BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL DELENS

# Géométrie conforme des congruences de courbes

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 61 (1933), p. 95-127
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1933__61__95_0>

# GÉOMÉTRIE CONFORME DES CONGRUENCES DE COURBES;

PAR M. PAUL DELENS.

## Introduction.

Après avoir, dans un précédent Mémoire ([1]), étudié la géométrie des congruences en nous plaçant surtout au point de vue de la géométrie euclidienne ou de la géométrie projective, c'est la géométrie anallagmatique ou géométrie conforme spatiale que nous considérons maintenant. Les premiers points de cette étude, déjà annoncés dans une courte Note ([2]), au moins pour le cas général, sont repris ici avec les développements nécessaires, et la classification des cas particuliers est poussée jusqu'au bout.

La comparaison avec la géométrie euclidienne montre que l'étude est presque aussi simple en géométrie conforme; ici encore, dans le cas général, un repère mobile intrinsèque est fourni par les éléments différentiels du second ordre; pour les congruences isotropes cependant, et les cas qui en dérivent, il faut faire appel aux éléments différentiels d'ordre supérieur.

La méthode employée est celle du calcul pfaffien de M. E. Cartan; nous utilisons aussi le calcul géométrique des sphères, selon des procédés déjà décrits dans notre Thèse ([3]) et dans de précédents Mémoires ([4]). Notre étude se rattache à celles déjà faites en géomé-

---

([1]) *Géométrie des congruences de courbes* (*Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, t. LVI, 1932, fasc. 2, p. 289-320, et fasc. 3, p. 321-352). En référence (*congruences*).

([2]) *Sur la géométrie conforme des congruences* (*Congrès international des Mathématiciens*, Zurich, 1932).

([3]) *Méthodes et problèmes des géométries différentielles euclidienne et conforme* (Paris, 1927) (*Thèse*).

([4]) *Métrique vectorielle et géométrie des sphères* (*Journal de Mathématiques*, t. 11, 1932, fasc. 3, p. 209-253). *Congruences de cercles et systèmes cycliques* (*Atti del Congresso*, t. IV, Bologna, 1928) (*Systèmes cycliques*).

trie conforme pour une courbe ou pour une surface, sans que nous ayons cru utile de reprendre tous les points de détail (1). Du reste, le présent travail ne peut être considéré que comme une préface à des études plus complètes sur un très vaste sujet, qu'il ne saurait épuiser; les notions générales établies conduisent seulement le lecteur à pied d'œuvre pour de nouveaux développements (2).

## I. — Notions préliminaires.

1. Les principes d'un calcul géométrique portant sur les sphères (au sens général) d'un espace euclidien à trois dimensions, conçues comme vecteurs d'un espace métrique (hyperbolique) à cinq dimensions, sont bien connus. La géométrique anallagmatique, ou géométrie conforme spatiale, est ramenée à l'étude des formes et propriétés invariantes par les opérations sphériques, opérations d'un groupe fondamental conservant, à un facteur près, les produits scalaires des sphères.

Ce calcul, effectué sur les sphères, peut être directement rattaché à celui dont les éléments sont les points et les vecteurs de l'espace euclidien usuel; ce qui correspond à la substitution des coordonnées pentasphériques aux coordonnées cartésiennes, ou inversement. Nous effectuons ce passage, selon les méthodes de Grassmann, en définissant, sur les *unités* d'un premier système linéaire, des lois de multiplication qui conduisent à un système d'unités du second ordre.

Soient $\mathbf{m}\,\mathbf{a}_0\,\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2$ un système de repère, $\mathbf{m}$ étant un point arbitraire de masse unité, $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ trois vecteurs de même longueur, deux à deux rectangulaires; la multiplication commutative, dite *inté-*

---

(1) Outre les *Traités* de DARBOUX, le lecteur aura intérêt à consulter : J. L. COOLIDGE, *A treatise on the circle and the sphere* (Oxford, 1916); W. BLASCHKE, G. THOMSEN, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, III; *Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln* (Berlin, 1929); E. CARTAN, *Les espaces à connexion conforme* (*Annales de la Société polonaise de Mathématiques*, 1923); E. VESSIOT, *Contribution à la géometrie conforme* (*Journal de mathématiques*, t. II, fasc. 2, 1923; *Journal de l'École Polytechnique*, 2e série, 25e cahier, 1926; *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. LIV, fasc. 3-4, 1926 et t. LV, fasc. 1-2, 1927).

(2) C'est ainsi que nous n'avons pas du tout repris l'étude importante des surfaces isothermiques, des familles de cyclides de Dupin, etc.

*rieure*, définie par

$$(1)\qquad \mathbf{a}_0^{\overset{2}{\times}} = \mathbf{a}_1^{\overset{2}{\times}} = \mathbf{a}_2^{\overset{2}{\times}}, \qquad \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0 \times \mathbf{a}_1 = 0,$$

$\left(\mathbf{a}_0^{\overset{2}{\times}}, \ldots,\right.$ abréviations pour $\left.\mathbf{a}_0 \times \mathbf{a}_0, \ldots\right)$, indépendante de l'origine et de l'orientation du repère, est intrinsèque pour le groupe fondamental de la géométrie euclidienne; elle laisse subsister les cinq unités indépendantes du second ordre

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{M} = \mathbf{m}^{\overset{2}{\times}}, \qquad \mathbf{A}_0 = 2\mathbf{m} \times \mathbf{a}_0, \\ \mathbf{A}_1 = 2\mathbf{m} \times \mathbf{a}_1, \qquad \mathbf{A}_2 = 2\mathbf{m} \times \mathbf{a}_2, \qquad \mathbf{I} = -2\mathbf{a}_0^{\overset{2}{\times}}, \end{array}\right.$$

aptes à représenter l'origine du repère (sphère-point), les plans de ses faces, le point à l'infini; soient $\mathbf{h}$, $\mathbf{h}'$, ... des points ou des vecteurs, d'expressions

$$\mathbf{h} = \eta\mathbf{m} + \xi_0\mathbf{a}_0 + \xi_1\mathbf{a}_1 + \xi_2\mathbf{a}_2, \quad \ldots;$$

toute forme intérieure du second ordre, $\Sigma\mathbf{h} \times \mathbf{h}'$, s'exprimant linéairement avec les unités (2), est attachée à une sphère (au sens général) et possède cinq coordonnées pentasphériques par rapport au repère $\mathbf{M}\,\mathbf{A}_0\,\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2\,\mathbf{I}$ (repère pentasphérique euclidien).

La multiplication intérieure (1) ne peut être dite scalaire que quand on se borne à opérer sur les vecteurs, dont les produits intérieurs dépendent de la seule unité $\mathbf{I}$.

2. Soient

$$\mathbf{H} = \Sigma\mathbf{h} \times \mathbf{h}', \qquad \mathbf{K} = \Sigma\mathbf{k} \times \mathbf{k}'$$

deux formes intérieures arbitraires; nous définissons entre elles une nouvelle multiplication *scalaire* (dite aussi intérieure) par

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} (\mathbf{h} \times \mathbf{h}')\,|\,(\mathbf{k} \times \mathbf{k}') = \dfrac{\overrightarrow{\mathbf{hk}} \times \overrightarrow{\mathbf{h}'\mathbf{k}'} + \overrightarrow{\mathbf{hk}'} \times \overrightarrow{\mathbf{h}'\mathbf{k}}}{2\mathbf{I}}, \\ \mathbf{H}\,|\,\mathbf{K} = \Sigma\,\{(\mathbf{h} \times \mathbf{h}')\,|\,(\mathbf{k} \times \mathbf{k}')\}, \end{array}\right.$$

$\overrightarrow{\mathbf{hk}}$ désignant le vecteur du segment $[\mathbf{hk}]$, vecteur qui doit être considéré comme nul quand $[\mathbf{hk}]$ est réduit à un bivecteur. D'où les produits des unités (2)

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{M}^2 = \mathbf{M}\,|\,\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i\,|\,\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_i\,|\,\mathbf{I} = \mathbf{I}^2 = 0 \\ \mathbf{M}\,|\,\mathbf{I} = \mathbf{A}^2 = 1 \end{array}\right. \qquad (i, j = 0, 1, 2;\ i \neq j),$$

$\left(\mathbf{M}^2, \ldots,\right.$ pour $\left.\mathbf{M}\,|\,\mathbf{M}, \ldots\right)$; la définition géométrique (3) rappelle aussitôt les propriétés connues du produit scalaire des sphères. Le produit scalaire $\mathbf{H}^2$ sera encore appelée *norme*, le produit $\mathbf{H}\,|\,\mathbf{I}$ *masse* (euclidienne) de $\mathbf{H}$.

Un système de cinq sphères $\mathbf{S}_\alpha$ unitaires, deux à deux orthogonales, constitue un repère pentasphérique orthogonal normé; $\rho_\alpha$ étant le rayon de $\mathbf{S}_\alpha$, $\varpi_\alpha$ la puissance de $\mathbf{M}$ par rapport à $\mathbf{S}_\alpha$, les relations

$$(5) \qquad \mathbf{M}\,|\,\mathbf{S}_\alpha = -\frac{\varpi_\alpha}{2\rho_\alpha}, \qquad \mathbf{I}\,|\,\mathbf{S}_\alpha = \frac{1}{\rho_\alpha}$$

$\left(\text{pour un plan } \frac{\varpi_\alpha}{2\rho_\alpha} \text{ est remplacé par } \delta_\alpha, \text{ distance du point au plan}\right)$ donnent lieu, pour un tel système, aux identités de Darboux

$$(6) \qquad \sum \frac{1}{\rho_\alpha^2} = 0, \qquad \sum \frac{\varpi_\alpha}{\rho_\alpha^2} = -2, \qquad \sum \left(\frac{\varpi_\alpha}{\rho_\alpha}\right)^2 = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4, 5);$$

en effet, le tenseur unité a alors pour expression $\mathfrak{U} = \Sigma\,\mathbf{S}_\alpha^2$, et les relations (6) traduisent respectivement

$$(6') \qquad \mathbf{I}^2 \overset{2}{|}\, \mathfrak{U} \equiv \mathbf{I}^2 = 0, \qquad \mathbf{IM} \overset{2}{|}\, \mathfrak{U} \equiv \mathbf{I}\,|\,\mathbf{M} = 1, \qquad \mathbf{M}^2 \overset{2}{|}\, \mathfrak{U} \equiv \mathbf{M}^2 = 0$$

$\left(\overset{2}{|}\right.$ étant le symbole du double produit scalaire entre tenseurs du second ordre$\left.\right)$.

Nous emploierons exclusivement dans la suite les repères pentasphériques dits *normaux*, déduits de $\mathbf{M}\,\mathbf{A}_0\,\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2\,\mathbf{I}$ par les opérations sphériques *directes* conservant $\mathfrak{U}$ et le produit extérieur $[\mathbf{M}\,\mathbf{A}_0\,\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2\,\mathbf{I}]$ (opérations d'un sous-groupe du groupe fondamental, dont les invariants ne sont, au point de vue géométrique, que des invariants relatifs). On passe d'un repère orthogonal $\mathbf{S}_\alpha$ à un repère normal $\mathbf{M}'\,\mathbf{A}'_0\,\mathbf{A}'_1\,\mathbf{A}'_2\,\mathbf{I}'$ par

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{S}_2 = \mathbf{A}'_0, \qquad \mathbf{S}_3 = \mathbf{A}'_1, \qquad \mathbf{S}_4 = \mathbf{A}'_2, \qquad \mathbf{S}_1 - \iota\mathbf{S}_5 = \lambda\sqrt{2}\,\mathbf{M}', \\ \mathbf{S}_1 + \iota\mathbf{S}_5 = \dfrac{\sqrt{2}}{\lambda}\mathbf{I}', \qquad \iota[\mathbf{S}_1\,\mathbf{S}_2\,\mathbf{S}_3\,\mathbf{S}_4\,\mathbf{S}_5] = [\mathbf{M}'\,\mathbf{A}'_0\,\mathbf{A}'_1\,\mathbf{A}'_2\,\mathbf{I}'] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\iota = \sqrt{-1}), \end{array}\right.$$

et les identités de Darboux sont alors remplacées par

$$(8) \qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum \frac{1}{\rho_i^2} = \frac{4}{\varepsilon^2}, \qquad \sum \frac{\varpi_i}{\rho_i} = -2\,\frac{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2 - \varepsilon''^2}{\varepsilon^2} \\ \displaystyle\qquad \sum \left(\frac{\varpi_i}{\rho_i}\right)^2 = 4\,\frac{\varepsilon'^2\,\varepsilon''^2}{\varepsilon^2}, \end{array}\right. \qquad (i = 0, 1, 2),$$

$\varepsilon$ étant la distance de $\mathbf{M}'$ et $\mathbf{I}'$, $\varepsilon'$ et $\varepsilon''$ celles de $\mathbf{M}$ à $\mathbf{M}'$ et $\mathbf{I}'$ respectivement; on a en effet

$$\mathbf{I} \mid \mathbf{M}' = \mu, \qquad \mathbf{I} \mid \mathbf{I}' = \nu, \qquad \mathbf{M}' \mid \mathbf{I}' = \mu\nu \frac{\varepsilon^2}{2} = 1,$$

$$\mathbf{M} \mid \mathbf{M}' = -\mu \frac{\varepsilon'^2}{2}, \qquad \mathbf{M} \mid \mathbf{I}' = -\nu \frac{\varepsilon''^2}{2}, \qquad \mathcal{U} = \Sigma A_i'^2 + 2\widehat{\mathbf{M}'\mathbf{I}'},$$

d'où les relations (8).

Le produit extérieur $[\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3 \mathbf{S}_4 \mathbf{S}_5] = 1^*$ étant l'unité duale (ou dualistique),

$$[\mathbf{M}\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{I}] = \iota 1^* = \iota^*$$

et les formes duales des sphères du repère normal primitif sont

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}^* = -\iota[\mathbf{M}\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2], \qquad \mathbf{A}_0^* = \iota[\mathbf{M}\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{I}], \\ \mathbf{A}_1^* = -\iota[\mathbf{M}\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_0 \mathbf{I}], \qquad \mathbf{A}_2^* = \iota[\mathbf{M}\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_1 \mathbf{I}], \qquad \mathbf{I}^* = -\iota[\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{I}]. \end{array} \right.$$

Dans la suite, un repère normal arbitraire sera désigné par $\mathbf{M}\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{P}$ — en abrégé repère $\mathbf{M}\mathbf{A}_i\mathbf{P}$ — au lieu de $\mathbf{M}'\mathbf{A}_0'\mathbf{A}_1'\mathbf{A}_2'\mathbf{I}'$, les sphères (ou sphères-points) du repère satisfaisant aux conditions (4), où $\mathbf{P}$ est substitué à $\mathbf{I}$, et leurs formes duales étant, dans les mêmes conditions, données par (9).

## II. — Repère mobile attaché à une congruence de courbes.

3. Soit $\mathbf{M}\mathbf{A}_i\mathbf{P}$ un repère normal mobile; les formules du déplacement de ce repère sont, comme on sait, de la forme

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\mathbf{M} = \chi\mathbf{M} + \Sigma\omega_i\mathbf{A}_i, \\ d\mathbf{A}_i = -\eta_i\mathbf{M} + \Sigma\omega_{ij}\mathbf{A}_j - \omega_i\mathbf{P}, \\ d\mathbf{P} = \Sigma\eta_i\mathbf{A}_i - \chi\mathbf{P}, \end{array} \right.$$

$$(11) \quad \omega_{ji} + \omega_{ij} = 0 \qquad (i, j = 0, 1, 2),$$

ou

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{c|ccccc} = & \cdot\ \mathbf{M} + & \cdot\ \mathbf{A}_0 + & \cdot\ \mathbf{A}_1 + & \cdot\ \mathbf{A}_2 + & \cdot\ \mathbf{P} \\ \hline d\mathbf{M} & \chi & \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \cdot \\ d\mathbf{A}_0 & -\eta_{10} & \cdot & \omega_{01} & \omega_{02} & -\omega_0 \\ d\mathbf{A}_1 & -\eta_{11} & \omega_{10} & \cdot & \omega_{12} & -\omega_1 \\ d\mathbf{A}_2 & -\eta_{12} & \omega_{20} & \omega_{21} & \cdot & -\omega_2 \\ d\mathbf{P} & \cdot & \eta_{10} & \eta_{11} & \eta_{12} & -\chi \end{array} \right.$$

le tableau détaillé des coefficients (formes de Pfaff $\chi$, $\omega_i$, $\eta_i$, $\omega_{ij}$) permettant de lire les formules (12) suivant le schéma

$$d\mathbf{S} = d\mathbf{S} \,|\, \mathfrak{U} = d\mathbf{S} \,|\, (\mathbf{PM} - \mathbf{A}_0^2 - \mathbf{A}_1^2 - \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{MP}),$$

où $\mathbf{S}$ désigne une quelconque des sphères du repère.

Les conditions d'intégrabilité des équations (10), obtenues par la combinaison $\delta d - d\delta$, $d$ et $\delta$ étant deux symboles de différentiation arbitraires, sont

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \chi' &= \Sigma[\eta_i \omega_i] \\ \omega_i' &= [\chi \omega_i] + \Sigma[\omega_{ij} \omega_j] \\ \eta_i' &= -[\chi \eta_i] - \Sigma[\omega_{ij} \eta_j] \\ \omega_{ij}' &= -[\eta_i \omega_j - \eta_j \omega_i] + [\omega_{ik} \omega_{kj}] \end{aligned} \right. \qquad (i, j, k = 0, 1, 2;\ k \neq i, j)$$

avec les notations de M. E. Cartan (¹).

La position de la sphère-point $\mathbf{M}$ dépend de trois variables indépendantes, et les formes de Pfaff fondamentales $\omega_0$, $\omega_1$, $\omega_2$ s'expriment linéairement avec les différentielles de ces trois variables. Nous étudierons la congruence de courbes $(\mathbf{M}, \mathbf{A}_0)$ définie par le système de Pfaff $\omega_1 = \omega_2 = 0$, la sphère $\mathbf{A}_0$ étant normale en $\mathbf{M}$ à la courbe de la congruence issue de ce point. A cette congruence est associé l'ensemble $(\mathbf{M}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$ des trajectoires orthogonales, défini par l'équation $\omega_0 = 0$. Le repère normal le plus général dépendant de dix paramètres, nous allons le particulariser jusqu'à ce qu'il ne dépende plus que des coordonnées fixant la position de son origine (²).

**4.** Nous désignerons par $\mathcal{C}_i$ le cercle osculateur en $\mathbf{M}$ d'une courbe de la congruence $(\mathbf{M}, \mathbf{A}_i)$; nous imposerons aux sphères $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ de passer par $\mathcal{C}_0$, c'est-à-dire à $d\mathbf{A}_1 \,|\, d\mathbf{M}$ et $d\mathbf{A}_2 \,|\, d\mathbf{M}$ de s'annuler avec $\omega_1$ et $\omega_2$ ; or, d'après (10)

$$d\mathbf{A}_i \,|\, d\mathbf{M} = -\chi\omega_i + \Sigma\, \omega_{ij}\, \omega_j.$$

(¹) Je ne reviens pas ici sur la forme géométrique qu'on peut donner à ces conditions, en les exprimant pour le tenseur du déplacement (Cf. *Thèse*).

(²) Comme c'est l'habitude en géométrie différentielle, le domaine dans lequel nous opérons est restreint par les conditions de validité de nos formules (fonctions définies, uniformes, continues, dérivables, etc.). Nous écartons aussi les lieux où les éléments choisis $\mathbf{A}_0$, $\mathcal{C}_0$ seraient dégénérés, c'est-à-dire que nous supposons que $\mathbf{A}_0$ est une sphère propre, $\mathcal{C}_0$ un cercle propre.

d'où les conditions

$$(14) \qquad [\omega_1\,\omega_2\,\omega_{01}] = 0, \qquad [\omega_1\,\omega_2\,\omega_{02}] = 0.$$

Dans le faisceau défini par $\mathcal{C}_0 = [\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2]$, on pourra ensuite, en général, choisir $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ pour que les cercles osculatenrs $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ des congruences $(\mathbf{M}, \mathbf{A}_1)$ et $(\mathbf{M}, \mathbf{A}_2)$ soient cosphériques; les congruences ainsi définies sont celles des *asymptotiques conformes* de $(\mathbf{M}, \mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2)$, et $[\mathcal{C}_1\,\mathcal{C}_2]$ où $\mathbf{A}_0$ est la *sphère harmonique* de cet ensemble; les conditions imposées sont l'annulation de $d\mathbf{A}_0 \mid d\mathbf{M}$ avec $\omega_2$ et $\omega_0$ d'une part, $\omega_0$ et $\omega_1$ d'autre part, d'où

$$(15) \qquad [\omega_0\,\omega_2\,\omega_{01}] = 0, \qquad [\omega_0\,\omega_1\,\omega_{02}] \doteq 0.$$

L'ensemble des conditions (14) et (15) se résume en

$$(16) \qquad [\omega_{01}\,\omega_2] = 0, \qquad [\omega_{02}\,\omega_1] = 0,$$

ou

$$(16') \qquad \omega_{01} = \lambda\,\omega_2, \qquad \omega_{02} = \mu\,\omega_1.$$

Les sphères $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ainsi que la position de $\mathbf{P}$, sont alors fixées, et le repère ne dépend plus, en dehors des paramètres essentiels, que d'un paramètre auxiliaire attaché à la masse de $\mathbf{M}$ [1].

5. Désignons par $\delta$ un symbole différentiel correspondant à la seule variation des paramètres auxiliaires, par $e_i = 0$, $e_{ij}$, $f_i$, $g$ les expressions des formes de Pfaff $\omega_i$, $\omega_{ij}$, $\eta_i$, $\chi$ correspondant à cette variation. D'après (16′), on a $e_{0i} = 0$; la variation $\delta$ appliquée aux mêmes formules donne, en tenant compte des relations (13), les conditions

$$f_1\,\omega_0 + \{(\lambda + \mu)\,e_{12} - f_0\}\,\omega_1 - (\delta\lambda + \lambda g)\,\omega_2 = 0,$$
$$f_2\,\omega_0 - \{(\lambda + \mu)\,e_{12} + f_0\}\,\omega_2 - (\delta\mu + \mu g)\,\omega_1 = 0,$$

soit

$$(17) \qquad f_1 = f_2 = 0, \qquad f_0 = (\lambda + \mu)\,e_{12} = -(\lambda + \mu)\,e_{12} = 0,$$
$$(18) \qquad \delta\lambda = -\lambda g, \qquad \delta\mu = -\mu g.$$

Les conditions (17) correspondent bien au fait que la position de $\mathbf{P}$ est fixée, et *dans le cas général* $\lambda + \mu \neq 0$, elles entraînent

---

[1] La recherche d'un repère intrinsèque a été abrégée par les considérations géométriques qui précédent; elle aurait pu être engagée, dès le début, par la méthode que nous allons employer pour terminer la particularisation.

aussi $e_{12} = 0$, soit un choix déterminé de $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$. Le système (18) peut s'écrire

$$(18') \qquad \delta\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = 0, \qquad \delta(\lambda + \mu) = -(\lambda + \mu)g,$$

donc $\frac{\mu}{\lambda}$ est invariant absolu, $\lambda + \mu$ invariant relatif.

*Restons dans le cas général;* par la condition

$$(19) \qquad \lambda + \mu = 2,$$

d'où $g = 0$, on obtient un repère normal complètement fixé; (19) permet encore de poser

$$(19') \qquad \left\{ \begin{array}{c} \lambda = 2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta, \\ \mu = 2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta, \\ \cos 2\theta = \dfrac{\lambda - \mu}{2}, \qquad \operatorname{tang}^2\theta = \dfrac{\mu}{\lambda}(>0). \end{array} \right.$$

Ces conditions sont encore valables si $\lambda = 0$, ou $\mu = 0$; le cas $\lambda = \mu = 0$ rentre dans le cas $\lambda + \mu = 0$ que nous écartons pour le moment, où les asymptotiques conformes sont indéterminées (congruences isotropes). Nous continuerons à employer, au lieu de $\frac{\mu}{\lambda}$, les deux invariants *dépendants* $\lambda$ et $\mu$, ou leurs expressions (19'), c'est-à-dire l'invariant $\theta$, réel ou imaginaire pur (pour les congruences de courbes réelles, auxquelles nous nous en tenons en général); c'est plus exactement $\pm\theta + k\pi$ qui est connu d'après les formules précédentes. Du reste, le repère intrinsèque obtenu est encore choisi arbitrairement parmi ceux qui se déduisent de l'un d'eux par les changements de $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ en $\varepsilon_0\mathbf{A}_0$, $\varepsilon_1\mathbf{A}_1$, $\varepsilon_2\mathbf{A}_2$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$ et $\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 = +1$, puis de $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ en $\mathbf{A}_2$, $-\mathbf{A}_1$, soit huit choix possibles.

Une fois fixé un repère intrinsèque, les formes de Pfaff qui entrent dans l'expression de son déplacement sont des fonctions linéaires, à coefficients invariants, des formes fondamentales $\omega_i$: nous emploierons les notations

$$(20) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \omega_{01} = \lambda\omega_2, & \omega_{02} = \mu\omega_1 & (\lambda = 2\cos^2\theta;\ \mu = 2\sin^2\theta), \\ \omega_{12} = -\Sigma p_i\omega_i, & \chi = \Sigma q_i\omega_i, & \eta_i = \Sigma h_{ij}\omega_j \qquad (i, j = 0, 1, 2), \end{array} \right.$$

les coefficients invariants étant liés par les conditions d'intégrabilité (13) après substitution de ces formes (20).

### III. — Correspondance avec les formules euclidiennes. Invariants.

6. Le repère intrinsèque obtenu est, comme pour l'étude des congruences en géométrie euclidienne, défini au moyen des éléments différentiels du second ordre. Nous faciliterons l'interprétation euclidienne des invariants conformes (qui sont aussi des invariants euclidiens) et des formes différentielles remarquables en partant d'un repère cartésien, modifié ensuite, comme au n° 1, suivant un repère pentasphérique euclidien, transformé enfin pour obtenir le repère intrinsèque du numéro précédent.

Soit $\mathbf{m}\,\mathbf{a}_0\,\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2$ — ou $\mathbf{m}\,\mathbf{a}_i$ — le repère cartésien; dans les expressions de son déplacement

$$(21)\qquad d\mathbf{m} = \Sigma\,\omega_i^0\,\mathbf{a}_i, \qquad d\mathbf{a}_i = \Sigma\,\omega_{ij}^0\,a_j \qquad (\omega_{ij}^0 + \omega_{ji}^0 = 0),$$

nous poserons encore

$$(22)\qquad \omega_{ij}^0 = -\varpi_k = -\Sigma\,\gamma_{kl}\,\omega_l^0 \qquad (i, j, k, l = 0, 1, 2;\ i, j, k = 0, 1, 2 \text{ cycl.}$$

Pour le repère $\mathbf{M}^0\,\mathbf{A}_i^0\,\mathbf{P}^0$ [repère $\mathbf{M}\,\mathbf{A}_i\,\mathbf{I}$ du n° 1, avec les relations (2)], on aura les relations (10) et (13), les éléments relatifs à ce repère (et désignés par des lettres déjà employées), étant affectés d'un indice o supérieur, avec $\chi^0 = \tau_i^0 = 0$.

Nous effectuerons alors la transformation sphérique

$$(23)\qquad \begin{cases} \mathbf{M} = \sigma\,\mathbf{M}^0, \\ \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i^0 + x_i\,\mathbf{M}^0, \\ \mathbf{P} = \dfrac{1}{\sigma}\left(\mathbf{P}^0 - \Sigma\,x_i\,\mathbf{A}_i^0 - \dfrac{\Sigma\,x_i^2}{2}\mathbf{M}^0\right). \end{cases}$$

d'où en particulier

$$d\mathbf{M} = d\sigma\,\mathbf{M}^0 + \sigma\,d\mathbf{M}^0, \qquad d\mathbf{A}_i = d\mathbf{A}_i^0 + dx_i\,\mathbf{M}^0 + x_i\,d\mathbf{M}^0,$$

et par suite

$$(24)\qquad \begin{cases} \chi = d\mathbf{M}\mid\mathbf{P} = \dfrac{d\sigma}{\sigma} - \Sigma\,x_i\,\omega_i^0, \qquad \omega_i = d\mathbf{M}\mid\mathbf{A}_i = \sigma\,\omega_i^0, \\ \tau_i = -\,d\mathbf{A}_i\mid\mathbf{P} = \dfrac{1}{\sigma}\left(\sum x_j\,\omega_{ij}^0 - \dfrac{\Sigma\,x_j^2}{2}\,\omega_i^0 - dx_i + x_i\,\Sigma\,x_j\,\omega_j^0\right). \\ \omega_{ij} = d\mathbf{A}_i\mid\mathbf{A}_j = \omega_{ij}^0 + x_i\,\omega_j^0 - x_j\,\omega_i^0 \end{cases}$$

En imposant au repère les conditions de particularisation (16′) et (19), on obtient

$$(25)\quad \begin{cases} x_0 = \gamma_{21}, & x_1 = -\gamma_{20}, & \lambda\sigma = -\gamma_{22}, \\ x_0 = -\gamma_{12}, & x_2 = \gamma_{10}, & \mu\sigma = \gamma_{11}, \end{cases}$$

et finalement

$$(25')\quad \begin{cases} \gamma_{12}+\gamma_{21}=0, \quad x_0 = \dfrac{\gamma_{21}-\gamma_{12}}{2} = \mathrm{H}, \quad x_1 = -\gamma_{20}, \quad x_2 = \gamma_{10}, \\ \sigma = \dfrac{\gamma_{11}-\gamma_{22}}{2}, \quad \lambda = 2\cos^2\theta = \dfrac{-2\gamma_{22}}{\gamma_{11}-\gamma_{22}}, \quad \mu = 2\sin^2\theta = \dfrac{2\gamma_{11}}{\gamma_{11}-\gamma_{22}}, \\ \operatorname{tang}^2\theta = -\dfrac{\gamma_{11}}{\gamma_{22}}, \qquad \cos 2\theta = \dfrac{\gamma_{11}+\gamma_{22}}{\gamma_{22}-\gamma_{11}} = -\dfrac{\mathrm{N}}{2\sigma}, \end{cases}$$

les relations (24) donnant d'autre part les invariants $p_i$, $q_i$, $h_{ij}$ en fonction des $\gamma_{ij}$ et de leurs dérivées pfaffiennes; les expressions ainsi obtenues et les conditions d'intégrabilité des $\gamma_{ij}$, écrites pour le repère $\mathbf{m\,a}_i$, correspondent naturellement aux conditions d'intégrabilité (13) du repère $\mathbf{M\,A}_i\,\mathbf{P}$.

7. Comme il est connu, les $\gamma_{ij}$ sont, aux signes près, les courbures et torsions relatives des courbes des congruences ($\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_i$). La signification des $x_i$ était d'ailleurs nette; d'après

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i^0 + x_i\,\mathbf{M}^0 = x_i\,\mathbf{m} \times \left(\mathbf{m} + \frac{2}{x_i}\mathbf{a}_i\right),$$

$\dfrac{1}{x_i}$ est la mesure algébrique, dans le sens de $\mathbf{a}_i$, du rayon de la sphère $\mathbf{A}_i$ (c'est-à-dire l'abscisse de son centre), et $x_i$ est aussi (n° 2) la masse euclidienne de cette sphère; la courbure $\varkappa$ [1] de ($\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_0$) est donnée par

$$\varkappa^2 = x_1^2 + x_2^2 = \gamma_{10}^2 + \gamma_{20}^2;$$

$x_0 = \mathrm{H}$ est la courbure moyenne de l'ensemble ($\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2$) et $\mathbf{M}$, de masse $\sigma$, est choisi comme pour le cas d'une surface. Comme on le verra, $2\theta$ est l'angle des lignes de courbure (généralisées) de ($\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2$), et dans (25′) nous avons traduit son expression avec

---

[1] Comme dans notre précédent Mémoire (*Congruences*), nous supprimons ici, pour simplifier, l'indice zéro pour certains invariants de la congruence ($\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_0$) étudiée ou de l'ensemble orhogonal ($\varkappa$, H, N, ..., pour $\varkappa_0$, $\mathrm{H}_0$, $\mathrm{N}_0$, ...).

$N = \mathbf{a}_0 . \mathrm{rot}\, \mathbf{a}_0$ (le point . étant ici le symbole du produit scalaire des vecteurs).

La dernière des relations (24) fournit les expressions

$$(26) \qquad p_0 \sigma = \gamma_{00}, \qquad p_1 \sigma = \gamma_{01} + \gamma_{10}, \qquad p_2 \sigma = \gamma_{02} + \gamma_{20};$$

en géométrie euclidienne, les $\gamma_{ij}$ étaient un système de huit invariants fondamentaux ($\gamma_{12} + \gamma_{21} = 0$), du second ordre (du premier ordre en $\mathbf{a}_0$) quand le premier indice $i$ était différent de zéro, les $\gamma_{0j}$ étant du troisième ordre (du deuxième ordre en $\mathbf{a}_0$) [1]. Les formules (25) et (26) montrent que ces invariants euclidiens du deuxième ordre donnent $\lambda$, ou $\mu$ ($\lambda + \mu = 2$), soit essentiellement un seul invariant conforme du deuxième ordre; ils déterminent en outre les qualités $\sigma$ et $x_i$ (de même qu'inversement $\sigma$, les $x_i$, $\lambda$ déterminent les cinq $\gamma_{ij}$ indépendants du deuxième ordre), mais ces quatre quantités disparaissent en géométrie conforme, absorbées dans la détermination du repère, qui dépend de dix paramètres, alors que le repère cartésien correspondant ne dépendait que de six paramètres. Quant aux $p_i$, qui d'après (26) contiennent les $\gamma_{0j}$ du troisième ordre (et inversement les détermineraient, les $\gamma_{ij}$ du deuxième ordre étant connus) ce sont trois invariants conformes du troisième ordre.

En gèométrie conforme, nous avons introduit 16 invariants : $\lambda$ (par exemple), les $p_i$, $q_i$, $h_{ij}$; les conditions d'intégrabilité, sur lesquelles nous reviendrons, montrent que la dérivation extérieure des équations (16′) fournit entre ces invariants trois relations fonctionnelles; on pourra donc considérer qu'on a un système de 13 invariants conformes fondamentaux indépendants, dont un du deuxième ordre, les autres du troisième; nous continuerons cependant à employer les 16 invariants énoncés précédemment (comme aussi $\mu$ à côté de $\lambda$).

---

[1] Au lieu du système des invariants des formes $\omega_0$ et $\omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2$ en géométrie euclidienne, il s'agit en géométrie conforme des invariants des équations

$$\omega_0 = 0, \qquad \omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 = 0,$$

ceci avant que la forme $\omega_0$ ait été normée pour cette géométrie. Nous avons, en géométrie euclidienne, compté l'ordre des invariants par rapport à $\mathbf{a}_0$, pour bien mettre en évidence la congruence correspondante. Nous revenons dans la suite à l'ordre différentiel, supérieur d'une unité au précédent.

8. Déterminons pour les trajectoires ($\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_1$) et ($\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_2$) les cercles osculateurs $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$: sur l'ensemble ($\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_1$ $\mathbf{A}_2$), la sphère $\mathbf{A}_0$ est la sphère de courbure normale de ces lignes (asymptotiques): il reste à obtenir les sphères de courbure géodésique, respectivement de forme $\mathbf{G}_2 = \mathbf{A}_2 + y_2 \mathbf{M}$ pour une courbe $\omega_0 = \omega_2 = 0$, ou $\mathbf{G}_1 = \mathbf{A}_1 + y_1 \mathbf{M}$ pour une courbe $\omega_0 = \omega_1 = 0$. En traduisant, dans ces conditions, $d\mathbf{G}_2 \mid d\mathbf{M} = 0$, ou $d\mathbf{G}_1 \mid d\mathbf{M} = 0$, on obtient aussitôt $y_2 = -p_1$, $y_1 = p_2$, d'où avec les valeurs de $p_1$ et $p_2$ données par (26)

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathbf{G}_2 = \mathbf{A}_2 - p_1 \mathbf{M} = \mathbf{A}_2^0 - \gamma_{01} \mathbf{M}^0, \qquad \mathbf{G}_1 = \mathbf{A}_1 + p_2 \mathbf{M} = \mathbf{A}_1^0 + \gamma_{02} \mathbf{M}^0, \\ &\qquad\qquad \mathcal{C}_1 = (\mathbf{G}_2 \, \mathbf{A}_0), \qquad \mathcal{C}_2 = (\mathbf{A}_0 \, \mathbf{G}_1), \end{aligned} \right.$$

$-\gamma_{01}$ et $\gamma_{02}$ étant respectivement les courbures géodésiques des courbes ($\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_1$) et ($\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_2$).

Déterminons aussi la sphère osculatrice $\mathbf{S}_0$ d'une courbe ($\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_0$): en posant

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{A}_1 \cos \varepsilon - \mathbf{A}_2 \sin \varepsilon,$$

on obtient $\mathbf{S}_0$ par $d\mathbf{S}_0 \mid d^2\mathbf{M} = 0$ pour $\omega_1 = \omega_2 = 0$: les conditions déjà satisfaites laissent à exprimer $d\mathbf{S}_0 \mid \mathbf{P} = 0$ ou simplement

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} &h_{10} \cos \varepsilon - h_{20} \sin \varepsilon = 0, \\ &\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{h_{10}}{h_{20}}, \qquad \mathbf{S}_0 = \pm \frac{h_{20} \mathbf{A}_1 - h_{10} \mathbf{A}_2}{\sqrt{h_{10}^2 + h_{20}^2}}. \end{aligned} \right.$$

Le calcul de la masse de $\mathbf{S}_0$, comme précédemment, donne pour la courbure de cette sphère la valeur $|\gamma_{10} \sin \varepsilon + \gamma_{20} \cos \varepsilon|$, le signe étant précisé par l'orientation choisie pour $\mathbf{S}_0$.

9. Des formules intéressantes correspondent à une rotation du repère autour du cercle $\mathcal{C}_0$, sans modifier $\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{P}$; avec cette restriction, nous effectuerons une rotation d'un angle $\alpha$ à partir d'une position initiale arbitraire, et pour un tel repère mobile, nous poserons alors en général

$$(29) \qquad \omega_{0i} = \Sigma \gamma_{ij} \omega_j.$$

Les formules de variation seront données par

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_1 &= \mathbf{A}_1 \cos \alpha + \mathbf{A}_2 \sin \alpha, \\ \tilde{\mathbf{A}}_2 &= -\mathbf{A}_1 \sin \alpha + \mathbf{A}_2 \cos \alpha. \end{aligned} \right.$$

et nous écrirons la matrice de transformation

$$(30') \qquad \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} = \mathfrak{M}, \qquad \text{avec} \qquad c = \cos\alpha, \quad s = \sin\alpha.$$

Pour les différentielles, on aura

$$(31) \qquad \begin{cases} d\tilde{\mathbf{A}}_1 = \quad d\mathbf{A}_1 \cos\alpha + d\mathbf{A}_2 \sin\alpha + d\alpha\, \tilde{\mathbf{A}}_2, \\ d\tilde{\mathbf{A}}_2 = -d\mathbf{A}_1 \sin\alpha + d\mathbf{A}_2 \cos\alpha - d\alpha\, \tilde{\mathbf{A}}_1. \end{cases}$$

Les formes de Pfaff $\omega_0$, $\chi$, $\eta_0$ ne sont pas modifiées; $\omega_1$ et $\omega_2$, $\eta_1$ et $\eta_2$, $\omega_{01}$ et $\omega_{02}$ varient comme $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$, suivant les formules (30) ou (30'). D'après (31), on aura

$$(32) \qquad \tilde{\omega}_{12} = \omega_{12} + d\alpha.$$

Pour les coefficients de $\omega_0$, $\omega_1$, $\omega_2$ dans les autres formes de Pfaff, $q_0$ et $h_{00}$ ne seront pas modifiés, $\nu_{10}$ et $\nu_{20}$ sont et restent nuls; $q_1$ et $q_2$, $h_{01}$ et $h_{02}$, $h_{10}$ et $h_{20}$ varieront comme $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$. En posant $d\alpha = \Sigma\, \alpha_i\, \omega_i$, on aura

$$(32') \qquad \begin{cases} \tilde{p}_0 = p_0 - \alpha_0, \\ \tilde{p}_1 = \quad (p_1 - \alpha_1)\, c + (p_2 - \alpha_2)\, s, \\ \tilde{p}_2 = -(p_1 - \alpha_1)\, s + (p_2 - \alpha_2)\, c. \end{cases}$$

C'est suivant les formules de transformation de $\mathbf{A}_1^2$, $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2^2$, donc par la matrice

$$(33) \qquad \begin{pmatrix} c^2 & cs & sc & s^2 \\ -cs & c^2 & -s^2 & sc \\ -sc & -s^2 & c^2 & cs \\ s^2 & -sc & -cs & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\mathfrak{M} & s\mathfrak{M} \\ -s\mathfrak{M} & c\mathfrak{M} \end{pmatrix} = \mathfrak{M}, \mathfrak{M},$$

que seront transformés respectivement $h_{11}$, $h_{12}$, $h_{21}$, $h_{22}$ ainsi que $\nu_{11}$, $\nu_{12}$, $\nu_{21}$, $\nu_{22}$; ou bien on pourra tenir compte de ce que $\mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2$, $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ sont invariants par rotation, tandis que $\mathbf{A}_1^2 - \mathbf{A}_2^2$, $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ subissent la rotation $2\alpha$, c'est-à-dire sont transformés par la matrice

$$(33') \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{C} & \mathrm{S} \\ -\mathrm{S} & \mathrm{C} \end{pmatrix} = \mathfrak{M}^2, \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{C} = \cos 2\alpha, \quad \mathrm{S} = \sin 2\alpha.$$

En géométrie euclidienne, la même rotation $\alpha$ donnait des formules analogues, $\varpi_0$, $\varpi_1$, $\varpi_2$ se comportant respectivement comme $-\omega_{12}$, $\omega_{02}$, $-\omega_{01}$ ; par suite $\gamma_{00}$, $\gamma_{01}$, $\gamma_{02}$ varient suivant des formules analogues à ($32'$), les dérivées pfaffiennes étant prises par rapport aux $\omega_i'' = \sigma^{-1}\omega_i$ ; $-\gamma_{20}$ et $\gamma_{10}$ varient comme $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$, $-\gamma_{21}$, $-\gamma_{22}$, $\gamma_{11}$, $\gamma_{12}$ comme $\mathbf{A}_1^2$, $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2^2$. Il s'ensuit de ces remarques que les ordres différentiels de $\gamma_{ij}(i \neq 0)$ et $\gamma_{0j}$, calculés en géométrie euclidienne pour certains repères intrinsèques (repère principal, repère primaire) ne sont pas modifiés quand l'angle $\alpha$ de la rotation transformant un de ces repères en un autre est lui-même un invariant différentiel dont l'ordre ne dépasse pas deux : nous en avons tenu compte au n° 7.

**10.** Sans les détailler complètement, et en conservant $\lambda$ et $\mu$, écrivons ce que sont devenues les conditions d'intégrabilité (13), une fois la particularisation du repère terminée comme on l'a dit, c'est-à-dire pour le repère *asymptotique*

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} \omega_0' &= [\chi\omega_0 + (\mu-\lambda)\omega_1\omega_2], \\ \omega_1' &= [\chi\omega_1 - \lambda\,\omega_2\omega_0 + \omega_{12}\omega_2], \\ \omega_2' &= [\chi\omega_2 + \mu\,\omega_0\omega_1 - \omega_{12}\omega_1], \end{aligned}\right.$$

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} \chi' &= [\eta_0\omega_0 + \eta_1\omega_1 + \eta_2\omega_2], \\ \eta_0' &= [-\chi\eta_0 + \lambda.\omega_2\eta_1 + \mu.\omega_1\eta_2], \\ \eta_1' &= [-\chi\eta_1 - \lambda.\omega_2\eta_0 + \omega_{12}\eta_2], \\ \eta_2' &= [-\chi\eta_2 - \mu.\omega_1\eta_0 - \omega_{12}\eta_1], \\ \omega_{12}' &= [-\eta_1\omega_2 + \eta_2\omega_1 + \lambda\mu.\omega_1\omega_2], \\ \omega_{01}' &= [-\eta_0\omega_1 - \eta_1\omega_0 - \mu.\omega_1\omega_{12}], \\ \omega_{02}' &= [-\eta_0\omega_2 + \eta_2\omega_0 + \lambda.\omega_2\omega_{12}]. \end{aligned}\right.$$

En remplaçant, dans les deux dernières équations (35), les premiers membres par leurs valeurs $(\lambda\omega_2)'$ et $(\mu\dot{\omega}_1)'$ exprimées au moyen des deux dernières formules (34), on obtient

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} &[d\lambda.\omega_2] + [\lambda.\chi\omega_2 + \lambda\mu.\omega_0\omega_1 - (\lambda+\mu)\,\omega_{12}\omega_1 + \eta_0\omega_1 - \eta_1\omega_0] = 0, \\ &[d\mu.\omega_1] + [\mu.\chi\omega_1 - \lambda\mu.\omega_2\omega_0 + (\lambda+\mu)\,\omega_{12}\omega_2 + \eta_0\omega_2 - \eta_2\omega_0] = 0. \end{aligned}\right.$$

Avec

$$d\lambda = \Sigma\lambda_i\omega_i, \qquad d\mu = \Sigma\mu_i\omega_i, \qquad d(\lambda+\mu) = 0,$$

les six équations numériques [1] équivalentes aux équations (36)

[1] Les trois équations non écrites ici sont des formules ($36''$) du n° 15.

donnent trois relations indépendantes des dérivées pfaffiennes de $\lambda$ ou $\mu$, à savoir

$$(36') \quad \left\{ \begin{aligned} 2(\lambda - \mu)p_0 + h_{11} - h_{22} &= 0, \\ 2\lambda\mu + 2h_{00} + h_{11} + h_{22} &= 0, \qquad (\lambda + \mu = 2). \\ (\lambda - \mu)q_0 + h_{12} - h_{21} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Ces trois relations finies, signalées au n° 7, entre les 16 invariants fondamentaux, permettraient, comme nous l'avons dit, de revenir à un système de 13 invariants, liés par 18 conditions d'intégrabilité numériques, au lieu de 16 invariants, liés par les 21 équations de condition que fournissent les sept équations extérieures (35). Il en résulte aussi que la combinaison $2h_{00} + h_{11} + h_{22}$ est un invariant du deuxième ordre.

## IV. — Formes différentielles remarquables.

**11.** Toutes les formes de Pfaff figurant dans le tableau (12) relatif au repère intrinsèque *asymptotique* sont des formes invariantes, mais certaines de leurs combinaisons sont particulièrement utiles; ainsi

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} &(d\mathbf{M})^2 = \omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2, \qquad (d\mathbf{A}_0)^2 = 2\eta_0\omega_0 + \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2, \\ &\qquad\qquad d\mathbf{M} \mid d\mathbf{A}_0 = -\chi\omega_0 + \omega_{01}\omega_1 + \omega_{02}\omega_2 \end{aligned} \right.$$

ont des significations géométriques bien définies. Nous nous attacherons aussi aux formes réduites, soit le long des courbes de la congruence ($\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_0$), pour $\omega_1 = \omega_2 = 0$, les coefficients invariants de $\omega_0$ ou de ses puissances intervenant alors seuls; soit sur l'ensemble orthogonal ($\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$), pour $\omega_0 = 0$. Dans ce cas,

$$d\mathbf{M} = \omega_1\mathbf{A}_1 + \omega_2\mathbf{A}_2$$

fait partie d'un système linéaire à deux unités de base $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$; dans cette base, $\mathcal{C}_0 = [\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2]$, $\mathcal{C}_0^2 = -(\mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2) = -\mathfrak{U}_0$, et $\mathcal{C}_0$ joue le rôle d'unité duale réduite, donnant

$$\mathbf{A}_1 \mid \mathcal{C}_0 = \mathbf{A}_2, \qquad \mathbf{A}_2 \mid \mathcal{C}_0 = -\mathbf{A}_1.$$

*Le calcul étant fait pour* $\omega_0 = 0$, reprenons l'étude des sphères de courbure normale; une sphère $\mathbf{Z} = \mathbf{A}_0 + z\mathbf{M}$ est de courbure normale pour la direction de différentiation $d$ si l'on a pour cette direction

$$\mathbf{Z} \mid \mathbf{M} = 0, \qquad \mathbf{Z} \mid d\mathbf{M} = 0, \qquad d\mathbf{Z} \mid d\mathbf{M} = 0.$$

Les deux premières conditions sont satisfaites, et la troisième se réduit à

$$(38) \qquad d\mathbf{Z} \mid d\mathbf{M} = d\mathbf{A}_0 \mid d\mathbf{M} + z(d\mathbf{M})^2 = 0,$$

donnant, pour une même sphère $\mathbf{Z}$, deux directions de même courbure normale (masse de $\mathbf{Z}$ unitaire)

$$(39) \qquad k = x_0 - \sigma z = -\frac{d\mathbf{A}_0^0 \mid d\mathbf{M}^0}{(d\mathbf{M}^0)^2},$$

d'où

$$z = -\frac{d\mathbf{A}_0 \mid d\mathbf{M}}{(d\mathbf{M})^2} = \frac{k - \mathrm{H}}{\sigma} = -\sin 2\alpha,$$

comme pour le cas d'une surface, l'angle $\alpha$ étant compté à partir de la première direction asymptotique conforme, donnée par

$$\omega_0 = \omega_2 = 0.$$

Une sphère $\mathbf{Z}$ reste tangente à la sphère infiniment voisine dans les directions $d$ pour lesquelles $[\mathbf{Z}.d\mathbf{Z}]^2 = 0$ ou

$$(40) \qquad (d\mathbf{Z})^2 = (d\mathbf{A})^2 + 2z\, d\mathbf{A}_0 \mid d\mathbf{M} + z^2(d\mathbf{M})^2 = 0,$$

ce qui définit aussi deux directions correspondant à une sphère $\mathbf{Z}$, mais deux sphères $\mathbf{Z}$ correspondant à une direction. Les équations (40) et (39) étant de la forme

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{A}z^2 + 2\mathrm{B}z + \mathrm{C} = 0, \qquad \mathrm{F}'(z) = 2(\mathrm{A}z + \mathrm{B}) = 0,$$

il revient au même de leur imposer d'avoir une solution $z$ commune, ou une racine double à $\mathrm{F}(z) = 0$. On obtient ainsi l'équation différentielle des lignes de courbure

$$(41) \qquad (d\mathbf{A}_0)^2(d\mathbf{M})^2 - (d\mathbf{A}_0 \mid d\mathbf{M})^2 \equiv |d\mathbf{A}_0 . d\mathbf{M}|^2 = 0,$$

où la forme différentielle annulée est non seulement un carré scalaire, mais aussi un carré numérique parfait, d'après l'identité

$$(42) \quad (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)(\omega_1^2 + \omega_2^2) - (\omega_{01}\omega_1 + \omega_{02}\omega_2)^2 \equiv (\omega_{01}\omega_2 - \omega_{02}\omega_1)^2;$$

les lignes de courbnres sont donc définies comme *lignes doubles*, et le long de chacune

$$(43)\qquad z=-\frac{d\mathbf{A}_0\,|\,d\mathbf{M}}{(d\mathbf{M})^2}=-\frac{(d\mathbf{A}_0)^2}{d\mathbf{A}_0\,|\,d\mathbf{M}},\qquad z^2=\frac{(d\mathbf{A}_0)^2}{(d\mathbf{M}_0)^2}$$
$$(z=z^{\mathrm{I}},\ z^{\mathrm{II}};\ z^{\mathrm{I}}+z^{\mathrm{II}}=0).$$

Le second membre de (41) peut s'écrire $(d\mathbf{M}\,d\mathbf{A}\,\overset{2}{|}\,\mathcal{C}_0)^2$, mais eette forme, et aussi $[d\mathbf{A}_0\,.\,d\mathbf{M}]^2$ pour $\omega_0=0$, ne dépendent qu'en apparence de la sphère harmonique $\mathbf{A}_0$, mais seulement de la position du faisceau $[\mathbf{M}\mathbf{A}_0]$.

**12.** Formons, pour un déplacement arbitraire, la différentielle du cercle osculateur $\mathcal{C}_0=[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2]$

$$(44)\quad d\mathcal{C}_0=[\mathbf{M}(\eta_2\mathbf{A}_1-\eta_1\mathbf{A}_2)]+[\mathbf{A}_0(\omega_{02}\mathbf{A}_1-\omega_{01}\mathbf{A}_2)]+[\mathbf{P}(\omega_2\mathbf{A}_1-\omega_1\mathbf{A}_2)].$$

Pour $\omega_1=\omega_2=0$, $d\mathcal{C}_0$ se réduit à $[\mathbf{M}(h_{20}\mathbf{A}_1-h_{10}\mathbf{A}_2)]\omega_0$, d'où un moyen facile à déterminer la sphère osculatrice $\mathbf{S}_0$ (n° 8). L'expression

$$(45)\qquad \begin{aligned}\frac{1}{2}[d\mathcal{C}_0\,.\,d\mathcal{C}_0]&=-[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\,d\mathbf{A}_1\,d\mathbf{A}_2]\\&=-(\eta_1\omega_{02}-\eta_2\omega_{01})[\mathbf{M}\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2]\\&\quad+(\eta_2\omega_1-\eta_1\omega_2)[\mathbf{M}\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{P}]\\&\quad-(\omega_{01}\omega_2-\omega_{02}\omega_1)[\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{P}],\end{aligned}$$

définit ensuite, sous forme duale, pour chaque direction de déplacement $d$, une sphère

$$(46)\quad\left\{\begin{aligned}\mathfrak{I}\mathbf{B}_0&=(\eta_1\omega_{02}-\eta_2\omega_{01})\mathbf{M}+(\eta_2\omega_1-\eta_1\omega_2)\mathbf{A}_0+(\omega_{01}\omega_2-\omega_{02}\omega_1)\mathbf{P}\\&=\mathcal{C}_0\,\overset{2}{|}\,\{(d\mathbf{A}_0\,.\,d\mathbf{P})\mathbf{M}+(d\mathbf{P}\,.\,d\mathbf{M})\mathbf{A}_0+(d\mathbf{M}\,.\,d\mathbf{A}_0)\mathbf{P}\},\\\mathfrak{I}\mathbf{B}_0^*&=\frac{1}{2}[d\mathcal{C}_0\,.\,d\mathcal{C}_0]=-\frac{1}{2}[\mathcal{C}_0\,.\,d^2\mathcal{C}_0],\end{aligned}\right.$$

où les coefficients de $\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{P}$ [ou $\mathbf{M}^*$, $\mathbf{A}_0^*$, $\mathbf{P}^*$, formules (9)] sont des formes quadratiques invariantes; en particulier

$$(47)\qquad \mathfrak{I}\mathbf{B}_0\,|\,\mathbf{M}=\omega_{01}\omega_2-\omega_{02}\omega_1$$

est la forme de Monge attachée aux lignes de courbure de $(\mathbf{M},\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)$, et l'équation de ces lignes peut s'écrire $[\mathbf{M}\,.\,d\mathcal{C}_0\,.\,d\mathcal{C}_0]=0$, $\omega_0=0$; cette *nouvelle définition conforme des lignes de courbure* d'un ensemble ($\mathbf{M}, \mathbf{A}_1\, \mathbf{A}_2$) général permettant de retrouver les asymptotiques conformes comme bissectrices des lignes précédentes, on avait la possibilité d'arriver à la particularisation asymptotique du repère sans faire *a priori* usage de la sphère harmonique $\mathbf{A}_0$.

Les formes $(d\mathcal{C}_0)^{\overset{2}{}}$, $(\Im\mathbf{B}_0)^{\overset{2}{}}$ sont aussi des formes différentielles intrinsèques ; quand la dernière ne sera pas nulle, on pourra appeler $\mathbf{B}_0$ une sphère unitaire de même position que $\Im\mathbf{B}_0$. Ces formes ont pour expressions

$$(48)\quad \begin{cases} (d\mathcal{C}_0)^2 = \omega_{01}^2 - \omega_{02}^2 + 2(\omega_1\eta_1 + \omega_2\eta_2), \\ (\Im\mathbf{B}_0)^2 = (\eta_2\omega_1 - \eta_1\omega_2)^2 + 2(\eta_1\omega_{02} - \eta_2\omega_{01})(\omega_{01}\omega_2 - \omega_{02}\omega_1). \end{cases}$$

**13.** Avec le repère asymptotique, nous poserons

$$(49)\quad \begin{cases} \mathcal{U} = \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2, \qquad \mathcal{C}_0 = [\mathbf{A}\mathbf{A}], \qquad \mathcal{F}_0 = \mathbf{A}_2^2 - \mathbf{A}_1^2, \qquad \mathcal{A}_0 = 2\widehat{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2}, \\ \mathbf{C}^{\mathrm{I}} = \mathbf{A}_1 \sin\theta + \mathbf{A}_2\cos\theta, \qquad \mathbf{C}^{\mathrm{II}} = -\mathbf{A}_1\sin\theta + \mathbf{A}_2\cos\theta, \qquad \mathcal{G}_0 = 2\widehat{\mathbf{C}^{\mathrm{I}}\mathbf{C}^{\mathrm{II}}}; \end{cases}$$

$$(49')\quad \begin{cases} \Phi_0 = \omega_2^2 - \omega_1^2 = (d\mathbf{M})^2 \overset{2}{|} \mathcal{F}_0, \\ \Psi_0 = (\lambda + \mu)\omega_1\omega_2 = 2\omega_1\omega_2 = (d\mathbf{M})^2 \overset{2}{|} \mathcal{A}_0, \\ \Gamma_0 = \lambda\omega_2^2 - \mu\omega_1^2 = \omega_2^2 - \omega_1^2 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\cos 2\theta = (d\mathbf{M})^2 \overset{2}{|} \mathcal{G}_0\,; \end{cases}$$

$\Psi_0$ et $\Gamma_0^2$ sont respectivement les parties indépendantes de $\omega_0$ dans $d\mathbf{M} \mid d\mathbf{A}_0$ et $[d\mathbf{A}_0 . d\mathbf{M}]^2$, et l'on a encore

$$(50)\qquad \Gamma_0 = d\mathbf{M} . d\mathbf{A}_0 \overset{2}{|} \mathcal{C}_0 = \Im\mathbf{B}_0 \mid \mathbf{M}$$

d'après les remarques déjà faites ([1]).

La forme $\mathcal{A}_0$ est la jacobienne de $\mathcal{G}_0$ et $\mathcal{U}_0$ et peut être obtenue par

$$(51)\qquad \{\mathcal{C}_0 \mathcal{G}_0\} = \mathcal{A}_0,$$

où le premier membre est la parenthèse de Lie entre $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{G}_0$.

Les lettres relatives au repère asymptotique n'étant affectées d'aucun symbole particulier, nous emploierons l'ondulation $\sim$ pour celles relatives à un repère déduit de celui-ci par la rotation arbitraire $\alpha$ autour de $\mathcal{C}_0$ (n° 9). Pour $\alpha = -\frac{\pi}{4}$, nous surmonterons d'un trait les lettres ; le repère ainsi atteint, dit *primaire*, est dirigé suivant les *lignes bissectrices principales*, qui bissectent

---

([1]) On peut préciser, d'après les formules (52) et (52') ci-après, que, le long de chaque ligne de courbure, la sphère $\Im\mathbf{B}_0$ se réduit, à un facteur près, à la sphère de courbure normale correspondante.

les asymptotiques conformes comme les asymptotiques euclidiennes; on aura pour ce repère les expressions

$$(48')\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{F}_0 = 2\overline{\mathbf{A}}_1\overline{\mathbf{A}}_2, &\qquad \Phi_0 &= 2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2,\\ &\mathcal{A}_0 = \overline{\mathbf{A}}_1^2 - \overline{\mathbf{A}}_2^2, &\qquad \Psi_0 &= \overline{\omega}_1^2 - \overline{\omega}_2^2. \end{aligned}\right.$$

Les directions des lignes de courbure sont atteintes par les rotations $\mp\theta$; nous leur affectons les indices supérieurs I et II. Par la rotation $-\theta$, on obtient

$$\omega_1^{\mathrm{I}} = \omega_1\cos\theta - \omega_2\sin\theta,\qquad \omega_2^{\mathrm{I}} = \omega_1\sin\theta + \omega_2\cos\theta \qquad\text{ou}\qquad \mathbf{A}_2^{\mathrm{I}} = \mathbf{C}^{\mathrm{I}},$$

$$(52)\qquad \left\{\begin{aligned} &\omega_{01}^{\mathrm{I}} = -\sin2\theta.\omega_1^{\mathrm{I}} = -z^{\mathrm{I}}\omega_1^{\mathrm{I}},\\ &\omega_{02}^{\mathrm{I}} = \sin2\theta.\omega_2^{\mathrm{I}} = z^{\mathrm{I}}\omega_2^{\mathrm{I}} = 0 \qquad \text{pour}\quad \omega_2^{\mathrm{I}} = 0; \end{aligned}\right.$$

et de même par la rotation $\theta$, $\mathbf{A}_2^{\mathrm{II}} = \mathbf{C}^{\mathrm{II}}$, et

$$(52')\qquad \left\{\begin{aligned} &\omega_{01}^{\mathrm{II}} = \sin2\theta.\omega_1^{\mathrm{II}} = -z^{\mathrm{II}}\omega_2^{\mathrm{II}},\\ &\omega_{02}^{\mathrm{II}} = -\sin2\theta.\omega_2^{\mathrm{II}} = z^{\mathrm{II}}\omega_2^{\mathrm{II}} = 0 \qquad \text{pour}\quad \omega_2^{\mathrm{II}} = 0. \end{aligned}\right.$$

Ces propriétés (52) et (52′) restent encore *caractéristiques des lignes de courbure*, comme dans le cas d'une surface; c'est la définition même choisie au n° **11**.

**14.** En complétant les formules de rotation du repère pour les covariants bilinéaires des formes de Pfaff, on voit en particulier que $\omega_1'$ et $\omega_2'$ sont modifiés par des formules du type (31), à savoir

$$(53)\qquad \left\{\begin{aligned} \widetilde{\omega}_1' &= \omega_1'\cos\alpha + \omega_2'\sin\alpha + [d\alpha.\widetilde{\omega}_2],\\ \widetilde{\omega}_2' &= -\omega_1'\sin\alpha + \omega_2'\cos\alpha - [d\alpha.\widetilde{\omega}_1], \end{aligned}\right.$$

et l'on en déduit les expressions

$$(54)\qquad \left\{\begin{aligned} [\widetilde{\omega}_1\widetilde{\omega}_1' + \widetilde{\omega}_2\widetilde{\omega}_2'] &= [\omega_1\omega_1' + \omega_2\omega_2'] - 2[d\alpha.\omega_1\omega_2]\\ &= (\mu - \lambda)[\omega_0\omega_1\omega_2] - 2[\widetilde{\omega}_{12}\omega_1\omega_2],\\ [\widetilde{\omega}_1\widetilde{\omega}_2' - \widetilde{\omega}_2\widetilde{\omega}_1'] &= [\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1'] = -2[\chi\omega_1\omega_2],\\ [\widetilde{\omega}_1\widetilde{\omega}_1' - \widetilde{\omega}_2\widetilde{\omega}_2'] &= \mathrm{C}[\omega_1\omega_1' - \omega_2\omega_2'] + \mathrm{S}[\omega_1\omega_2' + \omega_2\omega_1']\\ &= \mathrm{C}[\omega_1\omega_1' - \omega_2\omega_2'],\\ [\widetilde{\omega}_1\widetilde{\omega}_2' + \widetilde{\omega}_2\widetilde{\omega}_1'] &= -\mathrm{S}[\omega_1\omega_1' - \omega_2\omega_2'] + \mathrm{C}[\omega_1\omega_2' + \omega_2\omega_1']\\ &= -\mathrm{S}[\omega_1\omega_1' - \omega_2\omega_2'],\\ [\omega_1\omega_2' + \omega_2\omega_1'] &\equiv 0,\\ [\omega_1\omega_1' - \omega_2\omega_2'] &= -(\lambda + \mu)[\omega_0\omega_1\omega_2],\\ (\widetilde{\omega}_{12} = \omega_{12} + d\alpha,\ &\mathrm{C} = \cos2\alpha,\ \mathrm{S} = \sin2\alpha), \end{aligned}\right.$$

dont nous tirerons prochainement parti.

## V. — Quelques classes de congruences remarquables.

15. **Congruences normales.** — D'après la première des formules (34)

$$(34)_1 \qquad \omega'_0 = [\chi\omega_0 + (\mu - \lambda)\omega_1\omega_2],$$

$$(55) \qquad [\omega_0\omega'_0] = (\mu - \lambda)[\omega_0\omega_1\omega_2],$$

donc la congruence ($\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_0$) est normale à une famille de $\infty^1$ surfaces pour

$$\mu - \lambda = 0, \qquad \lambda = \mu = 1, \qquad \text{tang}^2\theta = 1$$

ou

$$\cos 2\theta = -\mathrm{N}/2\sigma = 0;$$

les lignes de courbure de chaque surface ($\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$) sont rectangulaires. On a alors

$$(56) \quad \omega'_0 = [\chi\omega_0], \qquad \omega''_0 = [\chi'\omega_0] - [\chi\omega'_0] \equiv 0, \qquad \text{donc} \quad [\chi'\omega_0] = 0$$

($\omega''_0 \equiv 0$ comme différentielle extérieure seconde), c'est-à-dire $\chi$ différentielle exacte sur chaque surface ($\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$); ceci traduit la propriété connue de distribution des cercles osculateurs $\mathcal{C}_0$. En effet, d'après $(24)_1$, pour $\omega_0 = 0$

$$\chi = d\log\sigma + \gamma_{20}\omega_1^0 - \gamma_{10}\omega_2^0 = d\log\sigma - \mathbf{k}_0.d\mathbf{m},$$

donc *le vecteur de courbure* $\mathbf{k}_0$ *de* ($\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_0$) *est alors un gradient superficiel euclidien.*

D'après $(35)_1$, la condition $[\chi'\omega_0] = 0$ se traduit encore par

$$[\chi'\omega_0] = [(\eta_1\omega_1 + \eta_2\omega_2)\omega_0] = (h_{21} - h_{12})[\omega_0\omega_1\omega_2] = 0 \qquad \text{ou} \qquad h_{21} = h_{12}$$

ce qui résulte aussi des formules (36), où les trois relations, non écrites en (36′), sont

$$(36'') \qquad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda q_1 - (\lambda + \mu)p_2 - h_{02} = 0, \\ \mu_2 + \mu q_2 + (\lambda + \mu)p_1 - h_{01} = 0, \\ (\mu_0 - \lambda_0) + (\mu - \lambda)q_0 + h_{21} - h_{12} = 0. \end{cases}$$

Ces formules (36′) et (36″) donnent donc ici

$$(57) \qquad \begin{cases} h_{12} = h_{21} = -q_0. \\ 4p_0 + h_{11} - h_{22} = 0, \qquad 2 + 2h_{00} + h_{11} + h_{22} = 0, \\ q_1 - 2p_2 - h_{02} = 0, \qquad q_2 + 2p_1 - h_{01} = 0. \end{cases}$$

**16. Congruences orthoptiques.** — La congruence $(\mathbf{M}, \mathbf{A}_0)$ sera orthoptique si deux familles de surfaces de cette congruence sont orthogonales, c'est-à-dire si l'on peut satisfaire à

$$|\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}'_1| = 0, \qquad |\tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}'_2| = 0.$$

D'après les formules (54), où $\lambda + \mu = 2$, on aura

$$(58) \qquad |\overline{\omega}_1 \overline{\omega}'_1 - \overline{\omega}_2 \overline{\omega}'_2| = 0 \qquad \text{pour} \qquad \cos 2\alpha = 0,$$

c'est-à-dire suivant le repère primaire, et il restera à satisfaire à

$$(59) \qquad [\overline{\omega}_1 \overline{\omega}'_1 - \overline{\omega}_2 \overline{\omega}'_2] = \{(\mu - \lambda) - 2p_0\} |\omega_0 \omega_1 \omega_2| = 0,$$

donc

$$(60) \qquad \mu - \lambda + 2p_0 = 0, \qquad \text{ou} \qquad p_0 - \cos 2\theta = 0.$$

D'après les formules (25') et (26) des n$^{\text{os}}$ 6 et 7, $\cos 2\theta = -N/2\sigma$, $p_0 = \gamma_{00}/\sigma$, la transcription euclidienne de cette condition est

$$(60') \qquad \Theta \equiv \sigma(p_0 - \cos 2\theta) \equiv \gamma_{00} + \frac{N}{2} = 0 \qquad (p_0 = \overline{p}_0, \ \gamma_{00} = \overline{\gamma}_{00}),$$

comme nous l'avons donnée ailleurs (*Congruences*).

**17. Systèmes triple-orthogonaux.** — Un système triple-orthogonal est équivalent à la donnée d'une congruence à la fois normale et orthoptique, donc défini par les conditions

$$(61) \qquad \lambda = \mu = 1, \qquad p_0 = 0.$$

Dans les formules (57), ceci entraîne

$$(62) \qquad h_{11} = h_{22} = -(1 - h_{00}).$$

Les simplifications apportées par (57) et (62) dans la formule (46) donnent

$$\omega_{01}\omega_2 - \omega_{02}\omega_1 = \omega_2^2 - \omega_1^2 = \Phi_0 = \Gamma_0,$$
$$\eta_1 \omega_{02} - \eta_2 \omega_{01} = \eta_1 \omega_1 - \eta_2 \omega_2 = (h_{10}\omega_1 - h_{20}\omega_2)\omega_0 + (1 + h_{00})\Gamma_0,$$
$$\eta_2 \omega_1 - \eta_1 \omega_2 = (h_{20}\omega_1 - h_{10}\omega_2)\omega_0 + q_0 \Gamma_0,$$

d'où l'expression de la sphère $\mathfrak{B}_0$.

$$(63) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{B}_0 = \omega_0 \{ (h_{10}\omega_1 - h_{20}\omega_2)\mathbf{M} + (h_{20}\omega_1 - h_{10}\omega_2)\mathbf{A}_0 \} \\ + \Gamma_0 \{ (1 + h_{00})\mathbf{M} + q_0 \mathbf{A}_0 + \mathbf{P} \}. \end{aligned}$$

Cette sphère est indéterminée, c'est-à-dire $\Im \mathbf{B}_0 = 0$ ou $[d\mathcal{C}_0 . d\mathcal{C}_0] = 0$, pour $\omega_1 = \omega_2 = 0$, le long des courbes de la congruence $(\mathbf{M}, \mathbf{A}_0)$ : en outre ici, pour $\omega_0 = 0$, $\Gamma_0 = 0$, donc pour les déplacements suivant les lignes de courbure des surfaces $(\mathbf{M}, \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2)$, c'est-à-dire pour les congruences $(\mathbf{M}, \overline{\mathbf{A}}_1)$ et $(\mathbf{M}, \overline{\mathbf{A}}_2)$.

Pour $\omega_0 = 0$, la position de la sphère $\mathbf{B}_0$ étant donnée par

$$(64) \qquad \mathbf{B}_0 = \xi \{ (1 - h_{00}) \mathbf{M} - q_0 \mathbf{A}_0 - \mathbf{P} \},$$

où $\xi$ est un facteur indépendant du déplacement $d$, cette position est fonction de $\mathbf{M}$. Comme

$$(65) \qquad \mathbf{B}_0 \mid \mathcal{C}_0 = 0, \qquad \mathbf{B}_0 \mid d\mathcal{C}_0 = 0,$$

on retrouve ici une propriété essentielle des systèmes cycliques formés par les cercles $\mathcal{C}_0$ pour chaque surface $(\mathbf{M}, \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2)$ d'un système triple-orthogonal.

Pour une congruence de cercles, la sphère osculatrice est indéterminée, donc $\mathbf{S}_0 = 0$, ou $h_{10} = h_{20} = 0$ d'après (28); dans la formule générale (46), comme dans (63) pour un système triple-orthogonal, le coefficient de $\omega_0$ disparaît : *à un système cyclique correspond une congruence de sphères* $\mathbf{B}_0$ (cf. *Systèmes cycliques*).

**18. Autres systèmes particuliers.** — Le cas précédent est-il le seul où les formes de Monge, coefficients de $\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{P}$ dans la partie indépendante de $\omega_0$ pour la forme générale (46) de $\Im \mathbf{B}_0$, soient proportionnelles [1]? On obtient pour cela les conditions : soit $\lambda = \mu = 0$, soit

$$(66) \qquad h_{11} - h_{22} = 0, \qquad \lambda h_{21} - \mu h_{12} = 0,$$

ou, d'après (36′) et (36″),

$$(66') \qquad (\lambda + \mu) p_0 = 0, \qquad (\lambda + \mu)(\lambda_0 - \mu_0) = 0.$$

Pour $\lambda + \mu = 2$, ceci donne $p_0 = 0$ et $\theta_0 = 0$, c'est-à-dire $\theta$ constant le long des lignes $(\mathbf{M}, \mathbf{A}_0)$. Or les formules (54)

(1) Ces trois formes quadratiques peuvent aussi avoir en facteur une même forme de Pfaff; le cas est moins intéressant.

donnent

$$(67)\qquad [\tilde\omega_2\tilde\omega'_2] = (\cos 2\alpha - \cos 2\theta - p_0 - \alpha_0)[\omega_0\omega_1\omega_2].$$

donc pour $\alpha = \pm\theta$, $[\omega_2^{\mathrm{I}}\omega_2^{\mathrm{I}'}] = 0$, $[\omega_2^{\mathrm{II}}\omega_2^{\mathrm{II}'}] = 0$; *la congruence* $(\mathbf{M}, \mathbf{A}_0)$ *est capable de deux familles de surfaces, décrites par les lignes de courbure de chaque système, se coupant sous angle permanent le long de chaque ligne de la congruence.* L'étude d'une telle congruence nécessite un examen plus complet des conditions d'intégrabilité; un cas particulier, $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$, est celui des lignes de courbure confondues.

On obtient d'autres congruences intéressantes pour $p_1 = p_2 = 0$. D'après les formules (27) du n° 8, les cercles osculateurs $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de $(\mathbf{M}, \mathbf{A}_1)$ et $(\mathbf{M}, \mathbf{A}_2)$ recoupent alors en $\mathbf{P}$ le cercle osculateur $\mathcal{C}_0$. Nous donnerons le nom de *système ternaire* à ce système de congruences à symétrie remarquable, sans en poursuivre plus l'étude.

Nous avons signalé [1] le cas des congruences de cercles

$$h_{10} = h_{20} = 0;$$

celui des congruences normales à $\infty^1$ sphères, soit $[\omega_0\omega'_0] = 0$ et $\Gamma_0 = 0$ pour $\omega_0 = 0$, appartient au cas $\lambda + \mu = 0$ précédemment réservé.

### VI. — Les congruences isotropes.

**19.** Nous avions, au n° 5, supposé $\lambda + \mu \neq 0$; poursuivons maintenant, pour le cas $\lambda + \mu = 0$, la recherche d'un repère intrinsèque. Pour $\mu = -\lambda$, on pourra, si $\lambda \neq 0$, satisfaire à $\delta\lambda = -\lambda g$ (notations du n° 5) par le choix $\lambda = 1$ (ou $\lambda - \mu = 2$), donc

$$(68)\qquad \omega_{01} = \omega_2, \qquad \omega_{02} = -\omega_1.$$

d'où $g = 0$, $\chi$ forme invariante; il reste à fixer la forme de Pfaff $\omega_{12}$, en annulant $e_{12}$; pour les variations $d$ et $\delta$, relative au

---

(1) Sans nous y arrêter, une étude très complète étant faite dans l' Ouvrage de M. Coolidge (*loc. cit.*): les *congruences pseudo-normales de cercles* y sont caractérisées par $\tilde\omega'_{12} \equiv 0$, mais pour des repères pour lesquels $d\tilde{\mathbf{A}}_1 = d\tilde{\mathbf{A}}_2 = 0$ pour $\omega_1 = \omega_2 = 0$, donc $\tilde p_0 = 0$, et qui ne coïncident avec les nôtres (variés par rotation) qu'en réalisant cette condition.

paramètre auxiliaire de rotation $\alpha$, les conditions d'intégrabilité donnent

$$(69)\qquad \delta\omega_1 = e_{12}\omega_2, \qquad \delta\omega_2 = -e_{12}\omega_1, \qquad \delta\eta_1 = e_{12}\eta_2, \qquad \delta\eta_2 = -e_{12}\eta_1,$$

ou, avec $\eta_1 = \Sigma h_{1i}\omega_i$, $\eta_2 = \Sigma h_{2i}\omega_i$ comme précédemment

$$(69')\quad \left\{\begin{array}{lll} \delta h_{10} = e_{12} h_{20}, & \delta h_{11} = e_{12}(h_{12} + h_{21}), & \delta h_{12} = -e_{12}(h_{11} - h_{22}) \\ \delta h_{20} = -e_{12} h_{10}, & \delta h_{21} = -e_{12}(h_{11} - h_{22}), & \delta h_{22} = -e_{12}(h_{12} + h_{21}), \end{array}\right.$$

qui sont les formules de rotation du n° **9**, du type (33), écrites sous forme infinitésimale, avec $e_{12} = \delta\alpha$; $h_{10}^2 + h_{20}^2$ est invariant, et l'on pourra en général prendre $h_{10} = 0$, c'est-à-dire $\mathbf{A}_1$ suivant la sphère osculatrice $\mathbf{S}_0$ de $(\mathbf{M}, \mathbf{A}_0)$. Alors $e_{12} = 0$, et la particularisation du repère est achevée.

Avec ce repère *osculateur*, on pourra, comme au Chapitre III, établir la correspondance avec les formules de la géométrie euclidienne; gardons les notations de ce chapitre, en leur prêtant toutefois un sens différent; les formules (25′) seront remplacées par

$$(70)\quad \left\{\begin{array}{llll} \gamma_{12} + \gamma_{21} = 0, & x_0 = \dfrac{\gamma_{21} - \gamma_{12}}{2} = \mathrm{H}, & x_1 = -\gamma_{20}, & x_2 = \gamma_{10}, \\ \gamma_{11} - \gamma_{22} = 0, & \sigma = -\dfrac{\gamma_{11} + \gamma_{22}}{2} = -\dfrac{\mathrm{N}}{2}. & & \end{array}\right.$$

On peut considérer que $\operatorname{tang}^2\theta = -1$, c'est-à-dire que *les lignes de courbure sont isotropes, les asymptotiques conformes indéterminées* ($\Psi_0 \equiv 0$). Nous rappelons en outre

$$(71)\qquad \lambda = -\mu = 1, \qquad h_{10} = 0, \qquad \text{ou} \qquad |\omega_1 \omega'_{12}| = 0.$$

Les formules (26) subsistent avec la nouvelle signification de $\sigma$, mais les conditions d'intégrabilité (36), c'est-à-dire les formules (36′) et (36″), sont traduites maintenant par

$$(72)\qquad \left\{\begin{array}{ll} h_{11} = h_{22} = 1 - h_{00}, & h_{12} = -h_{21} = -q_0, \\ h_{01} = q_2, & h_{02} = q_1. \end{array}\right.$$

**20.** Le soin que nous avons pris de conserver $\lambda$ et $\mu$ dans les conditions d'intégrabilité (34) et (35) nous permet de continuer à employer ces formules. On remarque que désormais

$$|\omega_0 \omega'_0| = (\mu - \lambda)\,|\omega_0 \omega_1 \omega_2| = -2\,|\omega_0 \omega_1 \omega_2|$$

donc que, sauf le cas exclu $\lambda = \mu = 0$, il y a incompatibilité entre les congruences normales et les congruences isotropes. Ces deux cas présentent d'ailleurs une sorte d'opposition avec les conditions $\lambda + \mu = 2$, $\lambda - \mu = 0$ pour le premier, $\lambda - \mu = 2$, $\lambda + \mu = 0$ pour le second, et des propriétés complémentaires.

Le repère osculateur reste un repère asymptotique ($\sigma$ étant pris avec sa nouvelle valeur), et c'est à lui que se rapportent maintenant les lettres dépourvues d'autres symboles; les relations déjà écrites donnent pour un repère varié par rotation

$$(73) \qquad \begin{cases} [\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}'_2 + \tilde{\omega}_2\tilde{\omega}'_1] \equiv 0, \qquad [\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}'_1 - \tilde{\omega}_2\tilde{\omega}'_2] \equiv 0, \\ [\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}'_1 + \tilde{\omega}_2\tilde{\omega}'_2] = 2(\tilde{p}_0 - 1)[\omega_0\omega_1\omega_2]. \end{cases}$$

On aura les surfaces de la congruence ($\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_0$) en assujettissant $\alpha$ à

$$(74) \qquad \tilde{p}_0 = p_0 - \alpha_0 = 1;$$

*ces surfaces se coupent sous angles permanents le long des lignes* ($\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_0$). Affectons maintenant d'un trait les éléments relatifs aux repères satisfaisant à la condition précédente; on aura, d'après $(26)_1$ (nouveau type) et (70), les formules euclidiennes

$$(74') \qquad \frac{N}{2} = \bar{\gamma}_{11} = \bar{\gamma}_{22} = -\bar{\gamma}_{00}.$$

Il est avantageux d'étudier les congruences isotropes (en particulier) avec un repère *isotrope* constitué de $\mathbf{M}$, $\mathbf{F}^{\mathrm{I}} = \mathbf{A}_1 - \iota\mathbf{A}_2$, $\mathbf{F}^{\mathrm{II}} = \mathbf{A}_1 + \iota\mathbf{A}_2$, $\mathbf{P}$, et la sphère $\mathbf{A}_0$ portant ces quatre points; $\mathbf{F}^{\mathrm{I}}$ et $\mathbf{F}^{\mathrm{II}}$, conjugués complexes pour une congruence réelle, sont les foyers du cercle $\mathcal{C}_0$, qui les représente au sens de Laguerre. Par une rotation du repère, on a les modifications

$$\tilde{\mathbf{F}}^{\mathrm{I}} = e^{\iota\alpha}\mathbf{F}^{\mathrm{I}}, \qquad \tilde{\mathbf{F}}^{\mathrm{II}} = e^{-\iota\alpha}\mathbf{F}^{\mathrm{II}}.$$

Nous écrirons encore $\mathbf{F}$ pour représenter $\mathbf{F}^{\mathrm{I}}$ et $\mathbf{F}^{\mathrm{II}}$ (par changement de $\iota$ en $-\iota$), $\varphi = \mathbf{F} \,|\, d\mathbf{M}$. On vérifie aussitôt que les deux identités (73) (première ligne), caractéristiques des congruences isotropes, sont équivalentes à

$$(73') \qquad [\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}'] \equiv 0 \qquad (\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}^{\mathrm{I}}, \tilde{\varphi}^{\mathrm{II}})$$

traduisant l'existence de deux familles analytiques (chacune a un paramètre complexe) de développables isotropes conjuguées, qui découpent alors la congruence $(\mathbf{M}, \mathbf{A}_0)$ (cf. *Congruences*). Le déplacement des foyers $\mathbf{F}(=\mathbf{F}^{\text{I}}, \mathbf{F}^{\text{II}})$ est d'ailleurs donné par

$$d\mathbf{F} = -(\eta_1 + \varepsilon\eta_2)\mathbf{M} + \varepsilon\varphi(\mathbf{A}_0 + \varepsilon\mathbf{P}) - \varepsilon\omega_{12}\mathbf{F},$$
$$\eta_1 + \varepsilon\eta_2 = \varepsilon h_{20}\omega_0 + (1 - h_{00} + \varepsilon q_0)\varphi \qquad (h_{10} = 0)$$

$(\varepsilon = \mp\iota, \ -\iota$ pour $\mathbf{F}^{\text{I}}$, $+\iota$ pour $\mathbf{F}^{\text{II}})$, donc

$$(75)\quad d\mathbf{F} = -\varepsilon(h_{20}\omega_0\mathbf{M} + \omega_{12}\mathbf{F}) + \varphi\{(h_{00} - 1 - \varepsilon q_0)\mathbf{M} + \varepsilon\mathbf{A}_0 - \mathbf{P}\}.$$

Pour $\omega_1 = \omega_2 = 0$, chaque foyer $\mathbf{F}$ décrit, pour chaque courbe $(\mathbf{M}, \mathbf{A}_0)$, l'arête de rebroussement isotrope d'une des développables, d'après $(d\mathbf{F})^2 = 0$.

D'autre part, l'expression de la sphère $\mathfrak{S}\mathbf{B}_0$ est

$$(76)\quad \mathfrak{S}\mathbf{B}_0 = -h_{20}\omega_0(-\omega_2\mathbf{M} + \omega_1\mathbf{A}_0) + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\{(h_{00} - 1)\mathbf{M} - q_0\mathbf{A}_0 - \mathbf{P}\}$$

et, pour $\omega_0 = 0$, $\mathfrak{S}\mathbf{B}_0 = 0$ le long des lignes de courbure isotropes $(\Gamma_0 \equiv \omega_1^2 + \omega_2^2)$.

**21.** Pour les *congruences isotropes de cercles*, $h_{10} = h_{20} = 0$, on ne peut terminer la particularisation de notre repère intrinsèque mobile, les quantités $h_{11}$, $h_{12}$, $h_{21}$, $h_{22}$ étant des invariants d'après (69′) et (72) : il reste la possibilité d'une rotation arbitraire autour de $\mathcal{C}_0$, $\omega'_{12}$ étant déterminé, mais $\omega_{12}$ ne l'étant qu'à une différentielle arbitraire près.

D'après (75), à chaque cercle $\mathcal{C}_0$ correspondent ses foyers $\mathbf{F}$, et la congruence isotrope des cercles représente les deux courbes conjuguées complexes auxquelles appartiennent ces foyers, le déplacement de chacun d'eux se faisant dans la direction orthogonale à la sphère

$$(77)\qquad \mathbf{D} = (h_{00} - 1 - \varepsilon q_0)\mathbf{M} + \varepsilon\mathbf{A}_0 - \mathbf{P} \qquad (\mathbf{D} = \mathbf{D}^{\text{I}}, \mathbf{D}^{\text{II}}).$$

D'après (76), la sphère $\mathbf{B}_0$ a alors une expression de forme

$$(78)\qquad \mathbf{B}_0 = \xi\{(h_{00} - 1)\mathbf{M} + q_0\mathbf{A}_0 + \mathbf{P}\},$$

$\xi$ étant fonction de $\mathbf{M}$, comme dans le cas des systèmes cycliques, et les sphères $\mathbf{B}_0$ appartiennent à une congruence (comme pour toutes les congruences de cercles avec la propriété indiquée au n° **18**); $\mathbf{B}_0$ est naturellement orthogonale aux sphères $\mathbf{D}$.

Les courbes ($\mathbf{F}$) sont isotropes pour

$$\mathbf{D}^2 = 1 - 2h_{00} + 2\varepsilon q_0 = 0, \tag{79}$$

donc $h_{00} = \frac{1}{2}$, $q_0 = 0$; les formules (72) donnent alors

$$h_{00} = h_{11} = h_{22} = \frac{1}{2}, \qquad h_{12} = h_{21} = q_0 = 0, \qquad [\widetilde{\omega}_1 \widetilde{\omega}'_2 - \widetilde{\omega}_2 \widetilde{\omega}'_1] \equiv 0, \tag{80}$$

et l'on a maintenant

$$\left\{\begin{array}{ll} \chi = q_1\omega_1 + q_2\omega_2, & \tau_{10} = \frac{1}{2}\omega_0 + q_2\omega_1 + q_1\omega_2, \\ \tau_{11} = \frac{1}{2}\omega_1, & \tau_{12} = \frac{1}{2}\omega_2, \end{array}\right. \tag{81}$$

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{2}\mathbf{M} + \varepsilon\mathbf{A}_0 - \mathbf{P}, \qquad \mathbf{B}_0 = \pm i\left(-\frac{1}{2}\mathbf{M} - \mathbf{P}\right). \tag{82}$$

Le déplacement de $\mathbf{B}_0$ est donné, à un facteur près, par

$$d\mathbf{M} - 2\,d\mathbf{P} = \chi(\mathbf{M} + 2\mathbf{P}) - 2(q_2\omega_1 + q_1\omega_2)\mathbf{A}_0;$$

la sphère $\mathbf{B}_0$ reste fixe pour

$$q_1 = q_2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \chi \equiv 0, \qquad \tau_{10} = \frac{1}{2}\omega_0, \qquad d\mathbf{M} = 2\,d\mathbf{P}; \tag{83}$$

c'est le cas d'une *congruence paratactique* de cercles $\mathcal{C}_0$, les foyers $\mathbf{F}$ décrivant deux droites isotropes non coplanaires.

## VII. — Congruences normales et isotropes.

**22.** Il reste à examiner le cas $\lambda = \mu = 0$ laissé de côté au n° **19**, c'est-à-dire

$$\omega_{01} \equiv 0, \qquad \omega_{02} \equiv 0. \tag{84}$$

Les conditions d'intégrabilité traduisant $\omega'_{01} = 0$, $\omega'_{02} = 0$, formules (36) détaillées en (36′) et (36″), donnant ici

$$h_{01} = h_{02} = 0, \qquad h_{11} = h_{22} = -h_{00}, \qquad h_{12} = h_{21} = 0, \tag{85}$$

on voit que

$$\tau_{10} = h_{00}\omega_0, \qquad \tau_{11} = h_{10}\omega_0 - h_{00}\omega_1, \qquad \tau_{12} = h_{20}\omega_0 - h_{00}\omega_2, \tag{86}$$

Les formules de variation du repère

$$
(87)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\delta\omega_0 = \quad g\omega_0. & \delta\omega_1 = \quad g\omega_1 + e_{12}\omega_2, & \delta\omega_2 = \quad g\omega_2 - e_{12}\omega_1,\\
\delta\tau_{10} = - g\tau_{10}. & \delta\tau_{11} = - g\tau_{11} + e_{12}\tau_{12}. & \delta\tau_{12} = - g\tau_{12} - e_{12}\tau_{11}
\end{array}\right.
$$

se réduisent aux conditions

$$
(87')\quad \delta h_{00} = -2gh_{00}. \qquad \delta h_{10} = -2gh_{10} + e_{12}h_{20}, \qquad \delta h_{20} = -2gh_{20} - e_{12}h_{10}.
$$

Le rapport $\dfrac{(h_{10}^2 + h_{20}^2)}{h_{00}^2}$ étant invariant, on pourra prendre en général

$$
(88)\qquad h_{00} = 1, \qquad h_{10} = 0, \qquad h_{20} \text{ invariant};
$$

alors $g = 0$, $e_{12} = 0$, un repère intrinsèque osculateur est obtenu. Il reste les cas

$$
(89)\qquad h_{00} = 0, \qquad h_{10} = 0, \qquad h_{20} = 1
$$

où l'on a encore un repère osculateur; pour

$$
(90)\qquad h_{10} = h_{20} = 0, \qquad h_{00} = \left\{\begin{array}{l} 1\\ 0\end{array}\right.,
$$

*congruences de cercles orthogonaux à un faisceau linéaire de sphères*, le repère peut encore subir une rotation arbitraire, et si $h_{00} = 0$, la masse de $\mathbf{M}$ reste aussi arbitraire.

*Dans tous les cas, la congruence* ($\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_0$) *possède à la fois les propriétés des congruences normales et celles des congruences isotropes;* d'après

$$
(91)\qquad [\omega_0\omega_0'] = 0, \qquad d\mathbf{A}_0 = -\omega_0(h_{00}\mathbf{M} + \mathbf{P})
$$

il s'agit d'une *congruence de trajectoires de* $\infty^1$ *sphères* $\mathbf{A}_0$. Les conditions d'intégrabilité, réduites à

$$
(92)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\omega_0' & = [\chi\omega_0],\\
\omega_1' & = [\chi\omega_1 + \omega_{12}\omega_2],\\
\omega_2' & = [\chi\omega_2 - \omega_{12}\omega_1],\\
\chi' & = h_{20}[\omega_0\omega_2],\\
\tau_{10}' & = - h_{00}[\chi\omega_0],\\
\omega_{12}' & = [2h_{00}.\omega_1\omega_2 + h_{20}.\omega_0\omega_1],\\
\tau_{11}' & = [h_{00}.\chi\omega_1 + \omega_{12}(h_{20}\omega_0 - h_{00}\omega_2)],\\
\tau_{12}' & = [h_{00}.\omega_{12}\omega_1 - \chi(h_{20}\omega_0 - h_{00}\omega_2)],
\end{array}\right.
$$

écrites pour être valables dans les différents cas, sont assez simples pour qu'on en tire aussitôt les renseignements nécessaires aux problèmes particuliers qu'on peut envisager.

La comparaison avec les invariants euclidiens se fera aussi sans peine, comme précédemment, la nouvelle expression de $\sigma$ nécessitant les formules (24) en $\gamma_{i}$; nous ne donnerons pas ces calculs.

Les formes $\Psi_0$, $\Gamma_0$ sont identiquement nulles et l'expression de $\mathbf{B}_0$ est donnée par

$$\mathfrak{I}\mathbf{B}_0 = h_{20}\,\omega_0\,\omega_1\,\mathbf{A}_0,$$

donc $\mathfrak{I}\mathbf{B}_0 = 0$ ou $\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}_0$, suivant les déplacements considérés (et pour $h_{20} \neq 0$).

### VIII. — Indications pour d'autres études.

**23.** Le point $\mathbf{J}$ de $\mathbf{A}_0$, commun aux cercles osculateurs $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ (n° 8), satisfait aux conditions

$$\mathbf{J} \,|\, \mathbf{G}_2 \equiv \mathbf{J} \,|\, (\mathbf{A}_2 - p_1 \mathbf{M}) = 0, \qquad \mathbf{J} \,|\, \mathbf{G}_1 \equiv \mathbf{J} \,|\, (\mathbf{A}_1 - p_2 \mathbf{M}) = 0,$$

d'où son expression

$$\mathbf{J} = -\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)\mathbf{M} - p_2 \mathbf{A}_1 - p_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{P}. \tag{93}$$

Le point $\mathbf{T}$ de $\mathbf{A}_0$, tel que, pour $\omega_0 = 0$, l'on ait $\mathbf{T} \,|\, d\mathbf{A}_0 = 0$, est donné par

$$\zeta \mathbf{T} = -\frac{1}{2}(\lambda^2 h_{01}^2 + \mu^2 h_{02}^2)\mathbf{M} + \lambda\mu(\mu h_{02} \mathbf{A}_1 + \lambda h_{01} \mathbf{A}_2) + \lambda^2 \mu^2 \mathbf{P}, \tag{94}$$

$\zeta$ étant un coefficient numérique. Si la congruence $(\mathbf{M}, \mathbf{A}_0)$ est normale, ce point est le second point de contact avec son enveloppe de la sphère $\mathbf{A}_0$, enveloppant déjà, en $\mathbf{M}$, une surface $(\mathbf{M}, \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2)$; on pourra alors prendre

$$\mathbf{T} = -\frac{1}{2}(h_{01}^2 + h_{02}^2)\mathbf{M} + h_{02} \mathbf{A}_1 + h_{01} \mathbf{A}_2 + \mathbf{P}. \tag{94'}$$

Quand on étudie une seule surface, on est conduit à utiliser, en chaque point de celle-ci, un cercle normal $\mathfrak{N}_0$ portant le pôle $\mathbf{W}$ d'un repère intrinsèque, au lieu du cercle $\mathcal{C}_0$ et du pôle $\mathbf{P}$ que nous employons ici pour le cas général et pour les $\infty^1$ surfaces orthogonales à une congruence normale; *sur la surface*. $\mathbf{W}$ était défini par $\mathbf{W} \mid d\mathbf{M} \equiv 0$. Nous définirons plus généralement un point $\mathbf{W}$ de $\mathbf{A}_0$ par la condition $\mathbf{W} \mid d\mathbf{M} = 0$ pour $\omega_0 = 0$; on trouve alors pour l'expression de ce point

$$(95) \qquad \mathbf{W} = -\frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)\mathbf{M} - q_1\mathbf{A}_1 - q_2\mathbf{A}_2 + \mathbf{P}.$$

Les coefficients de $\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ dans $\mathbf{J}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{W}$ sont liés, dans le cas général, par les deux premières équations (36″) du n° 15, simplifiées en (57) pour le cas d'une congruence normale; on voit que pour

$$(96) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} & q_1 = q_2 = 0, & \mathbf{W} = \mathbf{P}, \\ h_{01} = 2p_1, & h_{02} = 2p_2, & 2\mathbf{J} - \mathbf{T} = (p_1^2 + p_2^2)\mathbf{M} + \mathbf{W}, \end{array} \right.$$

on définit une congruence normale telle que chaque surface orthogonale soit rapportée aux repères intrinsèques choisis comme si elle était seule (cf. *Thèse*, où le repère est d'ailleurs orienté suivant les lignes de courbure). On a alors $[\chi\omega_0] = 0$, donc $\omega'_0 \equiv 0$ (¹).

**24.** Le but des remarques précédentes était de préciser la signification de certains invariants ou de relations remarquables. Nous voulons un peu insister aussi sur un principe de classification des congruences: une fois le repère fixé, les éléments géométriques invariants sont fonctions de $\mathbf{M}$, donc dépendent en général de trois paramètres; on obtiendra des congruences particulières en exprimant que certains éléments, ou seulement leurs positions, dépendent d'un nombre moindre de paramètres.

Soit par exemple $\mathbf{V}$ une sphère (ou point) dont le déplacement, dans ces conditions, est donné par une expression de la forme

$$d\mathbf{V} = \psi\mathbf{M} + \Sigma\psi_i\mathbf{A}_i + \overline{\psi}\mathbf{P} \qquad (i = 0, 1, 2),$$

les $\psi$, $\psi_i$, $\overline{\psi}$ étant des formes de Pfaff; si la norme de $\mathbf{V}$ est constante, $\mathbf{V} \mid d\mathbf{V} = 0$, et si cette constante est différente de zéro, $d\mathbf{V}$ est privé de terme en $\mathbf{V}$; pour une sphère non normée, ou une sphère-point, le terme en $\mathbf{V}$ existe généralement.

---

(¹) Je pense revenir sur ce sujet pour le traiter plus en détail.

Si $\mathbf{V}$ est un élément fixe, $d\mathbf{V} = 0$ ou $\psi = \psi_i = \bar{\psi} = 0$ : si $\mathbf{V}$ est seulement de position fixe, on doit traduire $[d\mathbf{V} . \mathbf{V}] = 0$.

Si $\mathbf{V}$ dépend d'un seul paramètre, $d$ et $\delta$ étant deux symboles de différentiation arbitraires, on a $[\delta\mathbf{V} . d\mathbf{V}] = 0$, c'est-à-dire que la condition nécessaire et suffisante est l'annulation de tous les produits extérieurs deux à deux des formes de Pfaff $\psi$, $\psi_i$, $\bar{\psi}$ ; si seule la position de $\mathbf{V}$ ne dépend que d'un paramètre, les conditions sont fournies par $[\delta\mathbf{V} . d\mathbf{V} . \mathbf{V}] = 0$.

De même, si $\mathbf{V}$ dépend de deux paramètres, pour des symboles $d$, $\delta$, $\partial$ de différentiations arbitraires, on aura $[\partial\mathbf{V} . \delta\mathbf{V} . d\mathbf{V}] = 0$, soit l'annulation de tous les produits extérieurs trois à trois de $\psi$, $\psi_i$, $\bar{\psi}$ ; $[\partial\mathbf{V} . \delta\mathbf{V} . d\mathbf{V} . \mathbf{V}] = 0$ traduit que la position de $\mathbf{V}$ dépend seulement de deux paramètres.

Appliquons ces remarques aux cas simples de $\mathbf{A}_0$ et $\mathbf{P}$ ; $\mathbf{A}_0$ ne peut être fixe si $\mathbf{M}$ dépend de trois paramètres ; les conditions

$$[\delta\mathbf{A}_0 . d\mathbf{A}_0] = 0,$$

ou

$$[\omega_0 \eta_0] = \lambda[\omega_0 \omega_2] = \mu[\omega_0 \omega_1] = \lambda[\eta_0 \omega_2] = \mu[\eta_0 \omega_1] = \lambda\mu[\omega_1 \omega_2] = 0,$$

sont satisfaites pour $\lambda = \mu = 0$, $h_{01} = h_{02} = 0$ ; l'on retrouve le cas du n° 22, soit une congruence normale à $\infty^1$ sphères $\mathbf{A}_0$.

La sphère $\mathbf{A}_0$ dépend de deux paramètres pour

$$[\partial\mathbf{A}_0 . \delta\mathbf{A}_0 . d\mathbf{A}_0] = 0$$

ou

$$\lambda\mu[\eta_0 \omega_1 \omega_2] = \lambda\mu[\omega_0 \omega_1 \omega_2] = \lambda[\eta_0 \omega_0 \omega_2] = \mu[\eta_0 \omega_0 \omega_1] = 0,$$

soit (en dehors de $\lambda = \mu = 0$ déjà traité) $\lambda = 0$, $h_{02} = 0$, ou $\mu = 0$, $h_{01} = 0$ ; les formules (36″) du n° 15 montrent qu'alors $p_2 = 0$, ou $p_1 = 0$ ; on connaît la signification géométrique de ces conditions [1].

---

[1] Pour $\lambda = 0$, $h_{02} = 0$, par exemple, les lignes $(\mathbf{M}, \mathbf{A}_2)$ sont lignes de courbure doubles de $(\mathbf{M}, \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2)$ ; la sphère $\mathbf{A}_1$ contient le cercle osculateur $\mathcal{C}_2$, $\mathbf{A}_0$ touche son enveloppe aux points

$$-\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2)\mathbf{M} \pm t_1 \mathbf{A}_1 + t_2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{P}, \qquad \text{avec} \qquad 2t_2 = h_{01}, \qquad t_2^1 + t_2^2 = 2h_{00},$$

inverses par rapport à $\mathcal{C}_2$.

Pour **P**. les cas suivants sont à considérer : $\eta_i = \chi = 0$, **P** fixe, ou $\eta_i = 0$, $\chi \neq 0$, **P** de position fixe, cas faciles à étudier;

$$|\eta_i \eta_j| = 0, \qquad |\eta_k \chi| = 0,$$

ou $[\eta_i \eta_j] = 0$ seulement, selon que **P**, ou sa position, dépend d'un paramètre: $[\eta_0 \eta_1 \eta_2] = 0$, $[\eta_i \eta_j \chi] = 0$, ou $[\eta_0 \eta_1 \eta_2] = 0$, pour **P**, ou sa position, dépendant de deux paramètres. Nous ne poursuivrons pas ces études.

Il est plus difficile d'exprimer de façon invariante les conditions analogues pour un élément autre qu'une sphère. Pour le cercle $\mathcal{C}_0$ en particulier, si la variation est à deux paramètres, la congruence (**M**, $\mathbf{A}_0$) obtenue est nécessairement celle de ces cercles $\mathcal{C}_0$; on est en effet amené à annuler les produits extérieurs trois à trois des formes $\omega_1$, $\omega_2$, $\eta_1$, $\eta_2$, d'où les conditions nécessaires et suffisantes $h_{10} = h_{20} = 0$.

En dehors de ce cas, les cercles $\mathcal{C}_0$ appartiennent à un complexe, et il serait intéressant de reprendre l'étude des congruences de courbes en prenant pour élément générateur non plus le point **M**, mais le cercle osculateur $\mathcal{C}_0$ (ou encore ses foyers **F**).

**25.** Un procédé d'étude un peu différent consisterait à employer, au lieu d'un repère pentasphérique, un repère euclidien $\mathbf{m}(\sigma \mathbf{a}_i)$, ou *simili-repère;* ce repère étant normé avec la valeur de $\sigma$ calculée dans les divers cas rencontrés, ce procédé ramène l'étude du système $\omega_0 = 0$, $\omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 = 0$ (note du n° 7) à celui des formes $\sigma\omega_0$, $\sigma^2(\omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)$ normées; cette méthode diffère peu de celle qui consiste à étudier les formes $\rho\omega_0$, $\rho^2(\omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)$, $\rho$ étant un facteur arbitraire, et former ensuite les invariants indépendants de $\rho$, par élimination de ce facteur et de ses dérivées [1]. Nous n'avons pas cru utile de développer ici les méthodes de dérivation géométrique par rapport au point variable **M**; comme en géométrie projective (cf. *Congruences*), quand la masse de cet élément variable n'est pas fixée, cela crée des difficultés et néces-

---

[1] On retrouvera ces méthodes dans nos Mémoires : *Équivalences de formes et d'équations différentielles par les transformations à variables séparées* (L'*Enseignement mathématique*, t. XXVII, n°s 4-5-6, 1928). — *Application à la représentation conforme des transformations à variables séparées* (L'*Enseignement mathématique*, t. XXX, n°s 1-2-3, 1931).

siterait alors l'établissement de procédés généraux de calcul [1]. Quand la masse $\sigma$ de $\mathbf{M}$ est fixée de façon invariante, et les formes de Pfaff $\chi$, $\omega_{ij}$, $\eta_i$ ramenées à des formes linéaires en $\omega_i$, il n'y a par contre aucune différence sensible à opérer sur ces formes et les $\omega_i$ ou, dans le domaine différentiel, à opérer sur un système linéaire de sphères avec la base $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ ; les combinaisons sont les mêmes qu'en calcul vectoriel, avec trois vecteurs de base unitaires et rectangulaires, et nous nous contentons, par exemple, de signaler l'analogie complète de formes comme

$$\chi' = \Sigma[\eta_i \omega_i] \qquad \text{et} \qquad \operatorname{rot}\mathbf{Q} = \Sigma(\mathbf{H}_i \wedge \mathbf{A}_i).$$

en empruntant les notations du calcul vectoriel; répéter, sous une autre forme, pour le calcul pfaftien, les opérations vectorielles ou tensorielles, n'était du reste pas nécessaire pour l'objet limité de cette étude.

---

(1) Certaines remarques sur ces procédés de calcul sont présentées dans notre *Thèse*.