BULLETIN DE LA S. M. F.

D. ANDRÉ

Théorème nouveau sur les factorielles

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 84-86
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__84_1>

Théorème nouveau sur les factorielles; par M. Désiré André.

(Séance du 5 février 1873)

1. A étant un nombre entier et positif, on sait qu'on appelle factorielle de A, et que l'on désigne par A!, le produit 1.2.3...A des A premiers nombres entiers.

On sait aussi que, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des entiers positifs quelconques dont la somme est N, le quotient

$$\frac{N!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots\alpha_n!}$$

est un nombre entier : c'est un théorème connu, que l'on peut démontrer soit directement, en prouvant que tout facteur premier qui entre au dénominateur entre au numérateur au moins autant de fois, soit indirectement, en remarquant que cette expression représente le nombre de certaines permutations avec répétitions de N lettres, nombre qui, par sa nature, est forcément entier.

Nous nous sommes demandé s'il ne serait pas possible de trouver, dans certains cas, un nombre moindre que N dont la factorielle fût divisible par le produit des factorielles de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. C'est le théorème auquel nous a conduit cette recherche que nous nous proposons de faire connaître.

2. Mais ce théorème repose sur un mode de classification des systèmes de nombres entiers qui nous paraît tout à fait nouveau, auquel nous avons été conduit par cette même recherche, et que nous devons exposer d'abord.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ n nombres entiers quelconques. Il existe des facteurs entiers, supérieurs à l'unité, qui sont communs à deux de ces nombres ; d'autres qui sont communs à trois, à quatre, et ainsi de suite. Nous appellerons facteurs le plus communs ceux qui sont communs au plus grand nombre possible des entiers α, et nous dirons que l'ensemble de ces entiers α forme un système premier d'ordre k, s'il y a k de ces entiers qui ne soient pas divisibles par l'un des facteurs le plus communs.

D'après cette définition, si les n nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ne sont pas premiers entre eux, ils forment un système premier d'ordre 0; s'ils sont premiers entre eux deux à deux, ils forment un système premier d'ordre $n-1$; s'ils sont premiers b à b, expression inusitée, mais dont on voit immédiatement le sens, ils forment un système premier d'ordre $n-b+1$; enfin, s'ils se réduisent tous à l'unité, c'est un système premier d'ordre n.

3. Cela posé, voici le théorème annoncé :

Théorème. — *Si les nombres entiers* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *dont la somme est* N, *forment un système premier d'ordre k, le quotient*

$$\frac{(N-k)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots\alpha_n!}$$

est un nombre entier.

Nous le démontrerons en prouvant que tout nombre premier p, qui entre comme facteur au dénominateur, entre comme facteur au numérateur un nombre de fois au moins égal.

Supposons que ce nombre premier p entre comme facteur x fois au dénominateur, y fois au numérateur.

Nous avons, d'après une formule bien connue,

$$x=\sum_{s=1}^{s=\infty}\sum_{t=1}^{t=n}\left(\frac{\alpha_t}{p^s}\right),$$

$$y=\sum_{s=1}^{s=\infty}\left(\frac{N-k}{p^s}\right).$$

Il suffit de prouver que l'on a

$$y \geqslant x.$$

Or cette inégalité sera évidemment démontrée, si l'on démontre l'inégalité suivante

$$\left(\frac{N-k}{p^s}\right) \geqslant \sum_{t=1}^{t=n}\left(\frac{\alpha_t}{p^s}\right);$$

et, *a fortiori*, si l'on démontre celle-ci

$$\left(\frac{N-k}{d}\right) \geqslant \sum_{t=1}^{t=n}\left(\frac{\alpha_t}{d}\right),$$

dans laquelle d représente un nombre entier quelconque supérieur à l'unité.

Pour démontrer cette dernière inégalité, divisons par d chacun des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$: soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les quotients, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les restes. Il résulte de ces notations :

$$N = d\sum_{t=1}^{t=n} q_t + \sum_{t=1}^{t=n} r_t,$$

et

$$\sum_{t=1}^{t=n}\left(\frac{\alpha_t}{d}\right) = \sum_{t=1}^{t=n} q_t.$$

Donc la dernière inégalité, celle qu'il suffit d'établir, revient à

$$\left(\frac{d\sum\limits_{t=1}^{t=n} q_t + \sum\limits_{t=1}^{t=n} r_t - k}{d}\right) \geqslant \sum_{t=1}^{t=n} q_t.$$

Or les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ forment, par hypothèse, un système premier d'ordre k ; donc, parmi les restes $r_1, r_2, \ldots, r_n$, k au moins sont différents de 0 ; donc $\sum\limits_{t=1}^{t=n} r_t$ est au moins égal à k ; donc le premier membre de l'inégalité est au moins égal à $\sum\limits_{t=1}^{t=n} q_t$. Donc l'inégalité considérée est démontrée, ainsi que le théorème.

4. Nous terminerons par deux remarques fort courtes.

Premièrement, lorsque tous les entiers α sont égaux à l'unité, leur nombre est N, ils forment un système premier d'ordre N, et le théorème donne pour numérateur la factorielle de N — N, c'est-à-dire la factorielle de zéro, ce qui n'a pas de sens. Pour lever cette difficulté, il suffit de convenir, comme on le fait d'ailleurs généralement, que l'on regardera la factorielle de zéro comme égale à l'unité. Le quotient devient par suite $\frac{1}{1}$, ce qui est bien un nombre entier.

Secondement, le théorème qui précède est très-général. On en pourrait déduire facilement, comme cas particuliers, sinon la totalité, au moins la plus grande partie des théorèmes relatifs à la divisibilité, par certains nombres, des coefficients, soit de la formule du binôme, soit du développement de la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un polynôme quelconque.