BULLETIN DE LA S. M. F.

V. ROMANOVSKY

Un théorème sur les zéros des matrices non négatives

Bulletin de la S. M. F., tome 61 (1933), p. 213-219
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1933__61__213_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UN THÉORÈME SUR LES ZÉROS DES MATRICES NON NÉGATIVES;

PAR M. V. ROMANOVSKY

(Tachkent).

1. Soit

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (a_{ik} \geqq 0),$$

une matrice non négative carrée. Les racines de l'équation caractéristique

$$(1) \qquad A(s) \equiv | sE - A | = 0$$

de la matrice A, ou, simplement, les racines ou les zéros de A, sont profondément étudiées par G. Frobenius ([1]) qui, parmi d'autres résultats, a montré que (1) a une racine réelle positive simple, r, surpassant en valeur absolue ou égale à toutes les autres racines de (1), pourvu que A soit une matrice indécomposable, c'est-à-dire telle que, par une permutation identique des lignes et des colonnes, elle ne peut être mise sous la forme

$$A = \begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix},$$

où P, Q, R, S sont des sous-matrices, P et S étant des matrices carrées, Q et R des matrices rectangulaires (en général) et où l'une au moins des matrices Q, R est nulle.

Le théorème que nous démontrerons plus loin donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que (1) ait des racines du module r de la racine maximale de A (comme est nommé r par G. Frobenius), la matrice A étant supposée indécomposable. Ce

([1]) G. FROBENIUS, *Ueber Matrizen aus nicht negativen Elementen* (*Sitzungsberichte der Pr. Akad. der Wissensch.*, 1912, p. 456-477).

théorème me semble être nouveau et assez intéressant et important pour être publié.

2. Supposons donc que A est indécomposable. Alors, évidemment, elle ne peut contenir des lignes ou des colonnes vides, ou, en d'autres termes, toute ligne et toute colonne de A contiendront au moins un élément a_{ih} qui n'est pas nul. Cette condition fait tout de suite voir qu'il y a toujours une suite d'éléments

$$a_{gh_1}, \quad a_{h_1 h_2}, \quad \ldots, \quad a_{h_k, g},$$

qui tous ne sont pas nuls. Nous appelons une telle suite *cycle de l'ordre k* de A et A *matrice cyclique de l'indice k*, si tous les cycles de A ont leurs ordres divisibles par k.

Évidemment, pour $k \geqq 2$, on doit avoir $a_{ii} = 0$ $(i = \overline{1, n})$ et $a_{hi} = 0$ toutes les fois que $a_{ih} \neq 0$ et $k > 2$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant qui fait l'objet de cette note.

Pour que la matrice non négative et indécomposable A ait pour racines toutes les racines de l'équation

$$s^k - r^k = 0, \tag{2}$$

où r est la racine maximale de A, il faut et il suffit que A soit une matrice cyclique de l'indice k.

Nous remarquons ici qu'on a toujours $r > 0$ pour les matrices A indécomposables et non négatives, parce que (¹) r est contenu entre la plus grande et la plus petite des sommes

$$a_i = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} \qquad (h = \overline{1, n})$$

qui sont toutes positives.

3. Démontrons d'abord que la condition énoncée est suffisante.

(¹) G. Frobenius, *Ueber Matrizen aus positiven Elementen* (*Sitzungsberichte der Pr. Akad. der Wissensch.*, 1908, p. 476).

On remarque que

$$(3) \qquad A(s) = s^n + \sum_{h=1}^{n} s^{n-h}(-1)^h \sum_{\alpha(h)} |\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n| \, a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n},$$

où $|\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n| = +1$ ou -1 suivant que la permutation α_1, α_2, ... α_n des nombres 1, 2, ..., n consiste d'un nombre pair ou impair d'inversions et $\sum\limits_{\alpha(h)}$ désigne une somme prise pour toutes les permutations α_1, α_2, ... α_n qui laissent fixes $n-h$ des nombres 1, 2, ..., n, ces $n-h$ nombres étant pris dans toutes les combinaisons possibles et les éléments correspondants

$$a_{i_1 i_1}, \quad a_{i_2 i_2}, \quad \ldots, \quad a_{i_{n-h} i_{n-h}}$$

qui entrent dans le produit $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}$ étant remplacés par l'unité.

Or, la matrice A est cyclique de l'indice k, donc, sous le signe $\sum\limits_{\alpha(n)}$ on ne rencontrera que les membres composés des cycles dont les ordres sont divisibles par k, d'où l'on conclut que le nombre h est aussi divisible par k. On voit de cette manière que $A(s)$ a la forme

$$A(s) = s^n + A_1 s^{n-k} + A_2 s^{n-2k} + \ldots + A_\mu s^{n-\mu k},$$

où $\mu k \leqq n$.

Soit maintenant s_0 une des racines de (2). On aura

$$\begin{aligned} A(s_0) &= s_0^n [1 + A_1 r^{-k} + A_2 r^{-2k} + \ldots + A_\mu r^{-\mu k}] \\ &= \left(\frac{s_0}{r}\right)^n [r^n + A_1 r^{n-k} + \ldots + A_\mu r^{n-\mu k}] \\ &= A(r) = 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve que notre condition est suffisante.

4. Pour démontrer sa nécessité nous établirons d'abord un lemme simple et très utile dans nombre des cas concernant l'étude des zéros des matrices.

Considérons le système d'équations linéaires homogènes

$$(4) \qquad s x_h = \sum_i x_i a_{ih} \qquad (i, h = \overline{1, n}).$$

LEMME. — *Soient*

$$s = |s| (\cos\theta + i \sin\theta),$$
$$x_h = |x_h| (\cos\theta_h + i \sin\theta_h) \qquad (h = \overline{1, n}).$$

les valeurs de s et x_h satisfaisant (4). *Alors*

$$(5) \qquad |s|\,|x_h| = \sum_i |x_i|\, a_{ih} \cos(\theta_i - \theta_h - \theta) \qquad (i, h = \overline{1, n}).$$

En effet, on a

$$|s|\,|x_h| \cos(\theta_h + \theta) = \sum_i |x_i|\, a_{ih} \cos\theta_i,$$
$$|s|\,|x_h| \sin(\theta_h + \theta) = \sum_i |x_i|\, a_{ih} \sin\theta_i,$$

d'où, en multipliant la première de ces relations par $\cos(\theta_h + \theta)$ et la seconde par $\sin(\theta_h + \theta)$ et ajoutant les résultats, on obtient (4).

Soit maintenant s_0 une des racines primitives de (2) satisfaisant (1), par exemple

$$s_0 = r\left(\cos\frac{2\pi}{k} + i \sin\frac{2\pi}{k}\right),$$

et soit $x_h^0\ (h = \overline{1, n})$ la solution correspondante du système (4). Les x_h^0 ne sont pas tous nuls et les relations (5) deviendront

$$(6) \qquad r\,|x_h^0| = \sum_i |x_i^0|\, a_{ih} \cos\left(\theta_i - \theta_h - \frac{2\pi}{k}\right) \qquad (i, h = \overline{1, n}).$$

On en conclut que

$$(7) \qquad r\,|x_h^0| < \sum_i |x_i^0|\, a_{ih} \qquad (i, h = \overline{1, n}),$$

si pour tous $a_{ih} \neq 0$ on n'a pas $\cos\left(\theta_i - \theta_h - \frac{2\pi}{k}\right) = 1$.

Nous allons montrer que pour tous $a_{ih} \neq 0$, on doit avoir

$$\cos\left(\theta_i - \theta_h - \frac{2\pi}{k}\right) = 1.$$

En effet, si cela n'avait pas lieu, on obtiendrait les inégalités (7) pour certaines valeurs de h au moins.

Mais, pour $s = r$, comme l'a démontré G. Frobenius ([1]), tous les mineurs du déterminant

$$A(s) = | sE - A |$$

sont positifs, puisque A est indécomposable. Donc, le système

$$(8) \qquad r y_i = \sum_h a_{ih} \qquad (i, h = \overline{1, n})$$

a une solution $y_i^0 > 0 \left(i = \overline{1, n}\right)$.

Multiplions les deux membres de (7) par y_h^0 et faisons la somme pour $h = \overline{1, n}$: on aura, en tenant compte de (8),

$$r \sum_h | x_h^0 | \, y_h^0 < \sum_i | x_i^0 | \sum_h a_{ih} y_h^0 = r \sum_i | x_i^0 | \, y_i^0,$$

ce qui est impossible ([2]).

Donc, on doit avoir $\cos\left(\theta_i - \theta_h - \frac{2\pi}{k}\right) = 1$ chaque fois que $a_{ih} \neq 0$.

Nous avons remarqué plus haut que la matrice A qui est indécomposable doit avoir des cycles tels que

$$a_{gh_1}, \quad a_{h_1 h_2}, \quad \ldots, \quad a_{h_{m-1} g},$$

où tous les éléments sont différents de zéro. Par conséquent, nous aurons

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\theta_g \quad - \theta_{h_1} - \frac{2\pi}{k}\right) = 1,\\
&\cos\left(\theta_{h_1} \quad - \theta_{h_2} - \frac{2\pi}{k}\right) = 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\cos\left(\theta_{h_{m-1}} - \theta_g - \frac{2\pi}{k}\right) = 1,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\theta_g \quad - \theta_{h_1} - \frac{2\pi}{k} = 2\sigma_1 \pi,\\
&\theta_{h_1} \quad - \theta_{h_2} - \frac{2\pi}{k} = 2\sigma_2 \pi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\theta_{h_{m-1}} - \theta_g - \frac{2\pi}{k} = 2\sigma_m \pi,
\end{aligned}$$

([1]) G. Frobenius, *loc. cit.*, p. 462.

([2]) La conclusion reste la même, $r < r$, si l'on suppose que quelques-unes des inégalités (7) sont remplacées par les égalités.

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ étant des nombres entiers. En ajoutant ces égalités, on obtient l'égalité

$$-m\frac{2\pi}{k} = 2(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_m)\pi,$$

qui montre que m doit être divisible par k.

De cette manière nous voyons que les ordres de tous les cycles de A doivent être des multiples de k, si A admet comme zéros les racines de l'équation (2), ce qui prouve la nécessité de notre condition.

5. Nous tirerons quelques conséquences immédiates du théorème démontré.

I. Si

$$A(0) = |A| \neq 0,$$

la matrice A ne peut être cyclique que d'un indice qui est un diviseur de l'ordre de A. Donc, si l'ordre n de A est un nombre premier, A est ou non cyclique ou cyclique de l'indice n. Elle peut être mise, dans le dernier cas, sous la forme

$$A = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{m-1,m} \\ a_{m1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

II. Pour que la matrice indécomposable A n'ait que la racine $r_1 = -r$ du module r, il faut et il suffit qu'on puisse la réduire, par une permutation identique des lignes et des colonnes, à la forme

$$A = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1,m+1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{m,m+1} & \ldots & a_{m,n} \\ a_{m+1,1} & \ldots & a_{m+1,m} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,m} & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

III. Si A est une matrice indécomposable et cyclique de l'indice k, l'équation (1) peut être écrite comme il suit :

$$A(s) = s^{\lambda}(s^k - r^k)(s^k - \lambda_1 r^k)\ldots(s^k - \lambda_m r^k) = 0.$$

où

$$\lambda + mk = n, \qquad \lambda \geqq 0, \qquad |\Lambda_1| = 1, \qquad \ldots, \qquad |\Lambda_m| = 1.$$

IV. La matrice non négative A est dite stocastique si

$$\sum_{h=1}^{n} a_{ih} = 1 \qquad (i = \overline{1, n}).$$

Si elle est de plus indécomposable et cyclique de l'indice k, elle admet comme zéros simples les racines de l'équation

$$s^k - 1 = 0,$$

puisque sa racine maximale est $s_0 = 1$. Inversement, elle est cyclique de l'indice k, si, étant indécomposable; elle admet les racines de cette équation comme ses zéros.