BULLETIN DE LA S. M. F.

J. WOLFF

Sur la série de Fourier d'une fonction monotone

Bulletin de la S. M. F., tome 61 (1933), p. 253-257
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1933__61__253_0>

SUR LA SÉRIE DE FOURIER D'UNE FONCTION MONOTONE ;

PAR M. JULIUS WOLFF.

THÉORÈME I. — *Pour que la série*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi) \tag{1}$$

soit la série de Fourier d'une fonction $g(\varphi)$ *sommable et non décroissante entre* 0 *et* 2π, *il faut et il suffit que, en posant*

$$c_0=-ia_0,\qquad c_{-1}=-b_1-ia_1,\qquad c_n=b_n-ia_n\qquad (n=1,2,\ldots), \tag{2}$$

on ait : 1°

$$\lim_{n\to\infty} c_n=0; \tag{3}$$

2° *La fonction*

$$f(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(nc_n-\frac{n+1}{2}c_{n+1}-\frac{n-1}{2}c_{n-1}\right)w^n \tag{4}$$

soit à partie réelle positive pour $|w|<1$ (¹).

La condition nécessaire 1° étant une propriété connue des séries de Fourier, bornons-nous à montrer que la condition 2° est nécessaire. Posons

$$w=\frac{z-1}{z+1},\qquad z=x+yi,\qquad t=-\cot\frac{\varphi}{2},\qquad 0\leq\varphi\leq 2\pi. \tag{5}$$

Alors $g(\varphi)$ devient une fonction $\psi(t)$ définie pour $-\infty<t<\infty$. Les hypothèses sur $g(\varphi)$ entraînent que $\psi(t)$ ne décroît jamais

---

(¹) M. C. CARATHEODORY a donné un critère analogue, mais moins simple (*Sitzungsberichte der preuss. Akademie der Wiss.*, 30, 1920, p. 573).

et que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(t)}{1+t^2} < \infty,$$

d'où résulte que $\psi(t)/1+t^2 \to 0$ pour $|t| \to \infty$.

L'intégrale de Stieltjes

$$(6) \qquad F(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-ti} - \frac{1}{1+ti}\right)d\psi(t)$$

représente une fonction holomorphe à partie réelle positive pour $x > 0$. Or, un calcul facile conduit à l'identité

$$(7) \qquad F(z) = f(w), \qquad |w| < 1.$$

Inversement, supposons remplies les conditions 1° et 2°. Posons $f(w) = F(z)$, z étant donné par (5). Alors $F(z)$ est holomorphe, à partie réelle positive pour $x > 0$, et réelle pour $z = 1$, donc

$$(8) \qquad f(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-ti} - \frac{1}{1+ti}\right)d\psi(t) + \lambda z + \mu,$$

où $\psi(t)$ est non décroissante, $\lambda \geqq 0$, μ réel et $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi(t)}{1+t^2} < \infty$ [1], d'où résulte que $\psi(t)/1+t^2 \to 0$ pour $|t| \to \infty$.

Posons $\psi\left(-\cot\frac{\varphi}{2}\right) = g(\varphi)$, $0 < \varphi < 2\pi$, alors $g(\varphi)$ est sommable et non décroissante.

Soient α_n, β_n les coefficients de Fourier de $g(\varphi)$ et définissons γ_0, γ_{-1}, γ_n au moyen des α_n, β_n, comme c_0, c_{-1}, c_n ont été définis au moyen des a_n, b_n par (2).

Un calcul facile montre que l'intégrale dans (8) est égale à ce que devient (4) si l'on remplace les c_n par les γ_n.

En vertu du développement $z = 1 + 2w + 2w^2 + \ldots$, nous obtenons, en égalant les coefficients des différentes puissances de w dans les deux membres de (8),

$$(9) \quad nc_n - \frac{n+1}{2}c_{n+1} - \frac{n-1}{2}c_{n-1} = n\gamma_n - \frac{n+1}{2}\gamma_{n+1} - \frac{n-1}{2}\gamma_{n-1} +$$ [illegible]

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

---

(1) *Voir* par exemple J. Wolff et F. de Kok, *Bull. de la Soc. math. de France*, t. 60, 1932, p. 226.

d'où résulte

$$c_n = \gamma_n - 2n\lambda + \text{const.} \qquad (n = 1, 2, \ldots); \tag{10}$$

l'hypothèse $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = 0$ permet de conclure que

$$c_n = \gamma_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

La fonction $g(\varphi)$ étant sommable et non décroissante, le théorème est démontré.

Théorème II. — *Pour que la série* (1) *soit la série de Fourier d'une fonction* $g(\varphi)$ *non décroissante et bornée entre* 0 *et* 2π, *il faut et il suffit que, avec les notations* (2) :

1° *La fonction*

$$h(w) = -\frac{1}{2}c_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(nc_n - \frac{n+1}{2}c_{n+1} - \frac{n-1}{2}c_{n-1}\right)w^n \tag{11}$$

soit holomorphe et à partie réelle positive pour $|w| < 1$.

2° *La limite radiale finie*

$$\lim_{w \to 1} h(w)/_{1-w}$$

existe (¹).

La nécessité des conditions 1° et 2° résulte de l'identité

$$h(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi(t)}{z - ti}, \tag{12}$$

où z et $\psi(t) = g(\varphi)$ sont définies par (5). En effet, l'intégrale (12) représente une fonction holomorphe et à partie réelle positive pour $x > 0$, et l'on a

$$\begin{aligned}\lim_{w \to 1} h(w)/_{1-w} &= \frac{1}{2}\lim_{w \to 1}\frac{1+w}{1-w}h(w) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z \to \infty} zh(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\psi(t) = \frac{1}{2\pi}\Big\{g(2\pi - 0) - g(+0)\Big\},\end{aligned}$$

quand w tend vers 1 en restant réel, de sorte que z tend vers l'infini sur l'axe réel.

(¹) Les critères de M. C. Carathéodory (*loc. cit.*, p. 566 ou 568) sont plus compliqués.

Inversement, si les conditions 1° et 2° sont remplies, posons $h(w) = H(z)$, z étant défini par (5). Alors $H(z)$ est à partie réelle positive pour $x > 0$, donc

$$h(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-ti}+\frac{1}{1+ti}\right)d\psi(t) + \lambda z + \mu + \nu i, \tag{13}$$

où $\psi(t)$ est non décroissante, $\lambda \geqq 0$, μ et ν réels. Posons

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi(t)}{1+t^2} + \mu = \mu_1,$$

alors on sait que $\mu_1 \geqq 0$ (¹). En indiquant par u la partie réelle de $h(w)$ pour z sur l'axe réel, $z = x > 0$, on a

$$u = \frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi(t)}{x^2+t^2} + \lambda x + \mu_1.$$

Or, de 2° il résulte que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi(t)}{x^2+t^2} + \lambda x^2 + \mu_1 x\right) < \infty,$$

d'où les conclusions

$$\lambda = \mu_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} d\psi(t) < \infty. \tag{14}$$

Posons $\psi\left(-\cot\frac{\varphi}{2}\right) = g(\varphi)$ et soient α_n et β_n les coefficients de Fourier de $g(\varphi)$. Définissons les γ_n par

$$\gamma_n = \beta_n - i\alpha_n, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

En vertu de (14), la formule (13) peut s'écrire

$$h(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi(t)}{z-ti} + \nu_1 i. \tag{15}$$

De 2° il résulte que $\nu_1 = 0$.

L'intégrale (15) est égale à ce que devient (11) en remplaçant les c_n par les γ_n, donc $c_1 = \gamma_1$ et

$$nc_n - \frac{n+1}{2}c_{n+1} - \frac{n-1}{2}c_{n-1} = n\gamma_n - \frac{n+1}{2}\gamma_{n+1} - \frac{n-1}{2}\gamma_{n-1}$$
$$(n = 1, 2, \ldots),$$

(¹) *Voir* par exemple J. Wolff et F. de Kok, *loc. cit.*, p. 225.

d'où

$$c_n = \gamma_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

La fonction $g(\varphi)$ étant non décroissante et bornée, le théorème est démontré.

M. Carathéodory a eu l'amabilité de me signaler le résultat suivant, conséquence de la comparaison de son théorème VII (*loc. cit.*, p. 573) au théorème I du présent article :

Si la suite de nombres a_n, b_n satisfait à la condition (4), *alors la condition* $\lim\limits_{n \to \infty} c_n =$ nombre réel *est nécessaire et suffisante pour que la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

soit la série de Fourier d'une fonction bornée.