BULLETIN DE LA S. M. F.

J. FAVARD

Sur les zéros réels des polynômes

Bulletin de la S. M. F., tome 59 (1931), p. 229-255
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1931__59__229_0>

SUR LES ZÉROS RÉELS DES POLYNOMES;

PAR M. J. FAVARD.

1. Le présent travail apporte une contribution à l'étude des zéros réels des polynomes et au théorème de la moyenne.

Le problème que je me suis proposé est intimement lié au célèbre théorème de Grace-Heawood [1] et les résultats que j'ai obtenus le complètent dans une direction.

Soit $f(x)$ un polynome de degré n

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

dont les coefficients satisfont à la relation

$$c_0 a_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_n a_n = 0, \tag{1}$$

où les c_i sont des constantes données réelles ou complexes; le résultat obtenu par Grace peut s'énoncer de la façon suivante :

Tous les polynomes $f(x)$ dont les coefficients satisfont à la relation (1) ont un zéro au moins dans tout domaine circulaire contenant tous les zéros du polynome

$$c_0 x^n - \frac{n}{1} c_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} c_2 x^{n-2} + \ldots \pm c_n = 0.$$

Par domaine circulaire on entend toute portion de plan fermée limitée par un cercle ou une droite, c'est-à-dire soit l'intérieur ou l'extérieur d'un cercle, soit un demi-plan.

D'ailleurs il existe des polynomes qui satisfont à la relation (1) et dont aucun zéro n'est à l'intérieur d'un domaine circulaire ne contenant pas tous les zéros du polynome précédent.

---

[1] J. H. GRACE, *The zeros of a polynomial* (*Proceedings of the Cambridge philosophical Society*, t. 11, 1900-1902, p. 352-357). — P. J. HEAWOOD, *Geometrical relations between the roots of* $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ (*Quarterly Journal of mathematics*, t. 38, 1907, p. 84-107). *Voir aussi* la remarquable exposition de G. SZEGÖ, *Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen* (*Mathematische Zeitschrift*, t. 13, 1922, p. 28-55).

Mais si le polynome $f(x)$ est à coefficients réels et si les constantes c_i sont réelles, le théorème de Grace ne nous apprend rien sur les zéros réels possibles du polynome $f(x)$.

Par exemple, α et β étant réels, si $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0$, nous savons, par le théorème de Rolle, que $f(x)$ a une racine réelle comprise entre α et β tandis que le théorème de Grace ne peut nous fournir qu'un résultat moins précis.

On avait déjà tenté de faire le raccord de ces deux résultats mais je crois que les premières recherches générales sur ce sujet sont dues à M. P. Montel (1) qui applique sa méthode des suites normales de fonctions analytiques. Plus récemment encore M. L. Tchakaloff (2), pour traiter le problème précédent, a donné une méthode qui n'utilise pas les variables complexes et fournit toute la précision désirable.

Quant au théorème de Grace, on est amené à se poser le problème préalable suivant :

A quelles conditions doivent satisfaire les constantes réelles : $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ $(c_0 > 0)$ pour que tout polynome $f(x)$ à coefficients réels, satisfaisant à la condition (1) ait au moins une racine réelle?

Dans les pages qui vont suivre nous fournirons une réponse à cette question et nous indiquerons ensuite quels sont les intervalles où l'on est sûr de rencontrer une racine du polynome $f(x)$.

Essayer de ne pas introduire dans une démonstration de notions étrangères à celles du problème proposé est, il me semble, une idée assez couramment soutenue aujourd'hui, on gagne souvent

---

(1) P. Montel, *Sur quelques conséquences du théorème de Rolle* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 191, 1930, p. 511). — *Sur les zéros des dérivées des fonctions analytiques* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 58, 1930, p. 105-126).

On trouvera dans le Mémoire de M. Montel les indications bibliographiques relatives aux essais dont je parle dans le texte.

(2) L. Tchakaloff, *Sur le théorème des accroissements finis* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 192, 1931, p. 32); *Sur l'intervalle de variabilité de* ξ *dans la formule*

$$\int_a^b p(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(\xi)\int_a^b p(x)\,dx$$

(*C. R. Acad. Sc.*, t. 192, 1931, p. 330).

ainsi en profondeur ce que l'on perd en généralité et en puissance; pour cette raisonn, ous ne ferons usage que de considérations relatives aux variables réelles dans la partie de ce travail consacrée aux polynomes à une variable. Je crois pouvoir affirmer d'ailleurs que le résultat obtenu, quoique plus particulier (mais plus précis naturellement) que le théorème de Grace, peut concourir avec lui quant à l'élégance.

Dans le cas des polynomes à plusieurs variables j'ai pu obtenir un résultat qualitatif très général, mais il semble que le problème doive être abordé différemment.

Un résumé de ce travail a été inséré aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences, le* 23 *mars* 1931.

2. Avant de passer à notre sujet, nous rappellerons quelques définitions et quelques résultats dus à M. Hamburger (1).

Soit la forme quadratique à une infinité dénombrable de variables

$$\sum_{i,j=0}^{+\infty} c_{i+j} x_i x_j, \tag{2}$$

nous dirons qu'elle est *définie positive* si, quel que soit n, la forme

$$\sum_{i,j=0}^{n} c_{i+j} x_i x_j \tag{3}$$

est définie positive, nous dirons qu'elle est *semi-définie positive* si, à partir d'une certaine valeur de n, les formes précédentes (3) sont semi-définies positives.

Pour qu'une forme (2) soit définie positive, il est nécessaire et suffisant que tous les déterminants

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-2} \end{vmatrix} \qquad (n = 1, 2, \dots),$$

(1) H. Hamburger, *Ueber die Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems* (*Teil I*) (*Math. Annalen*, t. 81, 1920, p. 235-318).

soient positifs. Pour qu'une forme (2) soit semi-définie positive il est nécessaire et suffisant que les déterminants précédents soient tous nuls à partir d'une certaine valeur de n.

Le *problème des moments de Hamburger*, extension du problème de Stieltjes, est le suivant :

Déterminer une fonction $\Psi(x)$ non décroissante telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, d\Psi = c_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

où les c_n sont des constantes réelles données et où l'intégrale précédente est prise, naturellement, au sens de Stieltjes.

M. Hamburger démontre que, pour que ce problème ait au moins une solution, avec une fonction Ψ présentant une infinité de points de croissance, il est nécessaire et suffisant que *la forme quadratique* (2) *correspondante soit définie positive:* dans le cas où cette forme est semi-définie positive le problème des moments peut être résolu par une fonction Ψ ne présentant qu'un nombre fini de points de croissance. La partie la plus importante du Mémoire de M. Hamburger est celle où il recherche des critères relatifs au cas où le problème est déterminé, c'est-à-dire où la fonction Ψ est définie à une constante près par les égalités (4); mais nous n'utiliserons pas ces résultats.

3. *Étant donnée une suite de constantes*

$$c_0, \quad c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_n, \quad \ldots \qquad (n = 0, 1, \ldots; c_0 > 0),$$

nous allons montrer que, pour qu'un polynome réel $f(x)$ dont les coefficients satisfont à la relation (1) *ait une racine réelle au moins, il est nécessaire et suffisant que le problème des moments*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, d\Psi = c_n$$

ait une solution.

D'après M. Hamburger il suffit, pour montrer que la condition est nécessaire, de prouver que la forme (2) ne peut pas être non définie. Si cette dernière éventualité était réalisée, il existerait alors une valeur de n pour laquelle la forme (3) ne serait pas même semi-définie; on pourrait alors, pour cette valeur de n, trouver des valeurs des variables x_i telles que

$$\sum_{i,j=0}^{n} c_{i+j} x_i x_j + c_0 = 0.$$

Considérons alors l'équation en x de degré $2n$

$$\sum_{i,j=0}^{n} x^{i+j} x_i x_j + 1 = 0,$$

elle satisfait évidemment à la condition (1) et elle s'écrit

$$\left(\sum_{i=0}^{n} x^i x_i\right)^2 + 1 = 0;$$

sous cette forme nous voyons qu'elle n'a pas de racine réelle : c'est-à-dire que nous arrivons à une contradiction.

Soit maintenant Ψ une solution du problème des moments

$$\int_{+\infty}^{+\infty} x^n \, d\Psi = c_n,$$

les polynomes qui satisfont à la condition (1) sont ceux pour lesquels on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, d\Psi = 0, \tag{5}$$

et inversement; cette égalité nous montre qu'ils présentent au moins un changement de signe entre $-\infty$ et $+\infty$ c'est-à-dire qu'ils ont au moins une racine réelle d'ordre impair.

Notre proposition se trouve ainsi complètement démontrée.

Remarquons aussi que, pour tout polynome admettant une fonction réelle ξ, on peut écrire l'égalité (5) avec une fonction Ψ n'admettant qu'un seul point de croissance en ξ.

4. Ce résultat préliminaire obtenu, nous considérerons uniquement les suites de constantes c pour lesquelles le problème des moments (4) de Hamburger est possible, et nous examinerons d'abord le cas le plus complexe et le plus intéressant : celui où les fonctions solutions de (4) ont une infinité de points de croissance.

Après avoir montré que $f(x)$ a au moins une racine, le problème que nous nous proposons de résoudre maintenant est la détermination des intervalles où ce polynome a au moins une racine.

Une fonction croissante Ψ étant donnée, on sait que l'on appelle *polynome de Tchebycheff* de degré n de cette fonction, un polynome $\Phi_n(x)$ qui satisfait à la condition suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(x)\, Q_{n-1}(x)\, dx = 0,$$

où $Q_{n-1}(x)$ désigne un polynome quelconque de degré au plus égal à $n-1$. Ce polynome Φ_n est défini à un facteur près et l'on peut, pour fixer cette constante au signe près, ajouter la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n^2(x)\, d\Psi = 0.$$

Il est loisible alors de supposer que le coefficient du terme en x^n dans Φ_n est positif; les polynomes obtenus finalement sont dits normés.

D'ailleurs, pour former la suite des polynomes Φ_n, il n'est pas nécessaire de connaître la fonction Ψ : la connaissance de la suite des constantes c suffit.

Outre la définition des polynomes Φ_n, nous utiliserons aussi le fait que toutes leurs racines sont réelles et simples et que, entre deux racines consécutives de Φ_n, se trouve une racine de Φ_{n-1}.

Soit alors $f(x)$ un polynome, non identiquement nul, satisfaisant à la condition (5) et dont le degré ne dépasse pas $2n-1$.

En désignant par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de Φ_n, rangées par ordre de grandeur croissante, considérons le polynome

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\Phi_n(x)}{(x-x_i)\,\Phi'_n(x_i)}\right]^2 f(x_i),$$

qui, pour les n valeurs $x = x_i$, prend les mêmes valeurs que $f(x)$ et dont le degré ne dépasse pas $2n-2$.

La différence $f(x) - g(x)$ est donc divisible par Φ_n et le degré du quotient $q(x)$ obtenu ne dépasse pas $(n-1)$ de sorte que

$$f(x) = g(x) + \Phi_n(x).q(x).$$

Faisant appel à la relation qui sert de définition à $\Phi_n(x)$, la condition (5) se réduit à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, d\Psi = 0,$$

ou bien

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\Phi_n(x)}{(x-x_i)\Phi'_n(x_i)}\right]^2 d\Psi = 0.$$

Toutes les intégrales qui figurent dans cette somme sont positives, la somme précédente ne peut donc être nulle que si toutes les quantités $f(x_i)$ sont nulles ou bien n'ont pas toutes le même signe, par suite :

Tout polynome $f(x)$, satisfaisant à la condition (5), et dont le degré ne dépasse pas $2n-1$, a au moins une racine ξ d'ordre impair telle que : $x_1 \leqq \xi \leqq x_n$.

3. Cette limitation est-elle la meilleure possible? Autrement dit existe-t-il des polynomes de degrés respectifs $2n-1$ et $2n-2$ dont une seule racine soit à l'intérieur de l'intervalle (x_1, x_n) mais aussi voisine qu'on le veut de l'une ou l'autre de ces limites?

Ici nous ne pouvons pas supposer que les limites sont atteintes, à moins que $n=1$ ou 2 car, pour $n \geqq 3$, si $f(x_1) = f(x_n) = 0$, la condition (6) montre que $f(x)$ admet des racines entre x_2 et x_{n-1}.

Les cas $n=1$ ou 2 sont bien faciles à traiter. Dans le premier de ces cas $f(x)$ est aussi de premier degré et, à un facteur près, il est identique au polynome de Tchebicheff du premier degré. Si $n=2$ et que $f(x)$ soit de degré 2, alors la formule (6) montre que $f(x)$ a une seule racine entre x_1 et x_2 ou bien que $f(x)$ est égal au produit de Φ_2 par une constante, lorsque $f(x)$ est de degré 3, ou bien il a une racine simple ou triple comprise entre x_1 et x_2, ou bien il est identique au produit de Φ_2 par un polynome du premier degré arbitraire.

Supposons donc maintenant $n \geqq 3$ et construisons tout d'abord un polynome de degré $2n - 1$ et qui n'ait qu'une seule racine intérieure à l'intervalle (x_1, x_n), mais aussi voisine que l'on voudra de l'un ou l'autre de ces deux nombres, par exemple x_1.

Posons

$$f(x) = (x - \xi)\left[\frac{\Phi_n^2(x)}{(x - x_1)^2} + \varepsilon\right],$$

où ε désigne un nombre positif quelconque; $f(x)$ n'a qu'une racine réelle ξ et la condition (5) s'écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,d\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(x)\frac{\Phi_n(x)}{x - x_1}\,d\Psi$$
$$+ (x_1 - \xi)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_n^2(x)}{(x - x_1)^2}\,d\Psi + \varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}(x - \xi)\,d\Psi = 0.$$

D'où, en remarquant que la première intégrale du second membre est nulle,

$$(x_1 - \xi)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_n^2(x)}{(x - x_1)^2}\,d\Psi + \varepsilon(c_1 - \xi c_0) = 0,$$

nous obtenons une équation qui nous donne ξ en fonction de ε.

Nous avons vu, au paragraphe précédent, que $x_1 \leqq \xi$, nous en déduisons donc que $c_1 - \xi c_0 \geqq 0$; mais, d'après la propriété rappelée des polynomes Φ_n, la racine $\frac{c_1}{c_0}$ du polynome Φ_1 est située entre x_1 et x_n et les limites ne sont pas atteintes si $n \geqq 3$; donc les deux inégalités précédentes ne peuvent se réduire en même temps à des égalités, ce qui veut dire que, pour ε positif, aucune d'elles n'a lieu. Mais, lorsque ε tend vers 0, ξ tend vers x_1, on peut donc, inversement, à toute valeur de ξ supérieure à x_1, mais aussi peu différente de x_1 que l'on veut, faire correspondre un nombre ε positif auquel correspond un polynome $f(x)$.

Pour construire un polynome analogue, et de degré $2n - 2$, nous allons opérer de la même façon mais nous remarquerons que ce polynome étant de degré pair a, de ce fait, au moins deux racines réelles que nous mettrons en évidence.

Nous poserons

$$f(x) = (x - \xi)(x - \eta)\left[\frac{\Phi_n^2(x)}{(x - x_1)^2(x - x_n)^2} + \varepsilon\right].$$

En opérant comme précédemment la condition (5) s'écrit,

$$[(x_1+x_n)-(\xi+\eta)]\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x\left[\frac{\Phi_n^2(x)}{(x-x_1)^2(x-x_n)^2}+\varepsilon\right]d\Psi\right\}$$
$$+(\xi\eta-x_1x_n)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\Phi_n^2(x)}{(x-x_1)^2(x-x_n)^2}+\varepsilon\right]d\Psi\right\}$$
$$+\varepsilon[c_2-(x_1+x_n)c_1+x_1x_nc_0]=0.$$

Considérons d'autre part un polynome de la forme

$$\frac{(x-\alpha)\Phi_n^2(x)}{(x-x_1)^2(x-x_n)^2},$$

et satisfaisant à la condition (5); étant de degré $2n-3$, son changement de signe ($x=\alpha$) doit se trouver entre les deux racines extrêmes de Φ_{n-1}, par suite aussi entre x_1 et x_n. Remarquons aussi que la quantité

$$c_2-(x_1+x_n)c_1+x_1x_nc_0$$

est négative : en effet le segment (x_1, x_n) contient le segment formé par les deux racines x'_1 et x'_2 du polynome P_2, segment qui contient lui-même la racine de Φ_1; au moyen d'un changement d'origine, effectué en cas de besoin, nous pouvons toujours supposer que cette dernière racine est nulle, ce qui amène à $c_1=0$; d'où

$$x_1<x'_1<0<x'_2<x_n,$$

ce qui conduit à

$$x_1x_n<x'_1x'_2;$$

or

$$x'_1x'_2=-\frac{c_2}{c_0},$$

d'où le résultat.

Posant alors

$$\xi=x_1+h,\qquad \eta=x_n+k,$$

la relation précédente devient

$$[h(x_n-\alpha+k)+kx_1]\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi_n^2(x)}{(x-x_1)^2(x-x_n)^2}d\Psi$$
$$+\varepsilon[c_2-(\xi+\eta)c_1+\xi\eta c_0]=0.$$

Nous supposerons que h et k ont été choisis suffisamment petits pour que le coefficient du terme en ε soit négatif et que sa valeur absolue surpasse, par exemple, la moitié de celle de la quantité correspondante où ξ et η ont été remplacés respectivement par x_1 et x_n.

Puisque $x_n - \alpha$ est positif, nous pouvons donner à h et à k des valeurs positives, toutes les deux aussi petites que l'on veut, telles que

$$h(x_n - \alpha + k) + kx_1 > 0.$$

Lorsque cette condition et la précédente sont satisfaites en même temps, la valeur correspondante de ε est positive et le polynome $f(x)$, considéré plus haut, répond à la question.

6. Les deux résultats que nous venons d'obtenir, au moyen d'une méthode employée par M. Tchakaloff dans le cas du théorème des accroissements finis, peuvent également être atteints au moyen de la formule (6) et cela d'une façon plus rapide.

Reprenons le polynome de degré $2n - 1$ considéré au début du paragraphe précédent, et posons

$$m_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\Phi_n(x)}{(x - x_i)\Phi'_n(x_i)}\right]^2 d\Psi \qquad (> 0),$$

l'égalité (6) devient

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - \xi) + m_1(x_1 - \xi)\Phi'^2_n(x_1) = 0.$$

Si ξ a une valeur plus grande que x_1, mais suffisamment voisine de ce nombre pour que

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - \xi) > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_1) > 0,$$

alors l'équation précédente fournit une valeur de ε positive tendant vers zéro lorsque ξ tend vers x_1.

Pour le polynome de degré $2n - 2$ nous poserons d'abord

$$\varphi(x) = (x - \xi)(x - \eta),$$

l'équation (6) devient

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{n} m_i \varphi(x_i) + m_1 \frac{\Phi'^2_n(x_1)}{(x_1 - x_n)^2}\varphi(x_1) + m_n \frac{\Phi'^2_n(x_n)}{(x_1 - x_n)^2}\varphi(x_n) = 0.$$

Nous choisirons ξ et η, le premier compris entre x_1 et x_2, le second supérieur à x_n, de sorte que tous les $\varphi(x_i)$ seront négatifs sauf $\varphi(x_1)$ qui sera positif; d'autre part, la somme $\Sigma m_i \varphi(x_i)$ étant une fonction continue de ξ et de η, nous pouvons supposer ξ et η suffisamment voisins de x_1 et x_n respectivement pour que

$$-\sum_{i=1}^{n} m_i \varphi(x_i) > -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_1)(x_i - x_n) > 0.$$

De plus, ξ restant fixe, lorsque η tend vers x_n la quantité

$$m_1 \frac{\Phi_n'^2(x_1)}{(x_1 - x_n)^2}\varphi(x_1) + m_n \frac{\Phi_n'^2(x_n)}{(x_1 - x_n)^2}\varphi(x_n),$$

tend vers une quantité positive; ξ étant donné, aussi voisin que l'on voudra de x_1, nous pouvons donc choisir η de façon que la quantité précédente soit positive. Ces diverses conditions peuvent être satisfaites en même temps et, quand elles le sont, la valeur de ε correspondante est positive.

Comme on le voit, ces divers raisonnements s'appliquent aussi à la limite supérieure x_n avec des transpositions convenables.

Si, au lieu de compter les racines du polynome $f(x)$, on compte seulement ses changements de signe, alors les limites x_1 et x_n peuvent être atteintes comme le montrent les exemples

$$\frac{\Phi_n^2(x)}{x - x_1}, \quad \frac{\Phi_n^2(x)}{x - x_n}, \quad \frac{\Phi_n^2(x)}{(x - x_1)(x - x_n)},$$

déduits des précédents par un passage à la limite.

Nous avons donc le résultat suivant :

Tout polynome $f(x)$ satisfaisant à la condition

$$(5) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d\Psi = 0,$$

et dont le degré ne dépasse pas $2n - 1$ a au moins une racine ξ intérieure à l'intervalle qui contient les n racines du polynome Φ_n de Tchebycheff de degré n de la fonction Ψ et cette limitation est la meilleure possible.

7. L'équation (6) nous permet de conclure que les $f(x_i)$ ne

sont pas tous du même signe [1], ce qui peut être interprété de la façon suivante :

Si le polynome $f(x)$ admet un nombre pair de changements de signe dans l'intervalle (x_1, x_n), ceux-ci ne peuvent être tous dans un même intervalle fermé (x_k, x_{k+1}) contenant deux racines consécutives, pourvu, naturellement, que $1 \leq k \leq n-1$.

Si le contraire avait lieu, en effet, les $f(x_i)$ auraient tous le même signe (deux d'entre eux étant nuls éventuellement).

Considérons alors un polynome $f(x)$ de degré pair, ne dépassant pas $2n-2$: il présente un nombre pair de changements désigné dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. S'il en présente un nombre impair à l'intérieur de l'intervalle (x_1, x_n), il en présente aussi un nombre impair à l'extérieur de ce même intervalle; ces derniers sont aussi extérieurs aux intervalles (x_k, x_{k+1}). S'il en présente un nombre pair à l'intérieur de (x_1, x_n), ceux-ci ne peuvent être tous intérieurs à un intervalle quelconque (x_k, x_{k+1}). Dans les deux cas nous arrivons au résultat suivant :

Un polynome $f(x)$ de degré pair, ne dépassant pas $(2n-2)$, et satisfaisant à la condition (5), *ne saurait avoir toutes ses racines dans un même intervalle fermé (x_k, x_{k+1}) contenant deux racines consécutives du polynome de Tchebycheff Φ_n de degré n.*

Grossièrement le théorème précédent signifie que les racines de ce polynome ne peuvent pas être toutes accumulées dans certains intervalles.

Nous allons montrer maintenant que la limitation précédente est la meilleure possible et, pour être plus rapide, nous emploierons la relation (6); nous poserons :

$$f(x) = (x-\xi)(x-\eta)\left[\frac{\Phi_n^2(x)}{(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2}+\varepsilon\right].$$

Avec les notations du paragraphe précédent, on a

$$\varepsilon\sum_{i=1}^{n} m_i\varphi(x_i) + m_k\frac{\Phi_n'^2(x_k)}{(x_k-x_{k+1})^2}\varphi(x_k) + m_{k+1}\frac{\Phi_n'^2(x_{k+1})}{(x_k-x_{k+1})^2}\varphi(x_{k+1}) = 0.$$

[1] A moins que les $f(x_i)$ soient nuls, cas trop simple pour que nous l'examinions et pour lequel valent, naturellement, toutes les propositions du texte.

Supposons maintenant que ξ soit compris dans l'intervalle ouvert (x_k, x_{k+1}) et η dans l'intervalle (x_{k+1}, x_{k+2}) (pour la commodité des notations, nous poserons $x_0 = -\infty$ et $x_{n+1} = +\infty$), alors toutes les quantités $\varphi(x_i)$ sont positives sauf la quantité $\varphi(x_{k+1})$ qui est négative.

Pour les mêmes raisons que précédemment, si ξ et η sont suffisamment voisins de x_k et x_{k+1} respectivement, nous avons

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \varphi(x_i) > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_k)(x_i - x_{k+1}) > 0.$$

η étant donné, si ξ tend vers x_k, $\varphi(x_k)$ tend vers zéro et la partie indépendante de ε dans le premier membre de l'égalité ci-dessus tend vers une limite négative.

Donc, à toute valeur de η, suffisamment voisine de x_{k+1}, correspondent des valeurs de ξ qui fournissent une valeur de ε positive et, lorsque η tend vers x_{k+1}, les valeurs correspondantes de ξ tendent vers x_k; ainsi se trouve confirmée l'assertion ci-dessus : la limitation trouvée est la meilleure possible.

Une autre remarque me semble d'importance : c'est que l'on ne peut pas satisfaire à l'équation ci-dessus en faisant tendre ξ et η tous les deux vers x_{k+1} avec ε positif. En combinant cette remarque avec la proposition précédente, nous arrivons au résultat suivant auquel je n'ai pas réussi à donner une forme quantitative précise :

Le plus petit intervalle contenant toutes les racines (ou tous les changements de signe) d'un polynome $f(x)$ de degré pair, satisfaisant à la condition (5), *admet une borne inférieure positive, dépendant de la fonction Ψ et d'une borne supérieure du degré de $f(x)$.*

A vrai dire, le résultat précédent n'est démontré que dans le cas où le polynome admet deux changements de signe mais de légères modifications à la méthode ci-dessus, modifications que le lecteur rétablira facilement, permettent d'aboutir dans le cas général.

On peut donner cependant une borne inférieure positive mais j'ignore si elle est exacte.

Considérons pour cela un polynome $f(x)$, satisfaisant à la condition (5), de degré pair non supérieur à $2n$ et, comme précédemment, formons le polynome

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\Phi_n^2(x)}{(x - x_i)\,\Phi'_n(x_i)} \right]^2 f(x_i)$$

on a de même

$$f(x) = g(x) + \Phi_n(x).q(x).$$

mais ici le degré du polynome $q(x)$ peut atteindre n si $f(x)$ est de degré $2n$; dans ce dernier cas nous pouvons supposer que le coefficient du terme du plus haut degré dans $f(x)$ est positif, il en sera de même alors du coefficient du terme en x^n dans $q(x)$ et la relation (5) s'écrira

$$a + \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\Phi_n(x)}{(x - x_i)\,\Phi'_n(x_i)} \right]^2 d\Psi = 0.$$

où a désigne un nombre positif et cette relation a également lieu lorsque le degré de $f(x)$ est moindre que $2n$, à condition de prendre a nul.

Donc, si les $f(x_i)$ sont tous du même signe, ce signe ne peut être que négatif et alors, en vertu de nos hypothèses, le polynome $f(x)$ admet deux racines extérieures à l'intervalle (x_1, x_n), l'une inférieure à x_1, l'autre supérieure à x_n. S'il y a un changement de signe au moins dans la suite $f(x_i)$, alors les changements de signe de $f(x)$ ne sont pas tous dans un même intervalle (x_k, x_{k+1}) et cette conclusion est valable dans tous les cas.

On démontre, comme précédemment, que les limitations trouvées sont les meilleures possibles.

Cela posé désignons par $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{n+1}^*$, les racines du polynome de Tchebycheff Φ_{n+1} de degré $n+1$, rangées par ordre de grandeur croissante; on a

$$x_1^* < x_1 < x_2^* < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}^*.$$

Les racines (ou les changements de signe) d'un polynome $f(x)$ de degré pair inférieur à $2n$ ne peuvent être toutes dans l'un des intervalles :

$$(x_k, x_{k+1}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$(x_l^*, x_{l+1}^*) \qquad (l = 1, 2, \ldots, n).$$

Par conséquent

La longueur du plus petit intervalle contenant toutes les *racines ou tous les changements de signe d'un polynome $f(x)$ de degré pair, satisfaisant à la condition (5) et dont le degré ne dépasse pas $2n$, ne peut être inférieure au plus petit des $2n$ segments en lesquels les racines des polynomes $\Phi_n(x)$ et $\Phi_{n+1}(x)$ divisent l'axe réel.*

8. Nous parlerons rapidement du cas où la fonction Ψ admet un nombre fini r de points de croissance : $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$, rangés par ordre de grandeur croissante, en chacun desquels la fonction admet les sauts positifs : $s_1, s_2, \ldots, s_r$.

La condition (5) s'écrit alors

$$\sum_{l=1}^{r} s_l f(\xi_l) = 0,$$

lorsqu'elle est réalisée, le polynome $f(x)$ admet un changement de signe au moins entre ξ_1 et ξ_r et le premier déterminant nul rencontré dans la suite considérée au n° 2 est

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_r \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_r & c_{r+1} & \ldots & c_{2r} \end{vmatrix} \qquad \left(c_k = \sum_{l=1}^{r} s_l \xi_l^k\right).$$

Les polynomes de Tchebycheff peuvent être construits jusqu'à celui d'ordre r inclusivement qui a pour racines les nombres ξ_l. Pour les polynomes $f(x)$ dont le degré ne dépasse pas $2r-3$, toutes les considérations et tous les résultats précédents restent valables, en particulier on peut indiquer un intervalle intérieur à (ξ_1, ξ_l) et où ces polynomes ont au moins une racine.

Malgré sa grande simplicité, ce résultat n'avait pas encore été remarqué, du moins à ma connaissance.

Comme on devait s'y attendre, et c'est là un fait très général, il n'y a pas de différence essentielle entre le cas où la fonction présente un nombre fini de points de croissance et celui où elle en a une infinité.

9. En restreignant la question posée au début de ce travail, on peut se poser le problème suivant :

A quelles conditions doivent satisfaire les constantes c_0,

$c_1, \ldots, c_n, \ldots (c_0 > 0)$ *pour que tout polynome satisfaisant à la condition* (1) *ait au moins une racine réelle comprise entre deux constantes a et b données* $(-\infty \leqq a < b \leqq +\infty)$?

La réponse à cette question nous sera fournie par un résultat de M. J. Chokhate [1] :

Si l'on a

$$\int_{-\infty}^{A} d\Psi > 0 \qquad \left(\text{ou} \int_{B}^{+\infty} d\Psi > 0\right).$$

à partir d'une certaine valeur de n il y a un zéro du polynome Φ_n plus petit que A (ou plus grand que B).

Les limitations obtenues plus haut, pour les zéros de tous les polynomes $f(x)$, étant les meilleures possibles, il est nécessaire et suffisant que les racines des polynomes Φ_n soient toutes comprises entre a et b, c'est-à-dire que Ψ doit avoir tous ses points de croissance entre ces mêmes limites, ce qui peut s'interpréter aussi en disant que *le problème des moments*

$$\int_{a}^{b} x^n d\Psi = c_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

admet au moins une solution.

10. Nous allons donner maintenant quelques applications des résultats précédents à quelques cas simples.

Théorème des accroissements finis. — Prenons d'abord la fonction Ψ suivante :

$$d\Psi = dx \qquad \text{pour} \qquad -1 \leqq x \leqq 1,$$
$$d\Psi = 0 \qquad \text{pour} \qquad x < -1 \quad \text{et} \quad x > 1,$$

les polynomes $f(x)$ sont ceux pour lesquels

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = 0,$$

(1) J. Chokhate, *Sur les quadratures mécaniques et sur les zéros des polynomes de Tchebycheff dans un intervalle fini* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 185, 1927, p. 597).

et les polynomes $\Phi_n(x)$ sont les polynomes de Legendre. On obtient ainsi le résultat de M. Montel complété par Tchakaloff (*loc. cit.*) relativement au théorème des accroissements finis; le résultat relatif aux polynomes de degré pair est nouveau et son énoncé se transpose facilement.

Formule de Taylor. — En désignant par $F(x)$ une fonction de la variable réelle x, définie dans l'intervalle $(a \leqq x \leqq b)$, admettant dans ce même intervalle une dérivée continue d'ordre $p+1$, la formule de Taylor peut être démontrée en partant de l'égalité

$$F(b) = F(a) + (b-a)F'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^p}{p!}F^{(p)}(a) + \int_a^b F^{(p+1)}(x)\frac{(b-x)^p}{p!}\,dx.$$

On applique le théorème de la moyenne au dernier terme, ce qui donne

$$\int_a^b F^{(p+1)}(x)\frac{(b-x)^p}{p!}\,dx = F^{(p+1)}(\xi)\int_a \frac{(b-x)^p}{p!}\,dx = F^{(p+1)}(\xi)\frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!},$$

ξ étant compris entre a et b.

Prenons pour fonction $F(x)$ un polynome et supposons, cas auquel on peut toujours se ramener par des transformations très simples, que $a=-1$, $b=1$ et que $F^{(p+1)}(\xi)=0$; dans ces conditions où pouvons-nous prendre le nombre ξ ?

En posant $F^{(p+1)}(x)=f(x)$, le polynome $f(x)$ satisfait à la relation

$$\int_{-1}^{+1} f(x)(1-x)^p\,dx = 0,$$

ici nous avons

$$d\Psi = (1-x)^p \quad \text{pour} \quad -1 \leqq x \leqq 1,$$
$$d\Psi = 0 \quad \text{pour} \quad x < -1 \text{ et } x > 1,$$

et la place d'un nombre ξ nous est indiquée par les résultats précédents. Les polynomes Φ_n sont ici les polynomes hypergéométriques

$$(1-x)^p\,\Phi_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{p+n}(1+x)^n].$$

Polynomes trigonométriques. — Considérons maintenant la fonction

$$d\Gamma = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{pour} \qquad -1 \leq x \leq 1,$$
$$d\Gamma = 0 \qquad \text{pour} \qquad x < -1 \text{ et } x > 1.$$

En posant $\cos\theta = x$, on a $\Phi_n(x) = \cos n\theta$ et les polynomes $f(x)$ dont le degré ne surpasse pas $2n-1$ sont de la forme

$$f(x) = a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \ldots + a_{2n-1} \cos(2n-1)\theta.$$

Raisonnant maintenant sur la variable θ plutôt que sur la variable x et supposant θ compris entre 0 et π, on voit que les zéros de Φ_n sont

$$\theta = \frac{2k+1}{n}\pi \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

et ses zéros extrêmes $\frac{\pi}{2n}$ et $\pi - \frac{\pi}{2n}$: dans cet intervalle le polynome $f(x)$ précédent a au moins une racine.

On pourrait donner aussi un résultat analogue relatif aux sommes de sinus, mais nous préférons donner un résultat relatif aux polynomes trigonométriques.

En changeant au besoin l'origine des arcs, on peut supposer que le polynome est de la forme

$$a_1 \cos\theta + (a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta) + \ldots$$
$$+ [a_{2n-1} \cos(2n-1)\theta + b_{2n-1} \sin(2n-1)\theta].$$

Passant à la variable x, ce polynome s'écrit

$$f(x) + \sin\theta . P(x),$$

où $P(x)$ désigne un polynome en x. Le polynome $f(x)$ s'annule pour une valeur au moins ξ comprise entre $-\cos\frac{\pi}{2n}$ et $\cos\frac{\pi}{2n}$. A cette valeur correspond deux extrémités d'arcs sur le cercle trigonométrique qui donnent deux valeurs opposées pour $\sin\theta$; par suite, dans chacun des deux arcs fermés dans lesquels les deux points précédents divisent le cercle trigonométrique, le polynome trigonométrique considéré s'annule au moins une fois.

Donc, dans les deux arcs de longueur $2\pi - \frac{\pi}{n}$ et d'extrémités respectives $\left(\frac{\pi}{2n}, -\frac{\pi}{2n}\right)$, $\left(\pi + \frac{\pi}{2n}, \pi - \frac{\pi}{2n}\right)$ le polynome trigonométrique s'annule au moins une fois et cette limitation est la meilleure possible.

Reprenant maintenant le cas où l'origine est quelconque, nous avons :

Étant donné un polynome trigonométrique sans terme constant

$$(a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta) + (a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta) + \ldots$$
$$+ (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta),$$

on peut indiquer, sur le cercle trigonométrique, deux arcs de longueurs égales inférieures à 2π, symétriques et symétriques l'un de l'autre par rapport à un axe dont la direction dépend seulement du rapport des deux premiers coefficients a_1 et b_1 et dans chacun desquels le polynome a au moins une racine.

Nous arrêterons ici les applications car ne sont intéressantes que celles qui ne sont pas de simples transpositions d'un résultat à des cas particuliers ou celles qui s'interprètent dans un ordre d'idées différent de celui où l'on s'est placé.

11. La fonction Ψ étant donnée, la condition (5) peut s'exprimer aussi en disant que la représentation de $f(x)$ par une combinaison linéaire des Φ_n n'a pas de terme constant, autrement dit que l'on a

$$f(x) = \alpha_1 \Phi_1(x) + \alpha_2 \Phi_2(x) + \ldots.$$

Cette forme suggère immédiatement un autre problème : Que peut-on dire des zéros du polynome $f(x)$ lorsque les coefficients α_l sont nuls jusqu'à un certain rang ? Pas beaucoup plus, il semble, que ce que l'on peut tirer des résultats précédents et de la remarque suivante déjà connue :

Si α_k est le coefficient de plus faible indice susceptible de ne pas s'annuler, le polynome $f(x)$ a au moins k racines réelles (changements de signe).

Pour le voir, il suffit de remarquer que le polynome $f(x)$ satisfaisant aux égalités

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\Phi_l(x)\,d\Psi = 0 \qquad (l = 0, 1, \ldots, k-1),$$

satisfait aussi à l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).P(x)\,d\Psi = 0,$$

où $P(x)$ désigne un polynome quelconque de degré $(l-1)$ au plus.

Si alors $f(x)$ avait moins de l changements de signe on pourrait faire en sorte que le produit $f(x)P(x)$ soit toujours positif, contrairement à l'égalité précédente.

Prenons le cas simple où α_1 est nul mais où α_2 ne l'est pas forcément, alors le polynome $f(x)$ a deux changements de signe dans tout intervalle contenant tous les points de croissance Ψ, et nous pouvons énoncer les résultats suivants :

Si le degré de $f(x)$ ne surpasse pas $2n-2$, ce polynome présente au moins deux changements de signe dans l'intervalle contenant les racines du polynome Φ_n ; si le degré de $f(x)$ ne dépasse pas $2n-1$, ce polynome présente au moins deux changements de signe dans l'intervalle contenant les racines de Φ_{n+1}, parmi eux l'un au moins est dans l'intervalle contenant les racines de Φ_n.

Le plus petit intervalle contenant tous les changements de signe de $f(x)$ admet une borne inférieure positive dépendant de Ψ et d'une borne supérieure du degré de $f(x)$ [1].

12. Les énoncés des problèmes précédents, relatifs au cas d'une variable x, suggèrent aussi des problèmes analogues relatifs au cas de plusieurs variables. Mais bien des difficultés se présentent.

---

[1] M. Montel s'est aussi préoccupé, dans un cas particulier, des problèmes généraux suivants :

a. $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_h$ désignant h fonctions croissantes données, que peut-on dire au sujet des racines des polynomes $f(x)$ qui satisfont aux conditions

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,d\Psi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

et au sujet des racines de leurs dérivées.

b. Même problème lorsque les fonctions Ψ_i ne sont plus données mais satisfont à la condition

$$d\Psi = d\Psi_1 + d\Psi_2 + \ldots + d\Psi_h$$

où Ψ est donnée.

c. Problème qui résulte de la combinaison des deux précédents.

Tout d'abord, pour espérer obtenir une généralisation du résultat du paragraphe 3, il faudrait être en possession d'une solution du problème des moments dans le cas de plusieurs variables, problème qui semble plus difficile que celui à une variable.

Quel est le problème analogue à celui traité dans les paragraphes suivants?

Pour le cas de deux variables x et y, cas auquel nous bornerons nos recherches, il faut indiquer des régions du plan xy, où des courbes algébriques de ce plan, qui satisfont à certaines conditions, ont forcément des points ou bien indiquer des lignes que ces mêmes courbes traversent obligatoirement.

Pour obtenir des résultats comparables aux précédents, quant à la précision, il faudrait avoir des renseignements sur les formes des courbes obtenues en égalant à zéro les polynomes de Tchebycheff à deux variables relatifs à une distribution de matière donnée, renseignements qui manquent totalement. Je me contenterai de démontrer un résultat général relatif aux régions.

13. Nous examinerons seulement le cas où l'on a une distribution de matière homogène et de densité 1 à l'intérieur d'un domaine D borné, ouvert, connexe et quarrable d'aire positive; mais, comme on le verra facilement, le résultat est vrai pour toute distribution de matière. Soit alors $D(\theta)$ un domaine ouvert, connexe et quarrable qui dépend d'un paramètre θ compris entre 0 et 1 ($0 \leq \theta \leq 1$); nous supposerons que $D(\theta)$ est fonction continue de θ (1) ($\theta = 1$ inclus) puis que

$$D(\theta) \supset D(\theta') \quad \text{si} \quad \theta > \theta',$$

sans que l'inverse soit exact, enfin que

$$D(1) = D.$$

Nous allons établir le résultat suivant, analogue au résultat fondamental de M. Montel :

Soit une famille de fonctions holomorphes $f(x, y)$ dans un

(1) Ce qui signifie que la limite supérieure de la plus courte distance d'un point de $D(\theta)$ à un point de $D(\theta')$ tend vers zéro lorsque θ' tend vers θ ($\theta > \theta'$).

domaine $\mathcal{D}$ de l'espace complexe à quatre dimensions (x, y) contenant à son intérieur tous les points de D, *supposons :*

a. Que les fonctions $f(x, y)$ soient réelles lorsque x et y sont réels.

b. Que la famille soit normale dans $\mathcal{D}$ et qu'aucune fonction limite de fonctions de la famille ne soit identiquement nulle.

c. Que l'on ait

$$\int\int_{D} f(x, y)\, dx\, dy = 0,$$

alors il existe des nombres θ, inférieurs à l'unité tels que toute fonction $f(x, y)$ de la famille change de signe dans le domaine $D(\theta)$ [et où, par suite, la courbe $f(x, y) = 0$ a des points].

Dans le cas contraire, en effet, on pourrait, à toute valeur du nombre entier n, faire correspondre une fonction $f_n(x, y)$ de la famille qui ne changerait pas de signe dans le domaine $D\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

En vertu de l'hypothèse (b) on peut, de la suite de fonctions $f_n(x, y)$, extraire une autre suite convergeant uniformément vers une fonction $f^*(x, y)$ à l'intérieur d'un domaine $\mathcal{D}'$ intérieur à $\mathcal{D}$ mais contenant D à son intérieur, soit $f_{n_k}(x, y)$ cette suite. La fonction f^* est réelle lorsque x et y le sont et n'est pas identiquement nulle. En vertu de l'hypothèse (c) elle change de signe à l'intérieur du domaine D ; il existe donc dans ce domaine deux points où f^* prend des valeurs de signes opposés.

Pour la commodité des notations, nous prendrons, pour coordonnées de ces deux points (x_1, y_1) et $(-x_1, -y_1)$, nous supposerons que $f(x_1, y_1) > 0$, $f(-x_1, -y_1) < 0$ et que ces points sont suffisamment voisins pour que le segment qui les joint soit intérieur à D, enfin que le cercle

$$x = tx_1, \qquad y = ty_1, \qquad |t| \leqq 1 \qquad (t, x, y \text{ complexes}),$$

soit intérieur au domaine $\mathcal{D}'$.

Considérons alors la suite de fonctions holomorphes de t, dans le cercle $|t| \leqq 1$, réelles lorsque t est réel

$$F_{n_k}(t) = f_{n_k}(tx_1, ty_1),$$

cette suite converge uniformément dans ce cercle vers la limite

$$F^*(t) = f^*(tx_1, ty_1),$$

non identiquement nulle puisque $f^*(x_1, y_1)$ et $f^*(-x_1, -y_1)$ ont des signes différents.

Soient maintenant (t_1x_1, t_1y_1) et $(-t_1x_1, -t_1y_1)$ (t_1 réel et positif) deux points réels suffisamment voisins de (x_1, y_1) et $(-x_1, -y_1)$ respectivement pour que

$$f^*(t_1x_1, t_1y_1) > 0, \qquad f^*(-t_1x_1, -t_1y_1) < 0;$$

à partir d'une valeur suffisamment grande de n_k, on aura donc aussi

$$f_{n_k}(t_1x_1, t_1y_1) > 0, \qquad f_{n_k}(-t_1x_1, -t_1y_1) < 0,$$

c'est-à-dire que la fonction $f_{n_k}(tx_1, ty_1)$ change au moins une fois de signe lorsque t varie de -1 à $+1$. Or, à partir d'une valeur suffisamment grande de n_k le segment (tx_1, ty_1) est contenu dans le domaine $D\left(1 - \frac{1}{n_k}\right)$ ce qui est contraire à l'hypothèse. On ne peut donc admettre l'existence d'une fonction $f_n(x, y)$ pour toute valeur de n, l'existence de nombres θ est ainsi démontrée.

14. Montrons maintenant que le résultat précédent est valable pour l'ensemble des polynomes à coefficients réels, dont le degré ne surpasse pas un nombre donné m, et qui satisfont à

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

Il suffit, pour le voir, de reprendre le raisonnement fait par M. Montel dans le cas d'une variable.

La famille n'est pas normale mais de toute suite $f_n(x, y)$ de tels polynomes on peut extraire une suite partielle $f_{n_k}(x, y)$ et trouver une suite de constantes λ_{n_k} non nulles telles que la suite $\lambda_{n_k} f_{n_k}(x, y)$ converge uniformément dans tout domaine borné de l'espace complexe vers un polynome non identiquement nul. Cela suffit car la condition précédente est également réalisée pour les nouveaux polynomes et les deux polynomes $f_{n_k}(x, y)$ et $\lambda_{n_k} f_{n_k}(x, y)$ changent de signe aux mêmes points.

Posons

$$f_n(x, y) = a^n_{m,0}x^m + a^n_{m-1,1}x^{m-1}y + \ldots + a^n_{i,j}x^i y^j + \ldots + a^n_{0,0},$$

en rangeant les monomes suivant le même ordre pour tous les polynomes de la suite, cet ordre étant, par ailleurs, arbitraire.

De la suite $a^n_{m,0}$ on peut extraire une suite $a^{(n_1)}_{m,0}$ convergeant vers une limite finie ou infinie $A_{m,0}$ lorsque n_1 augmente indéfiniment. De la suite $a^{n_1}_{m-1,1}$ on peut extraire une suite $a^{(n_2)}_{m-1,1}$ convergeant vers une limite finie ou infinie $A_{m-1,1}$ et ainsi de suite jusqu'à $a_{0,0}$. Soit k le nombre des extractions successives nécessaires; si tous les $A_{i,j}$ sont bornés et non tous nuls, la suite des polynomes $f_{n_k}(x, y)$ converge donc, dans tout domaine borné de l'espace complexe vers

$$g(x, y) = A_{m,0}x^m + A_{m-1,1}x^{m-1}y + \ldots + A_{i,j}x^i y^j + \ldots + A_{0,0}.$$

Si tous les $A_{i,j}$ ne sont pas finis, nous dirons que $g(x, y)$ est la limite formelle des f_{n_k}. Si les $A_{i,j}$ sont tous nuls, il suffit de refaire le raisonnement précédent sur les polynomes $\frac{f_n(x, y)}{a^n_{i,j}}$, $a^n_{i,j}$ désignant le premier coefficient non nul de f_n pour obtenir un polynome limite non identiquement nul.

Il reste à examiner le cas où, parmi les $A_{i,j}$, l'un au moins est infini; soit A_{ij} le premier, à partir d'une valeur assez grande de n_k, $a^{n_k}_{i,j}$ n'est pas nul et nous pouvons parler des polynomes $\frac{f_{n_k}}{a^{n_k}_{i,j}}$. Pour ceux-ci, le passage à la limite précédent fournit un polynome dont les premiers coefficients sont tous nuls, le premier non nul est celui de $x^i y^j$ et est égal à 1. Ce passage à la limite nous fournit donc, formellement, un polynome où il y a au moins un coefficient infini en moins que dans le polynome g. Si cette nouvelle limite formelle a des coefficients infinis, nous recommencerons l'opération précédente sur les polynomes qui nous l'ont donnée et ainsi de suite, autant de fois qu'il sera nécessaire.

Finalement, nous arrivons, dans tous les cas, à un polynome non identiquement nul $f^*(x, y)$, limite, dans tout domaine borné de l'espace complexe, d'une suite de polynomes $\lambda_{n_k} f_{n_k}$ et qui, satisfaisant à

$$\int\int_D f^2(x, y)\, dx\, dy = 0,$$

change de signe dans le domaine D, donc ne se réduit pas à une constante.

Soit $\Delta(\theta)$ le domaine fermé obtenu en ajoutant à $D(\theta)$ tous ses points limites et soit $\theta(m)$ la borne inférieure des nombre θ tels que dans $D(\theta)$ le polynome $f(x,y)$, satisfaisant aux conditions précédentes, change de signe; dans le domaine $\Delta[\theta(m)]$, ou sur la frontière de ce domaine, tout polynome $f(x, y)$ s'annule. A chaque famille de domaine $\Delta(\theta)$, et à chaque valeur de l'entier m, correspond une constante $\theta(m)(< 1)$ qui, évidemment, ne décroît pas lorsque m augmente.

15. Au sujet de cette constante $\theta(m)$, nous allons établir le résultat suivant :

Si D et $D(\theta)$ sont des domaines limités par des courbes qui ont un centre commun, que nous supposerons à l'origine, on a

$$\theta(2n) = \theta(2n + 1).$$

Il suffit, pour cela, de grouper les monomes de même parité en écrivant

$$f(x, y) = p(x, y) + q(x, y),$$

où $p(x, y)$ contient tous les termes d'ordre pair et $q(x, y)$ tous ceux d'ordre impair.

On a évidemment

$$\int\int_D q(x, y)\, dx\, dy = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\int\int_D p(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

Soit θ un nombre supérieur à $\theta(2n)$, le polynome $p(x, y)$ change de signe et, par suite, s'annule dans le domaine $D(\theta)$. Soit (x, y) un point pour lequel $p(x, y) = 0$ alors, comme $p(-x, -y) = 0$ et $q(x, y) + q(-x, -y) = 0$, si $q(x, y) \neq 0$ le résultat est établi car, sur des chemins joignant les deux points (x, y) et $(-x, -y)$ et le long desquels $f(x, y)$ n'est pas constamment nul, f possède au moins un changement de signe. Si $q(x, y) = 0$ en tous les points où $p(x, y)$ s'annule en changeant de signe, on peut écrire

$$p(x, y) = r(x, y)\,p_1(x, y)\,; \quad q(x, y) = r(x, y)\,q_1(x, y),$$

p_1 ne changeant pas de signe dans $D(\theta)$ tandis que $r(x, y)$ change de signe dans tout cercle situé dans ce même domaine et ayant pour centre un point quelconque où ce polynome s'annule. Si la somme $p_1 + q_1$ ne s'annule pas en tous les points où $r(x, y)$ s'annule, le théorème est encore vrai; si le contraire a lieu, on peut écrire

$$f(x, y) = p(x, y) + q(x, y) = r^2(x, y)\,[p_2(x, y) + q_2(x, y)],$$

où p_2 n'a que des termes d'ordre pair et q_2 des termes d'ordre impair, le degré de $r^2 p_2$ ne dépassant pas $2n$ et l'on a

$$\int\!\!\int_{D} r^2 q_2\, dx\, dy = 0, \qquad \int\!\!\int_{D} r^2 p_2\, dx\, dy = 0.$$

Si p_2 est identiquement nul, $r^2 q_2$ change de signe dans tout domaine centré à l'origine; si p_2 n'est pas identiquement nul, il change de signe dans $D(\theta)$, on peut recommencer le raisonnement précédent.

Après un nombre fini d'opérations, on arrivera à démontrer que $f(x, y)$ change de signe dans $D(\theta)$: ce qui nous montre que

$$\theta(2n) \geqq \theta(2n + 1),$$

d'autre part, nous savons que

$$\theta(2n) \leqq \theta(2n + 1),$$

il suit de là

$$\theta(2n) = \theta(2n + 1).$$

16. Ainsi, comme on le voit, la forme du domaine où le polynome $f(x, y)$ change de signe est à peu près quelconque comme, d'ailleurs, on devait s'y attendre en admettant le théorème vrai pour une suite donnée de domaines. Évidemment, pour des domaines D simples, des considérations de forme imposent, si l'on peut ainsi dire, le choix de la famille $D(\theta)$; mais, par le fait de ce choix dans le cas général, notre théorème général porte,

sans doute, en lui-même sa condamnation : il n'est probablement pas le dernier mot sur la question et il serait vain, à mon avis, de s'attacher à la détermination de la suite des nombres $\theta(m)$ même pour des cas simples (cercle, carré, ellipse par exemple). L'étude d'un cas va nous conduire à cette conjecture.

Prenons pour domaine D le carré de côté 2 centré à l'origine et limité par des parallèles aux axes. Un polynome $f(x, y)$ du second degré satisfaisant aux conditions précédentes s'écrit :

$$f(x, y) = a\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + b\left(y^2 - \frac{1}{3}\right) + 2cxy + 2dx + 2ey,$$

les coefficients a, b, c, d, e étant quelconques. Nous voyons que

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$
$$+ f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 0.$$

Si nous prenons, par exemple, pour domaine $\Delta(\theta)$ le carré homothétique à Δ dans le rapport θ, le centre d'homothétie étant l'origine, nous voyons que $\theta(2) = \sqrt{\frac{1}{3}}$, mais l'égalité précédente nous donne davantage, elle nous montre que, sur tout arc de courbe passant par les quatre sommets du carré $\Delta\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$, la courbe $f(x, y) = 0$ a au moins un point. Il en est ainsi, par exemple, pour la croix formée par les deux diagonales du carré précédent, ou pour un arc du cercle circonscrit à ce carré.

C'est probablement dans ce sens qu'il faut chercher le résultat précis, je veux dire qu'il doit être possible d'indiquer des courbes qui ont toujours des points communs avec la courbe $f(x, y) = 0$.

J'ajouterai enfin que le cas où le domaine D est un rectangle présente un intérêt spécial, car il se rattache à une généralisation du théorème des accroissements finis exprimée par l'égalité

$$F(a, b) + F(-a, b) - F(a, -b) + F(-a, -b) = \int\int_D \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy.$$