17) \qquad u_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n-1} B_{\mu\nu}(a_{\mu\nu} - a_{\mu,\nu+1})$$

est convergente car la série double

$$(18) \qquad \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} B_{\mu\nu}(a_{\mu\nu} - a_{\mu,\nu+1})$$

converge absolument. En effet, d'après (14), on a

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} |B_{\mu\nu}(a_{\mu\nu} - a_{\mu,\nu+1})| < M \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\mu\nu} - a_{\mu,\nu+1}|$$

et d'après (10), on a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\mu\nu} - a_{\mu,\nu+1}| \leqq 2a_{\mu,\nu_\mu};$$

donc la convergence absolue de la série (18) résulte de la convergence de la série (12). Il s'ensuit que la suite double (15) tend vers une limite dans le cas $r\alpha + s\beta > 0$.

Supposons maintenant qu'on ait $r\alpha + s\beta = 0$. Si l'on a $r > 0$ et $s > 0$, on doit avoir $\alpha = \beta = 0$ et dans ce cas la série (2) diverge en vertu de l'inégalité (3). D'autre part, si $r = 0$, $s = 1$, on doit avoir $\beta = 0$ et dans ce cas la série (2) se réduit à la série simple $\sum^{\infty} \frac{1}{\nu}$ donc le théorème est démontré.

5. Il est facile de trouver la somme de la série (2). J'avais démontré ailleurs (¹) que :

Si une série entière double

$$(19) \qquad f(x, y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu;$$

(¹) *Voir* ce Journal, t. 57, 1929, p. 72-77.

1° *converge absolument dans le domaine*

$$\{|x|<|x_0|, |y|<|y_0|\},$$

2° *converge au point* (x_0, y_0) *et* 3° *si toutes les limites* [1]

$$\limsup_{x \to x_0} \left| \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x^{\mu} \right| \qquad (\nu = 0, 1, \ldots),$$

$$\limsup_{y \to y_0} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} y^{\nu} \right| \qquad (\mu = 0, 1, \ldots)$$

sont finies, on a toujours

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x_0^{\mu} y_0^{\nu} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(xy).$$

Il suit de cette proposition que, si les conditions (1) sont remplies, on a, quels que soient r, s, α et β satisfaisant à (6) et (7),

$$(20) \qquad \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\,\nu!} \frac{r^{\mu} s^{\nu}}{\mu+\nu} e^{i(\mu\alpha+\nu\beta)} = ln \frac{1}{1 - r e^{i\alpha} - s e^{i\beta}},$$

où le terme de la série (20) correspondant aux indices $\mu = \nu = 0$ est supposé être égal à zéro, et la partie imaginaire I du logarithme satisfait aux inégalités

$$-\pi < I \leqq \pi.$$

Des deux séries réelles

$$(21) \qquad \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\,\nu!} \frac{r^{\mu} s^{\nu}}{\mu+\nu} \cos(\mu\alpha+\nu\beta) \qquad (\mu+\nu>0),$$

$$(22) \qquad \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\,\nu!} \frac{r^{\mu} s^{\nu}}{\mu+\nu} \sin(\mu\alpha+\nu\beta) \qquad (\mu+\nu>0),$$

convergentes si $r\alpha + s\beta > 0$, la seconde converge aussi dans le cas $r\alpha + s\beta = 0$ vers la somme $= 0$. La somme de la série (21) est

---

[1] Où x doit rester dans le domaine $\left\{ |x| < |x_0|, \frac{|x_0 - x|}{|x_0| - |x|} < \alpha \right\}$ et y dans le domaine $\left\{ |y| < |y_0|, \frac{|y_0 - y|}{|y_0| - |y|} < \beta \right\}$, α et β étant des nombres $\geqq 1$ quelconques, mais finis.

égale à

$$ln\frac{1}{2\sqrt{r\sin^2\frac{\alpha}{2}+s\sin^2\frac{\beta}{2}-rs\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}}},$$

et celle de la série (22) est égale à l'argument φ de l'expression

$$\frac{(1-r\cos\alpha-s\cos\beta)+i(r\sin\alpha+s\sin\beta)}{\sqrt{(1-r\cos\alpha-s\cos\beta)^2+(r\sin\alpha+s\sin\beta)^2}}.$$

où $-\pi<\varphi\leqq\pi$.

6. En terminant, je vais donner une application de notre théorème :

Le domaine de la convergence absolue d'une série entière double (19) est constitué par l'ensemble des points (x, y) satisfaisant à une certaine inégalité de la forme

$$|y|<\varphi(|x|) \qquad \text{pour } |x|<R, \tag{23}$$

où $\varphi(r)$ est une fonction positive non croissante, dépendant des coefficients $a_{\mu\nu}$ de la série (19), et R est un nombre positif fini ou infini. J'ai démontré ailleurs ([1]) que, si $\varphi(r)=$ const. dans un intervalle $0\leqq r<R_0\leqq R$, l'ensemble des points de divergence de la série (19) situés sur la partie

$$|y|=\varphi(|x|), \qquad |x|<R_0,$$

de la frontière du domaine (23) n'a jamais de points isolés ([2]).

Il s'élève la question, si la frontière du domaine (23) jouit de la même propriété dans le cas où $\varphi(r)$ est une fonction décroissante.

Or, la réponse est négative. En effet, considérons la série entière double

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\,\nu!}\,\frac{2^{\mu+\nu}}{(\mu+\nu)^2}x^{2\mu}y^{2\nu}, \tag{24}$$

où le terme constant est supposé être égal à zéro. Cette série converge absolument à l'intérienr et sur la frontière de la sphère

---

([1]) *Ksiega I Pol. Zjazdu Matem.* (Supplément aux *Annales de la Soc. polon. de Mathém.*, 1929, p. 127.)

([2]) Bien que l'ensemble des points de convergence, y situés, peut avoir des points isolés.

à quatre dimensions

(25) $$|x|^2+|y|^2<\frac{1}{2}$$

et diverge à son extérieur, ce qui résulte immédiatement de l'identité

$$\sum_{\mu+\nu=1}^{n}\frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\,\nu!}\,\frac{2^{\mu+\nu}}{(\mu+\nu)^2}x^{2\mu}y^{2\nu}=\sum_{k=1}^{n}\frac{[2(x^2+y^2)]^k}{k^2}.$$

La sphère (25) est située avec sa frontière à l'intérieur du domaine

(26) $$|x|+|y|<1$$

excepté la variété à deux dimensions

(27) $$x=\frac{1}{2}e^{i\alpha},\qquad y=\frac{1}{2}e^{i\beta}\qquad (\alpha \text{ et } \beta \text{ quelconques}),$$

qui est située en même temps sur la frontière de la sphère (25) et sur celle du domaine (26).

D'après le paragraphe 2, la série

(28) $$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\,\nu!}\,\frac{x^\mu y^\nu}{\mu+\nu}$$

converge absolument à l'intérieur et sur la frontière de la sphère (25), à l'exception de la variété (27). Elle converge aussi, mais non absolument, sur la variété (27), excepté le seul point $x=y=\frac{1}{2}$, en lequel elle est divergente.

Considérons la série entière double égale à la somme des séries (24) et (28). Il suit de ce qui précède que :

1° *Le domaine de la convergence absolue de cette nouvelle série est identique avec la sphère* (25) et que :

2° *Cette série converge sur la variété frontière (à trois dimensions)*

$$|x|^2+|y|^2=\frac{1}{2}$$

partout, à l'exception du seul point $x=y=\frac{1}{2}$ *en lequel elle est divergente.*