BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE COISSARD

Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du troisième ordre, à deux variables indépendantes

Bulletin de la S. M. F., tome 61 (1933), p. 141-157
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1933__61__141_0>

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TROISIÈME ORDRE, A DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES ;

PAR M. MAURICE COISSARD.

Il s'agit ici des équations du troisième ordre, non linéaires ($\mathcal{E}$), qui ont un système triple de caractéristiques possédant le nombre maximum d'invariants. Nous montrerons que leurs surfaces intégrales sont engendrées par des multiplicités caractéristiques de Cauchy dépendant de sept constantes arbitraires, et nous verrons que l'on peut, sans intégrations supplémentaires, associer ces dernières de manière à constituer les intégrales. Nous établirons de plus que les ($\mathcal{E}$) sont les seules équations du troisième ordre dont les trois systèmes de caractéristiques sont confondus, (E), non linéaires, qui soient intégrables par la méthode de Darboux (1). On voit les analogies avec les équations du second ordre, dites de M. Goursat (2). Dans tout ce qui suit, nous avons utilisé la méthode des faisceaux de transformations infinitésimales, due à M. Vessiot et développée par lui dans le *Bulletin* (t. 52, 1924, p. 336-395).

1. Par hypothèse l'équation (E) $\alpha = \varphi(x, y, z, p, q, r, s, t, \beta, \gamma, \delta)$ est telle que l'équation en μ : $\mu^3 + \mu^2 \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} - \mu \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} + \frac{\partial\varphi}{\partial\delta} = 0$ ait une racine triple m. La fonction φ est donc solution de l'équation aux différentielles totales

$$d\varphi + 3m\,d\beta + 3m^2\,d\gamma + m^3\,d\delta = 0. \tag{1}$$

(1) Les points essentiels de cette étude ont fait l'objet d'une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 190, 1930, p. 2098.

(2) E. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre*, t. 1, p. 205, et t. 2, p. 164-171.

Les conditions d'intégrabilité sont

$$(2)\qquad \frac{\partial m}{\partial \gamma} - 2m\frac{\partial m}{\partial \beta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial m}{\partial \delta} - m^2\frac{\partial m}{\partial \beta} = 0.$$

Si l'on pose $\pi = \varphi + 3m\beta + 3m^2\gamma + m^3\delta$, (1) devient

$$(1')\qquad d\pi = 3\,dm(\beta + 2m\gamma + m^2\delta).$$

Alors, ou bien $dm = 0$, (E) est linéaire, et est de la forme $\alpha + 3m\beta + 3m^2\gamma + m^3\delta + n = 0$ où m et n sont deux fonctions arbitraires de $x, y, \ldots s, t$; ou bien dm est différent de zéro et (1′) s'intègre en posant $\pi + 3\psi = 0$; $\beta + 2m\gamma + m^2\delta + \frac{\partial\psi}{\partial m} = 0$, où ψ est une fonction arbitraire de $x, y, z, \ldots, s, t, m$. (E) s'obtient donc alors en éliminant m entre les deux équations

$$\alpha + 3m\beta + 3m^2\gamma + m^3\delta + 3\psi = 0,$$
$$\beta + 2m\gamma + m^2\delta + \frac{\partial\psi}{\partial m} = 0.$$

2. L'intégration de l'équation (E) revient à celle du faisceau (F) :

$$(\mathrm{F})\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X} &= \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + r\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial q} + \varphi\frac{\partial f}{\partial r} + \beta\frac{\partial f}{\partial s} + \gamma\frac{\partial f}{\partial t},\\ \mathrm{Y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q} + \beta\frac{\partial f}{\partial z} + \gamma\frac{\partial f}{\partial s} + \delta\frac{\partial f}{\partial t};\\ \mathrm{B} &= \frac{\partial f}{\partial \beta}, \qquad \mathrm{C} = \frac{\partial f}{\partial \gamma}, \qquad \mathrm{D} = \frac{\partial f}{\partial \delta}. \end{aligned}\right.$$

Les caractéristiques de Monge de (E) sont les trajectoires des transformations singulières de F. Ces transformations singulières forment un sous-faisceau singulier (S), ou $\{\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{H}\}$,

$$(\mathrm{S})\qquad \mathrm{P} = \mathrm{X} + m\mathrm{Y} + \mathrm{Y}\varphi\mathrm{B}; \qquad \mathrm{Q} = \mathrm{C} - 2m\mathrm{B}; \qquad \mathrm{H} = \mathrm{D} - m\mathrm{C} + m^2\mathrm{B},$$

$\mathrm{Q}m$ et $\mathrm{H}m$ sont nuls par suite de (2).

Pour étudier (S) lorsque (E) n'est pas linéaire, prenons m comme variable à la place de β. Si l'on pose

$$\mathrm{X}_1 = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + r\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial q} + \left(m\frac{\partial\psi}{\partial m} - 3\psi\right)\frac{\partial f}{\partial r} = \mathrm{X}_0 + \left(m\frac{\partial\psi}{\partial m} - 3\psi\right)\frac{\partial f}{\partial r},$$
$$\mathrm{Y}_1 = \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial\psi}{\partial m}\frac{\partial f}{\partial r} = \mathrm{Y}_0 - \frac{\partial\psi}{\partial m}\frac{\partial f}{\partial r},$$
$$\mathrm{S}_1 = \frac{\partial f}{\partial s} - 2m\frac{\partial f}{\partial r}, \qquad \mathrm{H}_1 = \frac{\partial f}{\partial t} - m\frac{\partial f}{\partial s} + m^2\frac{\partial f}{\partial r}$$

et $\gamma_1 = \gamma + m\delta$, P devient par le changement de variables

$$\mathfrak{P} = X_1 + mY_1 - \frac{\partial\psi}{\partial m} S_1 + \gamma_1 H_1 + \overline{Pm}\frac{\partial f}{\partial m} = P_1 + \overline{Pm}\frac{\partial f}{\partial m},$$

où

$$\overline{Pm} = -\frac{P_1 \frac{\partial\psi}{\partial m} - 3(Y_1\psi + \gamma_1 S_1\psi + \delta H_1\psi)}{2\gamma_1 + \frac{\partial^2\psi}{\partial m^2}}.$$

Q devient $\frac{\partial f}{\partial \gamma}$ et H devient $\frac{\partial f}{\partial \delta} - m\frac{\partial f}{\partial \gamma}$. On a les relations

$$(H, \mathfrak{P}) = \overline{Pm}\frac{\partial f}{\partial \gamma} + \frac{3H_1\psi}{2\gamma_1 + \frac{\partial^2\psi}{\partial m^2}}\frac{\partial f}{\partial m}; \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial \gamma}, \mathfrak{P}\right) = T = H_1 + \frac{\partial\overline{Pm}}{\partial\gamma_1}\frac{\partial f}{\partial m}.$$

Si $H_1\psi \neq 0$, le premier dérivé S^1 de S est de degré 5 et il comprend $\frac{\partial f}{\partial m}$. Quand nous formerons les dérivés de S^1 nous aurons, entre autres, à introduire successivement les transformations

$$\left(H_1, \frac{\partial f}{\partial m}\right) = S_1, \qquad \left(S_1, \frac{\partial f}{\partial m}\right) = 2\frac{\partial f}{\partial r}, \qquad \left(X_0 + mY_0, \frac{\partial f}{\partial m}\right) = -Y_0.$$

Il en résulte que S n'aura aucun invariant. Si $H_1\psi$ est nul, c'est-à-dire si r, s, t n'entrent dans ψ que par les combinaisons $\rho = r + ms$ et $\sigma = s + mt$, S^1 est alors de degré 4. Comme on a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \gamma}, T\right) = \frac{\partial^2\overline{Pm}}{\delta\gamma_1^2}\frac{\partial f}{\partial m},$$

on verrait, comme plus haut, que si $\frac{\partial^2\overline{Pm}}{\partial\gamma_1^2}$ n'est pas nul, S^2 dérivé de S^1 contenant $\frac{\partial f}{\partial m}$, S n'aurait encore aucun invariant. Comme $\overline{Pm}$ est alors une fonction homographique de γ_1 pour que $\frac{\partial^2 Pm}{\partial\gamma_1^2}$ soit nul, il faut et il suffit que $\overline{Pm}$ ne dépende pas de γ_1. En remarquant que $H_1\frac{\partial\psi}{\partial m} = \left(H_1, \frac{\partial f}{\partial m}\right)\psi = S_1\psi$ on devra avoir la condition $\overline{Pm} - S_1\psi = 0$, ou la condition équivalente

$$D_1\frac{\partial\psi}{\partial m} - 3Y_1\psi = 0, \tag{3}$$

où

$$D_1 = X_1 + mY_1 - \frac{\partial\psi}{\partial m}S_1 + S_1\psi\frac{\partial f}{\partial m}.$$

S' est alors $\left\{ D_1, H_1, \frac{\partial f}{\partial \gamma}, \frac{\partial f}{\partial \delta} \right\}$. *Il est complet.*

Prenons, en effet, comme nouvelles variables à la place de r, s, t; ρ, σ, t sans changer les autres. ψ devient une fonction $\bar{\psi}$ des 8 variables v : $x, y, z, p, q, \rho, \sigma, m$. Posons

$$\mathfrak{X} = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + \rho\frac{\partial f}{\partial p} + (m\mathfrak{M}\bar{\psi} + \sigma\mathfrak{S}\bar{\psi} - 3\bar{\psi})\frac{\partial f}{\partial \rho},$$

$$\mathfrak{Y} = \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + \sigma\frac{\partial f}{\partial p} - \mathfrak{M}\bar{\psi}\frac{\partial f}{\partial \rho},$$

$$\mathfrak{S} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} - m\frac{\partial f}{\partial \rho}, \qquad \mathfrak{Q} = \frac{\partial f}{\partial q} - m\frac{\partial f}{\partial p} - \mathfrak{S}\bar{\psi}\frac{\partial f}{\partial \rho},$$

$$\mathfrak{M} = \frac{\partial f}{\partial m} + \sigma\frac{\partial f}{\partial \rho}.$$

Comme par ce changement de variables, H_1 devient $\frac{\partial f}{\partial t}$ et que D_1 devient

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{X} + m\mathfrak{Y} + \sigma\mathfrak{Q} - \mathfrak{M}\bar{\psi}\mathfrak{S} + \mathfrak{S}\bar{\psi}\mathfrak{M},$$

la propriété est bien démontrée, puisque le crochet $\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \mathfrak{D}\right)$ est nul. De plus, comme Y_1 devient $\mathfrak{Y} + t\mathfrak{Q}$ et que $\frac{\partial f}{\partial m}$ devient $\mathfrak{M} + t\mathfrak{S}$ on voit que la condition (3) se décompose dans les deux conditions

$$(4) \qquad \mathfrak{D}\mathfrak{M}\bar{\psi} - 3\mathfrak{Y}\bar{\psi} = 0,$$

$$(5) \qquad \mathfrak{D}\mathfrak{S}\bar{\psi} - 3\mathfrak{Q}\bar{\psi} = 0.$$

On voit donc, en résumé, que S *n'aura des invariants que si* S' *est complet et il en aura alors sept, qui avec les variables précédentes seront les sept invariants de* $\mathfrak{D}$. *Pour qu'il en soit ainsi la fonction* $\bar{\psi}$ *des huit variables* v *doit satisfaire à* (4) *et* (5) *qui sont deux équations du second ordre, linéaires, et à caractéristiques linéaires.* Les trois solutions, $\bar{\psi}$, fonction uniquement, soit de x, soit de σ, soit de m, sont en évidence et toute transformation de contact appliquée aux équations obtenues de cette manière donnera des équations ($\mathcal{E}$).

3. Considérons une équation (E) non linéaire où ψ ne dépend que des variables v. Si l'on transforme F en prenant les nouvelles variables v' : $x, y, z, p, q, \rho, \sigma, t, m, \gamma, \delta$ toute multiplicité M_2

intégrale de F admettra deux transformations $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}'$ de la forme

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{X} + s\mathfrak{Q} + (\beta + m\gamma + as)\mathfrak{S} + \gamma\frac{\partial f}{\partial t} + a\mathfrak{M} + b\frac{\partial f}{\partial \gamma} + c\frac{\partial f}{\partial \delta},$$
$$\mathfrak{U}' = \mathfrak{Y} + t\mathfrak{Q} + (\gamma + m\delta + a't)\mathfrak{S} - \delta\frac{\partial f}{\partial t} + a'\mathfrak{M} - b'\frac{\partial f}{\partial \gamma} + c'\frac{\partial f}{\partial \delta},$$

où les a, ..., c' sont des fonctions des variables v'. Par suite toute multiplicité $\mathfrak{M}_2$ déduite de M_2 en la raccourcissant des éléments t, γ, δ admettra deux transformations de la forme

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{X} + u\mathfrak{Q} + v\mathfrak{S} + w\mathfrak{M},$$
$$\mathfrak{U}' = \mathfrak{Y} + u'\mathfrak{Q} + v'\mathfrak{S} + w'\mathfrak{M},$$

où les u, ..., w' seront des fonctions des variables v.

$\mathfrak{M}_2$ est donc une intégrale à deux dimensions du faisceau G $\{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{S}, \mathfrak{M}\}$. *Réciproquement* soit une telle multiplicité qu'on peut mettre sous la forme

$$z = z_1(x, y), \qquad p = P(x, y), \qquad \ldots, \qquad m = M(x, y).$$

Comme elle admet les deux transformations $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}'$, on aura sur elle

$$p = \frac{\partial z_1}{\partial x} = p_1; \qquad q = q_1; \qquad u = s_1; \qquad u' = t_1; \qquad \rho = r_1 + ms_1.$$
$$\sigma = s_1 + mt_1; \qquad \beta_1 + 2m\gamma_1 + m^2\delta_1 + \mathfrak{M}\overline{\Psi} + t_1\mathfrak{S}\overline{\Psi} = 0,$$
$$\alpha_1 + 2m\beta_1 + m^2\gamma_1 = m[\mathfrak{M}\overline{\Psi} + t_1\mathfrak{S}\overline{\Psi}] - 3\overline{\Psi}.$$

Donc z_1 est intégrale de (E) et la multiplicité considérée est une $\mathfrak{M}_2$. L'intégration de (E) revient donc à celle de G. Les formules de structure de celui-ci sont, en posant

$$a = m\mathfrak{M}\overline{\Psi} + \sigma\mathfrak{S}\overline{\Psi} - 3\overline{\Psi}; \qquad b = \mathfrak{M}\overline{\Psi} \qquad \text{et} \qquad c = \mathfrak{S}\overline{\Psi}:$$
$$(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = -\sigma\frac{\partial f}{\partial z} + b\frac{\partial f}{\partial p} - (\mathfrak{Y}a + \mathfrak{X}b)\frac{\partial f}{\partial \rho};$$
$$(\mathfrak{X}, \mathfrak{Q}) = m\frac{\partial f}{\partial z} + c\frac{\partial f}{\partial p} - (\mathfrak{X}c + \mathfrak{Q}a)\frac{\partial f}{\partial \rho};$$
$$(\mathfrak{X}, \mathfrak{S}) = m\frac{\partial f}{\partial p} - \mathfrak{S}a\frac{\partial f}{\partial \rho}; \qquad (\mathfrak{X}, \mathfrak{M}) = -\sigma\frac{\partial f}{\partial p} - \mathfrak{M}a\frac{\partial f}{\partial \rho};$$
$$(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Q}) = -\frac{\partial f}{\partial z} + (\mathfrak{Q}b - \mathfrak{Y}c)\frac{\partial f}{\partial \rho}; \qquad (\mathfrak{Y}, \mathfrak{S}) = -\frac{\partial f}{\partial p} + \mathfrak{S}b\frac{\partial f}{\partial \rho};$$
$$(\mathfrak{Y}, \mathfrak{M}) = \mathfrak{M}b.\frac{\partial f}{\partial \rho}; \qquad (\mathfrak{Q}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{S}c\frac{\partial f}{\partial \rho};$$
$$(\mathfrak{Q}, \mathfrak{M}) = \frac{\partial f}{\partial p} + \mathfrak{M}c\frac{\partial f}{\partial \rho}; \qquad (\mathfrak{S}, \mathfrak{M}) = 2\frac{\partial f}{\partial \rho},$$

c'est un faisceau involutif de genre 2. Il jouit de la propriété suivante : *pour que* G *possède une transformation distinguée il faut et il suffit que* $\overline{\psi}$ *satisfasse à* (4) *et* (5), *c'est-à-dire qu'il faut et il suffit que* (E) *soit une* ($\mathcal{E}$). *La transformation distinguée sera alors* $\mathcal{O}$. Si l'on écrit en effet que les coefficients de $\frac{\partial f}{\partial z}$ et de $\frac{\partial f}{\partial p}$ sont nuls quels que soient a'_1, ..., a'_5 dans le crochet ($\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$), où

$$\mathcal{U} = a_1 \mathcal{X} + a_2 \mathcal{Y} + a_3 \mathcal{Q} + a_4 \mathcal{S} + a_5 \mathcal{M},$$
$$\mathcal{U}' = a'_1 \mathcal{X} + a'_2 \mathcal{Y} + a'_3 \mathcal{Q} + a'_4 \mathcal{S} + a'_5 \mathcal{M},$$

on obtient les relations

$$a_2 = m a_1, \qquad a_3 = \sigma a_1, \qquad a_4 = -\mathcal{M}\overline{\psi} a_1, \qquad a_5 = \mathcal{S}\overline{\psi} a_1.$$

S'il existe une transformation distinguée, ce sera bien $\mathcal{O}$; et en écrivant que le coefficient de $\frac{\partial b}{\partial \rho}$ dans ($\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$) est nul quels que soient a'_1, ..., a'_5 on retrouve les conditions nécessaires et suffisantes (4) et (5).

Les multiplicités $\mathcal{M}_2$ seront alors engendrées par des multiplicités caractéristiques de Cauchy $\mathcal{M}_1$ trajectoires de $\mathcal{O}$, dépendant de sept constantes arbitraires. Introduisons le système d'invariants de $\mathcal{O}$: y_0, z_0, p_0, q_0, ρ_0, σ_0, m_0, fondamental pour $x = x_0$. Si on les prend comme nouvelles variables v_0, la loi d'association de ces sept paramètres v_0 qui définissent les caractéristiques sera obtenue en cherchant l'intégrale générale du faisceau réduit

$$G'_0 \{ \mathcal{Y}_0, \mathcal{Q}_0, \mathcal{S}_0, \mathcal{M}_0 \}.$$

Or la multiplicité à une dimension, la plus générale, admettant la transformation

$$\mathcal{U}'_0 = \mathcal{Y}_0 + u'_0 \mathcal{Q}_0 + v'_0 \mathcal{S}_0 + w'_0 \mathcal{M}_0$$

est de la forme (6), où F, G, R sont trois fonctions arbitraires,

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} &z_0 = F(y_0); \qquad p_0 = G(y_0); \qquad q_0 = F'(y_0); \\ &\rho_0 = R(y_0) + m_0 G'(y_0); \qquad \sigma_0 = G'(y_0) + m_0 F''(y_0); \\ &R'(y_0) + 2 m_0 G''(y_0) + m_0^2 F'''(y_0) \\ &\qquad + \frac{\partial \psi}{\partial m}(x_0, y_0, F, G, F', R, G', F'', m_0) = 0. \end{aligned} \right.$$

Telles sont, en revenant aux variables v, les équations des multiplicités $\mathfrak{M}_2$ les plus générales, intégrales de $\mathcal{E}$. En faisant $x = x_0$ dans (6) on voit que le problème de Cauchy est en évidence. A tout élément de contact du second ordre (e), de coordonnées x_0, y_1, z_1, ..., r_1, s_1, t_1 correspondent une infinité de $\mathfrak{M}_1$ de coordonnées

$$(7)\quad y_0 = y_1, \qquad z_0 = z_1, \qquad \ldots; \qquad \rho_0 = r_1 + m_0 s_1; \qquad \sigma_0 = s_1 + m_0 t_1,$$

la dernière coordonnée m_0 étant arbitraire. Elles engendrent une multiplicité à deux dimensions $\mathfrak{M}'_2$, intégrale de G, car les équations (7) qui la définissent représentent une intégrale de $\{G'_0\}$. A toute orientation du second ordre d'éléments (e) correspond par les formules (6) une $\mathfrak{M}_2$, qui a en commun avec chaque $\mathfrak{M}'_2$ une $\mathfrak{M}_1$. De chaque $\mathfrak{M}'_2$ comme de chaque $\mathfrak{M}_2$ ou $\mathfrak{M}_1$ on peut déduire des multiplicités m'_2, m_2 ou m_1 au sens de la théorie des transformations de contact d'éléments x, y, z, p, q, dont elles sont les prolongements. On voit alors qu'à l'orientation considérée correspondra une m_2 ayant avec chacune des m'_2 associée à chaque élément (e) une m_1 commune. Par suite si les m'_2 ont pour supports des surfaces s'_2, aux ∞^1 éléments (e) de l'orientation correspondront ∞^1 surfaces s'_2 dont l'enveloppe sera une surface s_2, intégrale de $\mathcal{E}$, support de la $\mathfrak{M}_2$ considérée. Si l'on applique cette théorie au cas où ψ ne dépend que de m, on voit aisément que la surface intégrale la plus générale sera l'enveloppe de la famille suivante de surfaces, dépendant du paramètre a,

$$z + x[a\mathrm{G}'(a) - \mathrm{G}(a)] + y[a\mathrm{F}''(a) - \mathrm{F}'(a)] - \frac{x^2}{2}\mathrm{R}(a) - xy\mathrm{G}'(a)$$
$$- \frac{y^2}{2}\mathrm{F}''(a) + \frac{x^3}{2}\psi\left(\frac{y-a}{x}\right) + a\mathrm{F}'(a) - \frac{a^2}{2}\mathrm{F}''(a) - \mathrm{F}(a) = 0.$$

4. Revenons au sous-faisceau singulier S de F écrit avec les variables $x, y, \ldots, \beta, \gamma, \delta$. On a les formules

$$(\mathrm{H}, \mathrm{Q}) = 0; \qquad (\mathrm{H}, \mathrm{P}) = \mathrm{P}m.\mathrm{Q} + \mathrm{HY}\varphi.\mathrm{B},$$
$$(\mathrm{Q}, \mathrm{P}) = \mathrm{T} = \mathrm{H}'_1 + (2\mathrm{P}m + \mathrm{QY}\varphi)\mathrm{B},$$

H'_1 s'écrivant comme H_1. On a

$$\mathrm{HY}\varphi = (\mathrm{H}, \mathrm{Y})\varphi + \mathrm{YH}\varphi = \mathrm{H}'_1\varphi.$$

Si (E) n'est pas linéaire et si $\mathrm{HY}\varphi = \mathrm{H}'_1\varphi = -3\mathrm{H}_1\psi$ n'est pas nul, S n'a aucun invariant. Si E est linéaire et si $H'_1\varphi \neq 0$, on voit facilement que S aura au plus un invariant du premier ordre. Supposons donc $HY\varphi = 0$. Le premier dérivé $S^1\{P, H, Q, T\}$ est de degré 4 et l'on a les relations

$$(H, T) = QPm.Q, \qquad (Q, T) = 4QPm.B,$$
$$(T, P) = (3Pm + QY\varphi)S'_1 + QPm.Y + [(Q, P)Y\varphi - P(2Pm + QY\varphi)]B.$$

Pour que S^1 soit complet on devra avoir les conditions

$$QPm = 0; \tag{8}$$
$$3Pm + QY\varphi = \omega = 0; \tag{9}$$
$$(Q, P)Y\varphi - P(2Pm + QY\varphi) = A = 0. \tag{10}$$

On établit d'ailleurs facilement la relation

$$3QPm - 2Bm\omega = 0. \tag{11}$$

Restent donc les conditions (9) et (10). Dans le cas des équations non linéaires la condition (9) seule est nécessaire et suffisante, car en prenant m comme variable à la place de β (9) s'écrit

$$\overline{Pm} - S_1\psi = 0,$$

condition qui, on l'a vu, entraînait S^1 complet. Il n'en est pas ainsi dans le cas des équations linéaires; ω peut être nul sans que A le soit (exemple : $\alpha = q$) et en étudiant les dérivés successifs de S, on montre que celui-ci peut avoir au plus un invariant du second ordre. De même A peut être nul sans que ω le soit (exemple $\alpha = s$). On démontrerait dans ce cas que S a au plus deux invariants du second ordre et un du troisième.

Enfin signalons que si (9) et (10) sont vérifiées il y aura alors quatre invariants du second ordre et trois du troisième.. Les (E) appartiennent alors à la classe connue des équations linéaires du troisième ordre dont les surfaces intégrales sont ou bien engendrées par ∞^1 courbes prises arbitrairement dans une famille de ∞^4 courbes C; ou bien sont les enveloppes de ∞^1 surfaces prises arbitrairement dans une famille de ∞^4 surfaces S.

5. L'involution générale de degré 2 de F est $\{U_0, U'_0\}$:

$$U_0 = P + u_0Q + v_0H; \qquad U'_0 = Y + u_0B + v_0Q + w_0H,$$

On peut prolonger toute multiplicité M_2 intégrale de F par les éléments u_0, v_0, w_0 qui, sur elle, sont respectivement égaux, en posant

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} + m\frac{\partial f}{\partial y} \text{ à } M\gamma + m M\delta, \qquad M\delta \quad \text{et} \quad \frac{\partial \delta}{\partial y}.$$

Les multiplicités M_2^1 ainsi obtenues sont les intégrales du faisceau F_1 :

$$F_1 \left\{ U_0, U'_0, \frac{\partial f}{\partial u_0}, \frac{\partial f}{\partial v_0}, \frac{\partial f}{\partial w_0} \right\}.$$

On a les relations

$$(U_0, U'_0) = \lambda U'_0 - a_0 B - b_0 Q - C_0 H,$$

où

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda = -(Y m + u_0 B m); \qquad b_0 = 2\lambda v_0 + w_0 P m; \qquad c_0 = \lambda w_0; \\ &a_0 = Y^2 \varphi + u_0(BY\varphi - 3Ym) - 3u_0^2 B m \\ &\qquad + v_0(2Pm + QY\varphi) + w_0 HY\varphi. \end{aligned} \right.$$

L'involution générale de degré 2 de F_1 sera alors :

$$U_1 = P_1 + u_1\frac{\partial f}{\partial v_0} + v_1\frac{\partial f}{\partial w_0}; \qquad U'_1 = P'_1 + u_1\frac{\partial f}{\partial u_0} + v_1\frac{\partial f}{\partial v_0} + w_1\frac{\partial f}{\partial w_0},$$

où

$$P_1 = U_0 + a_0\frac{\partial f}{\partial u_0}, \qquad P'_1 = U'_0 - b_0\frac{\partial f}{\partial u_0} - c_0\frac{\partial f}{\partial v_0}.$$

On peut de même prolonger les M_2^1 par les éléments u_1, v_1, w_1 qui sur elles sont égaux à Mv_0, Mw_0 et $\frac{\partial w_0}{\partial y}$.

D'une manière générale, on établit facilement, par un raisonnement de récurrence, que les M_2^{n+1} obtenues en prolongeant $n+1$ fois les M_2 par les éléments u_0, v_0, w_0, $\ldots$, u_{n-1}, v_{n-1}, w_{n-1}; u_n, v_n, w_n où u_n, v_n, w_n sont sur les M_2^n égaux à Mv_{n-1}, Mw_{n-1} et $\frac{\partial w_{n-1}}{\partial y}$, sont intégrales du faisceau

$$F_{n+1} \left\{ U_n, U'_n, \frac{\partial f}{\partial u_n}, \frac{\partial f}{\partial v_n}, \frac{\partial f}{\partial w_n} \right\}.$$

où l'on a

$$U_n = P_n + u_n\frac{\partial f}{\partial v_{n-1}} + v_n\frac{\partial f}{\partial w_{n-1}},$$

$$U'_n = P'_n + u_n\frac{\partial f}{\partial u_{n-1}} + v_n\frac{\partial f}{\partial v_{n-1}} + w_n\frac{\partial f}{\partial w_{n-1}}$$

et

$$P_n = U_{n-1} + a_{n-1}\frac{\partial f}{\partial u_{n-1}}; \qquad P'_n = U'_{n-1} - b_{n-1}\frac{\partial f}{\partial u_{n-1}} - c_{n-1}\frac{\partial f}{\partial v_{n-1}}.$$

La relation

$$(U_n, U'_n) = \lambda U'_n - a_n\frac{\partial f}{\partial u_{n-1}} - b_n\frac{\partial f}{\partial v_{n-1}} - c_n\frac{\partial f}{\partial w_{n-1}},$$

où

$$(13)\qquad \begin{cases} a_n = P_n b_{n-1} + P'_n a_{n-1} - \lambda b_{n-1} \\ \qquad + u_n\left(\dfrac{\partial a_{n-1}}{\partial u_{n-1}} + 3\lambda\right) + v_n\omega + w_n \mathrm{HY}\varphi, \\ b_n = P_n c_{n-1} - \lambda c_{n-1} + 2\lambda v_n; \qquad c_n = \lambda w_n, \end{cases}$$

permet d'établir que l'involution générale de degré 2 de F_{n-1} sera $\{U_{n+1}, U'_{n+1}\}$.

Relativement aux a_n, nous allons établir, en supposant $\mathrm{HY}\varphi$ nul pour simplifier, que

$$\frac{\partial a_n}{\partial w_{n-p-1}}, \quad \frac{\partial a_n}{\partial v_{n-p-1}}, \quad \frac{\partial a_n}{\partial u_{n-p}}$$

ne dépendent seulement que des variables u_0, v_0, w_0; ...; u_{p-1}, v_{p-1}, w_{p-1}; u_p, les variables x, ..., δ étant sous-entendues. Vérifions-le d'abord quand p est nul. On a

$$(14)\qquad \frac{\partial a_n}{\partial u_n} = \frac{\partial a_{n-1}}{\partial u_{n-1}} + 3\lambda = \frac{\partial a_{n-2}}{\partial u_{n-2}} + 6\lambda = \ldots = \frac{\partial a_0}{\partial u_0} + 3n\lambda,$$

$\dfrac{\partial a_n}{\partial u_n}$ ne dépend bien que de u_0. On a de même :

$$(15)\qquad \frac{\partial a_n}{\partial w_{n-1}} = \frac{\partial a_{n-1}}{\partial w_{n-2}} - \lambda\omega \,(n \geqq 2)$$

et par suite

$$(16)\qquad \frac{\partial a_n}{\partial w_{n-1}} = \frac{\partial a_1}{\partial w_0} - (n-1)\lambda\omega.$$

Mais comme

$$(17)\qquad \frac{\partial a_1}{\partial w_0} = \mathrm{H}a_0 - \mathrm{P}m\frac{\partial a_0}{\partial u_0} + u_0\mathrm{QP}m + \mathrm{P}^2 m - \lambda\omega,$$

la propriété est bien établie pour $\dfrac{\partial a_n}{\partial w_{n-1}}$ $(n \geqq 1)$. Enfin on a

$$(18)\qquad \frac{\partial a_n}{\partial v_{n-}} = \frac{\partial a_{n-1}}{\partial v_{n-2}} - 2\lambda\frac{\partial a_{n-1}}{\partial u_{n-1}} + 3(\mathrm{P}_1\lambda - \lambda^2) + \mathrm{U}'(\omega)\,(n \geqq 2)$$

et

$$(19)\quad \frac{\partial a_1}{\partial v_0} = \mathrm{Q}a_0 + (\mathrm{Y} + u_0\mathrm{B})(2\mathrm{P}m + \mathrm{QY}\varphi) - 2\lambda\frac{\partial a_0}{\partial u_0} + 2(\mathrm{P}_1\lambda - \lambda^2).$$

Les termes ajoutés à $\dfrac{\partial a_{n-1}}{\partial v_{n-2}}$ dans (18) ne dépendant que de u_0 et $\dfrac{\partial^2 a_1}{\partial v_0^2}$ étant nul, la propriété est bien vérifiée. Admettons maintenant que la propriété énoncée plus haut est vérifiée jusqu'à l'ordre $p-1$ et démontrons qu'elle l'est jusqu'à l'ordre p, ce qui en établira la généralité. Des hypothèses faites il résulte que l'on aura :

$$(20)\quad \frac{\partial a_n}{\partial u_{n-p}} = \frac{\partial a_{n-1}}{\partial u_{n-p-1}} + \mathrm{P}'_p\frac{\partial a_{n-1}}{\partial u_{n-p}} + u_p\frac{\partial^2 a_{n-1}}{\partial u_{n-p}\,\partial u_{p-1}} \qquad (1 \leqq p < n-1).$$

Le terme ajouté à $\dfrac{\partial a_{n-1}}{\partial u_{n-p-1}}$ dans (20) dépendant au plus de la variable u_p et $\dfrac{\partial a_{p+1}}{\partial u_1}$ ne dépendant ni de v_p, ni de w_p, on voit en donnant à n dans (20) les valeurs $n-1$, $n-2$, $p+2$ que la propriété est bien vérifiée pour $\dfrac{\partial a_n}{\partial u_{n-p}}$. En se servant de ce résultat et en raisonnant d'une manière analogue, on étendrait la propriété à $\dfrac{\partial a_n}{\partial v_{n-p-1}}$ grâce à la formule

$$(21)\quad \begin{aligned}\frac{\partial a_n}{\partial v_{n-p-1}} &= \frac{\partial a_{n-1}}{\partial v_{n-p-2}} + \mathrm{P}'_p\frac{\partial a_{n-1}}{\partial v_{n-p-}} \\ &\quad + u_p\frac{\partial^2 a_{n-1}}{\partial v_{n-p-1}\,\partial u_{p-1}} - 2\lambda\frac{\partial a_{n-1}}{\partial u_{n-p-1}} \qquad (1 \leqq p < n-1),\end{aligned}$$

de même à $\dfrac{\partial a_n}{\partial w_{n-p-1}}$, au moyen des formules

$$(22)\quad \begin{aligned}\frac{\partial a_n}{\partial w_{n-2}} &= \frac{\partial a_{n-1}}{\partial w_{n-3}} + \mathrm{P}'_1\frac{\partial a_{n-1}}{\partial w_{n-2}} + u_1\frac{\partial^2 a_{n-1}}{\partial w_{n-2}\,\partial u_0} - \lambda(\mathrm{P}_1\lambda - \lambda^2) - u_1\mathrm{QP}m \\ &\quad + \mathrm{P}_1(\mathrm{P}_1\lambda - \lambda^2) - (\mathrm{P}_1\lambda - \lambda^2)\frac{\partial a_{n-1}}{\partial u_{n-1}} - \lambda\frac{\partial a_{n-1}}{\partial v_{n-2}} \qquad (n > 2),\end{aligned}$$

$$(23)\quad \begin{aligned}\frac{\partial a_n}{\partial w_{n-p-1}} &= \frac{\partial a_{n-1}}{\partial w_{n-p-2}} + \mathrm{P}'_p\frac{\partial a_{n-1}}{\partial w_{n-p-1}} + u_p\frac{\partial^2 a_{n-1}}{\partial w_{n-p-1}\,\partial u_{p-1}} \\ &\quad - \lambda\frac{\partial a_{n-1}}{\partial v_{n-p-1}} - (\mathrm{P}_1\lambda - \lambda^2)\frac{\partial a_{n-1}}{\partial u_{n-p}} \qquad (2 \leqq p < n-1).\end{aligned}$$

6. Les caractéristiques d'ordre $n+4$ de (E) sont les intégrales à une dimension du sous-faisceau singulier

$$S_{n+1}\left\{P_{n+1}=U_n+a_n\frac{\partial f}{\partial u_n},\frac{\partial f}{\partial v_n},\frac{\partial f}{\partial w_n}\right\}$$

de F_{n+1}. S_{n+1} possède déjà les invariants de S_n, proposons-nous de voir s'il peut en fournir d'autres. On a les relations

$$\left(\frac{\partial f}{\partial w_n},P_{n+1}\right)=HY\varphi\frac{\partial f}{\partial u_n};$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v_n},P_{n+1}\right)=T^1_{n+1}=\frac{\partial f}{\partial w_{n-1}}+\omega\frac{\partial f}{\partial u_n}\qquad(n\geqq 1).$$

Si n est nul on a d'ailleurs :

$$T^1_1=H+(2Pm+QY\varphi)\frac{\partial f}{\partial u_0}.$$

On voit que, si $HY\varphi\neq 0$, S_{n+1} ne pouvant fournir d'invariants supplémentaires, en aura au plus un du premier ordre, si (E) est linéaire. Supposons donc $HY\varphi$ nul. S^1_{n+1} dérivé de S_{n+1} sera de degré 4 et si l'on pose $\Pi^1_{n+1}=P_{n+1}-v_nT^1_{n+1}$ on aura :

$$(T^1_{n+1},\Pi^1_{n+1})=\omega\frac{\partial f}{\partial v_{n-1}}+A^1_{n+1}\frac{\partial f}{\partial u_n}\qquad(n\geqq 1),$$

où

$$(24)\qquad A^1_{n+1}=T^1_{n+1}a_n-U_0\omega=\frac{\partial a_n}{\partial w_{n-1}}+\omega\frac{\partial a_n}{\partial u_n}-U_0\omega.$$

On a d'ailleurs

$$(T^1_1,\Pi^1_1)=\omega Q+A^1_1\frac{\partial f}{\partial u_0},$$

où

$$(25)\qquad A^1_1=Ha_0+(2Pm+QY\varphi)\frac{\partial a_0}{\partial u_0}-U_0(2Pm+QY\varphi),$$

ce qui s'écrit, en tenant compte des formules (11) et (12),

$$(26)\qquad A^1_1=A-2Ym\omega-8u_0QPm=A-\frac{2\omega}{3}(3Ym+8u_0Bm).$$

En tenant compte des formules (14), (16), (17) on peut écrire :

$$(27)\qquad A^1_{n+1}=A^1_1+2n\lambda\omega.$$

Il en résulte que pour que S^1_{n+1} *soit complet il faut et il suffit que* S^1 *le soit. Il y aura alors trois invariants d'ordre* $n+4$.

Si (E) étant linéaire, ω est nul sans que A le soit, S_{n+1} n'ayant que les invariants de S, en aura au plus un du second ordre. *Supposons donc* $\omega \neq 0$ et posons

$$T^2_{n+1} = \frac{\partial f}{\partial v_{n-1}} + \frac{A^1_{n+1}}{\omega}\frac{\partial f}{\partial u_n};$$

$$H^2_{n+1} = H^1_{n+1} - u_n T^2_{n+1} = P_n + \left(a_n - u_n\frac{A^1_{n+1}}{\omega} - v_n\omega\right)\frac{\partial f}{\partial u_n}.$$

Le deuxième dérivé

$$S^2_{n+1}\left\{H^2_{n+1},\ T^1_{n+1},\ T^2_{n+1},\ \frac{\partial f}{\partial v_n},\ \frac{\partial f}{\partial w_n}\right\}$$

sera de degré 5 et S^3_{n+1} s'obtiendra en ajoutant à S^2_{n+1} :

$$T^3_{n+1} = (T^2_{n+1},\ H^2_{n+1}) = \frac{\partial f}{\partial w_{n-2}} + \omega\frac{\partial f}{\partial u_{n-1}} + A^2_{n+1}\frac{\partial f}{\partial u_n}$$

où

$$A^2_{n+1} = T^2_{n+1}\left(a_n - u_n\frac{A^1_{n+1}}{\omega}\right) - P_1\frac{A^1_{n+1}}{\omega}, \tag{28}$$

et comme A^1_{n+1} et $\frac{\partial a_n}{\partial v_{n-1}}$ ne dépendent que de u_0, A^2_{n+1} ne dépendra que de u_0 et v_0 et l'on aura :

$$\frac{\partial A^2_{n+1}}{\partial v_0} = -\frac{1}{\omega}\left[HA^1_{n+1} + (2Pm + QY\varphi)\frac{\partial A^1_{n+1}}{\partial u_0}\right],$$

ce qui s'écrit, en tenant compte de (27) et de (26) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial A^2_{n+1}}{\partial v_0} &= -\frac{1}{\omega}\left[HA^1_1 + (2Pm + QY\varphi)\frac{\partial A^1_1}{\partial u_0} - 2nQPm.\omega\right] \\ &= 2(n+3)QPm.\end{aligned} \tag{29}$$

On formerait de même S^4_{n+1} en ajoutant à S^3_{n+1} la transformation

$$T^4_{n+1} = \frac{1}{\omega}(T^3_{n+1},\ H^3_{n+1}),$$

où

$$H^3_{n+1} = H^2_{n+1} - v_{n-1}T^3_{n+1}.$$

D'une manière générale, supposons que le $2p^{\text{ième}}$ dérivé soit de la forme

$$S^{2p}_{n+1}\left\{H^{2p}_{n+1},\ T^1_{n+1},\ \ldots,\ T^{2p}_{n+1},\ \frac{\partial f}{\partial v_n},\ \frac{\partial f}{\partial w_n}\right\},$$

de degré $2p+3$ où l'on pose :

$$(30)\quad T_{n+1}^{2k-1} = \frac{\partial f}{\partial w_{n-k}} + \omega \frac{\partial f}{\partial u_{n-k+1}} + \sum_{s=1}^{k-1} A_{n+2-k+s}^{2s} \frac{\partial f}{\partial u_{n+1-k+s}} \qquad (k \leqq p),$$

$$(31)\quad T_{n+1}^{2k} = \frac{\partial f}{\partial v_{n-k}} + \sum_{s=0}^{k-1} \frac{A_{n+2-k+s}^{2s+1}}{\omega} \frac{\partial f}{\partial u_{n+1-k+s}} \qquad (k \leqq p),$$

$$(32)\quad A_{n+1}^{2(k-1)} = T_{n+1}^{2(k-1)} \left[a_n - \sum_{s=0}^{k-2} u_{n-s} \frac{A_{n+1}^{2s+1}}{\omega} \right] - P_{k-1} \frac{A_{n+1}^{2k-3}}{\omega} \qquad (k \leqq p),$$

$$(33)\quad A_{n+1}^{2k-1} = T_{n+1}^{2k-1} \left[a_n - \sum_{s=0}^{k-2} u_{n-s} \frac{A_{n+1}^{2s+1}}{\omega} \right] - P_{k-1} A_{n+1}^{2(k-1)} - u_{k-1} \frac{\partial A_{n+1}^{2(k-1)}}{\partial v_{k-2}}$$

$$(k \leqq p),$$

$$(34)\quad \Pi_{n+1}^{2p} = P_{n-p+1} + \sum_{s=0}^{p-1} \alpha_{p,s} \frac{\partial f}{\partial u_{n+1-p+s}}$$

où

$$\alpha_{p,s} = a'_{n-1-p+s} - \sum_{s'=0}^{s} u_{n+1-p+s-s'} \frac{A_{n+2-p+s}^{2s'+1}}{\omega} - \sum_{s'=1}^{s} v_{n+1-p+s-s'} A_{n+2-p+s'}^{2s'}.$$

On a posé

$$a'_n = a_n - v_n \omega.$$

Ces formules ont été vérifiées pour $p=1$. Nous allons montrer que si l'on a

$$(35)\qquad 2p-1 \leqq n,$$

S_{n+1}^{2p+1} s'obtiendra en ajoutant la transformation $(T_{n+1}^{2p}, \Pi_{n+1}^{2p})$, égale à T_{n+1}^{2p+1} par définition, à S_{n+1}^{2p}. A_{n+1}^{2p} étant d'autre part, par définition, le coefficient de $\frac{\partial f}{\partial u_n}$ dans T_{n+1}^{2p+1}, nous verrons que T_{n+1}^{2p+1} et A_{n+1}^{2p} s'obtiendront en faisant dans (30) et (32) k égal à $p+1$. Ces formules seront ainsi démontrées jusqu'à l'ordre $p+1$ pour k. Il est facile de voir d'abord que $A_{n+1}^{2(k-1)}$ et A_{n+1}^{2k-1} ne dépendent respectivement que des variables $u_0, \ldots, u_{k-2}, v_{k-2}$ et $u_0, \ldots, w_{k-2}, u_{k-1}$. Cette propriété est, en effet, vraie pour A_{n+1}^1 et A_{n+1}^2, et en admettant qu'elle l'est jusqu'à l'ordre $k-1$, on voit d'après les formules (32), (33), qu'elle l'est encore pour l'ordre k si l'on remarque que $\frac{\partial a_n}{\partial v_{n-k+1}}$; $\frac{\partial a_n}{\partial w_{n-k}}$ et $\frac{\partial a_n}{\partial u_{n-k+1}}$ ne dépendent respectivement que des variables $u_0, \ldots, w_{k-3}, u_{k-2}$ et $u_0, \ldots, w_{k-2}, u_{k-1}$ et que les dérivations des T ne peuvent pas porter sur les A des formules (32), (33) par suite de la condition (35). Ceci posé, par suite de (35), on voit que tous les crochets $(T^{2p}_{n+1}, T^{s}_{n+1})$ où $s < 2p$ sont nuls. S^{2p+1}_{n+1} s'obtient bien en ajoutant à S^{2p}_{n+1} la transformation $(T^{2p}_{n+1}, \Pi^{2p}_{n+1}) = T^{2p+1}_{n+1}$ où l'on aura

$$T^{2p+1}_{n+1} = \frac{\partial f}{\partial w_{n-p-1}} + \omega \frac{\partial f}{\partial u_{n-p}} + \sum_{s=1}^{p} \beta_s \frac{\partial f}{\partial u_{n-p+s}},$$

et en remarquant toujours que, à cause de (35), les dérivations de T^{2p}_{n+1} ne peuvent porter sur les A des $\alpha_{p,s}$, on en déduit que

$$\beta_s = A^{2s}_{n+1-p+s} \qquad (s < p)$$

et que β_p égal à A^{2p}_{n+1} s'obtient en faisant dans (32) $k = p + 1$. La propriété énoncée est donc bien démontrée. On verrait de même que, si $2p \leqq n$, on peut à partir de

$$S^{2p+1}_{n+1}\left(\Pi^{2p+1}_{n+1}, \ldots, T^{2p+1}_{n+1}, \frac{\partial f}{\partial v_n}, \frac{\partial f}{\partial w_n}\right),$$

où l'on a posé

$$\Pi^{2p+1}_{n+1} = \Pi^{2p}_{n+1} - v_{n-p} T^{2p+1}_{n+1},$$

obtenir S^{2p+2}_{n+1} en ajoutant à S^{2p+1}_{n+1} la transformation $\frac{1}{\omega}(T^{2p+1}_{n+1}, \Pi^{2p+1}_{n+1})$ égale par définition à T^{2p+2}_{n+1}. De plus si l'on pose

$$\Pi^{2p+2}_{n+1} = \Pi^{2p+1}_{n+1} - u_{n-p} T^{2p+2}_{n+1},$$

on démontrerait que S^{2p+2}_{n+1} a la même forme que S^{2p}_{n+1}, où l'on y remplace p par $p + 1$.

Il résulte de ceci que les formules (30), (31), (32) (33) permettent de définir des $S^{k}_{n+1}\left(\Pi^{k}_{n+1}, T^{1}_{n+1}, \ldots, T^{k}_{n+1}, \frac{\partial f}{\partial v_n}, \frac{\partial f}{\partial w_n}\right)$, de degré $k + 3$, jusqu'à S^{n+2}_{n+1} inclus. Étudions S^{n+3}_{n+1}. Supposons d'abord n pair et égal à $2n'$. $S^{2n'+3}_{2n'+1}$ comprendra le crochet $(T^{2n'+1}_{2n'+1}, \omega T^{2n'+2}_{2n'+1})$ et l'on aura en se reportant aux formules (30), (31), (32), (33)

$$(36) \qquad (T^{2n'+1}_{2n'+1}, \omega T^{2n'+2}_{2n'+1}) = B_{2n'+1} \frac{\partial f}{\partial u_{2n'}},$$

où l'on a

$$(37) \qquad B_{2n'+1} = \frac{\partial A^{2n'+1}_{2n'+1}}{\partial w_{n'-1}} + \omega \frac{\partial A^{2n'+1}_{2n'+1}}{\partial u_{n'}} - \omega \frac{\partial A^{2n'}_{2n'+1}}{\partial v_{n'-1}}.$$

De même si n est égal à $2n' + 1$, $S^{2n'+4}_{2n'+2}$ contiendrait le crochet

$$(38) \qquad (T^{2n'+3}_{2n'+2}, \omega T^{2n'+2}_{2n'+2}) = B_{2n'+2} \frac{\partial f}{\partial u_{2n'+1}},$$

où

$$(39)\qquad B_{2n'+2}=\frac{\partial A^{2n'+1}_{2n'+2}}{\partial w_{n'-1}}+\omega\frac{\partial A^{2n'+1}_{2n'+2}}{\partial u_{n'}}-\omega\frac{\partial A^{2n'+2}_{2n'+2}}{\partial v_{n'}}.$$

Les formules (37) et (39) définissent des B_{n+1} de la forme indiquée tant que n est plus grand que 1. Mais si l'on se reporte à S_1 on devra poser

$$\left(T^1_1,\ \omega Q+A^1_1\frac{\partial f}{\partial u_0}\right)=B_1\frac{\partial f}{\partial u_0},$$

où

$$(40)\quad B_1=HA^1_1+(2Pm+QY\varphi)\frac{\partial A^1_1}{\partial u_0}-2QPm.\omega=-8QPm.\omega=-\frac{16}{3}Bm\omega^2,$$

si l'on tient compte de (29). De même, si l'on revient à S_2, on devra poser

$$T^2_2=H+(2Pm+QY\varphi)\frac{\partial f}{\partial u_0}+A^2_2\frac{\partial f}{\partial u_1},$$

et l'on aura

$$(T^1_2,\ \omega T^2_2)=B_2\frac{\partial f}{\partial u_1},$$

avec

$$(41)\qquad B_2=HA^1_2+(2Pm+QY\varphi)\frac{\partial A^1_2}{\partial u_0}-\omega\frac{\partial A^2_2}{\partial v_0}=2B_1,$$

en tenant compte de (27) et (29).

D'une manière générale nous allons montrer que $B_{n+1}=2Bn$. Des formules (32) et (33) on déduit

$$(42)\quad -\omega\frac{\partial A^{2p+2}_{n+1}}{\partial v_p}=\frac{\partial A^{2p+1}_{n+1}}{\partial w_{p-1}}+\omega\frac{\partial A^{2p+1}_{n+1}}{\partial u_p}=\alpha^p_n-\omega\frac{\partial A^{2p}_{n+1}}{\partial v_{p-1}}\qquad(p\geqq 1).$$

où

$$\alpha^p_n=\frac{\partial^2 a_n}{\partial w_{n-p-1}\,\partial w_{p-1}}+\omega\frac{\partial^2 a_n}{\partial w_{n-p-1}\,\partial u_p}+\omega\frac{\partial^2 a_n}{\partial u_{n-p}\,\partial w_{p-1}}+\omega^2\frac{\partial^2 a_n}{\partial u_{n-p}\,\partial u_p}.$$

En faisant alors dans (42) p égal à n', $n'-1$, ..., 1, on voit qu'on peut écrire

$$B_{2n'+2}=2\left[\sum_{p=1}^{n'}\alpha^p_{2n'+1}-4\omega(n'+2)QPm\right],$$

en tenant compte de (29). On a de même

$$B_{2n'+1}=\alpha^{n'}_{2n'}+2\left[\sum_{p=1}^{n'-1}\alpha^p_{2n'}-2\omega(2n'+3)QPm\right].$$

Mais on a la relation

$$\alpha^p_n = \alpha^p_{n-1} + \alpha^{p-1}_{n-1} \qquad (p > 1), \tag{43}$$

déduite facilement de (20) et (23). Les formules (20) et (22) permettent d'établir également la relation

$$\alpha^1_n = \alpha^1_{n-1} - 2(n+1)\omega QP m. \tag{44}$$

En tenant compte de (43) et (44) on aura alors

$$B_{2n'+2} = 2\left[\alpha^1_{2n'} + \sum_{p=2}^{n'} \alpha^p_{2n'} + \alpha^{n'+1}_{2n'} - 4\omega(2n'+3)QP m\right] = 2B_{2n'+1}.$$

On vérifie de même que $B_{2n'+1} = 2B_{2n'}$. Enfin on vérifie aisément que

$$B_3 = \alpha^1_2 - 2\omega \frac{\partial A^2_3}{\partial v_0} = \frac{\partial^2 a^2}{\partial w_0^2} + 2\omega \frac{\partial^2 a_2}{\partial w_0 \partial u_1} + \omega^2 \frac{\partial^2 a_2}{\partial u_1^2} - 2\omega \frac{\partial A^2_3}{\partial v_0}$$

est égal à $2B_2$. La propriété $B_{n+1} = 2B_n$ est donc vérifiée pour toute valeur de n. De la valeur de B_1 donnée par (40) on déduit

$$B_{n+1} = \frac{-2^{n+4}}{3} B m \omega^2.$$

Le dérivé S^{n+3}_{n+1} comprenant la transformation $B_{n+1} \dfrac{\partial f}{\partial u_n}$, on voit que si E n'est pas linéaire, S_{n+1} ne fournira aucun invariant nouveau. *Les* ($\mathcal{E}$) *sont donc bien les seules* (E) *non linéaires intégrables par la méthode de Darboux.* En ce qui concerne les équations linéaires, B_{n+1} étant nul, on voit aisément alors que S_{n+1} aura au plus un invariant d'ordre $n+4$, $\mathcal{J}$. Il suffit de transformer S_{n+1} en prenant $\mathcal{J}$ comme variable à la place de u_n.