BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL VINCENSINI

Sur la déformation des surfaces et sur quelques propriétés des surfaces spirales

Bulletin de la S. M. F., tome 59 (1931), p. 211-228
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1931__59__211_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1931, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA DÉFORMATION DES SURFACES ET SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SURFACES SPIRALES ;

Par M. P. Vincensini.

L'objet du présent article est l'étude de quelques conséquences d'un théorème relatif à la déformation des surfaces, que nous avons démontré récemment ([1]), et qui peut être regardé comme une généralisation du théorème de Gauss sur la conservation de la courbure.

Nous avons commencé notre étude par l'établissement du théorème ci-dessus, les éléments du calcul que comporte sa démonstration, intervenant dans quelques-unes des questions que nous nous proposons de développer.

Après avoir signalé quelques résultats, relatifs aux congruences rectilignes, aux surfaces minima ou à certains systèmes cycliques, nous nous occupons plus spécialement des surfaces spirales de Maurice Lévy.

L'étude de ces dernières surfaces conduit à des propriétés caractéristiques qui nous ont paru mériter d'être signalées.

La propriété (A) qui termine le numéro (IV) a été brièvement indiquée dans une Note des *Comptes rendus* ([2]). Nous l'avons rétablie, pour la compléter, et en même temps pour faciliter l'exposition de quelques résultats ultérieurs.

I. — Propriété relative à la déformation des surfaces.

Envisageons une surface quelconque (S). Soit M l'un quelconque de ses points. Désignons par (π) le plan tangent en M à (S), et associons (en système invariable), à chaque plan (π), l'une de ses perpendiculaires. Nous obtenons une congruence rectiligne ($\mathcal{C}$).

([1]) *C. R. Acad. Sc.*, 191, p. 1278.
([2]) *C. R. Acad. Sc.*, 192, p. 260.

Nous allons établir que :

Si l'on déforme arbitrairement (S), les plans tangents et, par suite, les rayons de (𝒞) étant entraînés dans la déformation, le produit des distances des deux foyers situés sur un rayon quelconque de (𝒞) au plan tangent correspondant, reste invariable.

Soit I le point où le rayon de (𝒞), perpendiculaire au plan tangent (π) en M à (S), perce (π).

A chaque point $M(x, y, z)$ de (S), correspond une tangente MI à (S). Rapportons (S) aux courbes tangentes aux droites MI, $v =$ const., et à leurs trajectoires orthogonales, $u =$ const.

L'élément linéaire aura la forme

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2.$$

Attachons à (S) le trièdre trirectangle formé par : la tangente à la courbe $v =$ const., de cosinus directeurs X_1, Y_1, Z_1; la tangente à la courbe $u =$ const., de cosinus directeurs X_2, Y_2, Z_2; la normale en M, de cosinus directeurs X_3, Y_3, Z_3.

Les coordonnées du point I, relatives au trièdre, sont $(\xi, 0, 0)$. Par rapport aux axes fixes, les coordonnées d'un point quelconque P du rayon D de (𝒞), issu de I, sont

$$\begin{aligned} l &= x + \xi X_1 + \lambda X_3, \\ m &= y + \xi Y_1 + \lambda Y_3, \\ n &= z + \xi Z_1 + \lambda Z_3, \end{aligned}$$

$\lambda(u, v)$ étant la distance du point P au plan tangent (π). Pour déterminer les foyers situés sur D, envisageons le système

$$\frac{dl}{X_3} = \frac{dm}{Y_3} = \frac{dn}{Z_3}.$$

En tenant compte des expressions de l, m, n; multipliant les deux termes de chacun des rapports ci-dessus par X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2, et ajoutant, on obtient les deux équations

$$S X_1\,dx + d\xi + \lambda S X_1\,dX_3 = 0,$$
$$S X_2\,dx + \xi S X_2\,dX_1 + \lambda S X_2\,dX_3 = 0;$$

qui, en introduisant les coefficients de la deuxième forme fondamentale de (S)

$$-\,S\,dX_3\,dx = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2,$$

et en utilisant les relations connues

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_2 + \frac{D}{\sqrt{E}}X_3,$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_2 + \frac{D'}{\sqrt{E}}X_3,$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial u} = -\frac{D}{\sqrt{E}}X_1 - \frac{D'}{\sqrt{G}}X_2,$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial v} = -\frac{D'}{\sqrt{E}}X_1 - \frac{D''}{\sqrt{G}}X_2,$$

s'écrivent :

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned} &\left(\sqrt{E} + \frac{\partial\xi}{\partial u} - \lambda\frac{D}{\sqrt{E}}\right)du + \left(\frac{\partial\xi}{\partial v} - \lambda\frac{D'}{\sqrt{E}}\right)dv = 0,\\ &-\left(\frac{\xi}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \lambda\frac{D'}{\sqrt{G}}\right)du + \left(\sqrt{G} + \frac{\xi}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \lambda\frac{D''}{\sqrt{G}}\right)dv = 0.\end{aligned}\right.$$

L'élimination de $\frac{du}{dv}$, dans (1), donne l'équation aux distances des foyers situés sur le rayon D au plan (π).

Si l'on introduit la courbure totale K de la surface (S), on peut écrire l'équation en question

$$\begin{aligned}(2)\quad K\sqrt{EG}\,\lambda^2 - \Bigg[&\frac{1}{\sqrt{E}}\left(\sqrt{G} + \frac{\xi}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)D\\ &- \frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial\xi}{\partial v} - \frac{\xi}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)D' + \frac{1}{\sqrt{G}}\left(\sqrt{E} + \frac{\partial\xi}{\partial u}\right)D''\Bigg]\lambda\\ &+ \left(\sqrt{E} + \frac{\partial\xi}{\partial u}\right)\left(\sqrt{G} + \frac{\xi}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\xi}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial v} = 0.\end{aligned}$$

Pour une congruence $(\mathcal{C})$ *donnée*, le produit des racines de l'équation (2) *ne dépend que de l'élément linéaire de* (S), conformément au théorème énoncé.

II. — Conséquences du théorème précédent.

On peut, par le procédé indiqué au début du numéro précédent, associer une surface et une congruence absolument quelconques.

Si l'on associe à une surface quelconque, la congruence de ses normales $[\xi = 0]$, on retrouve le théorème de Gauss.

En choisissant convenablement (S) et ($\mathcal{C}$), et en particularisant au besoin la déformation de (S), on peut obtenir des résultats intéressants.

Envisageons tout d'abord une surface (S) et une congruence (Δ) *associée*, absolument quelconques.

Soit Δ le rayon de (Δ) normal au plan tangent en M à (S). Δ, perce le plan tangent, en K. Menons par O le vecteur (OI) équipollent à (MK), et par I la parallèle D à Δ (I est la projection orthogonale de O sur D).

L'ensemble des droites D constitue une congruence ($\mathcal{C}$). Désignons par F et F' les foyers de ($\mathcal{C}$) portés par D. Lorsqu'on déforme (S) arbitrairement, (Δ) se déforme aussi, de même que ($\mathcal{C}$). Il est facile de voir qu'au cours de cette déformation [dépendant de deux fonctions arbitraires], $\overline{\mathrm{IF}} \times \overline{\mathrm{IF'}}$ *reste invariable.*

Il suffit, pour s'en rendre compte, de soumettre (S) à l'homothétie de centre O et de rapport λ, *sans modifier les longueurs des différents segments* MK, puis de faire tendre λ vers zéro.

Cette remarque, lie au problème de la déformation des surfaces, une solution présentant un grand degré de généralité, du problème suivant :

Soient ($\mathcal{C}$) *une congruence rectiligne quelconque,* O *un point quelconque de l'espace,* I *la projection de* O *sur un rayon quelconque* D *de* ($\mathcal{C}$), F *et* F' *les foyers portés par* D. *Transformer* ($\mathcal{C}$) *de façon que le produit* $\overline{\mathrm{IF}} \times \overline{\mathrm{IF'}}$ *reste constant avec* OI.

Envisageons une surface quelconque (S). Associons à chaque rayon D de ($\mathcal{C}$), un plan tangent à (S) normal à D. Menons par le point de contact M, le vecteur (MK) équipollent à (OI), puis par K la parallèle Δ à D. Supposons les différentes droites Δ, invariablement liées aux plans tangents correspondants à (S). En déformant (S) arbitrairement, et en prenant les congruences déduites des différentes congruences (Δ) par la construction inverse de celle ci-dessus indiquée, on obtient la solution en question.

Supposons maintenant que (S) soit une surface minima ($\mathcal{M}$); ($\mathcal{C}$) étant toujours absolument quelconque, et (Δ) se déduisant de ($\mathcal{C}$) comme il a été expliqué.

Soumettons ($\mathcal{M}$) à la déformation continue qui la transforme en ses ∞^1 *associées* ($\mathcal{M}_\alpha$) [α est l'angle de deux éléments linéaires homologues sur ($\mathcal{M}$) et ($\mathcal{M}_\alpha$)]. Les différents rayons de (Δ) tournent de l'angle α, autour des normales correspondantes à ($\mathcal{M}$), et les rayons de ($\mathcal{C}$) *tournent de l'angle α autour de leurs parallèles issues de* O.

Au cours de cette déformation de ($\mathcal{C}$), les produits $\overline{\mathrm{IF}} \times \overline{\mathrm{IF}'}$ restent invariables, comme on l'a vu plus haut, et l'on peut énoncer cette proposition :

Étant donnée une congruence rectiligne quelconque, si l'on fait tourner chacun de ses rayons autour de sa parallèle issue d'un point fixe, d'un angle constant arbitraire, ce qui la transforme en une autre congruence, le produit des distances des deux foyers situés sur un même rayon à la projection de O *sur ce rayon, reste invariable.*

Supposons que la congruence (Δ), attachée à la surface minima ($\mathcal{M}$), soit une congruence de normales [ce qui exige que ($\mathcal{C}$) le soit également], et demandons-nous à quelle condition (Δ) reste normale au cours de la déformation continue de ($\mathcal{M}$).

Il faut et il suffit, pour cela, d'après ce qui précède, que la congruence normale ($\mathcal{C}$) reste normale, si l'on fait tourner chacun de ses rayons, de l'angle constant arbitraire α, autour de sa parallèle issue de O.

Or, nous avons démontré [1] que c'est là une propriété *caractéristique* des congruences normales d'Appell (à enveloppée moyenne point O).

---

[1] Les congruences de normales dans leurs relations avec les congruences à enveloppée moyenne donnée (*Bulletin des Sciences mathématiques*, février 1929).

$(\mathcal{C})$ est donc nécessairement une congruence normale d'Appell. Mais, il résulte alors d'une propriété établie ailleurs ([1]), que (Δ) admet $(\mathfrak{M})$ pour enveloppée moyenne; et l'on peut dire :

Si une congruence (Δ), dont les rayons sont perpendiculaires aux plans tangents à une surface minima quelconque $(\mathfrak{M})$, et invariablement liés à ces plans tangents, reste normale au cours de la déformation qui transforme $(\mathfrak{M})$ en ses différentes associées, cette congruence admet $(\mathfrak{M})$ pour enveloppée moyenne, et ne cesse d'admettre $(\mathfrak{M})$ pour enveloppée moyenne au cours de la déformation.

Si l'on suppose que (Δ), au lieu de rester normale au cours de la déformation envisagée de $(\mathfrak{M})$, ne cesse d'admettre $(\mathfrak{M})$ pour enveloppée moyenne, $(\mathcal{C})$ reste une congruence d'*Appell généralisée* (*voir* le Mémoire des *Annales de Toulouse* déjà cité).

Si donc on fait tourner chaque rayon de la congruence d'Appell généralisée $(\mathcal{C})$ de l'angle constant α, autour de sa parallèle issue de O, on la transforme en une autre congruence du même type.

Cette propriété caractérise encore les congruences normales d'Appell (*Bulletin des Sciences mathématiques*, *loc. cit.*). $(\mathcal{C})$ reste donc normale, et il en est par suite de même de (Δ).

Donc :

Si une congruence (Δ) ne cesse d'avoir $(\mathfrak{M})$ pour enveloppée moyenne, au cours de la déformation continue envisagée, cette congruence est normale, et le reste au cours de la déformation.

Les deux résultats qui viennent d'être établis, s'ajoutent à ceux qui terminent le paragraphe V d'un Mémoire *Sur les Surfaces minima* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, mars 1929), pour donner la proposition suivante :

Envisageons une déformation continue à un paramètre, d'une surface (S) et une congruence (Δ), dont les rayons, perpendiculaires aux différents plans tangents à (S), sont invariablement liés

---

([1]) *Sur les congruences à enveloppée moyenne donnée* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 4, 1929).

à ces plans tangents et entraînés dans la déformation. Deux quelconques des trois propriétés suivantes :

1° *La déformation de* (S) *est la déformation continue des surfaces minima;*
2° (Δ) *ne cesse d'admettre* (S) *pour enveloppée moyenne;*
3° (Δ) *ne cesse de rester normale;*

entraînent la troisième.

Si ($\mathcal{M}$) est une alysseïde d'axe Oz, et ($\mathcal{C}$) une congruence normale d'Appell de révolution autour de Oz, la congruence (Δ) associée à ($\mathcal{M}$) est aussi de révolution autour de Oz.

Envisageons l'hélicoïde ($\mathcal{M}_\alpha$) associé à ($\mathcal{M}$). Au cours de la déformation qui fait passer de ($\mathcal{M}$) à ($\mathcal{M}_\alpha$), ($\mathcal{C}$) se transforme en ($\mathcal{C}_\alpha$). Il est clair que ($\mathcal{C}_\alpha$) est de révolution autour de Oz, comme ($\mathcal{C}$).

Les congruences normales d'Appell, de révolution autour d'un axe Oz, ne cessent donc de rester telles, lorsqu'on fait tourner chacun de leurs rayons, de l'angle α, autour de sa parallèle issue de O. Ce sont là d'ailleurs les seules congruences *normales de révolution*, restant telles au cours de la transformation ci-dessus.

Les surfaces moyennes des congruences normales d'Appell ($\mathcal{C}_\alpha$), de révolution autour de Oz, sont des plans perpendiculaires à Oz, et leurs nappes focales sont des paraboloïdes de révolution homofocaux d'axe Oz [1]. En outre, si ($\mathcal{C}_\alpha$) est la transformée de ($\mathcal{C}$), les images sphériques des développables de ($\mathcal{C}_\alpha$) coupent sous l'angle constant $\frac{\alpha}{2}$ celles de ($\mathcal{C}$) [2].

On déduit sans difficulté de ce qui précède, que les indicatrices sphériques de deux familles de géodésiques d'un paraboloïde de révolution, correspondant à deux valeurs différentes de la constante de Clairaut, se coupent sous un angle constant.

Ce résultat peut s'énoncer sous cette autre forme : *Les indicatrices sphériques des différentes géodésiques d'un paraboloïde de révolution, sont des loxodromies.*

---

(1) *Sur trois types de congruences rectilignes* (*Annales de Toulouse*, 21, 1927.

(2) J'ai indiqué ce résultat, dans un Mémoire des *Annales de l'École Normale supérieure: Sur certaines congruences normales, dans leurs relations avec les surfaces à courbure totale constante et leurs transformations*, (3), XLVIII, 1931.

III. — Déformation de certains systèmes cycliques.

On peut faire des remarques analogues à celles développées au numéro précédent, relativement aux systèmes cycliques arbitrairement déformables avec une surface applicable sur une surface de révolution, que j'ai étudiés dans un Mémoire récent (*Sur la déformation des systèmes cycliques* (*Annales de l'École Normale*, 1930).

L'élément linéaire d'une surface (S), applicable sur une surface de révolution, étant mis sous la forme

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2 \qquad [G = f(u)],$$

et les cosinus directeurs des tangentes aux courbes $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$, et de la normale en M à (S) étant

$$X_i, \quad Y_i, \quad Z_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

les cercles des systèmes cycliques en question sont situés dans les plans [1, 3], leurs centres sont sur les axes [1], et si l'on désigne par a et ρ les abscisses de leurs centres et leurs rayons, on a (*Mémoire cité*)

$$a = \sqrt{\frac{1+\lambda G}{G}}\left[\mu - \int_{u_0}^{u}\sqrt{\frac{G}{1+\lambda G}}\,du\right],$$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{G}}\qquad\left[\mu - \int_{u_0}^{u}\sqrt{\frac{G}{1+\lambda G}}\,du\right];$$

λ et μ sont deux constantes arbitraires.

Envisageons la surface homothétique de (S), dans l'homothétie de centre O (origine des coordonnées), et de rapport k.

Pour la nouvelle surface, a et ρ ont les expressions

$$a = \sqrt{\frac{1+\lambda G}{G}}\left[\mu - k\int_{u_0}^{u}\sqrt{\frac{G}{1+\lambda G}}\,du\right],$$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{G}}\qquad\left[\mu - k\int_{u_0}^{u}\sqrt{\frac{G}{1+\lambda G}}\,du\right];$$

si $k \to 0$, auquel cas (S) se réduit au point O, on a

$$a = \mu\sqrt{\frac{1+\lambda G}{G}}, \qquad \rho = \frac{\mu}{\sqrt{G}}.$$

Si l'on déplace les différents plans [1, 3] relatifs à (S) parallèlement à eux-mêmes (les axes 1 et 3 conservent leurs directions), et si l'on amène M en O, les formules précédentes (où l'on peut faire $\mu = 1$ en négligeant une homothétie), définissent ∞^1 systèmes cycliques ($\mathcal{C}_0$) dont les plans des cercles passent par O.

A chaque déformation de (S) correspond une déformation des ∞^1 systèmes cycliques ($\mathcal{C}_0$), conservant les rayons des cercles de ces différents systèmes et les distances de leurs centres au point O.

Par suite :

A chaque surface (S) *applicable sur une surface de révolution, on peut faire correspondre une déformation* (*dépendant de deux fonctions arbitraires*), *de* ∞^1 *systèmes cycliques dont les plans des cercles passent par un point fixe.*

IV. — Sur quelques propriétés caractéristiques des surfaces spirales.

Envisageons le coefficient de λ dans l'équation (2) du n° I. Exprimons qu'il reste nul dans toute déformation de (S). Il suffit d'écrire, vu sa forme linéaire en D, D′, D″, que les coefficients de D, D′, D″ sont identiquement nuls.

On obtient alors le système des trois équations

$$(3)\qquad \begin{cases} \sqrt{G} + \dfrac{\xi}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial\xi}{\partial v} - \dfrac{\xi}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0, \\[2mm] \sqrt{E} + \dfrac{\partial\xi}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

La deuxième équation donne

$$(4)\qquad \xi = \frac{\sqrt{E}}{U} \qquad [U = \text{fonction de } u].$$

La première s'écrit, eu égard à la troisième,

$$(5)\qquad \xi = \frac{\sqrt{G}}{V} \qquad [V = \text{fonction de } v].$$

On déduit de (4) et (5)

$$\frac{\sqrt{E}}{U} = \frac{\sqrt{G}}{V} = \xi(u, v).$$

En prenant pour variables $\int U\,du$ et $\int V\,dv$, on a

$$\sqrt{E} = \sqrt{G} = \xi.$$

La dernière équation (3) donne $\sqrt{E}$, $\sqrt{G}$ et ξ. Elle s'écrit

$$\xi + \frac{\partial \xi}{\partial u} = 0,$$

d'où

$$\xi = \sqrt{E} = \sqrt{G} = \mathcal{V} e^{-u} \qquad [\mathcal{V} = \text{fonction arbitraire de } v].$$

Les surfaces (S) ont donc pour élément linéaire

$$ds^2 = \mathcal{V}^2 e^{-2u}(du^2 + dv^2). \tag{6}$$

Cette forme du ds^2 est *caractéristique* des surfaces applicables sur les *surfaces spirales de Maurice Lévy*.

D'ailleurs, le produit des distances de deux foyers associés d'une congruence ($\mathcal{C}$) de l'espèce envisagée, au plan tangent à la surface (S), étant constant, la distance de ces deux foyers reste *invariable* au cours de toute déformation de (S).

On peut dire que les nappes focales de ($\mathcal{C}$), restent nappes focales des congruences ($\mathcal{C}$) successives, si l'on suppose leurs points *invariablement liés* aux plans tangents correspondants à (S).

Précisons géométriquement, les positions des différents rayons de la congruence ($\mathcal{C}$), attachée à une surface (S), applicable sur une surface spirale, d'élément linéaire (6).

Les courbes $v =$ const., $u =$ const. de (S), sont les déformées des spirales gauches de l'une quelconque ([1]) des formes spirales applicables, et leurs trajectoires orthogonales.

Le point I où le rayon de ($\mathcal{C}$), normal au plan tangent en M(u, v) à (S), perce le plan, est situé sur la tangente à la spirale

---

([1]) On sait qu'il y a une infinité de surfaces spirales admettant le même élément linéaire (*voir*, par exemple, G. Darboux, *Théorie des Surfaces*, t. I, p. 149).

gauche déformée, et l'on a, comme on l'a vu plus haut,

$$\overline{MI} = \sqrt{E} = \mathcal{V} e^{-u}.$$

Si l'on calcule le rayon de courbure géodésique de la courbe $u =$ const. en M, on trouve $\rho_u = \overline{MI}$. Ainsi :

Étant donnée une déformée de surface spirale quelconque (S), *si, aux différents centres de courbure géodésique des trajectoires orthogonales des spirales gauches déformées, on élève les perpendiculaires aux plans tangents correspondants, on obtient une congruence rectiligne* ($\mathcal{C}$), *admettant* (S) *pour enveloppée moyenne, et ne cessant d'admettre* (S) *pour enveloppée moyenne au cours d'une déformation arbitraire de* (S). *Les seules congruences* ($\mathcal{C}$) *jouissant de la propriété indiquée, sont celles données par la construction précédente.*

On voit sans peine, que le rayon de courbure géodésique en M, de la trajectoire orthogonale des spirales gauches déformées, de (S), est égal à l'arc (MO) de spirale déformée (O étant le pôle de la surface).

On peut dire que la surface moyenne (Σ), de la congruence ($\mathcal{C}$) attachée à (S), est le lieu des développantes des spirales gauches déformées, ayant leur point de rebroussement au pôle.

Si (S) a la forme spirale, (Σ) se réduit au plan perpendiculaire en O à l'axe Oz de la surface. La congruence ($\mathcal{C}$) attachée à (S) est alors une *congruence spirale à surface moyene plane.*

En envisageant toutes les surfaces spirales, on obtient d'ailleurs toutes les congruences spirales à surface moyenne plane.

Demandons-nous maintenant si, en particularisant convenablement la surface (S) et la congruence associée ($\mathcal{C}$) dont les rayons sont perpendiculaires aux plans tangents à (S) et invariablement liés à ces plans tangents, on peut conserver, au cours d'une déformation arbitraire de (S), une relation déterminée entre $\overline{IF}$ et $\overline{F}$ (notations du n° 1), autre que la relation $\overline{IF} + \overline{IF'} = 0$, dont il vient d'être question dans le paragraphe actuel, en dehors de la relation obligatoire qui fait l'objet du n° I.

Se donner une relation entre $\overline{IF}$ et $\overline{IF}'$, autre que la relation suivant laquelle $\overline{IF} \times \overline{IF'}$ reste constant sur chaque rayon dans

toute déformation de (S), cela revient à *fixer* $\overline{\mathrm{IF}}$, $\overline{\mathrm{IF}'}$, et par suite les longueurs des segments focaux sur chaque rayon.

La question peut donc se poser ainsi :

Existe-t-il des congruences ($\mathcal{C}$), *autres que celles étudiées au début de ce numéro, telles qu'en les associant, comme il a été dit, à une certaine surface* (S), *et en déformant arbitrairement* (S), *les longueurs des différents segments focaux restent invariables.*

Il faut et il suffit, pour que, (S) étant supposée donnée, on puisse lui attacher une congruence ($\mathcal{C}$), que la somme des racines de l'équation (2) soit une fonction $f(u, v)$ ne dépendant que de l'élément linéaire de (S).

En désignant par α, β, γ les coefficients de D, D′, D″ dans (2), on doit donc avoir identiquement

$$\alpha D + \beta D' + \gamma D'' - f(u, v) K \sqrt{EG} = 0.$$

La forme linéaire en D, D′, D″ du premier membre exige, comme nous l'avons déjà dit, que tous les coefficients soient nuls. En particulier

$$f(u, v) K \sqrt{EG} = 0.$$

Il résulte de là, en excluant les développables

$$f(u, v) = 0.$$

La somme des racines de (2) est donc nulle, et (S) est nécessairement l'enveloppée moyenne de ($\mathcal{C}$). D'où ce théorème :

A. *Les seules surfaces* (S) *auxquelles on puisse attacher* (*au sens précisé plus haut*) *des congruences* ($\mathcal{C}$) *arbitrairement déformables avec conservation des longueurs des segments focaux, sont les déformées des surfaces spirales de Maurice Lévy.*

V. — Sur d'autres propriétés des surfaces spirales.

On arrive à d'autres propriétés intéressantes des surfaces applicables sur les surfaces spirales de Maurice Lévy, en cherchant les développables, des congruences ($\mathcal{C}$) du numéro précédent, attachées à ces surfaces.

L'équation des développables de la congruence ($\mathcal{C}$), attachée à une surface (S) du type envisagé, s'obtient en éliminant λ, entre les deux équations du système (1) du numéro I.

Si l'on tient compte des équations (3) du numéro IV, on trouve après un calcul facile

$$\mathrm{D}\, du^2 + 2\mathrm{D}'\, du\, dv + \mathrm{D}''\, dv^2 = 0.$$

C'est là l'équation qui définit les lignes *asymptotiques* de (S).

On a donc ce résultat :

Les développables de la congruence ($\mathcal{C}$) *attachée à une déformée de surface spirale* (S), *ont pour représentation sphérique la représentation sphérique des lignes asymptotiques de* (S).

Il résulte de propositions dues à E. Cosserat et C. Guichard [1], que les développables de ($\mathcal{C}$) découpent un réseau conjugué sur la surface centrale (Σ) de la congruence [lieu des points où les rayons percent les plans tangents correspondants à (S)], et qu'en outre, la surface centrale (Σ) correspond à (S) avec orthogonalité des éléments linéaires.

($\mathcal{C}$) appartient à la famille bien connue des congruences de Ribaucour.

Il y a lieu ici de faire une remarque, dont l'intérêt apparaît, si l'on a égard aux problèmes de la déformation infiniment petite, et de la recherche des couples de surfaces applicables déduits du couple (S), (Σ).

En général, lorsque deux surfaces se correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires, la correspondance cesse d'avoir lieu avec orthogonalité des éléments, si l'on déforme l'une des

---

[1]. *Voir* E. Cosserat, *Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, p. N. 1, 1893); et C. Guichard, *Surfaces rapportées à leurs asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1899, p. 333).

surfaces, les points de l'autre (invariablement liés à ses plans tangents) étant entraînés dans la déformation.

Si (S) et (Σ) sont une déformée de surface spirale et la surface centrale de la congruence ($\mathcal{C}$) associée [lieu des centres de courbure géodésique des trajectoires orthogonales des spirales gauches déformées de (S)], *on peut déformer arbitrairement* (S), *sans que la correspondance entre* (S) *et* (Σ) *cesse d'être avec orthogonalité des éléments.*

Demandons-nous s'il y a là une propriété *caractéristique* des surfaces spirales.

Envisageons à cet effet deux surfaces (S) et (Σ), se correspondant avec orthogonalité des éléments linéaires.

Soient M et N un couple de points correspondants sur (S) et (Σ).

Supposons chaque point N de (Σ) invariablement lié au plan tangent (π) en M à (S). Cherchons à déterminer (S) et (Σ), de telle sorte que, lorsque (S) se déforme en entraînant les différents points de (Σ), l'ensemble de ces points constitue, dans chaque configuration, une surface correspondant à (S) avec orthogonalité des éléments.

Par chaque point N de (Σ), menons la perpendiculaire D au plan tangent correspondant (π) à (S). L'ensemble des droites D constitue une certaine congruence ($\mathcal{C}$). Cette congruence ($\mathcal{C}$) est une *congruence de Ribaucour*, dont (Σ) est la surface centrale, conformément à une propriété bien connue. Soit I le point où D perce (π); F et F' les foyers de ($\mathcal{C}$) situés sur D. On a

$$\overline{IF} + \overline{IF'} = \frac{\overline{IN}}{2}.$$

Par hypothèse, $\overline{IN}$ reste constant au cours d'une déformation quelconque de (S). Or, on a vu au n° IV [théorème A], que la seule relation entre F et F' (autre que celle relative à l'invariabilité des produits $\overline{IF} \times \overline{IF'}$), susceptible de se conserver au cours d'une déformation quelconque de (S), est

$$\overline{IF} + \overline{IF'} = 0.$$

On a donc nécessairement

$$\overline{IN} = 0.$$

Cela prouve que (π) est le plan moyen relatif au rayon D, et que, par suite, la congruence $(\mathcal{C})$ admet (S) pour enveloppée moyenne, cette relation entre (S) et $(\mathcal{C})$ se conservant par déformation de (S).

Il résulte de là, comme on l'a démontré au n° IV, que (S) est une déformée de surface spirale, et (Σ) la surface associée lieu des centres de courbure géodésique des trajectoires orthogonales des spirales gauches déformées.

On peut donc énoncer cette nouvelle propriété *caractéristique* des surfaces applicables sur les surfaces spirales de Maurice Lévy :

B. *Les seules surfaces* (S), *auxquelles on puisse attacher des surfaces* (Σ), *leur correspondant avec orthogonalité des éléments linéaires, la correspondance ne cessant d'être par orthogonalité des éléments lorsque* (S) *se déforme en entraînant les différents points de* (Σ) *supposés invariablement liés à ses plans tangents, sont les déformées des surfaces spirales de Maurice Lévy.*

On déduit de là cet autre énoncé, relatif aux congruences de Ribaucour :

Les seules congruences de Ribaucour, ne cessant de rester de Ribaucour, par déformation arbitraire de leur enveloppée moyenne, sont les congruences $(\mathcal{C})$ *attachées aux déformées de surfaces spirales.*

Supposons que (S) soit une surface *minima* applicable sur une surface spirale [1]. Les plans focaux de la congruence $(\mathcal{C})$ associée à (S), qui, d'après un théorème de Ribaucour, sont perpendiculaires aux directions asymptotiques de (S), sont orthogonaux.

$(\mathcal{C})$ est alors une congruence *normale*, admettant (S) pour enveloppée moyenne, et (Σ) pour surface centrale.

Désignons par (S_1) l'adjointe de (S) [(S_1) est semblable à (S)].

Les lignes asymptotiques de (S) correspondent aux lignes de courbure de (S_1). Soit d'autre part (Γ) une surface quelconque

---

[1] *Voir* G. Darboux, *Théorie des Surfaces*, t. I, p. 396.

orthogonale aux rayons de $(\mathcal{C})$. Les développables de $(\mathcal{C})$ [les lignes de courbure de (Γ)], correspondent, comme on l'a vu plus haut, aux asymptotiques de (S).

Les lignes de courbure de (Γ) et de (S_1) correspondant aux lignes asymptotiques de (S), on peut dire que sur (Γ) et (S_1) les lignes de courbure se correspondent.

La correspondance entre (Γ) et (S_1) étant par plans tangents parallèles, on voit que : (Γ) *et* (S_1) *ont même représentation sphérique pour leurs lignes de courbure.*

Ainsi, étant donnée une surface minima (S_1) applicable sur une surface spirale, on peut aisément construire une famille de surfaces parallèles (Γ) ayant même représentation sphérique que (S_1).

Il suffit de prendre la surface minima adjointe (S) *de* (S_1), *de construire les centres de courbure géodésique des trajectoires orthogonales des spirales gauches déformées de* (S), *puis d'élever en chacun de ces points la perpendiculaire au plan tangent correspondant.*

L'ensemble des droites ainsi obtenues constitue une congruence normale $(\mathcal{C})$. Les surfaces (Γ) orthogonales aux rayons de $(\mathcal{C})$, ont même représentation sphérique que (S_1) pour leurs lignes de courbure.

Les surfaces (Γ) et (S_1) se correspondant par plans tangents parallèles et par lignes de courbure, et (S_1) (surface minima) admettant une représentation sphérique *isotherme* pour ses lignes de courbure, il en est de même de (Γ).

D'une façon générale, on sait (1) que chaque solution du problème de la déformation infiniment petite d'une surface minima (dépendant d'une équation linéaire harmonique), fait connaître une surface ayant même représentation sphérique que la surface adjointe. Les développements qui précèdent, fournissent une construction géométrique simple, définissant explicitement, une surface (Γ) associée à toute surface minima (S) applicable sur une surface spirale, et admettant par suite une représentation sphérique isotherme pour ses lignes de courbure [représentation de (S_1) adjointe de (S)].

La connaissance de (Γ) entraîne d'ailleurs, comme l'a montré

---

(1) G. Darboux, *Théorie des Surfaces*, t. IV, p. 94.

d'une façon générale M. Thybaut (1), celle d'une autre surface admettant même représentation sphérique que (Γ) et (S_1). Cette autre surface est l'enveloppe d'un plan, parallèle aux plans tangents correspondants à (S_1) et (Γ), situé à une distance d'un point fixe proportionnelle à $\frac{\rho - \rho_1}{R}$; ρ et ρ_1 étant les rayons de courbure de (Γ) en l'un quelconque de ses points, R et — R ceux de (S_1) au point correspondant.

VI. — Nouvelle forme du théorème B.

Le théorème B du paragraphe précédent, peut être complété, et la propriété caractéristique qu'il exprime, présentée sous une forme d'où est exclue toute idée de déformation.

Cherchons les surfaces (S), auxquelles on peut associer des surfaces (Σ), leur correspondant avec orthogonalité des éléments linéaires, les droites joignant chaque point M' de (Σ) au point correspondant M de (S) étant tangentes en M à (S).

Prenons sur (S), pour courbes $v =$ const., les courbes tangentes aux différentes droites (MM'); pour courbes $u =$ const., les trajectoires orthogonales des précédentes; posons $\overline{MM'} = \xi$, et adoptons toutes les notations du n° IV.

Si nous exprimons que (Σ) correspond à (S) avec orthogonalité des éléments linéaires, nous sommes conduits, après un calcul simple, au système (3) du n° IV, qui définit (S) comme une déformée de surface spirale, et (Σ) comme le lieu des centres de courbure géodésique des trajectoires orthogonales des spirales gauches déformées.

On peut donc dire :

Les seules surfaces (S), *auxquelles on puisse attacher des surfaces* (Σ), *leur correspondant avec orthogonalité des éléments linéaires, les droites joignant les points correspondants étant tangentes à* (S), *sont les déformées des surfaces spirales.*

---

(1) A. Thybaut, *Sur la déformation du paraboloïde et sur quelques problèmes qui s'y rattachent* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1897, p. 89).

A chaque déformée de surface spirale, on peut associer une surface (Σ), *définie comme il a été expliqué plus haut.*

Un caractère intéressant de l'énoncé qui précède, est de présenter sous une forme *finie*, la définition de la famille des surfaces applicables sur les surfaces spirales.

Eu égard aux surfaces spirales elles-mêmes, nous signalerons la définition suivante :

Ce sont les surfaces (S), *que l'on peut faire correspondre point par point à un plan, la correspondance étant par éléments linéaires orthogonaux, et les droites joignant deux points associés quelconques étant tangentes à* (S).