BULLETIN DE LA S. M. F.

STEFAN KEMPISTY

Sur les dérivées des fonctions des systèmes simples d'intervalles

Bulletin de la S. M. F., tome 60 (1932), p. 106-126
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1932__60__106_0>

SUR LES DÉRIVÉES DES FONCTIONS DES SYSTÈMES SIMPLES D'INTERVALLES;

PAR M. STEFAN KEMPISTY.

M. Lebesgue a établi que la dérivée $F'(x)$ d'une fonction absolument continue est presque partout égale à la limite du quotient

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}[F(\beta_i)-F(\alpha_i)]}{\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)},$$

(α_i, β_i) étant des intervalles non empiétants et tels que

$$\Sigma(\beta_i-\alpha_i) > k\,|V_x| > 0,$$

si V_x est le plus petit voisinage contenant tous ces intervalles et $|V_x|$ l'étendu de ce voisinage ([1]).

Il se pose la question de savoir quelles sont les propriétés de cette limite supposée finie et indépendante de la valeur de la constante k, quand $F(x)$ est une fonction arbitraire.

Or il résulte d'un théorème de M. Newman ([2]) que cette dérivée spéciale de paramètre k est approximativement continue. La réciproque de ce théorème est exacte pour les fonctions bornées ([3]): ce fait est une généralisation d'un théorème de M. Denjoy ([4]) et prouve que la fonction dérivée ainsi définie peut être discontinue.

En étudiant le procédé d'intégration (A) de Denjoy, j'ai établi

([1]) H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, 10e édition, Paris, 1928, p. 192.

([2]) H. A. NEWMAN, *On approximate continuity* (*Transaction of the Cambridge Phil. Society*, t. 23, 1923, p. 17).

([3]) *Voir* ma Note *Sur les dérivées de la fonction d'ensemble* (*Comptes rendus*, Paris, t. 182, 1926, p. 1205.

([4]) A. DENJOY, *Sur les fonctions dérivées sommables* (*Bull. Soc. math. de France*, t. 43, 1915, p. 175).

que la dérivée en question est intégrable (A) donc sommable [1] et que son intégrale est l'accroissement de $F(x)$ [2].

Or un raisonnement analogue peut être appliqué à l'accroissement d'une fonction de plusieurs variables et même à une fonction quelconque d'intervalles, soit-elle additive ou non additive.

Nous allons voir en même temps que la dérivée de paramètre k, supposée indépendante de la valeur de k, est non seulement approximativement continue mais *approximativement continue au sens strict*, c'est-à-dire égale à la dérivée formée en partant du produit de la borne supérieure ou inférieure à densité λ près sur un intervalle par la longueur de cet intervalle.

Toute fonction approximativement continue et bornée dans un intervalle est donc approximativement continue au sens strict.

En négligeant les ensembles de mesure nulle, on déduit du théorème énoncé et de celui de M. Lebesgue que toute fonction sommable est presque partout approximativement continue au sens strict.

I. — Notions préliminaires.

1. L'*intervalle linéaire* dont les extrémités sont a et b c'est l'un des quatre ensembles :

$$a < x < b, \quad a < x \leqq b, \quad a \leqq x < b, \quad a \leqq x \leqq b.$$

L'*intervalle* I dans un espace cartésien à k dimensions est l'ensemble de tous les points $(x_1, x_2, x_2, \ldots, x_k)$ tels que la coordonnée x_i appartient à un intervalle linéaire (a_i, b_i).

Un *voisinage* symétrique V_x d'un point

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_2, \ldots, x_k)$$

est l'intervalle dont les projections sur les axes de coordonnées sont des intervalles linéaires $(x_i - h, x_i + h)$, h étant le rayon du voisinage.

Un *système* d'intervalles est *simple* s'il se compose d'un nombre

---

[1] A. Denjoy, *Sur la définition riemannienne de l'intégrale de Lebesgue* (*Comptes rendus*, t. 193, 1931, p. 695)

[2] *Voir* ma Note *Sur l'intégration de la dérivée régulière* (*Comptes rendus*, t. 184, 1927, p. 69).

fini d'intervalles non empiétants, c'est-à-dire sans points intérieurs communs.

Nous désignerons par A, B, ... les systèmes simples d'intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_n$ en écrivant

$$A = \{ I_1, I_2, \ldots, I_n \}$$

et par les mêmes lettres avec un point au-dessus de chacune *les ensembles simples* composés des points de ces intervalles, donc

$$\dot{A} = I_1 + I_2 + \ldots + I_n,$$

Quand un système se réduit à un seul intervalle, il peut être désigné sans l'ambiguïté par I.

2. En partant d'une fonction d'intervalle F(I) nous pouvons définir par l'addition une *fonction de système simple* en posant

$$F(A) = F(I_1) + F(I_2) + \ldots + F(I_n).$$

Par exemple, en partant de l'étendue de l'intervalle I, c'est-à-dire du nombre

$$|I| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_k - a_k),$$

nous définirons *l'étendue* d'un système simple d'intervalles par l'égalité

$$|A| = |I_1| + |I_2| + \ldots + |I_n|.$$

On peut aussi définir une fonction de système d'intervalle en se servant d'une autre opération.

Soient, par exemple,

$$\underline{n}(I) = \min(b_1 - a_1, b_2 - \alpha_2, \ldots, b_k - a_k),$$
$$\overline{n}(I) = \max(b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_k - a_k)$$

les *normes inférieure* et *supérieure* de l'intervalle I. En posant

$$\underline{n}(A) = \min(b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_k - a_k\gamma),$$
$$\overline{n}(A) = \max(b_2 - a_2, b_2 - a_2, \ldots, b_k - a_k),$$

nous définirons les normes extrêmes des systèmes simples.

3. Quand un système simple A est composé d'intervalles con-

tenus dans un intervalle I et tels que $|A| = |I|$, nous dirons que A est une *division* de l'intervalle I.

Soient donc D une division de l'intervalle R et F(A) une fonction définie par l'addition en partant de la fonction F(I).

La plus grande limite de F(D) quand la norme supérieure de la division D tend vers zéro est *l'intégrale supérieure* de F(I) dans R au sens de Burkill. La plus petite limite de F(D) est *l'intégrale inférieure* de F(I) (¹).

Lorsque ces intégrales sont finies et égales, la fonction est dite intégrable au sens de Burkill.

4. Nous dirons qu'un système simple A est *régulier suivant le paramètre* α par rapport à un point x (²) quand le plus petit voisinage V_x contenant A satisfait à la condition

$$|A| > \alpha |V_x|,$$

Lorsque l'étendue de ce système A ou, ce qui revient au même, celle du voisinage V_x décroît vers zéro, nous dirons que A tend *régulièrement* suivant le paramètre α vers le point x, en écrivant

$$A \underset{\alpha}{\succ} x,$$

La *dérivée inférieure de paramètre* α de la fonction F(A) au point x est la plus petite limite du rapport

$$\frac{F(A)}{|A|},$$

A tendant vers x suivant le paramètre α. Nous écrirons

$$\underline{D}_x^\alpha F(A) = \liminf_{\substack{A \succ x \\ \alpha}} \frac{F(A)}{|A|}.$$

De même la *dérivée supérieure de paramètre* α est

$$\overline{D}_x^\alpha F(A) = \limsup_{\substack{A \succ x \\ \alpha}} \frac{F(A)}{|A|}.$$

(¹) J. C. Burkill, *Functions of Intervals* (*Proc. Lond. Math. Soc.*, 2ᵉ série, vol. 22, 1923, p. 279).

(²) Ou appartient à une famille régulière, suivant l'expression de M. Lebesgue [*Sur l'intégration des fonctions discontinues* (*Annales scient. de l'Ecole Norm. sup.*, 3ᵉ série, t. 27, 1911, p. 388)].

Il résulte de ces définitions que l'on a, pour $\alpha' < \alpha$, les inégalités

$$\underline{D}_x^{\alpha'} F(A) \leqq \underline{D}_x^{\alpha} F(A) \leqq \overline{D}_x^{\alpha} F(A) \leqq \overline{D}_x^{\alpha'} F(A),$$

donc ces dérivées tendent vers les limites finies ou infinies quand le paramètre α décroît vers zéro.

La limite de $\underline{D}_\alpha^x F(A)$ est la dérivée inférieure de la fonction $F(A)$ au point x, celle de $\overline{D}_x^{\alpha} F(A)$ est la dérivée supérieure. Nous désignerons ces dérivées extrêmes respectivement par $\underline{D}_x F(A)$ et $\overline{D}_x F(A)$.

Comme nous avons

$$\underline{D}_x F(A) \leqq \underline{D}_x^{\alpha} F(A) \leqq \overline{D}_x^{\alpha} F(A) \leqq \overline{D}_x F(A),$$

toute fonction dérivable au point x est dérivable de paramètre α et

$$D_x F(A) = D_x^{\alpha} F(A).$$

5. Nous nous servirons dans la suite d'un lemme de MM. Vitali et Lebesgue énoncé sous la forme suivante : *si dans une famille de systèmes simples d'intervalles il existe, pour tout point x d'un ensemble borné* E, *une suite de systèmes qui tend régulièrement vers ce point* (suivant un paramètre α_x), *nous pouvons, étant donné δ positif, déterminer un système* A *qui soit la réunion d'un nombre fini de systèmes de la famille considérée et qui soit distant de δ de l'ensemble* E, c'est-à-dire tel qu'on ait

$$|\dot{A} - E| < \delta, \qquad |E - \dot{A}| < \delta.$$

Lorsque l'ensemble E est contenu dans un intervalle I, le système A peut être formé exclusivement d'intervalles contenus dans I [1].

Nous allons aussi faire usage d'un lemme de M. Lusin [2], en étendant ce lemme à l'espace à plusieurs dimensions. Disons qu'un système S d'intervalles *couvre intérieurement* un ensemble E quand tout intervalle, contenant un point x de E et contenu dans

---

[1] R. C. Young, *Functions of Σ defined by addition of functions of intervals* (*Matematische Zeitschrift*, t. 29, 1928, p. 181).

[2] N. Lusin, *Recueil de la Soc. math. de Moscou*, 1911.

un voisinage suffisamment petit de ce point I, appartient au système S.

Le lemme de M. Lusin peut être alors énoncé comme il suit : *si l'intervalle fermé* I *est couvert intérieurement par un système* S, *il existe un système simple* A, *contenu dans* S *et couvrant l'intervalle* I. Quand le système S est formé d'intervalles contenus dans I, le système simple A est une division de I et l'ensemble E peut être admis comme couvert intérieurement relativement à l'intervalle I. Il suffit même d'admettre, dans l'hypothèse du lemme, que tout intervalle semblable à I, contenant un point x de E et contenu dans un voisinage suffisamment petit, appartient au système S. Pour démontrer le lemme on se sert d'un réseau qui s'obtient en divisant les côtés de R en parties égales.

II. — La continuité approximative de la dérivée de F(A).

1. La fonction $f(x)$ est *approximativement semi-continue supérieurement* au point x_0 lorsque, quel que soit le nombre λ compris entre 0 et 1, il existe un nombre positif δ tel que, E étant l'ensemble

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > f(x_0) + \varepsilon]$$

et V_x le voisinage de rayon inférieur à δ, nous avons

$$|EV_{x_0}| \leqq \lambda\, |V_{x_0}|.$$

La définition d'une fonction approximativement semi-continue inférieurement s'obtient en remplaçant l'ensemble E par l'ensemble

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < f(x_0) - \varepsilon].$$

Les dérivées extrêmes de F(A), en tant que fonctions du point x, sont approximativement semi-continues ; d'une façon plus précise, *la dérivée supérieure est approximativement semi-continue supérieurement et la dérivée inférieure est approximativement semi-continue inférieurement.*

Il suffit de prouver la première partie de ce théorème puisque, en changeant le signe de la fonction, on change le sens de la dérivée et de la semi-continuité.

Désignons par $f(x)$ la dérivée supérieure finie $\overline{D_x}F(A)$ dans un intervalle R et considérons, pour $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$E = \underset{x}{E}\,|\, f(x) > f(x_0) + \varepsilon \,|.$$

Si la fonction $f(x)$ n'est pas approximativement semi-continue supérieurement au point x_0, il existe un nombre positif λ tel que, pour $\rho > 0$, on puisse déterminer un voisinage V_{x_0}, tel que

$$|V_{x_0}| < \rho, \qquad |EV_{x_0}| > \lambda\,|V_{x_0}|.$$

Soit maintenant α_x tel que

$$\overline{D_x^{\alpha_x}}F(A) > \overline{D_x}F(A) - \frac{\varepsilon}{3} = f(x) - \frac{\varepsilon}{3},$$

et que par suite en tout point x de l'ensemble E on ait

$$\overline{D_x^{\alpha_x}}F(A) - \frac{\varepsilon}{3} > f(x_0) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'après la définition de la dérivée $\overline{D_x^{\alpha}F}(A)$, il existe pour tout point x de EV_{x_0} un système simple A tel que

$$\frac{F(A)}{|A|} > \overline{D_x^{\alpha_x}}F - \frac{\varepsilon}{3},$$
$$|A| > \alpha\,|V_x|,$$

quel que soit $|V_x|$.

D'après le lemme de MM. Vitali et Lebesgue il existe donc un système simple A_0 satisfaisant aux deux conditions suivantes :

1° Les ensembles A_0 et EV_{x_0} sont distants de δ;
2° $A_0 = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ et, pour $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\frac{F(A_i)}{|A_i|} > f(x_0) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Les dernières inégalités donnent

$$\frac{F(A_0)}{|A_0|} > f(x_0) + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1}$$

D'autre part, la première condition fournit les inégalités

$$|A_0| > |EV_{x_0}| - \delta > \lambda\,|V_{x_0}| - \delta.$$

Il suffit donc de poser

$$\delta = \frac{1}{2}\lambda \mid V_{x_0} \mid$$

pour voir que $|A_0|$ est régulier suivant le paramètre $\frac{\lambda}{2}$ par rapport à x_0.

En faisant décroître ρ vers zéro, nous avons donc, en vertu de l'inégalité (1),

$$\overline{D}_{x_0}^{\lambda/2} F(A) \geqq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cependant

$$f(x_0) = \overline{D_{x_0} F}(A) \geqq \overline{D}_{x_0}^{\lambda/2} F(A),$$

nous aboutissons donc à une contradiction.

Lorsque

$$\overline{D_{x_0} F}(A) = +\infty,$$

cette dérivée est évidemment approximativement semi-continue supérieurement.

Enfin, si

$$\overline{D_{x_0} F}(A) = -\infty,$$

on remplace dans notre raisonnement $f(x_0) + \varepsilon$ par un nombre fini arbitraire.

2. Lorsque la fonction $F(A)$ est dérivable dans un intervalle R, sa dérivée est approximativement semi-continue supérieurement et inférieurement en même temps, elle est donc approximativement continue.

Inversement *toute fonction $f(x)$ approximativement continue et bornée dans* R *est égale à la dérivée de son intégrale*

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{I_1} f(x)\,dx + \int_{I_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{I_n} f(x)\,dx,$$

A étant le système simple des intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_n$ contenus dans R.

Il suffit pour le voir de reproduire le raisonnement dont se sert M. Denjoy pour montrer que la fonction approximativement continue bornée est égale à la dérivée de son intégrale indéfinie ([1]).

([1]) A. Denjoy, *loc. cit.*, p. 175. Le théorème énoncé peut être étendu aux fonctions d'ensemble, *voir* ma Note *Sur les dérivées de la fonction d'ensemble Comptes rendus*, t. 182, 1926, p. 1205).

Ainsi *la continuité approximative est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction bornée dans un intervalle soit dérivée d'une fonction de système simple d'intervalle.*

III. — Les bornes à densité λ près des dérivées de F(A).

1. Considérons un nombre positif λ inférieur à 1. Soit $M(f, I, \lambda)$ *la borne supérieure à densité* λ *près* de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle I, c'est-à-dire le plus petit de nombres a tels que l'ensemble

$$E = \underset{x}{E}[f(x) > a]$$

vérifie la condition

$$|IE| \leqq \lambda |I|.$$

Cette borne est toujours finie quand la fonction $f(x)$ est presque partout finie dans l'intervalle I (1).

Il résulte de la définition de la fonction approximativement semi-continue supérieurement que la plus grande limite de la borne $M(f, I, \lambda)$ d'une telle fonction au point x_0 est au plus égale à $f(x_0)$, l'intervalle I tendant régulièrement vers x, quelle que soit d'ailleurs la valeur du paramètre de régularité.

Par suite, si l'on a constamment

$$M(f, I, \lambda) > f(x_0) + \varepsilon,$$

et l'intervalle I tend vers le point x_0, cet intervalle ne tend pas régulièrement vers x_0.

Or nous verrons que, $f(x)$ *étant supposée finie et approximativement continue en* x_0, *non seulement l'intervalle* I, *mais aucun système simple de tels intervalles ne peut tendre régulièrement vers le point* x_0.

Soit en effet un système simple

$$A = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\} \tag{1}$$

tel que

$$M(f, I_i, \lambda) > f(x_0) + \varepsilon \tag{2}$$

---

(1) *Voir* ma Note *Sur les limites approximatives* (*Comptes rendus*, t. 180, 1925, p. 642) et aussi *L'intégration des fonctions sommables* (*Annales de la Société Polonaise de Mathématique*, t. VIII, 1929, p. 23).

et supposons qu'on ait

(3) $$|A| > \alpha |V_{x_0}|,$$

V_{x_0} étant le plus petit voisinage contenant A.

Soit ensuite
$$E_i = \underset{x}{E}[f(x) \geqq M(f, I_i, \lambda)].$$

Il résulte [1] de la définition de la borne supérieure à densité λ près qu'on a

(4) $$|I_i E_i| \geqq \lambda |I_i|.$$

Considérons encore l'ensemble
$$E = E_x[f(x) > f(x_0) + \varepsilon].$$

En vertu de l'inégalité (2), tous les ensembles E_i sont contenus dans E.

Nous avons donc, d'après (3) et (4),

$$|V_{x_0}E| \geqq |\dot{A}E| = |I_1 E| + |I_2 E| + \ldots \\ + |I_n E| \geqq |I_1 E_1| + \ldots + |I_n E_n| > \lambda |A| > \lambda\alpha |V_{x_0}|.$$

Or cela est impossible puisque la fonction $f(x)$ est approximativement semi-continue supérieurement.

Lorsque $f(x) = -\infty$, la propriété en question subsiste pour les intervalles I tels que
$$M(f, I, \lambda) > a,$$

a étant un nombre fini arbitraire.

En particulier le théorème démontré a lieu pour $f(x) = \overline{D_x}F(A)$.

2. En désignant toujours par $M(f, I, \lambda)$ la borne supérieure à densité λ près de $f(x)$ dans l'intervalle I, définissons la fonction d'intervalle
$$G(f, I, \lambda) = M(f, I, \lambda)|I|$$

et ensuite, au moyen de l'addition, la fonction de système simple

---

[1] En effet E_i est l'intersection des ensembles $E^p = E_x\left[f(x) > M(f, I_i\lambda) - \frac{1}{p}\right]$; or $|E^p I_i| > \lambda |I_i|$.

d'intervalles

$$G(f, A, \lambda) = G(f, I_1, \lambda) + G(f, I_2, \lambda) + \ldots + G(f, I_n, \lambda)$$

pour $A = (I_1, I_2, \ldots, I_n)$.

Nous allons voir que, *si les systèmes simples d'intervalles* I_i *vérifiant les conditions*

$$M(f, I_i, \lambda) > f(x_0) + \varepsilon$$

tendent régulièrement vers x_0, *on a*

$$\limsup_{|V_{x_0}| \to 0} \frac{G(A)}{|V_{x_0}|} \leqq 0$$

pour $f(x) = \overline{D}_x F(A)$.

Supposons au contraire que, étant donné $\rho > 0$, il existe un voisinage V_{x_0} tel que

$$\frac{G(A)}{|V_{x_0}|} > k > 0, \qquad |V_{x_0}| < \rho.$$

Cela aura lieu *a fortiori* si l'on enlève du système A les intervalles I_i dans lesquels la borne supérieure à densité λ près est non positive.

Choisissons le nombre positif μ de manière qu'on ait

$$G(A) - \mu |A| > k |V_{x_0}|, \tag{5}$$

$$M(I_i) - \mu > 0. \tag{6}$$

Considérons de nouveau les ensembles $E_i = \underset{x}{E}[f(x) \geqq M(f, I_i, \lambda)]$. En vertu de la définition de $f(x)$, il existe, pour tout point x de $I_i E_i$, un système simple A tel que

$$\frac{F(A)}{|A|} > f(x) - \mu \geqq M(I_i) - \mu,$$
$$|A| > \alpha |V_x|,$$

V_x étant le plus petit voisinage d'étendue suffisamment petite et contenant l'ensemble simple A.

En appliquant le lemme de MM. Vitali et Lebesgue à l'ensemble E_i, nous pouvons déterminer un système simple A satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Les ensembles A_i et $I_i E_i$ sont distants de

$$\delta_i = \frac{\lambda k |V_{x_0}|}{2n[M(I_i) - \mu]};$$

2°

$$\frac{F(A_i)}{|A_i|} > M(I_i) - \mu.$$

Or

$$|I_i E_i| \geqq \lambda\,|i|;$$

donc, d'après la condition 1°,

$$|A_i| > \lambda\,|I_i| - \delta_i.$$

La condition 2° et l'inégalité (6) donnent

$$F(A_i) > [M(I_i) - \mu\,|A_i > [M(I_i) - \mu][\lambda\,|I_i| - \delta_i]$$
$$> \lambda[(M I_i) - \mu]\,|I_i| - \frac{\lambda k}{2n}\,|V_{x_0}|.$$

En posant

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n,$$

nous obtenons par l'addition l'inégalité

$$F(A_0) > \lambda \sum_{i=1}^{n} [M(I_i) - \mu]\,|I_i| - \frac{k\lambda}{2}\,|V_{x_0}|$$
$$= \lambda[G(A) - \mu\,|A|\,] - \frac{k\lambda}{2}\,|V_{x_0}|$$

et ensuite, en vertu de (5),

(7) $$F(A_0) > \frac{k\lambda}{2}\,|V_{x_0}|.$$

Considérons maintenant le système B_0 complémentaire du système A_0 par rapport au voisinage V_{x_0}.

D'après le paragraphe 1, le système A_0 ne tend pas régulièrement vers x_0, il existe donc une suite de systèmes complémentairés B_0^n qui tendent régulièrement vers x_0.

Or il résulte de la définition de $f(x)$ que

(8) $$\frac{F(B)}{|B|} > f(x_0) - \frac{k\lambda}{4},$$

quel que soit le système simple B vérifiant la condition $|B| > \alpha\,|V_{x_0}|$, pour le voisinage V_{x_0} suffisamment petit.

Nous pouvons donc choisir au début de notre raisonnement le nombre ρ de manière que cela ait lieu pour

$$|V_{x_0}| < \rho.$$

Comme le système B_0'' qui tend régulièrement vers le point x_0 suivant le paramètre α, vérifie la condition $|B_0''| > \alpha |V_{x_0}|$, nous avons

$$\frac{F(B_0'')}{|B_0''|} > f(x_0) - \frac{k\lambda}{4}.$$

D'autre part, d'après l'inégalité (7), on avait

$$F(A_0'') > \frac{k\lambda}{2} |V_{x_0}| > \frac{k\lambda}{2} |B_0''|. \tag{9}$$

Les deux inégalités (8) et (9) donnent

$$F(A_0'' + B_0'') > \left[f(x_0) + \frac{k\lambda}{4}\right] |B_0''|.$$

Or le quotient

$$\frac{|A_0''|}{|V_{x_0}|}$$

tend, d'après le paragraphe 1, vers zéro en même temps que ρ, donc le rapport

$$\frac{|B_0''|}{|V_{x_0}|}$$

tend vers 1, puisque

$$|V_{x_0}| = |A_0''| + |B_0''|.$$

Il vient donc

$$f(x_0) = \overline{D_{x_0}} F(A) \geq \lim_{n \to \infty} \frac{F(A_0'' + B_0'')}{|V_{x_0}|} \geq f(x_0) + \frac{k\lambda}{4},$$

ce qui contredit l'hypothèse $k > 0$.

IV. — La continuité approximative au sens strict.

1. Pour une fonction $f(x)$ approximativement continue nous avons [1] l'égalité

$$f(x) = \lim_{\substack{I \to x \\ \alpha}} M(f, I, \lambda) = \lim_{\substack{I \to x \\ \alpha}} m(f, I, \lambda),$$

quels que soient le paramètre α et la densité λ, c'est-à-dire

$$f(x) = D_x^\alpha G(f, I, \lambda) = D_x^\alpha g(f, I, \lambda),$$

---

(1) S. Kempisty, *Sur l'intégration des fonctions sommables* (*Annales de la Société Polonaise de Mathématique*, t. VII, 1929, p. 233).

donc

$$f(x) = D_x G(f, I, \lambda) = D_x g(f, I, \lambda).$$

Nous allons dire que la fonction $f(x)$ est *approximativement continue au sens strict* quand

$$f(x) = D_x G(f, A, \lambda) = D_x g(f, A, \lambda),$$

quel que soit λ.

Or nous allons voir que *la dérivée d'une fonction de système simple dans un intervalle est approximativement continue au sens strict.*

2. Démontrons d'abord qu'on a

$$\overline{D_x} G(f, A, \lambda) \leqq f(x),$$

quand la fonction $f(x)$ est la dérivée supérieure d'une fonction $F(A)$.

Soit A un système simple régulier par rapport au point x_0 suivant le paramètre α. Décomposons le système A en deux systèmes A' et A'' contenant respectivement les intervalles I' et I'' pour lesquels on a

$$M(f, I', \lambda) \leqq f(x_0) + \varepsilon,$$
$$M(f, I'', \lambda) > f(x_0) + \varepsilon.$$

Nous avons évidemment

$$\frac{G(A)}{|A|} = \frac{G(A')}{|A'|}\,\frac{|A'|}{|A|} + \frac{G(A'')}{|V_{x_0}|}\,\frac{|V_{x_0}|}{A}. \tag{1}$$

D'après le paragraphe 1 du chapitre précédent le quotient

$$\frac{|A''|}{|V_{x_0}|}$$

tend vers zéro en même temps que l'étendue de V_{x_0} pour une suite de systèmes A'', par suite le quotient

$$\frac{|A'|}{|A|}$$

tend vers 1.

D'autre part nous avons, en vertu du paragraphe 3 du chapitre précédent,

$$\limsup_{|V_{x_0}| \to 0} \frac{G(A'')}{|V_{x_0}|} \leqq 0.$$

Comme, par hypothèse,

$$1 \geqq \frac{|A_{x_0}|}{|A|} < \frac{1}{\alpha},$$

nous déduisons de l'égalité (1), en passant à la limite, la relation

$$\overline{D^{\alpha}_{x_0}} G(A) \leqq \limsup_{|A| \to x_0} \frac{G(A')}{|A'|}.$$

Or il résulte de la définition de A′ que

$$G(A') \leqq [f(x_0) + \varepsilon] |A'|.$$

Alors

$$\overline{D^{\alpha}_{x_0}} G(A) \leqq f(x_0) + \varepsilon,$$

quels que soient ε et α positifs, et par suite

(2) $$\overline{D}_{x_0} G(f, A, \lambda) \leqq f(x_0).$$

3. Définissons la *borne inférieure à densité* λ *près* de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle I en posant

$$m(f, I, \lambda) = -\mathfrak{M}(-f, I, \lambda)$$

et la fonction correspondante $g(f, I, \lambda)$ en posant

$$g(f, I, \lambda) = m(f, I, \lambda) |I| = -G(-f, I, \lambda).$$

En appliquant à la fonction $-f$ le théorème qui vient d'être établi, nous avons, pour la fonction

$$f(x_0) = \underline{D}_{x_0} F(A),$$

la relation

(3) $$\underline{D}_{x_0} g(f, A, \lambda) \geqq f(x_0),$$

quel que soit λ positif inférieur à 1.

Or, pour $\lambda + \mu < 1$,

$$m(f, I, \lambda) \leqq M(f, I, \mu),$$

donc

(4) $$g(f, A, \lambda) \leqq G(f, A, \mu)$$

et par suite

(5) $$\underline{D}_{x_0} G(f, A, \mu) \geqq f(x_0),$$

quel que soit μ positif, inférieur à 1.

Lorsque la fonction $f(x)$ est la dérivée de la fonction $F(A)$, nous avons

$$f(x_0) = \underline{D}_{x_0} F(A) = \overline{D}_{x_0} F(A)$$

et, d'après (2), (4) et (3),

$$f(x_0) = D_{x_0} G(f, A, \lambda).$$

Des inégalités (2), (4) et (3) on déduit

$$f(x_0) = D_{x} g(f, A, \lambda),$$

quel que soit λ, donc le théorème énoncé dans le paragraphe 1 est démontré.

Il en résulte en particulier qu'*une fonction bornée et approximativement continue dans un intervalle*, donc égale, d'après le paragraphe 2 du chapitre II, à la dérivée de son intégrale dans A, *est approximativement continue au sens strict* [1].

4. Notre dernier raisonnement s'appuie sur le lemme du paragraphe 2 du hapitre précédent établi au moyen du lemme de MM. Vitali et Lebesgue. Nous pouvons donc appliquer ce raisonnement à une fonction $f(x)$ presque partout égale à la dérivée d'une fonction de $F(A)$ quand x_0 est un point où cette égalité a lieu.

Ainsi nous arrivons au théorème suivant : *une fonction presque partout égale dans un intervalle à la dérivée d'une fonction de système simple est presque partout approximativement continue au sens strict.*

Comme, d'après un théorème de M. Lebesgue cité au début, la fonction sommable est presque partout égale à la dérivée de la fonction

$$F(A) = \int_A f(x)\, dx,$$

nous voyons que *toute fonction sommable dans un intervalle est presque partout approximativement continue au sens strict.*

---

[1] Il est aisé de donner un exemple d'une fonction bornée approximativement continue en un point qui n'est pas approximativement continu au sens strict en ce point.

V. — Intégration de la fonction dérivée.

1. Nous allons voir qu'*une fonction finie égale, quelle que soit la densité* λ, *à la dérivée de paramètre* α *de la fonction* $g(f, \mathrm{I}, \lambda)$ *ou bien de* $\mathrm{G}(f, \mathrm{I}, \lambda)$, *dans un intervalle fermé, est sommable*, donc *a fortiori toute fonction approximativement continue au sens strict est sommable* (¹).

Supposons en effet que

$$f(x) = \mathrm{D}_x^\alpha g(f, \mathrm{I}, \lambda),$$

en tout point x d'un intervalle fermé R, quel que soit λ.

Il résulte de la définition de la dérivée de paramètre α qu'il existe un nombre positif δ_x tel que, pour $|\mathrm{V}_x| > \delta_x$, on a

$$(1) \qquad f(x) - \varepsilon < \frac{g(f, \mathrm{A}, \lambda)}{|\mathrm{A}|} < f(x) + \varepsilon,$$

quel que soit le système simple A couvrant *approximativement* (²) un intervalle R_x semblable à R, contenu dans V_x et contenant x.

En appliquant le lemme de M. Lusin à l'intervalle R et aux intervalles R_x semblables à R et contenus dans R, nous obtenons une division D_0 (de R) composée de n intervalles

$$\mathrm{R}_1, \quad \mathrm{R}_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{R}_i, \quad \ldots, \quad \mathrm{R}_n.$$

Considérons une division arbitraire de R et décomposons cette division en n systèmes simples

$$\mathrm{A}_1, \quad \mathrm{A}_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{A}_i, \quad \ldots, \quad \mathrm{A}_n$$

tels que chaque intervalle d'un système A_i contienne un point de l'intervalle R_i.

Lorsque la norme supérieure de la division D est suffisamment petite, chaque système A_i couvre approximativement le rectangle

(¹) Ainsi les fonctions approximativement continues non sommables ne sont pas approximativement continues au sens strict.

(²) Nous dirons que le système A *couvre approximativement* l'intervalle R, lorsqu'il couvre l'intervalle R′ semblable, concentrique à R et tel que $|\mathrm{R}'| = \frac{1}{2}|\mathrm{R}|$ et lorsque A est couvert par un intervalle R″ concentrique, semblable à R et tel que $|\mathrm{R}''| = 2\mathrm{R}$.

correspondant R_i et nous pouvons appliquer aux systèmes A_i l'inégalité (I), en écrivant

$$f(x_i) - \varepsilon < \frac{g(f, A_i, \lambda)}{|A_i|} < f(x_i) + \varepsilon,$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$; donc

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,|A_i| - \varepsilon\,|R| < g(f, D, \lambda) < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,|A_i| + \varepsilon\,|R|,$$

quelle que soit la division D dont la norme supérieure est suffisamment petite

On en déduit aisément que les intégrales extrêmes de la fonction d'intervalle $g(f, I, \lambda)$ sont finies et diffèrent de $2\varepsilon\,|R|$ au plus. Comme ε est un nombre positif arbitrairement petit, on voit que la fonction est intégrable au sens de Burkill.

Or, étant données les densités λ et μ, nous pouvons choisir les nombres δ_x de manière qu'on ait en même temps

$$f(x) - \varepsilon < \frac{g(f, A, \lambda)}{|A|} < f(x) + \varepsilon,$$

$$f(x) - \varepsilon < \frac{g(f, A, \mu)}{|A|} < f(x) + \varepsilon,$$

les autres conditions étant les mêmes que celles qui donnent l'inégalité (1).

Alors

$$\int_R g(f, I, \lambda) = \int_R g(f, I, \mu),$$

quels que soient λ et μ, c'est-à-dire la fonction $f(x)$ est intégrable au sens (A) de Denjoy. Or, toute fonction intégrable au sens (A) est sommable et les deux intégrales sont égales [1]. Notre théorème est ainsi démontré.

En divisant les intervalles du système simple A, on déduit de l'inégalité (I) que

$$f(x) - \varepsilon < \frac{1}{A} \int_A f(x)\,dx < f(x) + \varepsilon,$$

---

[1] A. DENJOY, *Sur la définition riemannienne de l'intégrale de Lebesgue* (*Comptes rendus*, t. 193, 1931, p. 695). Le raisonnement de l'auteur peut être étendu aux fonctions de plusieurs variables.

par suite $f(x)$ est aussi la dérivée de la fonction

$$F(A) = \int_A f(x)\, dx.$$

2. Suppons maintenant que la fonction $f(x)$ soit la dérivée d'une fonction quelconque de système simple, c'est-à-dire qu'on ait

$$f(x) = D_x^{\alpha} F(A)$$

en tout point x d'un intervalle fermé R.

Il résulte du raisonnement du paragraphe 2 du chapitre précédent que nous avons dans ce cas

$$f(x) = D_x^{\alpha} g(f, A, \lambda).$$

Alors, en vertu de la définition de la dérivée à paramètre α, il existe un nombre positif δ_x tel qu'on a en même temps :

$$f(x) - \varepsilon < \frac{g(f, A, \lambda)}{|A|} < f(x) + \varepsilon, \qquad f(x) - \varepsilon < \frac{F(A)}{|A|} < f(x) + \varepsilon,$$

quelque soit le système simple A couvrant approximativement un intervalle R_x contenant x, semblable à R et contenu dans V_x d'étendue inférieure à δ_x.

En appliquant le lemme de M. Lusin, nous obtenons les inégalités :

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,|A_i| - \varepsilon\,|R| < g(f, D, \lambda) < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,|A_i| + \varepsilon\,|R|,$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,|A_i| - \varepsilon\,|R| < \quad F(D) \quad < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,|A_i| + \varepsilon\,|R|$$

pour toute division D de norme supérieure suffisamment petite.

On en déduit que les intégrales extrêmes des fonctions $g(f, I, \lambda)$ et $F(I)$ dans R sont finies et diffèrent de $2\varepsilon\,|R|$ au plus.

Par suite nous avons

$$\int_R g(f, I, \lambda) = \int_R F(I),$$

quelle que soit la densité λ.

Comme l'intégrale de la fonction $g(f, I, \lambda)$ est égale à l'intégrale de la fonction $f(x)$, nous pouvons écrire

$$\int_R f(x)\,dx = \int_R F(I)$$

ou bien, en tenant compte de la définition de la fonction $f(x)$,

$$\int_R D_x^\alpha F(A)\,dx = \int_R F(I)$$

Ainsi nous obtenons le résultat suivant : *si la fonction de système simple possède une dérivée finie de paramètre α dans un intervalle fermé, cette dérivée est sommable et son intégrale est égale à l'intégrale de la fonction primitive.*

Il en résulte que l'intégrale de la fonction $F(I)$ est *absolument continue*, c'est-à-dire la fonction de système simple

$$S(A) = \int_R F(I)$$

tend vers zéro avec $|A|$.

Or quel que soit ε positif, on peut déterminer δ de manière qu'on ait

$$|F(A) - S(A)| < \varepsilon,$$

pour

$$|A| < \delta.$$

Alors *la fonction primitive* $F(A)$ *d'une dérivée finie de paramètre α tend vers zéro avec* $|A|$, c'est-à-dire cette fonction est aussi absolument continue.

3. La dérivée unique de $F(A)$ étant égale à chaque dérivée de paramètre α de cette fonction, nous avons donc établi le théorème suivant :

Une fonction de système simple dérivable est absolument continue et intégrable au sens de Burkill ; sa dérivée est sommable et l'intégrale de cette dérivée est égale à l'intégrale de la fonction primitive, c'est-à-dire

$$\int_R D_x F(A)\,dx = \int_R F(I). \tag{2}$$

Le théorème établi correspond au théorème suivant de

M[lle] R. C. Young : lorsque la fonction F(I) est absolument continue et intégrable au sens de Burkill, la fonction correspondante F(A) est presque partout dérivable et l'égalité (2) a lieu ([1]).

4. Lorsqu'une fonction d'intervalle est *additive* dans R, nous avons

$$F(D) = F(R),$$

quelle que soit la division D de l'intervalle R, et par suite

$$\int_R F(I) = F(R).$$

Il résulte donc du théorème démontré que dans ce cas

$$F(R) = \int_R D_x^\alpha F(A)\,dx.$$

Nous voyons ainsi que *la fonction primitive d'intervalle est égale à l'intégrale de la dérivée de paramètre α de la fonction de système simple formée par l'addition en partant de la fonction primitive.*

En particulier, cela a lieu pour l'accroissement d'une fonction F(x) dans un intervalle.

En donnant le nom de *dérivée régulière de paramètre* α à la dérivée de la fonction de système simple A égale à l'accroissement de F(x) dans l'ensemble simple A, nous pouvons énoncer le corollaire suivant :

Si la fonction F(x) *possède une dérivée régulière finie de paramètre α, cette dérivée est sommable et l'accroissement de la fonction primitive* F(x) *est égal à l'intégrale de la dérivée.*

([1]) *Loc. cit.*, p. 208-209. Ce dernier théorème est une généralisation de celui cité au début et établi par M. Lebesgue.