BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE FRÉCHET

Solution continue la plus générale d'une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités en chaîne. (Note complémentaire.)

Bulletin de la S. M. F., tome 61 (1933), p. 182-185
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1933__61__182_0>

SOLUTION CONTINUE LA PLUS GÉNÉRALE D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS EN CHAINE

(NOTE COMPLÉMENTAIRE);

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

Introduction. — Je veux ajouter ici un complément à mon Mémoire « Solution continue... » paru ici même (t. LX, 1932, p. 242-280), Mémoire auquel je renverrai sous l'abréviation (Sol.).

J'ai donné dans ce Mémoire la solution continue la plus générale pour $r=2$ du système des conditions suivantes (Sol., p. 269 et 242) :

$$\text{(I)} \qquad P_{ik}(s, t) = \sum_{j=1}^{j=r} P_{ij}(s, u)\, P_{jk}(u, t) \qquad (s \leqq u \leqq t),$$

$$\text{(T')} \qquad \sum_{k=1}^{k=r} P_{ik}(s, t) = 1,$$

$$\text{(L')} \qquad P_{ik}(s, s) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ 1 & \text{si } i = k, \end{cases}$$

$$\text{(P')} \qquad P_{ik}(s, t) \geqq 0.$$

Je veux montrer comment on peut traiter le cas où r est un entier quelconque *quand on se limite aux solutions dérivables*, en combinant un théorème de Kolmogoroff [1] avec les résultats obtenus dans mon Mémoire concernant la solution la plus générale du système (I), (T'), (L'), (Sol., p. 265). On peut les formuler ainsi : la solution continue la plus générale, pour r entier quelconque, du système des conditions (I), (T'), (L') et (P') est fournie par les formules

$$\text{(1)} \qquad P_{jk}(s, t) = \sum_{i} \frac{a_{ji}(s)\, A_{ki}(t)}{d(t)}$$

---

[1] *Ueber die analytischen Methoden in der Variationsrechnung* (*Math. Ann.*, Band 104, 1931, p. 427).

où $A_{ki}(t)$ est le coefficient de $a_{ki}(t)$ dans le développement du déterminant $d(t)$ des $a_{ji}(t)$, et où les $a_{ji}(s)$ sont des fonctions continues de s prises arbitrairement parmi celles qui satisfont aux conditions suivantes : leur déterminant $d(t)$ est constamment positif, les $a_{j1}(s)$ sont égaux à 1, les sommes $\sum_i A_{ji}(s) B_{ki}(t)$ sont $\geqq 0$ pour $s \leqq t$.

Problème à résoudre et solution. — Je me propose de simplifier la vérification de la dernière condition de façon à ne considérer les signes que de fonctions *d'une seule variable*.

Pour cela, considérons, avec M. Kolmogoroff, les solutions continues $P_{jk}(s, t)$ qui sont dérivables pour $s \neq t$.

Nous allons d'abord montrer qu'elles sont alors nécessairement dérivables en s et t pour toute valeur commune $s_0 = t_0$ de s et de t. En effet, nous avons montré (Sol., p. 257) que dans toute représentation de la forme

$$P_{jk}(s, t) = \sum_i \alpha_{ji}(s)\, \beta_{ki}(t),$$

les $\alpha_{ji}(s)$ sont des combinaisons linéaires des fonctions $P_{ji}(s, u_0)$ pour $s \leqq u_0$ et comme on peut prendre u_0 arbitraire et en particulier $> s_0$, on voit que $P_{ji}(s, u_0)$ et par suite $\alpha_{ji}(s)$ sera dérivable en s pour $s < u_0$, et en particulier pour $s = s_0$. On verrait de même que $\beta_{ki}(t)$ est dérivable pour $t = t_0$. Ainsi $\alpha_{ji}(s)$ et $\beta_{ji}(t)$ sont dérivables en s et t pour toute valeur s_0 de s, t_0 de t et par suite $P_{jk}(s, t)$ est aussi dérivable quels que soient s et t.

Ceci étant, on voit, en posant

$$\mu_{jk}(t) = \lim_{\delta \to 0} \frac{P_{jk}(t, t+\delta) - P_{jk}(t, t)}{\delta},$$

que l'on a

$$\mu_{jk}(t) = \sum_i \alpha_{ji}(t)\, \beta'_{ki}(t)$$

et puisque

$$\sum_i \alpha_{ji}(t)\, \beta_{ki}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k, \\ 1 & \text{si } j = k, \end{cases} \tag{2}$$

$$\mu_{jk}(t) = -\sum_i \alpha'_{ji}(t)\, \beta_{ki}(t).$$

De plus, en vertu des conditions et des identités $\alpha_{j1}(t) = 1$ et des identités

$$\sum_j \alpha_{ji}(t)\,\beta_{jk}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ 1 & \text{si } i = k, \end{cases}$$

déduites de (2), on a

$$\sum_j \beta_{jk}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 1, \\ 1 & \text{si } k = 1, \end{cases}$$

et par suite

$$(3) \qquad \sum_k \mu_{jk}(t) = 0.$$

Or M. Kolmogoroff a démontré que l'on a

$$(4) \qquad \mu_{jk}(t) \geqq 0 \quad \text{pour } j \neq k, \qquad \mu_{kk}(t) \leqq 0.$$

On a, d'autre part, en revenant aux notations a, b

$$\mu_{jk}(t) = -\sum_i a'_{ji}(t)\,\frac{\Lambda_{ki}(t)}{d(t)}.$$

Ainsi les $a_{ji}(t)$ sont des fonctions continues dérivables et telles [puisque $d(t) > 0$] que l'on ait

$$(5) \qquad \sum_i a'_{ji}(t)\,\Lambda_{ki}(t) \begin{cases} \leqq 0 & \text{pour } j \neq k, \\ \geqq 0 & \text{pour } j = k. \end{cases}$$

Réciproquement, supposons qu'en outre des conditions mentionnées plus haut, ces dernières conditions soient remplies. Alors l'expression (1) sera une solution continue et dérivable du système des conditions I, (L′), (T′). D'après M. Kolmogoroff, elle vérifiera le système

$$\frac{\partial P_{ik}(s,t)}{\partial t} = \sum_j \mu_{jk}(t)\,P_{ij}(s,t).$$

et les $\mu_{jk}(t)$ vérifieront (3) et, en vertu de (5), les conditions (4). En outre, ce sont les solutions de ce système qui pour $t = s$ prennent en vertu de (L′) les valeurs

$$P_{ik}(t,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ 1 & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Or M. Kolmogoroff a prouvé que de telles solutions sont nécessairement $\geqq 0$. La solution considérée vérifie donc aussi la condition (P′).

En résumé, *la solution continue la plus générale vérifiant le système* (I), (P′), (L′), (T′) *parmi celles qui sont dérivables en s et t pour $s \neq t$:* 1° *Est aussi dérivable aux points où $s = t$;* 2° *Peut être mise sous la forme*

$$P_{jk}(s, t) = \sum_i a_{ji}(s) \frac{A_{ki}(t)}{d(t)},$$

où $A_{ki}(t)$ est le coefficient de $a_{ki}(t)$ dans le développement du déterminant $d(t)$ des $a_{ji}(t)$ et où les $a_{ji}(s)$ sont des fonctions continues et dérivables choisies arbitrairement parmi celles qui satisfont aux conditions suivantes : leur déterminant $d(s)$ reste positif, les $a_{j1}(s)$ restent égaux à 1, *et l'on a*

$$\sum_i a'_{ji}(t) A_{ki}(t) \begin{cases} \leqq 0 & \text{pour } j \neq k, \\ \geqq 0 & \text{pour } j = k. \end{cases} \tag{5}$$

Par exemple, pour $r = 2$, on pose

$$a_{12}(s) = -a(s), \qquad a_{22} = b(s) \qquad [\text{avec } a_{11}(s) = a_{21}(s) = 1];$$

on voit qu'on doit avoir

$$d(s) = a(s) + b(s) > 0$$

et les conditions (5) deviennent ici

$$a'(s) \geqq 0, \qquad b'(s) \geqq 0,$$

c'est-à-dire que les fonctions $a(s)$, $b(s)$ sont non décroissantes et de somme positive. Ce sont les conditions déjà trouvées (Sol., p. 269).