PAUL DUBREIL

Sur quelques propriétés des systèmes de points dans le plan et des courbes gauches algébriques

Bulletin de la S. M. F., tome 61 (1933), p. 258-283

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1933__61__258_0>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES DE POINTS DANS LE PLAN ET DES COURBES GAUCHES ALGÉBRIQUES;

PAR M. PAUL DUBREIL.

Introduction et préliminaires. — Les problèmes relatifs à la détermination des courbes algébriques planes passant par un système de points donnés et les propriétés de ces systèmes ont été étudiés pour la première fois par Cramer et ont retenu depuis l'attention d'un assez grand nombre de mathématiciens : Cayley (1), Bacharach (2), Zeuthen (3), et plus récemment MM. Castelnuovo (4), Gambier (5) et Légaut (6). Après ces travaux, dont les derniers surtout contiennent des résultats nombreux et détaillés, il ne semble utile de revenir sur ces problèmes que pour donner, à l'aide d'une méthode très différente des indications générales et précises sur les nombres qui semblent caractériser le mieux un système de points.

Un résultat fondamental et qui semble avoir été un peu perdu de vue par quelques-uns des géomètres qui se sont occupés de ces questions, est fourni par le théorème de Hilbert relatif à l'*existence d'une base finie* (7) : le plan étant rapporté à un système de coordonnées homogènes, si nous considérons les formes $F(x_0, x_1, x_2)$ qui s'annulent en chaque point du système S considéré, toutes ces formes peuvent se représenter d'une manière linéaire et homogène au moyen d'un nombre fini d'entre elles; autrement dit, on a pour

---

(1) *Cambridge Math. Journal*, vol. 3; *Math. Ann.*, t. 30.
(2) *Math. Ann.*, t. 26.
(3) *Math. Ann.*, t. 31.
(4) *Torino Mem.*, (2), t. 42.
(5) *Annales Ecole Norm. Sup.*, (3), t. 41 et 42.
(6) *Annales de Toulouse*, t. 16, ou *Thèse*, Paris 1925.
(7) D. HILBERT, *Uber die Theorie der algebraischen Formen*, *Math. Ann.*, t. 36.

chacune d'elles une identité

$$(1) \qquad F \equiv A_1 F_1 + \ldots + A_k F_k.$$

où les A_i sont des formes. Les formes F précédentes engendrent un *idéal homogène*, que nous désignerons par $\mathfrak{a}_S$, et qui admet la base $(F_1, \ldots, F_k)$. L'étude du système de points revient à celle de cet idéal.

Le système de points ou l'idéal correspondant étant donnés, la base n'est pas définie d'une manière unique, ni même le nombre de formes dont elle se compose. Nous considérerons uniquement, parmi toutes les bases possibles, celle ou celles qui comprennent le nombre minimum de formes, k. Ce nombre est un de ceux qui caractérisent le système de points donné; si $k = 2$, ce système est l'intersection totale, ou complète, de deux courbes. J'ai indiqué, dans un travail dont les résultats nous serviront fréquemment ici (¹), comment on peut définir, pour un idéal homogène donné, une telle base comprenant le minimum de formes (Ch. I, § 3). D'après la manière dont une telle base est construite, les formes $F_1, \ldots, F_k$ dont elle se compose sont rangées par ordre de degrés $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ non décroissants : $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_k$. Ces degrés des formes de bases sont k nombres qui contribuent également à caractériser le système. Rappelons encore cette propriété évidente qu'une quelconque des formes de la base considérée ne peut pas s'exprimer d'une manière linéaire et homogène en fonction des précédentes. En particulier, F_2 n'est pas multiple de F_1. Les courbes $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ sont particulièrement importantes, on les appelle *première et deuxième courbes minima* du système de points. Nous supposerons en général que les deux courbes minima sont *sans partie irréductible commune*. Il en est certainement ainsi quand la première courbe minima est irréductible, hypothèse toujours vérifiée dans le cas particulièrement important d'un système de points section plane d'une courbe gauche irréductible.

Un autre résultat fondamental dû à Hilbert, concerne la

(¹) P. Dubreil, *Quelques propriétés des variétés algébriques se rattachant aux théories de l'Algèbre moderne*, travail devant paraître dans la collection éditée en mémoire de J. Herbrand (Hermann). J'utiliserai surtout ici les résultats du Chap. I. On pourra aussi consulter deux Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 196, p. 1270 et 1637.

fonction caractéristique d'un idéal homogène $\mathfrak{c}$, c'est-à-dire le nombre $\chi(\mathfrak{c}, l)$ de conditions linéairement indépendantes pour qu'une forme de degré l appartienne à l'idéal considéré. Si $\mathfrak{c}$ est un idéal engendré par des formes à $n+1$ variables, cette fonction est égale, pour l grand, à un polynome en l dont le degré est égal au nombre de dimensions maximum des différentes variétés irréductibles dont se compose la variété de $\mathfrak{c}$. Dans le cas de l'idéal $\mathfrak{a}_S$ attaché à un système de points, la fonction $\chi(\mathfrak{a}_S, l)$ n'est autre que le nombre de conditions linéairement indépendantes pour qu'une courbe de degré l passe par tous les points du système; dès que l est supérieur ou égal à une certaine limite, elle est constante et égale au nombre N des points du système.

Le comportement de la fonction caractéristique $\chi(\mathfrak{c}, l)$ d'un idéal quelconque pour toutes les valeurs de l, ou plutôt celui de la *fonction complémentaire*

$$\varphi(\mathfrak{c}, l) = C^n_{l+n} - \chi(\mathfrak{c}, l),$$

a fait l'objet d'intéressantes recherches de MM. Macaulay et Sperner [1] qui établissent la double inégalité

$$(2) \qquad |\varphi(\mathfrak{a}, l-1)|^{(n+1)} \leqq \varphi(\mathfrak{a}, l) \leqq (l)_{n+1},$$

où $(l)_{n+1} = C^n_{l+n}$, et où $u^{(n+1)}$ désigne la fonction de Macaulay de la variable u pour l'indice $n+1$. Ces inégalités sont *caractéristiques*, en ce sens que si l'on se donne une suite de nombres $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_l, \ldots$, satisfaisant à ces inégalités, il existe toujours un idéal homogène $\mathfrak{a}$, tel que l'on ait

$$\varphi(\mathfrak{a}, l) = \varphi_l.$$

De plus, comme l'a montré M. Sperner, on peut déduire des inégalités (2) les théorèmes de Hilbert sur l'existence d'une base finie et sur la forme de la fonction caractéristique pour les valeurs élevées de l.

Cependant, les inégalités (2) où l'on fait $n = 2$ ne permettent pas d'obtenir des résultats très précis concernant les systèmes de

---

[1] F. S. Macaulay, *Some properties of enumeration in the theory of modular systems* (*Proc. London Math. Soc.* t. 26, 1927, p. 531). — E. Sperner, *Über einen kombinatorischen Satz van Macaulay und seine Anwendungen auf die Theorie der Polynomideale* (*Abh. math. Seminar d. Univ. Hambourg*, t. 7, 1929, p. 149).

points. Cela tient au fait que l'idéal $\mathfrak{a}_S$ relatif à un tel système S présente une propriété qui le distingue essentiellement des idéaux homogènes les plus généraux, engendrés par des formes à trois variables; $\mathfrak{a}_S$ est défini par sa variété S, donc par sa décomposition en idéaux primaires, et celle-ci ne contient pas de composant primaire relatif à l'idéal (x_0, x_1, x_2), ou, comme nous dirons, de *composant impropre*. Or j'ai montré dans le travail déjà cité que, pour étudier la fonction caractéristique d'un idéal homogène $\mathfrak{a}$ n'admettant pas de composant impropre, il y a avantage à appliquer les inégalités de MM. Macaulay et Sperner à l'idéal $\bar{\mathfrak{a}}$ engendré par les formes $\bar{F}(x_1, \ldots, x_n)$ qui se déduisent des formes $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathfrak{a}$ par la substitution $x_0 = 0$ (l'espace linéaire $x_0 = 0$ ne contenant aucune des variétés irréductibles correspondant aux composants primaires de $\mathfrak{a}$). On a alors, en posant

$$\Delta(\mathfrak{a}, l) = \varphi(\mathfrak{a}, l) - \varphi(\mathfrak{a}, l-1) \qquad [= \varphi(\bar{\mathfrak{a}}, l)],$$

les inégalités

$$(3) \qquad [\Delta(\mathfrak{a}, l-1)]^{(n)} \leqq \Delta(\mathfrak{a}, l) \leqq (l)_n,$$

qui sont celles que nous utiliserons [1]. L'idéal $\mathfrak{a}$ n'admettant pas de composant impropre, il y a d'ailleurs une relation très simple entre les bases de $\mathfrak{a}$ et de $\bar{\mathfrak{a}}$: le nombre k est le même pour ces deux idéaux, et l'on a

$$\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_k), \qquad \bar{\mathfrak{a}} = (\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_k).$$

Nous allons appliquer ces résultats à l'idéal $\mathfrak{a}_S$ défini par un système de points S, et, d'une manière plus générale, à un idéal $\mathfrak{a}$ à trois variables, n'admettant pas de composant impropre : ceci revient à admettre que le système de points considéré peut comprendre des points multiples, qu'on peut imposer aux courbes passant par les points du système telles ou telles conditions de contacts en l'un ou l'autre de ces points. Le paragraphe 1 est consacré à l'étude, au point de vue base et fonction caractéristique, de l'idéal $\bar{\mathfrak{a}}$ correspondant; dans le paragraphe 2, j'étudie l'idéal $\mathfrak{a}$ lui-même. Enfin, les résultats ainsi obtenus admettent quelques

(1) P. Dubreil, *loc. cit.*, Chap. I, § 1, formule (7).

applications intéressantes à la théorie des courbes gauches : on trouvera ces applications au paragraphe **3**.

1. Base et fonction caractéristique de l'idéal $\bar{\mathfrak{a}}$. — L'idéal $\bar{\mathfrak{a}}$ est un idéal primaire impropre, car, d'après le choix de la droite $x_0 = 0$, sa variété se réduit à $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Les propriétés de la base de cet idéal résultent de la forme très simple de la fonction de Macaulay $u^{(2)}$ pour l'indice 2. On a

$$u^{(2)} = u + 1 \quad (\text{pour } u \neq 0); \qquad u^{(2)} = 0 \quad (\text{pour } u = 0).$$

Cela résulte immédiatement, soit de la définition de cette fonction, soit des formules générales qui permettent de la calculer (1).

THÉORÈME I. — *Si α_1 désigne le degré de la première forme de base* F_1 (2) *de $\bar{\mathfrak{a}}$, on a pour cet idéal*

$$k \leqq \alpha_1 + 1.$$

Certains des degrés $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ des formes $F_1, F_2, \ldots, F_k$ peuvent être égaux; supposons que l'on ait

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = \ldots = \alpha_{\varkappa_1} & = \beta_1, \\ \alpha_{\varkappa_1+1} = \ldots = \alpha_{\varkappa_1+\varkappa_2} & = \beta_2 > \beta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_{\varkappa_1+\ldots+\varkappa_{h-1}+1} = \ldots = \alpha_k & = \beta_h > \beta_{h-1} \qquad (\varkappa_1 + \ldots + \varkappa_h = k). \end{array}$$

L'idéal $\bar{\mathfrak{a}}$ admet donc $\varkappa_i$ formes fondamentales (2a) pour le degré β_i. Donc, en désignant par $\bar{\mathfrak{a}}_{\beta_i}$ le multiple fondamental de $\bar{\mathfrak{a}}$ pour ce degré, nous avons

$$\varphi(\bar{\mathfrak{a}}, \beta_i) = \varphi(\bar{\mathfrak{a}}_{\beta_i}, \beta_i) + \varkappa_i.$$

Or, en appliquant l'inégalité (2) à l'idéal $\bar{\mathfrak{a}}_{\beta_i}$, on a

$$\varphi(\bar{\mathfrak{a}}_{\beta_i}, \beta_i) \geqq \varphi(\bar{\mathfrak{a}}_{\beta_i}, \beta_i - 1) + 1 = \varphi(\bar{\mathfrak{a}}, \beta_i - 1) + 1 \qquad (i = 2, \ldots),$$

d'où

$$\varphi(\bar{\mathfrak{a}}, l) \geqq \varphi(\bar{\mathfrak{a}}, l - 1) + \varkappa_i + 1 \qquad \text{pour} \qquad l = \beta_i.$$

---

(1) E. SPERNER, *loc. cit.*, (9), p. 150-151.

(2) Nous devrions désigner les formes de $\bar{\mathfrak{a}}$ par la notation $\bar{F}$: nous conservons au cours de ce paragraphe simplement la lettre F pour la commodité de l'écriture.

(2a) Les formes F sont dites formes fondamentales. Nous appelons multiple fondamental de $\bar{\mathfrak{a}}$ pour le degré l l'idéal $\bar{\mathfrak{a}}_l$ engendré par les formes de $\bar{\mathfrak{a}}$ dont le degré est inférieur à l.

Pour un nombre l compris entre α_1 et α_k et différent des β_i, on a simplement

$$\varphi(\bar{\mathfrak{a}}, l) \geqq \varphi(\bar{\mathfrak{a}}, l-1) + 1.$$

Supposons ces inégalités écrites pour toutes les valeurs de l de $\alpha_1 + 1$ à α_k et ajoutons-les. Nous obtenons, en tenant encore compte de (2), et en remarquant que $\varphi(\bar{\mathfrak{a}}, \alpha_1) = \alpha_1$,

$$\alpha_k - \alpha_1 + k \leqq \varphi(\bar{\mathfrak{a}}, \alpha_k) \leqq \alpha_k + 1,$$

d'où

$$(4) \qquad k \leqq \alpha_1 + 1.$$

Remarque. — Si la limite précédente est atteinte : $k = \alpha_1 + 1$, on a nécessairement

$$\varphi(\bar{\mathfrak{a}}, \alpha_k) = \alpha_k + 1.$$

donc la fonction caractéristique de $\bar{\mathfrak{a}}$ est nulle pour $l = \alpha_k$.

Autre démonstration. — Les k formes de bases $F_1, F_2, \ldots, F_k$ satisfont aux hypothèses suivantes : elles sont premières dans leur ensemble (c'est-à-dire qu'il n'existe aucune forme les divisant toutes), elles sont rangées par ordre de degrés non décroissants : $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_k$, enfin, une quelconque d'entre elles n'appartient pas à l'idéal admettant pour base l'ensemble des précédentes. Ces hypothèses entraînent l'inégalité (4) [1].

Il en est ainsi quand $\alpha_1 = 1$. En effet, F_2 n'étant pas divisible par F_1, il résulte du théorème de Noether que toute forme F de degré $\alpha \geqq \alpha_2$ satisfait à l'identité

$$F \equiv A_1 F_1 + A_2 F_2.$$

on ne peut donc pas avoir $k > 2$.

Supposons le théorème vrai quand le degré minimum des formes considérées ne dépasse pas $\alpha_1 - 1$, et démontrons-le quand ce même degré est α_1. F_1 est égale au produit de α_1 facteurs linéaires dont un au moins, Φ_1, ne divise pas F_2. Nous avons donc, d'après

[1] La démonstration suivante, ainsi que celle du théorème II, s'inspire de raisonnements faits dans ma Thèse (Chap. IV, paragraphes 2 et 3; Paris, 1930), pour des théorèmes analogues concernant les idéaux de polynomes. Je l'ai reproduite ici complètement parce que les hypothèses, sensiblement différentes, exigent quelques modifications.

ce qui précède.

$$(5) \qquad F_1 = \Phi_1 \Phi'_1, \qquad F_i = A_i F_2 + B_i \Phi_1 \qquad (i = 3, \ldots, k),$$

où B_i est une forme de degré $\alpha_i - 1$. Considérons les formes Φ'_1, B_3, ..., B_k. Elles sont rangées par ordre de degrés non décroissants. Elles peuvent être divisibles par une même forme Ψ de degré μ ($\mu \geqq 0$), les quotients respectifs Ψ_1, Ψ_3, ..., Ψ_k étant premiers dans leur ensemble. Dans la suite Ψ_1, Ψ_3, ..., Ψ_k, aucune forme n'appartient à l'idéal admettant comme base l'ensemble des précédentes, car la relation

$$\Psi_i = U_1 \Psi_1 + U_3 \Psi_3 + \ldots + U_{i-1} \Psi_{i-1},$$

entraînerait, comme on le voit en multipliant les deux membres par $\Phi_1 \Psi$ et en tenant compte de (5),

$$F_i - A_i F_2 = U_1 F_1 + U_3 (F_3 - A_3 F_2) + \ldots + U_{i-1} (F_{i-1} - A_{i-1} F_2),$$

ce qui est impossible, puisque F_i n'appartient pas à l'idéal $(F_1, F_2, \ldots, F_{i-1})$. La suite Ψ_1, Ψ_3, ..., Ψ_k satisfait donc aux mêmes hypothèses, et nous avons

$$k - 1 \leqq \alpha_1 - 1 - \mu + 1,$$

c'est-à-dire

$$k \leqq \alpha_1 + 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Nous allons étudier maintenant la *fonction caractéristique* de l'idéal $\bar{\mathfrak{a}}$.

Cette fonction est identiquement nulle pour toutes les valeurs du degré l qui sont au moins égales à une certaine limite l_0, exposant de l'idéal $\bar{\mathfrak{a}}$. Nous commencerons par déterminer une limite supérieure simple de l_0.

Lemme. — *Si* λ *formes* F_1, F_2, ..., F_λ *de degrés* $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_\lambda$ *sont premières dans leur ensemble, il existe une forme* Ψ_λ *de degré* α_λ, *appartenant à* $(F_1, F_2, \ldots, F_\lambda)$, *et première à* F_1.

Il en est évidemment ainsi pour $\lambda = 2$.

Supposons donc la proposition vraie pour un nombre de formes inférieur ou égal à $\lambda - 1$, et démontrons quelle est vraie pour λ formes.

Soit Φ le plus grand commun diviseur de $F_1, F_2, \ldots, F_{\lambda-1}$: Φ est premier à F_λ et les formes $\Phi_1 = F_1 : \Phi, \ldots, \Phi_{\lambda-1} = F_{\lambda-1} : \Phi$, sont premières dans leur ensemble. On peut donc trouver une forme de même degré que $\Phi_{\lambda-1}$, appartenant à l'idéal $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{\lambda-1})$, et première à Φ_1. En la multipliant par Φ et par un facteur premier à Φ_1 de degré convenable, on obtient une forme

$$T = \Phi[A_1 \Phi_1 + \ldots + A_{\lambda-1} \Phi_{\lambda-1}] = A_1 F_1 + \ldots + A_{\lambda-1} F_{\lambda-1},$$

de degré α_λ, dans laquelle le crochet est premier à Φ_1. Cela étant, nous pouvons choisir la constante a_λ de manière que la forme

$$\Psi_\lambda = A_1 F_1 + \ldots + A_{\lambda-1} F_{\lambda-1} + a_\lambda F_\lambda,$$

soit première à F_1. Il suffit de montrer que cette forme ne s'annule pour aucune des valeurs de $\frac{y}{x}$ qui annulent F_1, c'est-à-dire Φ ou Φ_1. Les valeurs de $\frac{y}{x}$ qui sont racines de Φ, n'annulent pas Ψ_λ si a_λ est différent de zéro ; et pour que les valeurs de $\frac{y}{x}$ qui sont racines de Φ_1 (sans l'être de Φ) n'annulent pas Ψ_λ, il suffit que a_λ soit choisi différent d'un nombre fini de valeurs bien déterminées.

Les k formes de bases $F_1, F_2, \ldots, F_k$ de l'idéal $\mathfrak{a}$ satisfaisant aux hypothèses déjà formulées, désignons par $F_\varkappa$ la première d'entre elles telle que $F_1, F_2, \ldots, F_\varkappa$ soient premières dans leur ensemble ($\varkappa \geq 2$). D'après le lemme précédent, nous pouvons supposer $F_\varkappa$ première à F_1, puisque le lemme permet, s'il n'en est pas ainsi, de la remplacer par une forme de même degré ayant cette propriété.

Théorème II. — *On a*

$$(6) \qquad l_0 \leq \alpha_1 + \alpha_\varkappa - k + 1.$$

Nous devons montrer que le nombre $\alpha_1 + \alpha_\varkappa - k + 1$ est supérieur ou égal à l'exposant l_0 de l'idéal $\bar{\mathfrak{a}}$, et pour cela que, si l'on fait sur un système de coordonnées fixes X, Y la transformation

$$x = X + uY,$$

où u est un paramètre, $x^{\alpha_1+\alpha_\varkappa-k+1}$ appartient à l'idéal $\bar{\mathfrak{a}}$. Remarquons que l'on a, d'après le théorème de Noether,

$$x^{\alpha_1+\alpha_\chi-1} = H_1 F_1 + H_\chi F_\chi$$
$$= H_1 F_1 + (a_0 x^{\alpha_1-1} + \ldots + a_p x^{\alpha_1-p} y^{p-1} + \ldots + a_{\alpha_1-1} y^{\alpha_1-1}) F_\chi,$$

puisque F_χ est première à F_1; il suffit donc d'établir la relation

$$y^{\alpha_1+1-k+\omega} F_\chi \subset (F_1, x^\omega F_2, \ldots, x^\omega F_k) = \mathfrak{c}_\omega,$$

ou, en posant

$$\beta = \alpha_1 + 1 - k,$$

la relation un peu plus générale

$$y^{\beta+\omega} F_i \subset \mathfrak{c}_\omega \qquad (i = 2, \ldots, k).$$

Cette relation est évidente pour $\alpha_1 = 1$ ($k = 2$), car le quotient de y^ω par $\Phi_1 = y - tx$ est divisible par x^ω. Supposons donc le théorème vrai toutes les fois que le degré minimum des formes de base ne dépasse pas $\alpha_1 - 1$.

En désignant par Φ_1, comme dans la deuxième démonstration du théorème I, un facteur linéaire de F_1 ne divisant pas F_2, nous avons, d'après (4),

$$y^{\beta+\omega} F_i = A_i y^{\beta+\omega} F_2 + B_i y^{\beta+\omega} \Phi_1.$$

D'autre part, si

$$\Phi_1 = y - tx \qquad (F_1 = \Phi_1 \Phi'_1),$$

on a

$$y^\omega = q\Phi_1 + t^\omega x^\omega,$$
$$q = y^{\omega-1} + txy^{\omega-2} + \ldots + t^{\omega-1}x^{\omega-1},$$

d'où

$$y^{\beta+\omega} F_i = A_i y^\beta t^\omega x^\omega F_2 + y^\beta (qA_i F_2 + B_i y^\omega)\Phi_1.$$

En posant

$$V_i = y^\beta q A_i F_2 + B_i y^{\beta+\omega},$$

nous devons montrer que

$$V_i \subset (\Phi'_1, x^\omega F_2, x^\omega B_3, \ldots, x^\omega B_k) = \mathfrak{c}'_\omega.$$

Considérons l'idéal $(\Phi'_1, B_3, \ldots, B_\lambda, F_2, B_{\lambda+1}, \ldots, B_k)$, les formes de base étant supposées rangées par ordre de degrés non décroissants : en particulier, le degré α_2 de F_2 est *supérieur* à celui de B_λ. Les formes précédentes sont premières dans leur ensemble, sans quoi $F_1, F_2, \ldots, F_k$ ne le seraient pas. De plus. dans la suite partielle $\Phi'_1, B_3, \ldots, B_\lambda$, aucune forme n'appartient à l'idéal défini par les précédentes, car

$$B_i \subset (\Phi'_1, B_3, \ldots, B_{i-1})$$

entraînerait

$$F_i \subset (F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{i-1}).$$

Nous devons ici distinguer deux cas :

a. $$F_2 \not\subset (\Phi'_1, B_3, \ldots, B_\lambda).$$

Si nous considérons les k formes $\Phi'_1, B_3, \ldots, B_\lambda, F_2, B_{\lambda+1}, \ldots, B_k$, aucune n'appartient à l'idéal défini par les précédentes. Φ'_1 étant de degré $\alpha_1 - 1$, nous pouvons appliquer le théorème à l'idéal défini par ces formes ; on a

$$\left.\begin{matrix} y^{\beta_1+\omega} F_2 \\ y^{\beta_1+\omega} B_i \end{matrix}\right\} \subset \mathfrak{c}'_\omega,$$

où

$$\beta_1 = \alpha_1 - 1 - k + 1 = \alpha_1 - k = \beta - 1.$$

Or, V_i comprend le terme $y^{\beta+\omega} B_i$ pour lequel on a, *a fortiori*

$$y^{\beta+\omega} B_i \subset \mathfrak{c}'_\omega,$$

et des termes de la forme

$$x^{\tau-1} y^{\beta+\omega-\tau} F_2 \qquad (\tau = 1, \ldots, \omega).$$

Comme

$$y^{\beta+\omega-\tau} F_2 \subset (\Phi'_1, x^{\omega-\tau+1} F_2, \ldots, x^{\omega-\tau+1} B_k) = \mathfrak{c}'_{\omega-\tau+1},$$

ces termes appartiennent eux aussi à $\mathfrak{c}'_\omega$, et l'on a bien

$$V_i \subset \mathfrak{c}'_\omega.$$

b. $$F_2 \subset (\Phi'_1, B_3, \ldots, B_\lambda),$$

soit

(7) $$F_2 = U_1 \Phi'_1 + U_3 B_3 + \ldots + U_\lambda B_\lambda.$$

Le p. g. c. d. Ψ de $\Phi'_1, B_3, \ldots, B_\lambda$ divise aussi F_2 ; il en résulte que les formes $\Psi, B_{\lambda+1}, \ldots, B_k$ sont premières dans leur ensemble, et par conséquent que $\Phi'_1, B_3, \ldots, B_\lambda, B_{\lambda+1}, \ldots, B_k$ le sont aussi. D'autre part, aucune de ces formes n'appartient à l'idéal défini par les précédentes, et, puisque Φ'_1 est de degré $\alpha_1 - 1$, nous appliquerons le théorème à l'idéal $(\Phi'_1 B_3, \ldots, B_k)$. On a

$$y^{\beta+\omega} B_i \subset (\Phi'_1, x^\omega B_3, \ldots, x^\omega B_k) \subset \mathfrak{c}'_\omega.$$

Le terme $y^{\beta+\omega} B_i$ de V_i appartient donc à $\mathfrak{c}'_\omega$.

Les autres termes sont de la forme $A x^{\tau-1} y^{\beta+\omega-\tau} F_2$. Or, le degré α_2 de F étant supérieur à celui de B_λ, (7) entraîne

$$F_2 \subset (\Phi'_1, x B_3, \ldots, x B_\lambda, y B_3, \ldots, y B_\lambda).$$

et chacun des termes considérés appartient encore à $\mathfrak{c}'_\omega$, ce qui démontre le théorème.

Le degré de toute forme de base étant évidemment inférieur ou égal à l_0, nous déduisons du théorème précédent l'inégalité

$$(8) \qquad \alpha_k \leqq \alpha_1 + \alpha_\chi - k + 1.$$

Si $\chi = 2$, c'est-à-dire si l'idéal $\bar{\mathfrak{a}}$ provient d'un idéal $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_S$ correspondant à un *système de points* S *dont les deux premières courbes minima n'ont pas de partie commune*, les inégalités (6) et (8) deviennent

$$(6') \qquad l_0 \leqq \alpha_1 + \alpha_2 - k + 1,$$

$$(8') \qquad \alpha_k \leqq \alpha_1 + \alpha_2 - k + 1.$$

Nous pouvons maintenant étudier les variations de la fonction $\chi(\bar{\mathfrak{a}}, l)$.

Examinons d'abord le cas où χ est quelconque. Pour $l < \alpha_1$, on a évidemment

$$\varphi(\bar{\mathfrak{a}}, l) = 0, \quad \chi(\bar{\mathfrak{a}}, l) = l + 1.$$

Pour $l \geqq \alpha_1$, la fonction φ satisfait à l'inégalité (3), ce qui donne

$$\varphi(\bar{\mathfrak{a}}, l-1) + 1 \leqq \varphi(\bar{\mathfrak{a}}, l) \leqq l + 1,$$

d'où

$$0 \leqq \chi(\bar{\mathfrak{a}}, l) \leqq \chi(\bar{\mathfrak{a}}, l-1).$$

On peut remarquer que l'apparition de λ formes de base (fondamentales) pour le degré l entraîne

$$\chi(\bar{\mathfrak{a}}, l) \leqq \chi(\bar{\mathfrak{a}}, l-1) - \lambda.$$

En particulier, pour $l = \alpha_\chi$, on a

$$\chi(\bar{\mathfrak{a}}, \alpha_\chi) \leqq \chi(\bar{\mathfrak{a}}, \alpha_1) - \chi + 1 = \alpha_1 - \chi + 1.$$

A partir de cette valeur, la fonction χ continue à être monotone non croissante. Elle est identiquement nulle pour $l \geqq l_0$.

Les remarques suivantes permettent d'apporter quelques précisions supplémentaires. Soit Φ le p. g. c. d. des formes $F_1, \ldots, F_{x-1}$; posons $F_1 = \Phi\Phi_1, \ldots, F_{x-1} = \Phi\Phi_{x-1}$. Les formes $\Phi_1, \ldots, \Phi_{x-1}$ sont premières dans leur ensemble. Pour $l < \alpha_x$, l'étude de l'idéal $\bar{\mathfrak{a}}$ se ramène à celle de l'idéal $\mathfrak{b} = (\Phi_1, \ldots, \Phi_{x-1})$; on a, en désignant par ν le degré de Φ,

$$\varphi(\bar{\mathfrak{a}}, l) = \varphi(\mathfrak{b}, l - \nu),$$

c'est-à-dire

$$\chi(\bar{\mathfrak{a}}, l) = \chi(\mathfrak{b}, l - \nu) + \nu.$$

Pour $l \geqq \alpha_x$, on étudiera l'idéal $(F_1, \ldots, F_x) = \mathfrak{c}$. Nous pouvons remarquer que des multiples de F_x linéairement indépendants de degré $l < \alpha_x + \nu$ sont certainement linéairement indépendants mod $(F_1, \ldots, F_{x-1})$, puisque Φ est premier à F_x. Il en résulte qu'on a

$$\varphi(\mathfrak{c}, l) = \varphi(\mathfrak{b}, l - \nu) - l - \alpha_x + 1 \qquad (\alpha_x \leqq l < \alpha_x + \nu).$$

d'où

$$\chi(\bar{\mathfrak{a}}, l) \leqq \chi(\mathfrak{c}, l) = \chi(\mathfrak{b}, l - \nu) + \nu - (l - \alpha_x + 1),$$

l'égalité ayant lieu évidemment pour $l < \alpha_{x+1}$.

Supposons maintenant $x = 2$.

Pour $l < \alpha_1$, on a toujours

$$\varphi(\bar{\mathfrak{a}}, l) = 0, \qquad \chi(\bar{\mathfrak{a}}, l) = l + 1.$$

Pour $\alpha_1 \leqq l < \alpha_2$, on a

$$\varphi(\bar{\mathfrak{a}}, l) = l - \alpha_1 + 1, \qquad \chi(\bar{\mathfrak{a}}, l) = \alpha_1.$$

Dans l'intervalle $(\alpha_2, l_0 - 1)$, l'inégalité (3) donne encore

$$0 \leqq \chi(\bar{\mathfrak{a}}, l) \leqq \chi(\bar{\mathfrak{a}}, l - 1).$$

La fonction $\chi(\bar{\mathfrak{a}}, l)$ est donc non croissante. En remarquant que l'idéal $\mathfrak{a}$ est diviseur de l'idéal (F_1, F_2), on voit que, si les deux formes F_1, F_2 sont premières entre elles, on a constamment, pour $\alpha_2 \leqq l \leqq \alpha_1 + \alpha_2 - 1$,

$$\chi(\bar{\mathfrak{a}}, l) \leqq \alpha_1 + \alpha_2 - 1 - l.$$

On peut également trouver une borne *inférieure* de la fonction $\chi(\bar{\mathfrak{a}}, l)$ dans l'intervalle $(\alpha_2, l_0 - 1)$, car on aura évidemment une limitation supérieure de $\varphi(\bar{\mathfrak{a}}, l)$ en prenant le cas où les $k-1$ formes $F_2, F_3, \ldots, F_k$ sont de degré α_2, et où les multiples de degré l de ces formes et de F_1 sont linéairement indépendants jusqu'au moment où ils constituent *toutes* les formes de degré l. On a donc

$$\alpha_1 - (k-1)(l - \alpha_2 + 1) \leqq \chi(\bar{\mathfrak{a}}, l).$$

Si l'on pose

$$\alpha_1 = (k-1)q + r \qquad (0 \leqq r < k-1),$$

l'inégalité précédente s'écrit

$$(k-1)(q + \alpha_2 - 1 - l) + r \leqq \chi(\mathfrak{a}, l),$$

et l'on en déduit pour l_0 la limite inférieure

$$l_0 \geqq \alpha_2 + \mathcal{E}\left(\frac{\alpha_1}{k-1}\right),$$

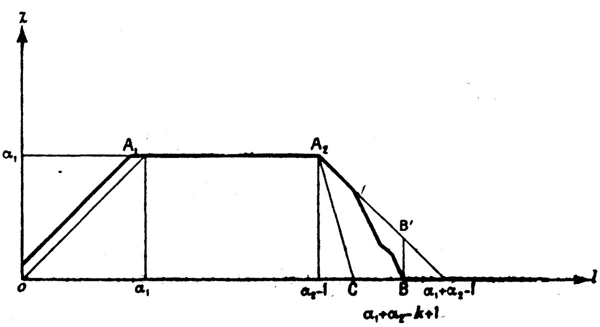
$\mathcal{E}(u)$ désignant l'entier immédiatement inférieur à u.

Enfin, pour $l \geqq l_0$, la fonction $\chi(\bar{\mathfrak{a}}, l)$ est identiquement nulle.

Réciproquement, toute fonction de l variant comme nous venons de l'indiquer est, d'après un théorème de M. Sperner (¹), la fonction caractéristique d'un idéal homogène impropre à deux variables.

Il est peut-être utile de résumer les résultats qui viennent d'être obtenus dans le cas où F_2 est première à F_1 au moyen de la figure suivante :

Fig. 1.



2. Étude des systèmes de points. — Soit

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_H]$$

(¹) E. Sperner, *loc. cit.*, p. 158.

un idéal homogène engendré par des formes à trois variables et n'admettant pas de composant impropre. Chacun des composants primaires $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_H$ a comme variété un point dans le plan; si chaque $\mathfrak{q}_i$ se confond avec l'idéal engendré par toutes les formes s'annulant au point M_i qui lui correspond, l'idéal $\mathfrak{a}$ est engendré par toutes les formes s'annulant simultanément en tous les points M_i; nous le désignerons alors par $\mathfrak{a}_S$, S étant le système des points M_i.

La droite $x_0 = 0$ ne contenant aucun des points M_i, nous pouvons appliquer à l'idéal $\bar{\mathfrak{a}}$ engendré par toutes les formes $F(0, x_1, x_2)$, où $F(x_0, x_1, x_2) \subset \mathfrak{a}$, les résultats du paragraphe 1. En revenant à $\mathfrak{a}$, nous avons alors des propriétés de cet idéal.

Le théorème I donne ainsi [1].

Théorème I'. — *Si $k = k(\mathfrak{a})$ désigne le nombre des formes de base de $\mathfrak{a}$, on a*

$$k \leqq \alpha_1 + 1,$$

α_1 étant le degré minimum des formes de $\mathfrak{a}$ (degré de la première courbe minima de S*).*

La fonction caractéristique $\chi(\mathfrak{a}, l)$ satisfaisant à la relation

$$\chi(\mathfrak{a}, l) - \chi(\mathfrak{a}, l-1) = \chi(\bar{\mathfrak{a}}, l), \tag{9}$$

nous voyons :

1° que cette fonction est *croissante* pour $l < l_0$;

2° que les points qui représentent ses valeurs dans un système d'axes l, χ sont, pour $l \geqq \alpha_1$, les sommets d'une ligne polygonale *convexe*, tournant sa concavité vers les χ négatifs (puisque $\chi(\bar{\mathfrak{a}}, l) \leqq \chi(\bar{\mathfrak{a}}, l-1)$);

3° qu'enfin cette fonction conserve une valeur constante N pour $l \geqq l_0 - 1$. Si tous les points du système S sont distincts, N n'est autre que le nombre de ces points [2].

---

[1] Nous nous appuyons ici sur la relation : $k(\mathfrak{a}) = k(\bar{\mathfrak{a}})$; *voir* P. Dubreil, *loc. cit.*, (8), Chap. I, § 3.

[2] N points imposent en effet N conditions indépendantes aux courbes de degré assez élevé. Algébriquement, on peut remarquer que, pour l grand

$$\chi(\mathfrak{a}, l) = \sum_{i=1}^{H} \chi(\mathfrak{q}_i, l)$$

et que, pour un système de N points distincts, on a $H = N$ et $\chi(\mathfrak{q}_i, l) = 1$.

Nous voyons que la limite l_0 introduite dans le paragraphe précédent joue ici un rôle important. Rappelons que les degrés α_1, α_2, ..., α_k des différentes formes de base de $\mathfrak{a}$ satisfont aux inégalités : $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_k \leqq l_0$.

Nous allons préciser ces résultats dans le cas où les deux premières courbes minima $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ sont sans partie commune. Nous supposons donnés les degrés α_1, α_2 de ces courbes et le nombre k des formes de base, et nous cherchons entre quelles limites peut être comprise la fonction $\chi(\mathfrak{a}, l)$. Nous obtiendrons en particulier les limites entre lesquelles peut être compris le nombre N.

La figure 1 permet de résoudre aisément ce problème, en tenant compte de (9). La ligne brisée descendante qui représente, pour $l \geqq \alpha_2$, la fonction $\chi(\mathfrak{a}, l)$ est comprise entre $A_2B'B$ et A_2CB.

Cela étant, pour $l < \alpha_1$, on a

$$\chi(\mathfrak{a}, l) = \frac{(l+1)(l+2)}{2},$$

puis, pour $\alpha_1 \leqq l < \alpha_2$,

$$\chi(\mathfrak{a}, l) = \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2} + \alpha_1(l - \alpha_1 + 1).$$

Soit maintenant

$$\alpha_2 \leqq l \leqq \alpha_1 + \alpha_2 - k.$$

Nous avons

$$\chi(\mathfrak{a}, l) \leqq \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2} + (\alpha_2 - \alpha_1)\alpha_1 + \alpha_1 - 1 + \alpha_1 - 2 + \ldots + \alpha_1 - (l - \alpha_2 + 1),$$

c'est-à-dire

$$\chi(\mathfrak{a}, l) \leqq \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2} + (l - \alpha_1 + 1)\alpha_1 - \frac{(l - \alpha_2 + 1)(l - \alpha_2 + 2)}{2} = \mathrm{H}(l).$$

A partir du point $l = \alpha_2 - 1$, la parabole $\chi = \mathrm{H}(l)$ est au-dessous de la droite D d'équation

$$(\mathrm{D})\quad \chi = \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2} + (l - \alpha_1 + 1)\alpha_1 = \alpha_1\alpha_2 - \frac{\alpha_1(\alpha_1 - 1)}{2} + (l - \alpha_2 + 1)\alpha_1.$$

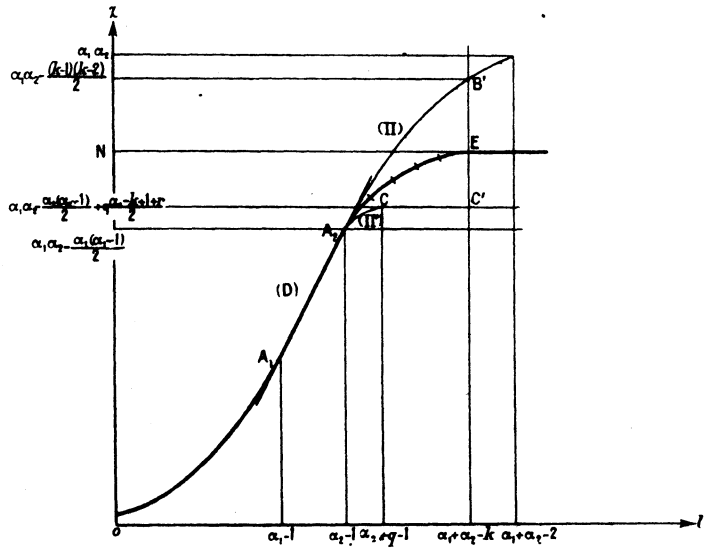
Pour $l = \alpha_1 + \alpha_2 - k \geqq l_0 - 1$, on a certainement $\chi(\mathfrak{a}, l) = \mathrm{N}$, de sorte que

$$N \leqq H(\alpha_1 + \alpha_2 - k) = \alpha_1 \alpha_2 - \frac{(k-1)(k-2)}{2}.$$

En posant, comme précédemment,

$$(10) \qquad \alpha_1 = (k-1)q + r \qquad (0 \leqq r < k-1),$$

Fig. 2.



nous avons, pour $l \leqq \alpha_2 + q - 1$,

$$\chi(a, l) \geqq \chi(a, \alpha_2 - 1) + \alpha_1 - (k-1) + \alpha_1 - 2(k-1) + \ldots + \alpha_1 - (l - \alpha_2 + 1)(k-1),$$

c'est-à-dire

$$\chi(a, l) \geqq \alpha_1 \alpha_2 - \frac{\alpha_1(\alpha_1 - 1)}{2} + \alpha_1(l - \alpha_2 + 1) - (k-1)\frac{(l - \alpha_2 + 1)(l - \alpha_2 + 2)}{2} = H'(l),$$

puis, pour $l > \alpha_2 + q - 1$,

$$\chi(a, l) \geqq \chi(a, \alpha_2 + q - 1),$$

c'est-à-dire

$$\chi(a, l) \geqq \alpha_1 \alpha_2 - \frac{\alpha_1(\alpha_1 - 1)}{2} + q\frac{\alpha_1 - k + r + 1}{2}.$$

En particulier, N est supérieur ou égal à cette limite.

Les résultats relatifs à la fonction caractéristique peuvent être résumés au moyen de la figure ci-dessus.

Pour $\alpha_2 - 1 \leq l \leq \alpha_1 + \alpha_2 - k$, la ligne polygonale représentative est comprise dans le domaine $A_2B'EC'CA_2$.

Quant au nombre N, *il satisfait aux inégalités*

$$\text{(11)} \qquad N \leq \alpha_1\alpha_2 - \frac{(k-1)(k-2)}{2} \leq \alpha_1\alpha_2$$

et

$$\text{(12)} \qquad N \geq \alpha_1\alpha_2 - \frac{\alpha_1(\alpha_1-1)}{2} - q\,\frac{\alpha_1 - k + r + 1}{2},$$

$$\text{(12')} \qquad \geq \alpha_1\alpha_2 - \frac{\alpha_1(\alpha_1-1)}{2} + (k-1)\,\frac{q(q-1)}{2},$$

$$\text{(12'')} \qquad \geq \alpha_1\alpha_2 - \frac{\alpha_1(\alpha_1-1)}{2} \geq \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2}.$$

Remarque I. — L'inégalité (12″) a été établie par M. Légaut ([1]). Elle lui permet d'obtenir sur les systèmes de points un résultat que nous allons rappeler rapidement. Soit S un système de N points, C_1 et C_2 ses deux courbes minima que nous supposons sans partie commune et de degrés respectifs α_1 et α_2. C_1 et C_2 se recoupent en dehors de S suivant un système S_1, appelé *premier réduit* de S. C_1 *n'est certainement pas première courbe minima de* S_1. En effet, en désignant par β_1, β_2 les degrés des courbes minima de S_1, nous avons d'après (12″)

$$\frac{\beta_1(\beta_1+1)}{2} \leq \alpha_1\alpha_2 - N \leq \frac{\alpha_1(\alpha_1-1)}{2},$$

c'est-à-dire

$$\beta_1 \leq \alpha_1 - 1.$$

Il en résulte que si l'on construit le réduit S_2 de S_1, et ainsi de suite, on obtient un nombre fini de systèmes de points, et que le dernier d'entre eux ne peut être qu'une *intersection totale*.

Remarque II. — L'inégalité (11) montre que N ne peut être égal à $\alpha_1\alpha_2$ que si $k = 2$, c'est-à-dire pour l'*intersection totale* de deux courbes. Pour un tel système, $q = \alpha_1$ et par suite l'inégalité (12′) montre qu'on a effectivement $N = \alpha_1\alpha_2$. Il n'y a rien de sur-

([1]) M. Légaut. Thèse (Paris 1925), p. 72.

prenant à retrouver ainsi le théorème de Bezout pour l'intersection de deux courbes planes se coupant en des points distincts : dans des cas plus généraux, certaines propriétés de la fonction caractéristique de Hilbert interviennent dans sa démonstration ([1]).

On voit de même que, si $k = \alpha_1 + 1$,

$$N = \alpha_1 \alpha_2 - \frac{\alpha_1(\alpha_1 - 1)}{2}.$$

Donnons encore quelques applications très simples des inégalités (11) et (12).

Considérons le système S de N points situés sur une conique; l'idéal $\mathfrak{a}_S$ admet 2 ou 3 formes de base. Si $k = 2$, on a $N = 2\alpha_2$, N est donc pair. Si $k = 3$, on a $N = 2\alpha_2 - 1$, N est donc impair. Réciproquement, tout système de $N = 2\alpha_2$ points sur une conique est l'intersection totale de cette conique et d'une courbe de degré α_2. Tout système de $N = 2\alpha_2 - 1$ points sur une conique définit un idéal admettant trois formes de base : le premier membre de l'équation de la conique, et deux formes de degré α_2.

On peut considérer que les systèmes de points les plus simples après les intersections totales sont ceux pour lesquels l'idéal correspondant admet *seulement trois formes de base*. Une condition *suffisante* pour qu'il en soit ainsi est que l'on ait

$$N > \alpha_1 \alpha_2 - 3 \quad \text{([2])}.$$

Les conditions nécessaires sont, en posant

$$\alpha_1 = 2q + r \qquad (0 \leqq r \leqq 1),$$

que l'on ait

$$\alpha_1 \alpha_2 - \frac{\alpha_1(\alpha_1 - 1)}{2} + q\,\frac{\alpha_1 + r - 2}{2} \leqq N \leqq \alpha_1 \alpha_2 - 1.$$

c'est-à-dire, si $\alpha_1 = 2\mu$,

$$\alpha_1 \alpha_2 - \frac{\alpha_1(\alpha_1 - 1)}{2} + \mu(\mu - 1) \leqq N \leqq \alpha_1 \alpha_2 - 1,$$

([1]) *Cf.* B. L. van der WAERDEN, *Eine Verallgemeinerung des Bézoutschen Theorems* (*Math. Ann.*, t. 99, p. 497).

([2]) L'inégalité $\frac{(k-1)(k-2)}{2} \leqq \alpha_1 \alpha_2 - N$ fournit en effet, elle aussi, une limite supérieure de k.

et si $\alpha_1 = 2\mu + 1$,

$$\alpha_1\alpha_2 - \frac{\alpha_1(\alpha_1-1)}{2} + \mu^2 \leqq N \leqq \alpha_1\alpha_2 - 1.$$

D'une manière plus générale, on peut se demander, étant donné un système S de N points, pour lequel on connaît les degrés α_1, α_2 des deux premières courbes minima, entre quelles limites est compris le nombre k des formes de base.

Si nous posons

$$N = \alpha_1\alpha_2 - \mu, \qquad \frac{(\beta-1)(\beta-2)}{2} = \mu \qquad (\beta > 1),$$

nous avons

$$k \leqq \beta.$$

Soit d'autre part

$$N = \alpha_1\alpha_2 - \frac{\alpha_1(\alpha_1-1)}{2} + \frac{\nu}{2} \qquad (\nu \geqq 0).$$

On a

$$\nu \geqq q(\alpha_1 - k + 1 - r) = \frac{(\alpha_1 - r)(\alpha_1 - k + 1 + r)}{k-1} = \frac{\alpha_1^2 - r^2}{k-1} - (\alpha_1 - r);$$

c'est-à-dire, puisque $\nu + \alpha_1 - r > 0$,

$$k - 1 \geqq \frac{\alpha_1^2 - r^2}{\nu + \alpha_1 - r} \geqq \frac{\alpha_1^2 - r^2}{\alpha_1 + \nu}.$$

Or, *si* $\alpha_1 = 2m$, on a $r \leqq m - 1$ et par conséquent

$$k - 1 \geqq \frac{4m^2 - (m-1)^2}{2m + \nu} = \frac{(m+1)(3m-1)}{2m+\nu}.$$

Si $\alpha_1 = 2m + 1$, on a $r \leqq m$ et par conséquent

$$k - 1 \geqq \frac{(2m+1)^2 - m^2}{2m + 1 + \nu} = \frac{(m+1)(3m+1)}{2m+1+\nu}.$$

Exemple. — Considérons sur une courbe du quatrième degré ($\alpha_1 = 4$) un système de $N = 4\alpha_2 - 5$ points. On a

$$\mu = 5, \qquad \nu = 2, \qquad k \leqq \beta < 5, \qquad k - 1 \geqq \frac{15}{6}, \qquad \text{donc} \qquad k = 4.$$

Si l'on considère $N = 4\alpha_2 - 4$ points, on a

$$\mu = \nu = 4, \qquad k \leqq \beta < 5, \qquad k - 1 \geqq \frac{15}{8}, \qquad \text{donc} \qquad k = 3 \quad \text{ou} \quad k = 4.$$

Nous terminerons l'étude des systèmes de points en montrant sur un exemple comment les résultats du paragraphe 1 permettent de déterminer, au moins dans certains cas, la base de l'idéal défini par un système de points dont les deux premières courbes minima ont une partie commune.

Considérons 18 points dont 14 sont sur une conique γ d'équation $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0$, les 4 autres en dehors. Toute courbe de degré l inférieur à 7 passant par les points du système S ainsi défini comprend nécessairement la conique γ, et a une équation de la forme

$$\Phi(A_1 \Phi_1 + A_2 \Phi_2) = 0,$$

où A_1 et A_2 sont deux formes arbitraires de degré $l - 4$ et où $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ sont deux coniques distinctes passant par les 4 points non sur γ. On a donc

$$\chi(\mathfrak{a}, 4) = 13, \qquad \chi(\mathfrak{a}, 5) = 15, \qquad \chi(\mathfrak{a}, 6) = 17.$$

Il y a nécessairement au moins une courbe du septième degré $F = 0$ passant par les points de S et ne comprenant pas γ comme partie irréductible, car s'il n'en était pas ainsi, on aurait $\chi(\mathfrak{a}, 7) = 19$ alors qu'évidemment $\chi(\mathfrak{a}, 7) \leqq 18$. D'autre part $\mathfrak{a}_S$ ne peut pas contenir deux formes du septième degré linéairement indépendantes modulo $(\Phi\Phi_1, \Phi\Phi_2)$, car on aurait alors

$$\chi(\mathfrak{a}, 7) = 17, \qquad \text{donc} \qquad l_0 \geqq 9, \qquad k \geqq 4,$$

tandis que, d'après (6),

$$l_0 + k \leqq 4 + 7 + 1 = 12.$$

Nous avons donc

$$\chi(7) = 17, \qquad l_0 = 8, \qquad \text{d'où} \qquad k \leqq 4.$$

Voyons si $\mathfrak{a}_S$ peut admettre une quatrième forme de base du huitième degré. Considérons pour cela l'idéal $\bar{\mathfrak{a}}_S$ et comparons-le à l'idéal $(\bar{F}, \overline{\Phi\Phi}_1, \overline{\Phi\Phi}_2)$. Toute forme du huitième degré appartient à l'idéal $(\bar{F}, \bar{\Phi})$, puisque $8 \geqq 7 + 2 - 1$, donc à l'idéal $(\bar{F}, \overline{\Phi\Phi}_1, \overline{\Phi\Phi}_2)$, $(6 \geqq 2 + 2 - 1)$. On a donc

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mathfrak{a}}_S &= (\bar{F}, \overline{\Phi\Phi}_1, \overline{\Phi\Phi}_2) \\ \mathfrak{a}_S &= (F, \Phi\Phi_1, \Phi\Phi_2). \end{aligned}\right. \qquad k = 3$$

Dans l'exemple précédent, on arriverait plus rapidement au résultat en considérant S comme l'ensemble de deux intersections totales $\Phi_1.\Phi_2$ et $\Phi.F$, $F = 0$ étant une courbe de degré 7 passant par les points situés sur (γ), et en remarquant qu'on peut assujettir cette courbe à passer par les quatre autres points. On a alors

$$\mathfrak{a}_S = [(\Phi_1, \Phi_2), (\Phi, F)] = (F, \Phi\Phi_1, \Phi\Phi_2).$$

Mais la méthode qui vient d'être indiquée est valable dans des cas plus étendus que ce raisonnement. On pourra s'en rendre compte en étudiant par exemple un système constitué par 5 points situés sur une droite et 16 points formant l'intersection complète de deux courbes de degré 4.

3. **Quelques applications à la théorie des courbes gauches algébriques.** — Soit C une courbe gauche algébrique; nous désignons par $\mathfrak{c}$ l'idéal engendré par toutes les formes $F(x_0, x_1, x_2, x_3)$ s'annulant sur la courbe, par $\bar{\mathfrak{c}}$ l'idéal engendré par les formes $F(0, x_1, x_2, x_3)$, enfin par $\mathfrak{a}$ l'idéal engendré par les formes $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ s'annulant en chacun des points d'intersection M_i de la courbe C avec le plan $x_0 = 0$, qui est supposé naturellement ne contenir aucune partie irréductible de C. On a $\bar{\mathfrak{c}} \subseteq \mathfrak{a}$; rappelons que *si ces deux idéaux sont égaux, la courbe* C *est dite de première espèce* (1). Cette définition exprime que toute courbe du plan $x_0 = 0$ passant par le système S des points M_i est section par ce plan d'une surface de même degré contenant la courbe. Toute intersection totale ou toute courbe complémentaire d'une intersection totale est de première espèce.

Il résulte de la définition même des courbes de première espèce que certaines propriétés des systèmes de points dans le plan s'étendent immédiatement à ces courbes. Ainsi, puisque les idéaux $\mathfrak{c}$ et $\bar{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}$ admettent le même nombre de formes de base :

Théorème.— *Si* C *est une courbe de première espèce, l'idéal* $\mathfrak{c}$ *admet au plus* $\alpha_1 + 1$ *formes de base,* α_1 *désignant le degré de*

(1) P. Dubreil, *Quelques propriétés des variétés algébriques se rattachant aux théories de l'Algèbre moderne*, Chap. II. La définition précédente est indépendante du choix du plan $x_0 = 0$.

la première surface minima de C :

$$k \leqq \alpha_1 + 1.$$

D'autre part, si la courbe C, toujours de première espèce, est supposée irréductible, ses surfaces minima sont irréductibles et il en est de même des courbes minima du système S, qui n'ont donc pas de partie commune. Par conséquent *les inégalités* (11) et (12) *où* N *désigne le degré de* C, *sont valables*. En particulier, le nombre k admet une autre limite supérieure définie par la relation

$$\frac{(k-1)(k-2)}{2} \leqq \alpha_1 \alpha_2 - N.$$

Comme nous l'avons vu, il en résulte que l'on a $k = 3$ si N est égal à $\alpha_1 \alpha_2 - 1$ ou à $\alpha_1 \alpha_2 - 2$. Les courbes pour lesquelles $k = 3$ constituent à elles seules l'ensemble des points communs à trois surfaces algébriques (évidemment minima pour la courbe), ensemble qui dans le cas général se compose d'une courbe et d'un système de points.

Théorème. — *Pour toute courbe gauche complémentaire d'une droite, on a* $k = 3$. *Il en est de même pour toute courbe gauche complémentaire d'une conique et non située sur une quadrique* [1].

Remarquons en effet qu'une courbe appartenant à l'une des deux catégories définies dans l'énoncé est de première espèce, comme courbe complémentaire d'une intersection totale. Soient α_1, α_2 les degrés des surfaces dont la courbe forme, avec une droite ou une conique, l'intersection totale. On voit immédiatement que, dans les deux cas, ces surfaces sont les deux premières surfaces minima de la courbe. Comme le degré N de la courbe est égal à $\alpha_1 \alpha_2 - 1$ ou $\alpha_1 \alpha_2 - 2$, on a bien la proposition énoncée.

Pour une courbe gauche de première espèce, le nombre l_0, introduit dans les paragraphes précédents a une signification bien simple. Nous avons vu que $\chi(\mathfrak{a}, l) = N$ pour $l \geqq l_0 - 1$. Il en résulte que l'expression $\chi(\mathfrak{c}, l) = Nl - P + 1$ de la fonction carac-

---

[1] Si la courbe C était située sur une quadrique, la démonstration suivante serait en défaut. Comme on le voit directement, la courbe serait alors une intersection totale : $k = 2$.

téristique de l'idéal $\mathfrak{c}$, ou encore de la *postulation de la courbe* C, valable pour l grand, l'est dès que $l \geqq l_0 - 2$ (et seulement pour ces valeurs). Or, nous avons

$$l_0 \leqq \alpha_1 + \alpha_2 - k - 1.$$

Par suite, on a

$$(13) \qquad \chi(\mathfrak{c}, l) = Nl - P + 1,$$

dès que

$$l \geqq \alpha_1 + \alpha_2 - k - 1,$$

si C *est une courbe de première espèce;* en particulier, dès que $l \geqq \alpha_1 + \alpha_2 - 3$ si C est l'intersection complète de deux surfaces de degrés α_1, α_2; dès que $l \geqq \alpha_1 + \alpha_2 - 4$ si $\mathfrak{c}$ admet seulement trois formes de base; dès que $l \geqq \alpha_1 + \alpha_2 - 5$, si C est quelconque.

On sait que dans la formule précédente (13), P désigne le genre de la courbe C si celle-ci n'admet pas de points doubles effectifs. En nous plaçant dans cette hypothèse, nous allons obtenir facilement l'expression du genre d'une courbe de première espèce, à partir de la fonction caractéristique $\chi(\mathfrak{a}, l)$ relative au système de points section.

Nous utiliserons pour cela la formule

$$(14) \qquad \chi(\mathfrak{c}, l) - \chi(\mathfrak{c}, l-1) = \chi(\bar{\mathfrak{c}}, l) = \chi(\mathfrak{a}, l),$$

qui s'écrit, pour $l = 1$,

$$(14') \qquad \chi(\mathfrak{c}, 1) - 1 = \chi(\mathfrak{a}, 1).$$

Écrivons les équations (14) pour toutes les valeurs du degré depuis l'unité jusqu'à une valeur $l \geqq l_0 - 2$, nous obtenons

$$(15) \qquad P = Nl - \sum_{\lambda=1}^{l} \chi(\mathfrak{a}, \lambda),$$

ce qui détermine P.

Exemple. — Considérons les courbes de première espèce tracées sur une quadrique. On a $k = 2$ si le degré N est pair, $N = 2\alpha_2$; $k = 3$ si le degré N est impair, $N = 2\alpha_2 - 1$. La ligne brisée représentant dans le plan (l, χ) la fonction caractéristique, se compose de la droite D_2 d'équation $\chi = 2l + 1$ pour $1 \leqq l \leqq \alpha_2 - 1$, puis de la droite $\chi = N$. On a donc

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \chi(\mathfrak{a}, \lambda) = \sum_{\lambda=1}^{\alpha_2-1} (2\lambda+1) + (l-\alpha_2+1)N.$$

Si $N = 2\alpha_2$, on obtient

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \chi(\mathfrak{a}, \lambda) = lN - (\alpha_2-1)^2, \qquad P = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2.$$

Si $N = 2\alpha_2 - 1$, on a

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \chi(\mathfrak{a}, \lambda) = lN - (\alpha_2-1)(\alpha_2-2), \qquad P = \frac{(N-1)(N-3)}{4}.$$

La même méthode permet de retrouver bien aisément les beaux résultats d'Halphen sur le *genre des courbes gauches* (1). Si C est une courbe gauche de seconde espèce, l'idéal $\mathfrak{c}$ est un multiple de l'idéal $\mathfrak{a}$, on a donc

$$\chi(\mathfrak{c}, l) - \chi(\mathfrak{c}, l-1) = \chi(\bar{\mathfrak{c}}, l) \geqq \chi(\mathfrak{a}, l),$$

l'inégalité ayant lieu pour au moins une valeur de l. On a donc des relations valables pour toute courbe gauche en remplaçant dans (14) et (14') le signe $=$ par $\geqq$, le signe $>$ devant figurer au moins une fois s'il s'agit d'une courbe de seconde espèce. Il en résulte que, *si l'on pose*

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \chi(\mathfrak{a}, \lambda) = Nl - P_0,$$

le nombre P_0 *constitue une borne supérieure pour le genre de la courbe* C, *cette limite ne pouvant être atteinte que pour des courbes de première espèce.*

Cela étant, cherchons la valeur maxima du genre d'une courbe *gauche* ($\alpha_1 \geqq 2$) de degré donné N.

Théorème. — *Le maximum du genre des courbes gauches de*

---

(1) Halphen, *Sur la classification des courbes gauches algébriques* (*Journ. Ecole Polytechnique*, t. 31).

degré N *est le genre des courbes de première espèce de degré* N *tracées sur une quadrique, c'est-à-dire*

$$P = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \text{ pour N pair,} \qquad P = \frac{(N-1)(N-3)}{4} \text{ pour N impair.}$$

Le théorème sera établi si nous montrons qu'on obtient le minimum de la somme $\sum_{\lambda=1}^{l} \chi(\alpha, \lambda)$ pour $\alpha_1 = 2$. Il suffit pour cela de montrer, comme on le voit en se reportant à la figure 2, que, pour $\alpha_1 \geqq 3$, le point C′ n'est pas au-dessous de la droite D_2 d'équation $\chi = 2l + 1$, qui correspond à $\alpha_1 = 2$, c'est-à-dire que l'on a

$$(15) \qquad N_0 = \alpha_1 \alpha_2 - \frac{\alpha_1(\alpha_1 - 1)}{2} + q\,\frac{\alpha_1 - k + r + 1}{2} \geqq 2(\alpha_1 + \alpha_2 - k) + 1.$$

Puisque l'on a $q \geqq 1$, $r \geqq$ [illegible]tte inégalité résultera de la suivante

$$\alpha_2(\alpha_1 - 2) \geqq \frac{\alpha_1^2 + 2\alpha_1 + 1 - 3k}{2},$$

c'est-à-dire de

$$\alpha_2 \geqq \frac{\alpha_1^2 + 2\alpha_1 + 1 - 3k}{2(\alpha_1 - 2)} \qquad (\alpha_1 \geqq 3),$$

qui, en raison de $\alpha_2 \geqq \alpha_1$, sera vérifiée si

$$\alpha_1 \geqq \frac{\alpha_1^2 + 2\alpha_1 + 1 - 3k}{2(\alpha_1 - 2)},$$

l'est elle-même. Or, cette inégalité s'écrit

$$(16) \qquad \alpha_1^2 - 6\alpha_1 + 3k - 1 \geqq 0$$

et est vérifiée quel que soit $\alpha_1 \geqq 3$, toutes les fois que

$$k > \frac{10}{3},$$

c'est-à-dire

$$k \geqq 4.$$

Si $k = 2$, (16) est satisfaite pour $\alpha_1 \geqq 5$; si $\alpha_1 = 3$ ou 4, on reconnaît facilement que l'inégalité (15) est vérifiée. On a en effet, pour $\alpha_1 = 3$, $k = 2$:

$q = 3$, $\quad r = 0$, $\quad N_0 = 3\alpha_2 \geqq 2(3 + \alpha_2) - 4 + 1 = 2\alpha_2 + 3 \qquad$ puisque $\alpha_2 \geqq 3$

et, pour $\alpha_1 = 4$, $k = 2$:

$$q = 4, \quad r = 0, \quad N_0 = 4\alpha_2 \geqq 2(4 + \alpha_2) - 4 + 1 = 2\alpha_2 + 5 \qquad \text{puisque} \quad \alpha_2 \geqq 4.$$

Si $k = 3$, (16) est satisfaite pour $\alpha_1 \geqq 4$. Et pour $\alpha_1 = 3$, (15) l'est puisque l'on a

$$q = 1, \qquad r = 1,$$

$$N_0 = 3\alpha_2 - 2 \geqq 2(3 + \alpha_2) - 6 + 1 = 2\alpha_2 + 1 \qquad \text{puisque} \quad \alpha_2 \geqq 3.$$

Le théorème est ainsi démontré, et nous voyons qu'il y a identité entre les courbes de genre maximum pour un degré N donné et les courbes de première espèce du même degré tracées sur une quadrique.

On remarquera que l'inégalité (12'), donnée par M. Légaut dans sa thèse, ne permettrait pas d'établir les résultats qui précèdent.

On sait enfin que, d'après Noether, les courbes de genre maximum parmi celles d'un degré donné qui se trouvent sur une surface Σ, sont complémentaires d'une courbe plane tracée sur Σ. Toute courbe plane étant une intersection totale, nous voyons que ces courbes sont, elles aussi, de première espèce.