BULLETIN DE LA S. M. F.

TULLIO VIOLA

Sur les ensembles dénombrables avec application aux séries trigonométriques

Bulletin de la S. M. F., tome 62 (1934), p. 39-67
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1934__62__39_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1934, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES ENSEMBLES DÉNOMBRABLES AVEC APPLICATION AUX SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES;

PAR M. TULLIO VIOLA.

1. Soit $\mathfrak{N}$ un ensemble dénombrable et soit $\mathfrak{A}$ son dérivé. Ordonnons $\mathfrak{N}$ d'une façon quelconque :

$$(a) \qquad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots.$$

μ, ν étant les extrémités de $\mathfrak{A}(-\infty \leqq \mu \leqq \nu \leqq +\infty)$, si ξ est une valeur quelconque $< \mu [> \nu]$, les éléments $a_n < \xi [\geqq \xi]$ sont en nombre fini. Mais si $\mu < \xi < \nu$, d'une part les $a_n < \xi$, d'autre part les $a_n \geqq \xi$ sont en nombre infini. Il est intéressant de se demander avec quelle *fréquence* rencontre-t-on les éléments a_n par lesquelles l'une ou l'autre des relations est satisfaite lorsqu'on parcourt la suite (a).

Pour chaque entier $r > 0$ et pour chaque nombre réel ξ, désignons par $N(r, \xi)$ [ou plus précisément par $N_a(r, \xi)$] le nombre d'éléments a_n tels que

$$n \leqq r, \qquad a_n \geqq \xi,$$

et par $\overline{M}(\xi)[\overline{M}_a(\xi)]$ la $\overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{N(r, \xi)}{r}$, par $\underline{M}(\xi)[\underline{M}_a(\xi)]$ la $\underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{N(r, \xi)}{r}$.

$\overline{M}_a(\xi)$, $\underline{M}_a(\xi)$ seront nommées respectivement la *fréquence supérieure* [*non gauche*] *en* ξ et la *fréquence inférieure* [*non gauche*] *en* ξ de la suite (a) [ou de la série correspondante Σa_n]. Si, pour un ξ particulier, on a $\overline{M}_a(\xi) = \underline{M}_a(\xi)$, on désignera cette valeur commune par $M_a(\xi)$ et on la nommera simplement la *fréquence* [*non gauche*] *en* ξ de la suite (a) [ou de la série Σa_n].

On a

$$\overline{M}(\xi) = \underline{M}(\xi) = 1 \quad \text{pour} \quad \xi < \mu, \qquad \overline{M}(\xi) = \underline{M}(\xi) = 0 \quad \text{pour} \quad \xi > \nu,$$
$$0 \leqq \underline{M}(\xi) \leqq \overline{M}(\xi) \leqq 1 \quad \text{pour} \quad \mu \leqq \xi \leqq \nu.$$

Si $\xi'' > \xi'$, on a, quel que soit r, $N(r, \xi'') \leqq N(r, \xi')$: les fonctions $\overline{M}(\xi)$, $\underline{M}(\xi)$ sont donc monotones non croissantes. S'il n'existe aucun point de $\mathfrak{N}$ dans l'intervalle fermé du côté gauche $\overline{\xi'\xi''}$, ou s'il en existe un nombre fini, alors les fonctions, $\overline{M}(\xi)$, $\underline{M}(\xi)$ sont constantes dans tout le segment $\overline{\xi'\xi''}$.

Pour toute suite coïncidant avec (a) à partir d'un certain terme, les fréquences sont égales à celles $\overline{M}_a(\xi)$, $M_a(\xi)$, $\underline{M}_a(\xi)$ de la suite (a).

2. Donnons quelques exemples de fréquences. Les démonstrations des exemples qui seront moins évidents seront données dans une note à la fin de cet article.

1° Soit U un entier quelconque > 1. Considérons la suite des nombres rationnels $\frac{k}{U^n}$, n étant un entier quelconque > 0, k positif $< U^n$ et non multiple de U, rangés par valeurs croissantes de n et, pour n fixe, par valeurs croissantes de k, c'est-à-dire

$$\frac{1}{U},\quad \frac{2}{U},\quad \frac{3}{U},\quad \ldots,\quad \frac{U-1}{U},\quad \frac{1}{U^2},\quad \frac{2}{U^2},\quad \ldots,\quad \frac{U-1}{U^2},$$
$$\frac{U+1}{U^2},\quad \frac{U+2}{U^2},\quad \ldots,\quad \frac{2U-1}{U^2},$$
$$\frac{2U+1}{U^2},\quad \frac{2U+2}{U^2},\quad \ldots,\quad \frac{U^2-1}{U^2},\quad \frac{1}{U^3},\quad \ldots.$$

On a

$$\overline{M}(\xi) = \underline{M}(\xi) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{pour} \quad \xi \begin{cases} \leq 0 \\ \geq 1 \end{cases}.$$

$$\overline{M}(\xi) = 1 - \xi, \qquad \underline{M}(\xi) = \frac{1-\xi}{1+(U-1)\xi}, \qquad \text{pour } 0 < \xi < 1.$$

2° Soit $\mathfrak{C}$ l'ensemble parfait de Cantor dans l'intervalle $\overline{01}$. Soit

$$\sigma_1,\quad \sigma_2,\quad \sigma_3,\quad \ldots$$

la suite des intervalles contigus à $\mathfrak{C}$, rangés par ordre de grandeur décroissante. Ceux qui ont la même grandeur seront rangés selon l'ordre naturel de gauche à droite. Pour chaque indice $n = 1, 2, 3, \ldots$, soient a_{2n-1} l'extrémité gauche, a_{2n} l'extrémité droite de σ_n. Un nombre quelconque de $\mathfrak{C}$ sera désigné par

$$\xi = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \ldots + \frac{\alpha_r}{3^r} + \ldots \qquad \left(\alpha_r = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}\right).$$

Pour la suite des a_n on a alors

$$\overline{M}(\xi) = 1 - \xi', \qquad \underline{M}(\xi) = \frac{1-\xi'}{1+\xi'},$$

avec

$$\xi' = \frac{\alpha_1}{2^2} + \frac{\alpha_2}{2^3} + \ldots + \frac{\alpha_r}{2^{r+1}} + \ldots$$

Ces fonctions $\overline{M}(\xi)$, $\underline{M}(\xi)$ sont constantes dans chaque segment σ_n, et égales à 1 pour $\xi \leqq 0$, à 0 pour $\xi \geqq 1$.

Ces résultats étaient faciles à prévoir après l'étude de l'exemple précédent.

3° Si les nombres $\frac{k}{U^n}$ de l'exemple 1°, pour n fixe, sont supposés rangés par valeurs croissantes de $(-1)^n k$, on trouve

$$\underline{M}(\xi) = \frac{1-\xi}{1+(U-1)\xi}, \qquad \overline{M}(\xi) = U\frac{1-\xi}{U-(U-1)\xi}, \qquad \text{pour } 0 \leqq \xi \leqq 1.$$

4° Pour la suite des nombres rationnels $\frac{k}{n}$, avec n entier > 1, k positif $< n$ (premier avec n ou non), rangés par valeurs croissantes de n et, pour n fixe, selon les valeurs croissantes de k, on trouve

$$\underline{M}(\xi) = \overline{M}(\xi) = M(\xi) = 1 - \xi, \qquad \text{pour } 0 \leqq \xi \leqq 1.$$

On pourrait dire qu'une telle suite est *uniformément distribuée en* $\overline{01}$, parce que le nombre des éléments contenus dans chaque intervalle partiel de $\overline{01}$ devient sensiblement proportionnel à la longueur de cet intervalle, quand leur nombre total croît indéfiniment.

5° Soit x un nombre quelconque tel que $0 < x < 1$. Quel que soit n entier > 0, désignons indifféremment par x_n ou par $\mu(nx)$ la mantisse du nombre nx, c'est-à-dire la différence $nx - [nx]$ entre nx et le plus grand entier contenu en nx. Les nombres

$$(1) \qquad \mu(x) = x, \quad \mu(2x), \quad \mu(3x), \quad \ldots, \quad \mu(nx), \quad \ldots$$

sont tous contenus en $\overline{01}$ et tous rationnels ou tous irrationnels. Si x est *rationnel* $= \frac{p}{q}$ fraction irréductible, on a pour la suite (1)

$$\overline{M}(\xi) = \underline{M}(\xi) = M(\xi) = 1 - \frac{[q\xi]+1}{q}.$$

Si x est *irrationnel* on a un autre exemple de suite uniformément distribuée en $\overline{o\,1}$:

$$M(\xi) = \mathrm{M}(\xi) = \mathbf{M}(\xi) = 1 - \xi \qquad \text{en tout } \overline{o\,1}.$$

Aux numéros suivants (3-6) nous étudierons un problème relatif aux fréquences. Ensuite (n^{os} 7-12) nous montrerons l'intérêt de la notion de *fréquence* en l'appliquant à l'étude des séries trigonométriques.

Nous voulons énoncer ici les résultats indépendamment des définitions et des notations posées :

a. Si pour la suite $\{a_n\}$ *des coefficients d'une série de cosinus* $\Sigma a_n \cos 2\pi nx$ [*d'une série de sinus* $\Sigma a_n \sin 2\pi nx$] *il existe deux nombres positifs* ξ, ε *et une infinité d'entiers* $r > 0$ *tels que les indices* $n \leq r$ *pour lesquels* $|a_n| \geq \xi$ *sont en nombre* $\geq \varepsilon r$, *alors la série converge (en* $\overline{o\,1}$) *tout au plus dans un nombre* FINI *de points, c'est-à-dire tout au plus dans les points* x *rationnels* $= \frac{p}{q}$ *avec* q *multiple de 4 et* $\frac{1}{q} \geq \frac{\varepsilon}{2}$ [*avec* q *pair et* $\frac{1}{q} \geq \frac{\varepsilon}{2}$ *ou* q *impair et* $\frac{1}{q} \geq \varepsilon$]. (*Ces points sont à une distance* $\geq \frac{\varepsilon^2}{2}$ *l'un de l'autre*) (n° 10.)

b. Si pour une série trigonométrique générale

$$\Sigma(a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx),$$

il existe deux nombres positifs ξ, ε *et une infinité d'entiers* $r > 0$ *tels que les indices* $n \leq r$ *pour lesquels* $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \xi$ *sont en nombre* $\geq \varepsilon r$. *alors la série converge (en* $\overline{o\,1}$) *tout au plus dans un nombre* FINI *de points. Ces points sont ou bien tous irrationnels ou bien tous rationnels. Ils sont ainsi caractérisés : si un quelconque* $x = \bar{x}$ *de ces points est irrationnel, tous les autres* $x = \bar{x} + y$ *ont du premier une distance* y *rationnelle* $= \frac{s}{t}$ *avec* $\frac{1}{t} \geq \frac{\varepsilon}{4}$ *si* t *est pair, ou* $\frac{1}{t} \geq \frac{\varepsilon}{2}$ *si* t *est impair. Si, au contraire, aucun de ces points est irrationnel, alors deux quelconques* $x = \bar{x} = \frac{p}{q}$, $x = \bar{x} + y = \frac{p}{q} + \frac{s}{t}$ *de ces points sont tels que* $\frac{1}{q} + \frac{1}{t} \geq \frac{\varepsilon}{4}$ (n° 12).

M. H. Lebesgue a démontré [1] que, si $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt{a_n^2+b_n^2} > 0$, la série $\Sigma(a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx)$ converge tout au plus dans un ensemble de points ayant mesure nulle [2]. Mais quelle est la nature de cet ensemble ?

Le but de cet article est celui d'énoncer une propriété suffisante pour que cet ensemble soit formé d'un nombre FINI de points.

La notion de *fréquence* n'est pas nouvelle dans les recherches de l'analyse. M. E. Borel, dans son traité de Calcul des probabilités [4], étudie par exemple la fréquence avec laquelle un certain chiffre, compris entre 0 et 9, est rencontré en parcourant le développement décimal d'un nombre [5]. Mais nous nous plaçons d'un point de vue essentiellement différent. C'est le point de vue de M. E. Cesàro, qui a donné une définition de *fréquence* dans le cas que l'ensemble dérivé $\mathfrak{A}$ soit formé d'un nombre FINI de points [6].

---

(1) *Leçons sur les séries trigonométriques* (Collection Borel), p. 110.

(2) M. H. Steinhaus a précisé ce résultat en démontrant que l'on a, presque partout,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt{a_n^2+b_n^2} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \mid a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx \mid \quad (^3).$$

(3) *Une généralisation du théorème de G. Cantor sur les séries trigonométriques* (*Wiadomosci Matematycznych*, vol. XXIV, 1920, p. 197-201).

(4) Tome II, fasc. I, *Applications à l'Arithmétique et à la Théorie des fonctions* (Gauthier-Villars, 1926), p. 2, 3; *voir* aussi p. 69. Nous pourrions adopter un langage semblable à celui de M. Borel, en appelant *fréquence* le rapport $\frac{N(r,\xi)}{r}$ et *probabilité supérieure*, *probabilité inférieure* les limites extrêmes de ce rapport. Il y aurait, peut-être, beaucoup d'intérêt à répéter certaines considérations de calcul des probabilités sans admettre que le rapport $\frac{N(r,\xi)}{r}$ ait une limit bien déterminée.

(5) En suivant M. Borel (*loc. cit.*, p. 2, 3) on démontre facilement que l'ensemble des valeurs limites de la suite

$$\frac{N(1,\xi)}{1}, \quad \frac{N(2,\xi)}{2}, \quad \frac{N(3,\xi)}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{N(r,\xi)}{r}, \quad \ldots$$

(ξ quelconque supposé fixe) remplit l'intervalle $\overline{\underline{M}(\xi)\,\overline{M}(\xi)}$ (*voir* aussi le n° 3).

(6) E. CESARO, *Intorno ad una ricerca di limiti* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. I, 1887, p. 224). *Voir* aussi E. BORTOLOTTI, *Convergenza di algoritmi infiniti* [*Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Modena*, Serie III, vol. VII (Sez. Scienze), 1907].

*
* *

3. Supposons $\mu < \nu$, ξ_1 tel que $\mu < \xi_1 < \nu$ et $\underline{m}(\xi_1)$, $\overline{m}(\xi_1)$ soient deux nombres quelconques tels que

$$0 \leqq \underline{m}(\xi_1) \leqq \overline{m}(\xi_1) \leqq 1.$$

Je dis *qu'il est toujours possible d'ordonner $\mathfrak{N}$ de façon qu'on ait*

$$\underline{M}(\xi_1) = \underline{m}(\xi_1), \qquad \overline{M}(\xi_1) = \overline{m}(\xi_1).$$

Pour la démonstration nous partagerons les éléments u de $\mathfrak{N}$ en deux classes $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''$, selon que $u \geqq \xi_1$, ou $u < \xi_1$, et nous choisirons arbitrairement une suite, décroissante et tendant vers zéro, de nombres η_n.

Faisons suivre un élément a_1 quelconque de $\mathfrak{N}'$ par des éléments u_2, u_3, u_4, ... de $\mathfrak{N}''$. Pour la suite

$$a_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4, \quad \ldots,$$

on a

$$\frac{N(1, \xi_1)}{1} = 1, \qquad \frac{N(2, \xi_1)}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{N(3, \xi_1)}{3} = \frac{1}{3}, \qquad \ldots \to 0.$$

Arrêtons-nous au premier entier $r_1 > 1$ tel que

$$\frac{N(r_1, \xi_1)}{r_1} < \underline{m}(\xi_1) + \eta_1.$$

Nous avons ainsi obtenu un premier groupe de termes de la suite que nous voulons former : désignons-le par

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_{r_1}.$$

Faisons suivre ce groupe par des éléments u_{r_1+1}, u_{r_1+2}, u_{r_1+3}, ... de $\mathfrak{N}'$, de façon que, pour la suite

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_{r_1}, \quad u_{r_1+1}, \quad u_{r_1+2}, \quad u_{r_1+3}, \quad \ldots,$$

on ait

$$\frac{N(r_1, \xi_1)}{r_1} < \frac{N(r_1+1, \xi_1)}{r_1+1} < \frac{N(r_1+2, \xi_1)}{r_1+2} < \ldots \to 1.$$

Soit r'_1 le plus petit entier $> r_1$, tel que $\dfrac{N(r'_1, \xi_1)}{r'_1} > \overline{m}(\xi_1) - \eta_1$. Désignons par

$$a_{r_1+1}, \quad a_{r_1+2}, \quad a_{r_1+3}, \quad \ldots, \quad a_{r'_1}$$

le groupe de termes choisis en $\mathfrak{N}'$ et rangeons à sa suite des éléments

$$u_{r_1+1},\quad u_{r_1+2},\quad u_{r_1+3},\quad \ldots,$$

de $\mathfrak{N}''$, de façon que, pour la suite

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \ldots,\quad a_{r'_1},\quad u_{r'_1+1},\quad u_{r'_1+2},\quad u_{r'_1+3},\quad \ldots,$$

on ait

$$\frac{N(r'_1, \xi_1)}{r'_1} > \frac{N(r'_1+1, \xi_1)}{r'_1+1} > \frac{N(r'_1+2, \xi_1)}{r'_1+2} > \ldots \to 0.$$

Soit r_2 le plus petit entier $> r'_1$, tel que

$$\frac{N(r_2, \xi_1)}{r_2} \leqq m(\xi_1) + \eta_2.$$

Désignons par

$$a_{r'_1+1},\quad a_{r'_1+2},\quad a_{r'_1+3},\quad \ldots,\quad a_{r_2},$$

ce deuxième groupe de termes choisis en $\mathfrak{N}''$ et recommençons à ranger à sa suite des éléments de $\mathfrak{N}'$. Continuons ainsi indéfiniment.

La suite

$$(a) \qquad\qquad a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \ldots$$

satisfait à l'énoncé. En effet, pour h quelconque et pour s compris entre 1 et $r'_h - r_h$, on a

$$\frac{N(r_h, \xi_1)}{r_h} \leqq m(\xi_1) + \eta_h, \qquad \frac{N(r_h, \xi_1)}{r_h} < \frac{N(r_h+s, \xi_1)}{r_h+s} \leqq \frac{N(r'_h, \xi_1)}{r'_h},$$

$$\frac{N(r_h+s, \xi_1)}{r_h+s} - \frac{N(r_h+s-1, \xi_1)}{r_h+s-1} = \frac{r_h - N(r_h, \xi_1)}{(r_h+s)(r_h+s-1)} < \frac{1}{r_h} \to 0,$$

et, pour s compris entre 1 et $r_{h+1} - r'_h$, on a

$$\frac{N(r'_h, \xi_1)}{r'_h} > \overline{m}(\xi_1) - \eta_h, \qquad \frac{N(r'_h, \xi_1)}{r'_h} > \frac{N(r'_h+s, \xi_1)}{r'_h+s} \geqq \frac{N(r_{h+1}, \xi_1)}{r_{h+1}},$$

$$\frac{N(r'_h+s-1, \xi_1)}{r'_h+s-1} - \frac{N(r'_h+s, \xi_1)}{r'_h+s} = \frac{N(r'_h, \xi_1)}{(r'_h+s)(r'_h+s-1)} < \frac{1}{r'_h} \to 0.$$

La conclusion est évidente.

Nous n'avons pas dit, dans le raisonnement précédent, dans quel ordre on devait prendre séparément les éléments de $\mathfrak{N}'$ et ceux de $\mathfrak{N}''$, cela n'étant pas nécessaire à la démonstration. Les égalités écrites plus haut sont satisfaites, du reste, par les fréquences de la suite (a), soit que la suite contienne *tous* les éléments de $\mathcal{N}'$ (ou de $\mathcal{N}''$), soit qu'elle ne les contienne pas *tous*.

4. Toujours avec les mêmes notations, prenons une autre valeur quelconque de ξ en $\overline{\mu\nu}$, soit $\xi_2 > \xi_1$. Supposons que, dans l'intervalle fermé du côté gauche $\overline{\xi_1 \xi_2}$, il y ait une infinité d'éléments de $\mathcal{N}$. Soient $\underline{m}(\xi_2)$, $\overline{m}(\xi_2)$ deux nombres arbitraires tels que

$$\overline{m}(\xi_1) \geqq \overline{m}(\xi_2), \qquad \underline{m}(\xi_1) \geqq \underline{m}(\xi_2), \qquad \overline{m}(\xi_2) \geqq \underline{m}(\xi_2).$$

Nous pouvons librement *disposer de l'ordre des termes de l'ensemble $\mathcal{N}'$ de façon que, pour la suite (a), on ait aussi*

$$\underline{M}(\xi_2) = \underline{m}(\xi_2), \qquad \overline{M}(\xi_2) = \overline{m}(\xi_2).$$

Imaginons, en effet, $\mathcal{N}'$ séparé en deux sous-ensembles $\mathcal{N}'''$, $\mathcal{N}^{\text{IV}}$, suivant que ces éléments sont $\geqq \xi_2$ ou $< \xi_2$. Si les éléments de $\mathcal{N}'$ qui figurent dans la suite (a) à la place fixée appartenaient seulement à $\mathcal{N}'''$, on aurait

$$\underline{M}(\xi_2) = \underline{M}(\xi_1) = \underline{m}(\xi_1), \qquad \overline{M}(\xi_2) = \overline{M}(\xi_1) = \overline{m}(\xi_1);$$

si, au contraire, ils appartenaient seulement à $\mathcal{N}^{\text{IV}}$, on aurait

$$\underline{M}(\xi_2) = \overline{M}(\xi_2) = 0.$$

Mais, avec ça, les numéros d'ordre r_1, r'_1, r_2, r'_2, ... resteraient les mêmes ainsi que, *de leur côté*, l'ordre des termes de $\mathcal{N}''$ (cet ordre étant pourtant arbitraire). Il sera donc possible, chaque fois que dans la formation de la suite (a) on devra choisir des éléments de $\mathcal{N}'$, de choisir tantôt en $\mathcal{N}'''$ tantôt en $\mathcal{N}^{\text{IV}}$, en alternant des groupes de l'un des deux ensembles avec des groupes de l'autre, de façon que, pour la suite (a) que l'on construit, on ait précisément

$$\underline{M}(\xi_2) = \underline{m}(\xi_2), \qquad \overline{M}(\xi_2) = \overline{m}(\xi_2).$$

On comprend bien que le procédé peut être répété. Soit ξ_3 une autre valeur quelconque de ξ en $\overline{\mu\nu}$, par exemple telle que $\xi_1 < \xi_3 < \xi_2$ (mais telle que d'une part en $\overline{\xi_1 \xi_3}$, d'autre part en $\overline{\xi_3 \xi_2}$ il existe une infinité de termes de $\mathfrak{N}$), et soient $\overline{m}(\xi_3)$, $\underline{m}(\xi_3)$ deux nombres quelconques, compris respectivement entre $\overline{m}(\xi_1)$, $\overline{m}(\xi_2)$ et entre $\underline{m}(\xi_1)$, $\underline{m}(\xi_2)$, tels que $\overline{m}(\xi_3) \geq \underline{m}(\xi_3)$. Il est toujours possible de disposer de l'ordre des termes de l'ensemble $\mathfrak{N}^{\text{IV}}$ de façon que, pour la suite (a) que l'on va construire, on ait

$$\overline{\mathrm{M}}(\xi_3) = \overline{m}(\xi_3), \qquad \underline{\mathrm{M}}(\xi_3) = \underline{m}(\xi_3). \text{ Etc.}$$

Maintenant nous pouvons démontrer que *les conditions trouvées au n° 1 pour les fréquences* $\overline{\mathrm{M}}(\xi)$, $\underline{\mathrm{M}}(\xi)$ *sont caractéristiques.* Voilà ce que nous entendons par cela.

Soient $\overline{m}(\xi)$, $\underline{m}(\xi)$ deux fonctions quelconques définies dans tout l'intervalle ouvert $\mu\nu$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Elles sont monotones non croissantes et constantes dans chaque intervalle contigu à $\mathfrak{A}$, ou plus précisément dans tout intervalle *fermé du côté gauche* contenant seulement un nombre *fini* d'éléments de $\mathfrak{N}$.

2° Elles sont telles que $0 \leq \underline{m}(\xi) \leq \overline{m}(\xi) \leq 1$ quel que soit ξ.

Dans ces conditions *il est toujours possible d'ordonner $\mathfrak{N}$ de façon que l'on ait*

$$\underline{\mathrm{M}}(\xi) = \underline{m}(\xi), \qquad \overline{\mathrm{M}}(\xi) = \overline{m}(\xi),$$

quel que soit ξ.

Choisissons en effet une suite $\{\xi'_n\}$ de termes de $\mathfrak{N}$, partout dense en $\mathfrak{A}$ (¹). Choisissons un point quelconque ξ''_n (par exemple le milieu) à l'intérieur de chaque intervalle contigu à $\mathfrak{A}$. Désignons encore par $\{\xi'''_n\}$ les points de discontinuité des fonctions $\overline{m}(\xi)$, $\underline{m}(\xi)$ (²) qui n'appartiennent pas à la suite $\{\xi'_n\}$, s'il y en a. Réunissons enfin les trois suites de points ξ'_n, ξ''_n, ξ'''_n dans une suite unique

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \ldots.$$

(¹) Cette suite devra donc contenir tous les points isolés de $\mathfrak{A}$, s'il y en a. Elle ne devra pas contenir ni μ ni ν.

(²) On voit facilement que ces points de discontinuité sont en infinité dénombrable.

Avec les règles données aux n$^{\text{os}}$ **3** et **4** nous pouvons maintenant donner à $\mathfrak{M}$ un ordre provisoire de façon que l'on ait

$$\overline{M}(\xi_1) = \overline{m}(\xi_1), \qquad \underline{M}(\xi_1) = \underline{m}(\xi_1),$$

ensuite corriger tel ordre de façon que l'on ait aussi

$$\overline{M}(\xi_2) = \overline{m}(\xi_2), \qquad \underline{M}(\xi_2) = \underline{m}(\xi_2),$$

ensuite de façon que l'on ait aussi

$$\overline{M}(\xi_3) = \overline{m}(\xi_3), \qquad \underline{M}(\xi_3) = \underline{m}(\xi_3), \text{ etc. (1).}$$

On peut faire commencer chacun de ces changements par un terme d'ordre toujours plus élevé. On peut donc s'arranger à ce que, quel que soit l'indice r, l'ordre des r premiers termes de la suite ne soit plus changé après un nombre fini de corrections (procédé diagonal).

La suite ainsi obtenue sera telle que

$$\overline{M}(\xi_n) = \overline{m}(\xi_n), \qquad \underline{M}(\xi_n) = \underline{m}(\xi_n),$$

quel que soit n, donc, pour des raisons de continuité, telle qu'on ait également

$$\overline{M}(\xi) = \overline{m}(\xi), \qquad \underline{M}(\xi) = \underline{m}(\xi),$$

quel que soit ξ en $\overline{\mu\nu}$. C. Q. F. D.

Ce procédé, appliqué à l'exemple 1° du n° **2**, en posant $U = 2$, $m(\xi) = \overline{m}(\xi) = \underline{m}(\xi) = 1 - \xi\,(0 \leqq \xi \leqq 1)$, fournit l'ordre suivant :

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{3}{8}, \quad \frac{7}{8},$$

$$\frac{1}{16}, \quad \frac{9}{16}, \quad \frac{5}{16}, \quad \frac{13}{16}, \quad \frac{3}{16}, \quad \frac{11}{16}, \quad \frac{7}{16}, \quad \frac{15}{16}, \quad \ldots .$$

C'est une suite uniformément distribuée en $\overline{01}$.

6. Toutes ces considérations peuvent être généralisées sans dif-

---

(1) On pourra négliger tout point ξ''_n qui sépare le contigu correspondant en deux intervalles desquels un au moins, fermé du côté gauche, contienne tout au plus un nombre fini de points de $\mathfrak{M}$.

ficulté aux espaces à un nombre quelconque de dimensions. Soit $\mathfrak{N}$ un ensemble dénombrable de nombres complexes à k coordonnées, rangé dans une suite

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \ldots,\quad a_n,\quad \ldots,$$

avec $a_n \equiv (\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \alpha_{n3}, \ldots, \alpha_{nk})$. Désignons par $N(r, \xi)$ (quels que soient l'entier $r > 0$ et le nombre complexe

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_k)$$

le nombre des éléments a_n tels que

$$n \leqq r, \qquad \alpha_{n1} \geqq \xi_1, \qquad \alpha_{n2} \geqq \xi_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{nk} \geqq \xi_k,$$

ensuite par $\overline{M}(\xi)$ et par $\underline{M}(\xi)$ respectivement la $\overline{\lim}_{r \to \infty} \frac{N(r, \xi)}{r}$ et la $\underline{\lim}_{r \to \infty} \frac{N(r, \xi)}{r}$.

Ces fonctions satisfont aux propriétés suivantes :

1° On a partout $0 \leqq \underline{M}(\xi) \leqq \overline{M}(\xi) \leqq 1$;

2° Elles sont monotones, non croissantes par rapport à chacune des coordonnées $\xi_i (i = 1, 2, 3, \ldots, k)$;

3° Elles sont constantes lorsqu'une coordonnée ξ_k quelconque (les autres étant supposées fixes) varie dans un intervalle fermé du côté gauche contenant seulement un nombre fini d'éléments de la suite (c'est-à-dire qu'il existe dans la suite un nombre fini d'éléments dont la $i^{\text{ième}}$ coordonnée appartient audit intervalle);

4° $\underline{M}(\xi) = \overline{M}(\xi) = 0 [= 1]$ si ξ est tel que le nombre des éléments a_n pour lesquels

$$\alpha_{n1} \geqq \xi_1, \qquad \alpha_{n2} \geqq \xi_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{nk} \geqq \xi_k$$

est fini ou nul [le nombre des éléments a_n pour lesquels ces k relations ne sont pas *toutes* satisfaites est fini ou nul].

Ces propriétés sont caractéristiques, c'est-à-dire : deux fonctions $\underline{m}(\xi)$, $\overline{m}(\xi)$ possédant ces propriétés étant arbitrairement données, il est toujours possible d'ordonner $\mathfrak{N}$ de façon que l'on ait

$$\underline{M}(\xi) = \underline{m}(\xi), \qquad \overline{M}(\xi) = \overline{m}(\xi).$$

*
* *

7. Soit Σa_n une série à termes quelconques (réels ou complexes). Soient $\overline{M}_a(\xi)$ la fréquence supérieure non gauche et $\underline{M}_a(\xi)$ la fréquence inférieure non gauche de la suite

$$|a_1|, \quad |a_2|, \quad \ldots, \quad |a_n|, \quad \ldots$$

Les valeurs

$$\lim_{\xi \to +0} \overline{M}_a(\xi) = \overline{M}_a(+0), \qquad \lim_{\xi \to +0} \underline{M}_a(\xi) = \underline{M}_a(+0)$$

seront appelées les *fréquences* (respectivement *supérieure et inférieure*) [*non gauches*] *de la suite* $\{|a_n|\}$ *en* $+0$.

On a encore

$$0 \leqq \underline{M}_a(+0) \leqq \overline{M}_a(+0) \leqq 1.$$

Une conséquence immédiate du n° 5 est la suivante :

Si la suite

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

est telle que $\underline{\lim}_{n \to \infty} |a_n| = 0$, $\overline{\lim}_{n \to \infty} |a_n| > 0$, *on peut toujours ordonner la série* Σa_n *de façon que* $\underline{M}(+0)$, $\overline{M}(+0)$ *soient respectivement égales à deux valeurs* $\underline{m}(+0)$, $\overline{m}(+0)$ *arbitrairement données, telles que*

$$0 \leqq \underline{m}(+0) \leqq \overline{m}(+0) \leqq 1.$$

Si $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, en particulier si la série Σa_n est convergente, alors on a toujours $\underline{M}(+0) = \overline{M}(+0) = 0$.

8. Soient maintenant Σb_n une autre série et $\underline{M}_b(\xi)$, $\overline{M}_b(\xi)$ les fréquences relatives à la suite $\{|b_n|\}$. Nous voulons établir des limitations pour les fréquences relatives à la suite $\{|a_n b_n|\}$.

Soit h tel que $\overline{M}_a(+0) + \underline{M}_b(+0) > h$. Choisissons $\xi > 0$ tel que $\overline{M}_a(\xi) + \underline{M}_b(\xi) > h$, et ensuite un entier $\rho > 0$ tel que, pour chaque indice $r > \rho$, on ait

$$M_a(\xi) + \frac{N_b(r, \xi)}{r} > h.$$

On a alors, pour une infinité de valeurs de $r > \rho$,

$$\frac{N_a(r,\xi)}{r} + \frac{N_b(r,\xi)}{r} > h.$$

donc

$$N_a(r,\xi) + N_b(r,\xi) > hr.$$

Soit $I(r)$, pour chacune de ces valeurs de r, le plus petit entier $> (h-1)r$. Il y a donc au moins $I(r)$ valeurs de n telles que

$$n \leqq r, \qquad |a_n b_n| \geqq \xi^2.$$

Par conséquent la fréquence supérieure relative à la série $\Sigma a_n b_n$ satisfait à l'inégalité $\overline{M}(\xi^2) \geqq h - 1$. On en déduit la limitation suivante :

$$\overline{M}(+0) \geqq \max \begin{cases} 0 \\ \overline{M}_a(+0) + \underline{M}_b(+0) - 1, \\ \underline{M}_a(+0) + \overline{M}_b(+0) - 1. \end{cases}$$

D'une façon analogue on démontre, d'autre côté, que

$$\underline{M}(+0) \geqq \max \begin{cases} 0 \\ \underline{M}_a(+0) + \underline{M}_b(+0) - 1. \end{cases}$$

En particulier, *si*

$$\overline{M}_a(+0) + \underline{M}_b(+0) > 1$$

ou si

$$\underline{M}_a(+0) + \overline{M}_b(+0) > 1,$$

alors la série

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots$$

n'est pas convergente.

Si $|b_n| \leqq k$ quel que soit n, alors on a

$$\overline{M}(k\xi) \leqq \overline{M}_a(\xi), \qquad \underline{M}(k\xi) \leqq \underline{M}_a(\xi),$$

donc

$$\overline{M}(+0) \leqq \overline{M}_a(+0), \qquad \underline{M}(+0) \leqq \underline{M}_a(+0).$$

Si les ensembles dérivés des suites $\{|a_n|\}$, $\{|b_n|\}$ *sont bornés, on a les limitations suivantes :*

$$\overline{M}(+0) \leqq \min \begin{cases} \overline{M}_a(+0) \\ \overline{M}_b(+0), \end{cases} \qquad \underline{M}(+0) \leqq \min \begin{cases} \underline{M}_a(+0) \\ \underline{M}_b(+0). \end{cases}$$

Si $b_n = k$ (constante), on a

$$\overline{\mathrm{M}}(+0) = \overline{\mathrm{M}}_a(+0), \qquad \underline{\mathrm{M}}(+0) = \underline{\mathrm{M}}_a(+0).$$

Une relation intéressante, valable sur toute la demi-droite positive, est

$$\underline{\mathrm{M}}(\xi) + \mathrm{M}^0\left(\frac{1}{\xi}\right) = 1,$$

entre la fréquence inférieure d'une série Σa_n et celle supérieure de la série $\sum \frac{1}{a_n}$.

9. Nous voulons faire application du *critère de non-convergence* du numéro précédent aux séries trigonométriques.

ξ étant un nombre quelconque entre 0 et 1, $\varphi(\xi)$ la détermination de arc $\cos\xi$ appartenant à $\overline{0\ \frac{\pi}{2}}$, la relation $|\cos\alpha| \geqq \xi$ est satisfaite, en $\overline{0\quad 2\pi}$, pour les valeurs de α contenues en $\overline{0\quad \varphi(\xi)}$, en $\overline{\pi - \varphi(\xi)\quad \pi + \varphi(\xi)}$ et en $\overline{2\pi - \varphi(\xi)\quad 2\pi}$.

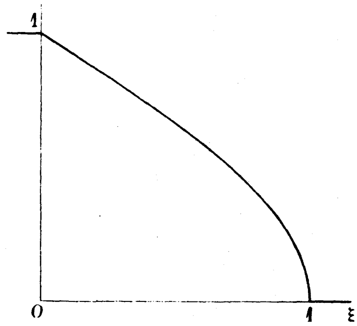
La longueur totale de ces intervalles est $4\varphi(\xi)$.

Pour x quelconque en $\overline{0\,1}$, on a

$$\cos 2\pi n x = \cos 2\pi x_n, \qquad \sin 2\pi n x = \sin 2\pi x_n,$$

étant $x_n = \mu(nx) = nx - [nx]$ pour chaque entier $n > 0$ comme dans l'exemple 5°, n° 2.

Pour chaque entier $r > 0$, le nombre $\mathrm{N}(r, \xi)$ de termes



$|\cos 2\pi n x| \geqq \xi$, avec $n \leqq r$, est égal au nombre de termes $2\pi x_n$ contenus dans les dits intervalles. Si x est *irrationnel* nous avons vu que la suite $\{x_n\}$ est, à la limite, distribuée uniformément dans l'intervalle $\overline{o\,\iota}$, le rapport $\frac{N(r, \xi)}{r}$ doit donc tendre à devenir proportionnel à $\varphi(\xi)$, c'est-à-dire

$$\lim_{r \to \infty} \frac{N(r, \xi)}{r} = k\varphi(\xi),$$

k étant un coefficient de proportionnalité que l'on détermine tout de suite en remarquant que $k\varphi(o) = k\frac{\pi}{2} = \iota$, $k = \frac{2}{\pi}$. On a donc

$$M(\xi) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \cos \xi \qquad (o \leqq \xi \leqq \iota).$$

Ainsi nous avons calculé la fréquence de la suite $\{|\cos 2\pi n x|\}$, quel que soit x irrationnel en $\overline{o\,\iota}$. D'une façon analogue on raisonne pour trouver la fréquence de la suite $\{|\sin 2\pi n x|\}$, ce qui conduit au même résultat.

Il est à retenir qu'on a $M(+o) = \iota$.

Si au contraire x est *rationnel*, la suite $\{x_n\}$ n'est pas uniformément distribuée dans l'intervalle $\overline{o\,\iota}$. Si $x = \frac{p}{q}$ fraction irréductible et $\frac{t}{q} < \xi \leqq \frac{t+\iota}{q}$, les termes x_n sont tous de la forme $\frac{t_n}{q}$, avec t_n entier tel que $o \leqq t_n < q$ et l'on a

$$M_x(\xi) = \iota - \frac{t+\iota}{q}.$$

Distinguons deux cas :

1° q est multiple de 4. Alors, quel que soit l'entier $H > o$, parmi les premiers Hq termes de la suite $\{x_n\}$ il y en a H égales à $\frac{\iota}{4}$ et H égales à $\frac{3}{4}$, tandis que tous les autres sont tels que

$$\left|x_n - \frac{\iota}{4}\right| \geqq \frac{\iota}{q}, \qquad \left|x_n - \frac{3}{4}\right| \geqq \frac{\iota}{q}.$$

Donc parmi les premiers Hq termes de la suite $\{2\pi x_n\}$ il y en a H égaux à $\frac{\pi}{2}$ et H à $\frac{3\pi}{2}$, donc 2H pour lesquels $\cos 2\pi x_n = o$, tandis que les autres sont tels que

$$\left|2\pi x_n - \frac{\pi}{2}\right| \geqq \frac{2\pi}{q}, \qquad \left|2\pi x_n - \frac{3\pi}{2}\right| \geqq \frac{2\pi}{q},$$

donc tels que $|\cos 2\pi x_n| \geqq \sin\frac{2\pi}{q}$. Donc [*cf.* n° 2, ex. 4°] la fréquence de la suite $\{|\cos 2\pi n x|\}$ est

$$M(\xi) = \lim_{H\to\infty} \frac{N(Hq,\xi)}{Hq} = \frac{Hq-2H}{Hq} = \frac{q-2}{q},$$

pour

$$0 < \xi \leqq \sin\frac{2\pi}{q},$$

donc aussi $M(+0) = \frac{q-2}{q}$.

2° q n'est pas multiple de 4. Alors dans la suite $\{x_n\}$ aucun terme n'est $= \frac{1}{4}$, aucun $= \frac{3}{4}$, donc dans la suite $\{2\pi x_n\}$ aucun terme est $= \frac{\pi}{2}$ ou bien $= \frac{3\pi}{2}$. Et même tous les termes sont tels que

$$\left|2\pi x_n - \frac{\pi}{2}\right| \geqq \frac{\pi}{2q}, \qquad \left|2\pi x_n - \frac{3\pi}{2}\right| \geqq \frac{\pi}{2q},$$

c'est-à-dire tels que $|\cos 2\pi x_n| \geqq \sin\frac{\pi}{2q}$. Donc on a $M(\xi) = 1$ pour

$$0 < \xi \leqq \sin\frac{\pi}{2q} \qquad \text{et} \qquad M(+0) = 1.$$

Un raisonnement analogue montre que, si q est pair, alors la fréquence de la suite $\{|\sin 2\pi n x|\}$ est égale à

$$M(\xi) = M(+0) = \frac{q-2}{q} \qquad \text{pour} \qquad 0 < \xi \leqq \sin\frac{2\pi}{q};$$

si, au contraire, q est impair, alors

$$M(\xi) = M(+0) = \frac{q-1}{q} \qquad \text{pour} \qquad 0 < \xi \leqq \sin\frac{\pi}{q}.$$

10. En rapprochant le n° 9 au n° 8, nous pouvons indiquer des limitations pour les fréquences $\overline{M}(+0)$, $\underline{M}(+0)$ de la suite $\{|a_n \cos 2\pi n x|\}$, celles $\overline{M}_a(+0)$, $\underline{M}_a(+0)$ de la suite $\{|a_n|\}$ étant supposées connues :

1° x irrationnel ou rationnel $= \frac{p}{q}$ avec q non multiple de 4,

$$\overline{M}(+0) = \overline{M}_a(+0), \qquad \underline{M}(+0) = \underline{M}_a(+0);$$

2° x rationnel $= \frac{p}{q}$ avec q multiple de 4,

$$\overline{M}_a(+0) - \frac{2}{q} \leqq \overline{M}(+0) \leqq \overline{M}_a(+0),$$

$$\underline{M}_a(+0) - \frac{2}{q} \leqq \underline{M}(+0) \leqq \underline{M}_a(+0).$$

D'une façon analogue on trouve les limitations suivantes pour les fréquences $\overline{M}(+0)$, $\underline{M}(+0)$ de la suite $\{|a_n \sin 2\pi n x|\}$:

1° x irrationnel,

$$\overline{M}(+0) = \overline{M}_a(+0), \qquad \underline{M}(+0) = \underline{M}_a(+0);$$

2° x rationnel $= \frac{p}{q}$ avec q impair,

$$\overline{M}_a(+0) - \frac{1}{q} \leqq \overline{M}(+0) \leqq \overline{M}_a(+0),$$

$$\underline{M}_a(+0) - \frac{1}{q} \leqq \underline{M}(+0) \leqq \underline{M}_a(+0);$$

3° x rationnel $= \frac{p}{q}$ avec q pair,

$$\overline{M}_a(+0) - \frac{2}{q} \leqq \overline{M}(+0) \leqq \overline{M}_a(+0),$$

$$\underline{M}_a(+0) - \frac{2}{q} \leqq \underline{M}(+0) \leqq \underline{M}_a(+0).$$

Ces limitations nous permettent d'individualiser les points de convergence d'une série de cosinus ou de sinus dont la suite des coefficients ait une fréquence positive. En effet, si la fréquence supérieure $\overline{M}_a(+0)$ de la suite $\{|a_n|\}$ est positive, alors :

a. la série $\Sigma a_n \cos 2\pi n x$ converge tout au plus dans les points rationnels $x = \frac{p}{q}$ avec q multiple de 4 et $\frac{1}{q} \geqq \frac{\overline{M}_a(+0)}{2}$;

b. la série $\Sigma a_n \sin 2\pi n x$ converge tout au plus dans les points rationnels $x = \frac{p}{q}$ avec q impair et $\frac{1}{q} \geqq \overline{M}_a(+0)$, ou q pair et $\frac{1}{q} \geqq \frac{\overline{M}_a(+0)}{2}$.

Inversement et d'une façon générale :

Si une série de cosinus $\Sigma a_n \cos 2\pi n x$ ou de sinus $\Sigma a_n \sin 2\pi n x$

converge pour une seule valeur irrationnelle de x, ou pour une infinité de valeurs rationnelles de x, alors la suite $\{|a_n|\}$ a, en $+0$, fréquence supérieure nulle. On a même

$$\overline{\mathbf{M}}_a(\xi) = \underline{\mathbf{M}}_a(\xi) = 0, \qquad \text{quel que soit } \xi > 0.$$

[Il est bien à remarquer que cette identité est certainement vérifiée si $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.]

11. Considérons maintenant une série trigonométrique générale

$$\Sigma(a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x),$$

telle que

$$\overline{\mathbf{M}}_a(+0) > 0 \qquad [\underline{\mathbf{M}}_a(+0) > 0],$$

et supposons qu'elle converge pour une valeur irrationnelle $x = \overline{x}$ ou pour une valeur rationnelle $x = \overline{x} = \frac{p}{q}$ avec q non multiple de 4. $\eta > 0$ étant choisi arbitrairement petit, déterminons (n° **10**) un $\xi > 0$ tel que, pour une infinité de valeurs de r [pour toutes les valeurs de $r >$ d'un certain $\overline{r}$], le nombre des indices $n \leq r$ pour lesquels on ait

$$|a_n| > \xi, \qquad |a_n \cos 2\pi n\overline{x}| > \xi,$$

soit

$$r\{\overline{\mathbf{M}}_a(+0) - \eta\} \; [> r\{\underline{\mathbf{M}}_a(+0) - \eta\}].$$

Pour tels indices n on a alors

$$\begin{aligned}
&|a_n \cos 2\pi n\overline{x} + b_n \sin 2\pi n\overline{x}| \\
&\quad \geq |a_n \cos 2\pi n\overline{x}| - |b_n \sin 2\pi n\overline{x}| > \xi - |b_n \sin 2\pi n\overline{x}|.
\end{aligned}$$

Mais

$$\lim_{n \to \infty} |a_n \cos 2\pi n\overline{x} + b_n \sin 2\pi n\overline{x}| = 0.$$

Il existe donc un entier $n_0 > 0$ tel que, pour tous les dits indices n qui sont aussi $> n_0$, l'on ait

$$|b_n \sin 2\pi n\overline{x}| > \frac{\xi}{2}.$$

Parmi ces n il y en a donc plus que

$$r\{\overline{\mathbf{M}}_a(+0) - \eta\} - n_0$$

[plus que $r\,\{\underline{\mathbf{M}}_a(+0)-\eta\}-n_0$] tels que

$$|b_n| \geqq |b_n \sin 2\pi n\bar{x}| > \frac{\xi}{2}.$$

Donc

$$\overline{\mathbf{M}}_b(+0) \geqq \overline{\mathbf{M}}_a(+0)-\eta \quad [\underline{\mathbf{M}}_b(+0) \geqq \underline{\mathbf{M}}_a(+0)-\eta]$$

et par conséquent, η étant arbitraire,

$$\overline{\mathbf{M}}_b(+0) \geqq \overline{\mathbf{M}}_a(+0)\,[\underline{\mathbf{M}}_b(+0) \geqq \underline{\mathbf{M}}_a(+0)].$$

Si $\bar{x}$ est rationnel $=\frac{p}{q}$ et q est multiple de 4, on démontre d'une façon analogue que

$$\overline{\mathbf{M}}_b(+0) \geqq \overline{\mathbf{M}}_a(+0)-\frac{2}{q}, \qquad \underline{\mathbf{M}}_b(+0) \geqq \underline{\mathbf{M}}_a(+0)-\frac{2}{q}.$$

Inversement si $\bar{x}$ est irrationnel on démontre que

$$\overline{\mathbf{M}}_a(+0) \geqq \overline{\mathbf{M}}_b(+0), \qquad \underline{\mathbf{M}}_a(+0) \geqq \underline{\mathbf{M}}_b(+0).$$

Si $\bar{x}$ est rationnel $=\frac{p}{q}$, avec q impair, on a

$$\overline{\mathbf{M}}_a(+0) \geqq \overline{\mathbf{M}}_b(+0)-\frac{1}{q}, \qquad \underline{\mathbf{M}}_a(+0) \geqq \underline{\mathbf{M}}_b(+0)-\frac{1}{q}.$$

Si q est pair, on a

$$\overline{\mathbf{M}}_a(+0) \geqq \overline{\mathbf{M}}_b(+0)-\frac{2}{q}, \qquad \underline{\mathbf{M}}_a(+0) \geqq \underline{\mathbf{M}}_b(+0)-\frac{2}{q}.$$

Nous résumons ces résultats avec les limitations suivantes :

1° $\bar{x}$ irrationnel,

$$\overline{\mathbf{M}}_a(+0) = \overline{\mathbf{M}}_b(+0), \qquad \underline{\mathbf{M}}_a(+0) = \underline{\mathbf{M}}_b(+0);$$

2° $\bar{x}$ rationnel $=\frac{p}{q}$, avec q impair,

$$\overline{\mathbf{M}}_b(+0)-\frac{1}{q} \leqq \overline{\mathbf{M}}_a(+0) \leqq \overline{\mathbf{M}}_b(+0),$$
$$\underline{\mathbf{M}}_b(+0)-\frac{1}{q} \leqq \underline{\mathbf{M}}_a(+0) \leqq \underline{\mathbf{M}}_b(+0);$$

3° $\bar{x}$ rationnel $= \frac{p}{q}$, avec q pair mais pas multiple de 4,

$$\overline{\mathbf{M}}_b(+0) - \frac{2}{q} \leq \overline{\mathbf{M}}_a(+0) \leq \overline{\mathbf{M}}_b(+0), \qquad \underline{\mathbf{M}}_b(+0) - \frac{2}{q} \leq \underline{\mathbf{M}}_a(+0) \leq \underline{\mathbf{M}}_b(+0);$$

4° $\bar{x}$ rationnel $= \frac{p}{q}$, avec q multiple de 4,

$$\overline{\mathbf{M}}_b(+0) - \frac{2}{q} \leq \overline{\mathbf{M}}_a(+0) \leq \overline{\mathbf{M}}_b(+0) + \frac{2}{q},$$

$$\underline{\mathbf{M}}_b(+0) - \frac{2}{q} \leq \underline{\mathbf{M}}_a(+0) \leq \underline{\mathbf{M}}_b(+0) + \frac{2}{q} \quad (^1).$$

12. Pour une série trigonométrique générale quelconque

$$\Sigma(a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx),$$

posons $\rho_n = +\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et désignons par $\overline{\mathbf{M}}_\rho(\xi)$, $\underline{\mathbf{M}}_\rho(\xi)$ les fréquences de la suite $\{\rho_n\}$. Une des deux inégalités suivantes doit être évidemment satisfaite :

$$\overline{\mathbf{M}}_a\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right) \geq \frac{\overline{\mathbf{M}}_\rho(\xi)}{2}, \qquad \overline{\mathbf{M}}_b\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right) \geq \frac{\overline{\mathbf{M}}_\rho(\xi)}{2},$$

quel que soit ξ (²), donc aussi une des deux suivantes :

$$\overline{\mathbf{M}}_a(+0) \geq \frac{\overline{\mathbf{M}}_\rho(+0)}{2}, \qquad \overline{\mathbf{M}}_b(+0) \geq \frac{\overline{\mathbf{M}}_\rho(+0)}{2}.$$

De même ou bien

$$\underline{\mathbf{M}}_a(+0) \geq \frac{\underline{\mathbf{M}}_\rho(+0)}{2},$$

ou bien

$$\underline{\mathbf{M}}_b(+0) \geq \frac{\underline{\mathbf{M}}_\rho(+0)}{2}.$$

Supposons maintenant $\overline{\mathbf{M}}_\rho(+0) > 0$ et, par exemple

$$\overline{\mathbf{M}}_a(+0) \geq \frac{\overline{\mathbf{M}}_\rho(+0)}{2}.$$

Supposons aussi que la série $\Sigma(a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx)$ con-

---

(¹) Ces limitations sont exactes même si on laisse tomber l'hypothèse que les fréquences soient positives.

(²) Pas nécessairement *toujours* la même pour $\xi \to +0$.

verge pour une valeur $x=\bar{x}$ irrationnelle, ou rationnelle $=\frac{p}{q}$, avec q non multiple de 4. Choisissons un $\eta > 0$, $< \overline{M}_a(+0)$. Il existe alors (n° 11) un $\xi > 0$ tel que, pour une infinité de valeurs de r, le nombre des indices $n \leqq r$ pour lesquels on ait à la fois

$$|a_n| > \xi, \quad |\cos 2\pi n\bar{x}| > \xi, \quad |b_n| > \xi, \quad |\sin 2\pi n\bar{x}| > \xi,$$

soit $> r\{\overline{M}_a(+0)-\eta\}$. A partir d'un certain indice les termes $a_n \cos 2\pi n\bar{x}$, $b_n \sin 2\pi n\bar{x}$ ont signe contraire. Les termes $b_n \cos 2\pi n\bar{x}$, $a_n \sin 2\pi n\bar{x}$ ont donc signe contraire et les termes

$$b_n \cos 2\pi n\bar{x}, \quad -a_n \sin 2\pi n\bar{x},$$

le même signe et précisément on a

$$|b_n \cos 2\pi n\bar{x} - a_n \sin 2\pi n\bar{x}| > 2\xi^2.$$

Quel que soit y nous avons maintenant

$$\begin{aligned} & a_n \cos 2\pi n(\bar{x}+y) + b_n \sin 2\pi n(\bar{x}+y) \\ & \quad = a_n \cos 2\pi n\bar{x} \cos 2\pi ny - a_n \sin 2\pi n\bar{x} \sin 2\pi ny \\ & \qquad + b_n \sin 2\pi n\bar{x} \cos 2\pi ny + b_n \cos 2\pi n\bar{x} \sin 2\pi ny \\ & \quad = (a_n \cos 2\pi n\bar{x} + b_n \sin 2\pi n\bar{x}) \cos 2\pi ny \\ & \qquad + (b_n \cos 2\pi n\bar{x} - a_n \sin 2\pi n\bar{x}) \sin 2\pi ny. \end{aligned}$$

Ici nous avons

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \cos 2\pi n\bar{x} + b_n \sin 2\pi n\bar{x}) = 0,$$

tandis que la suite $\{|b_n \cos 2\pi n\bar{x} - a_n \sin 2\pi n\bar{x}|\}$ a, en $+0$, fréquence $\geqq \overline{M}_a(+0)$. Donc, si y est lui aussi *irrationnel*, la suite

$$\{|a_n \cos 2\pi n(\bar{x}+y) + b_n \sin 2\pi n(\bar{x}+y)|\}$$

a, en $+0$, fréquence $\geqq \overline{M}_a(+0)$. Si y est *rationnel* $=\frac{s}{t}$ et si t est pair, alors la suite

$$\{|a_n \cos 2\pi n(\bar{x}+y) + b_n \sin 2\pi n(\bar{x}+y)|\}$$

a, en $+0$, fréquence $\geqq \overline{\mathrm{M}}_a(+0) - \frac{2}{t}$; si t est impair, allors elle a fréquence $\geqq \overline{\mathrm{M}}_a(+0) - \frac{1}{t}$.

Si la série $\Sigma(a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x)$ converge pour $x = \bar{x}$ rationnel $= \frac{p}{q}$ avec q multiple de 4, alors, un nombre $\eta > 0$ étant arbitrairement choisi, on peut trouver un $\xi > 0$ tel que, pour une infinité de valeurs de r, le nombre des indices $n \leqq r$ pour lesquels on ait à la fois

$$|a_n| > \xi, \quad |\cos 2\pi n \bar{x}| > \xi, \quad |b_n| > \xi, \quad |\sin 2\pi n \bar{x}| > \xi,$$

soit $> r\left\{\overline{\mathrm{M}}_a(+0) - \frac{2}{q} - \eta\right\}$. Si q est suffisamment élevé et η suffisamment petit pour que $\frac{2}{q} + \eta < \overline{\mathrm{M}}_a(+0)$, le raisonnement ci-dessus peut être imité. On trouve alors que la suite

$$\{|a_n \cos 2\pi n(\bar{x} + y) + b_n \sin 2\pi n(\bar{x} + y)|\}$$

a, en $+0$, fréquence $\geqq \overline{\mathrm{M}}_a(+0) - \frac{2}{q}$ pour y irrationnel, fréquence $\geqq \overline{\mathrm{M}}_a(+0) - \frac{2}{q} - \frac{2}{t}$ pour y rationnel $= \frac{s}{t}$ avec t pair, fréquence $\geqq \overline{\mathrm{M}}_a(+0) - \frac{2}{q} - \frac{1}{t}$ pour y rationnel $= \frac{s}{t}$ avec t impair.

On raisonne d'une façon analogue si l'on suppose

$$\overline{\mathrm{M}}_b(+0) \geqq \frac{\overline{\mathrm{M}}_\rho(+0)}{2}.$$

Les résultats obtenus sur les séries trigonométriques générales peuvent être résumés comme il suit.

Si $\overline{\mathrm{M}}_\rho(+0) > 0$, la série $\Sigma(a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x)$ converge tout-au-plus dans un nombre *fini* de points. Si un de ces points est irrationnel, tous les autres $x = \bar{x} + y$ ont du premier une distance y rationnelle $= \frac{s}{t}$, avec

avec
$$\frac{1}{t} \geqq \frac{\overline{\mathrm{M}}_\rho(+0)}{2} \quad \text{si } t \text{ est impair,}$$
$$\frac{2}{t} \geqq \frac{\overline{\mathrm{M}}_\rho(+0)}{2} \quad \text{si } t \text{ est pair.}$$

Si, au contraire, tous les points de convergence sont rationnels, alors deux quelconques $x = \bar{x} = \frac{p}{q}$, $x = \bar{x} + y = \frac{p}{q} + \frac{s}{t}$ de ces points sont tels que :

a. Pour

$$\overline{M}_a(+0) \geqq \frac{\overline{M}_\rho(+0)}{2},$$

on a

$$\delta \geqq \overline{M}_a(+0) \geqq \frac{\overline{M}_\rho(+0)}{2},$$

étant

	Pour q non multiple de 4.	Pour q multiple de 4.
Pour t impair	$\delta = \frac{1}{t}$	$\delta = \frac{2}{q} + \frac{1}{t}$
Pour t pair	$\delta = \frac{2}{t}$	$\delta = \frac{2}{q} + \frac{2}{t}$

b. Pour

$$\overline{M}_b(+0) \geqq \frac{\overline{M}_\rho(+0)}{2},$$

on a

$$\delta \geqq \overline{M}_b(+0) \geqq \frac{\overline{M}_\rho(+0)}{2},$$

étant

	Pour q impair.	Pour q pair.
Pour t impair	$\delta = \frac{1}{q} + \frac{1}{t}$	$\delta = \frac{2}{q} + \frac{1}{t}$
Pour t pair	$\delta = \frac{1}{q} + \frac{2}{t}$	$\delta = \frac{2}{q} + \frac{2}{t}$

Inversement et d'une façon générale :

Si une série trigonométrique générale

$$\Sigma(a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x)$$

converge pour deux valeurs de x, l'une rationnelle et l'autre irrationnelle, ou pour une infinité de valeurs de x, alors la suite $\left\{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}\right\}$ a, en $+0$, fréquence supérieure nulle. On a même

$$\overline{M}_\rho(\xi) = \underline{M}_\rho(\xi) = 0,$$

quel que soit $\xi > 0$.

[Il est bien à remarquer que cette identité est certainement vérifiée si $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$.]

NOTE.

DÉMONSTRATIONS DES EXEMPLES DU N° 2.

1° Soit $\xi = \frac{k}{U^n}$ un terme quelconque de la suite. On a

$$\frac{N(U^n - 1, \xi)}{U^n - 1} = \frac{U^n - k}{U^n - 1}.$$

Pour $r = U^n$, $U^n + 1$, $U^n + 2$, ..., le rapport $\frac{N(r, \xi)}{r}$ décroît jusqu'à la valeur

$$\frac{N[U^n - 1 + k(U - 1), \xi]}{U^n - 1 + k(U - 1)} = \frac{U^n - k}{U^n - 1 + k(U - 1)},$$

ensuite il croît jusqu'à la valeur

$$\frac{N(U^{n+1} - 1, \xi)}{U^{n+1} - 1} = \frac{U^{n+1} - kU}{U^{n+1} - 1},$$

puis il décroît de nouveau jusqu'à la valeur

$$\frac{N[U^{n+1} - 1 + kU(U - 1), \xi]}{U^{n+1} - 1 + kU(U - 1)} = \frac{U^{n+1} - kU}{U^{n+1} - 1 + kU(U - 1)}; \text{ etc.}$$

On a

$$\frac{U^n - k}{U^n - 1} > \frac{U^{n+1} - kU}{U^{n+1} - 1} > \frac{U^{n+2} - kU^2}{U^{n+2} - 1} > \quad \ldots,$$

$$\frac{U^n - k}{U^n - 1 + k(U - 1)} > \frac{U^{n+1} - kU}{U^{n+1} - 1 + kU(U - 1)}$$
$$> \frac{U^{n+2} - kU^2}{U^{n+2} - 1 + kU^2(U - 1)} > \quad \ldots.$$

$$\lim_{r \to \infty} \frac{U^{n+r} - kU^r}{U^{n+r} - 1} = \frac{U^n - k}{U^n} = 1 - \xi,$$

$$\lim_{r \to \infty} \frac{U^{n+r} - kU^r}{U^{n+r} - 1 + kU^r(U - 1)} = \frac{U^n - k}{U^n + k(U - 1)} = \frac{1 - \xi}{1 + (U - 1)\xi}.$$

Pour les autres valeurs de ξ, les formules sont valables à cause de la monotonie de $\overline{M}$ et $\underline{M}$ par rapport à ξ.

2° Soit ξ un quelconque des points a_n. On a

$$\frac{N(2^{n+1} - 2, \xi)}{2^{n+1} - 2} = \frac{2^{n+1} - (\alpha_n - 1) - 2^{n+1}\xi'}{2^{n+1} - 2}.$$

Pour $r = 2^{n+1} - 1,\ 2^{n+1},\ 2^{n+1} + 1, \ldots$, le rapport $\frac{N(r, \xi)}{r}$ varie en oscillant entre les valeurs suivantes :

$$\frac{2^{n+1} - (\alpha_n - 1) - 2^{n+1}\xi'}{2^{n+1} - 2} > \frac{2^{n+1} - (\alpha_n - 1) - 2^{n+1}\xi'}{2^{n+1} - 2 + 2^{n+1}\xi'},$$
$$\frac{2^{n+2} - (\alpha_n - 1) - 2^{n+2}\xi'}{2^{n+2} - 2} > \frac{2^{n+2} - (\alpha_n - 1) - 2^{n+2}\xi'}{2^{n+2} - 2 + 2^{n+2}\xi'},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{2^{n+r} - (\alpha_n - 1) - 2^{n+r}\xi'}{2^{n+r} - 2} > \frac{2^{n+r} - (\alpha_n - 1) - 2^{n+r}\xi'}{2^{n+r} - 2 + 2^{n+r}\xi'},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On a

$$\lim_{r \to \infty} \frac{2^{n+r} - (\alpha_n - 1) - 2^{n+r}\xi'}{2^{n+r} - 2} = 1 - \xi',$$
$$\lim_{r \to \infty} \frac{2^{n+r} - (\alpha_n - 1) - 2^{n+r}\xi'}{2^{n+r} - 2 + 2^{n+r}\xi'} = \frac{1 - \xi'}{1 + \xi'}.$$

3° [Cette proposition pourrait être admise dans des recherches précédentes d'autres auteurs (¹) : elle a été énoncée aussi par M. A. Denjoy, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. 11, fasc. IV, 1932, p. 362. Je n'ai pu en trouver publiée aucune démonstration.]

Supposons d'abord x *rationnel* $= \frac{p}{q}$ fraction irréductible.

Si $n < q$, on a $nx < p$, donc nx ne peut pas être entier, parce que, dans ce cas, on aurait $nx = m$ et $x = \frac{m}{n}$ contrairement à l'hypothèse que $\frac{p}{q}$ soit irréductible.

Si $n_1 < n_2 < q$, on a $n_2 - n_1 < q$ et par conséquent la différence $n_2 x - n_1 x$ ne peut être un nombre entier. Donc les nombres

$$(2^{\circ}) \qquad x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_{q-1},\quad x_q$$

sont tous différents et l'on a $x_q = 0$.

D'autre côté

$$x_n = \frac{np}{q} - [nx] = \frac{np - [nx]q}{q} = \frac{t_n}{q},$$

(¹) On peut consulter avec profit les articles de M. E. Cesàro, *Sur la distribution des quantités commensurables* et *Sur la fonction $z - [z]$*, publiées dans les *Annali di Matematica pura ed applicata*, serie II, t. XIII, 1885, p. 295-313 et 323-328).

avec t_n entier. Donc les nombres (2°) sont, pris dans un ordre convenable, les nombres

$$0, \quad \frac{1}{q}, \quad \frac{2}{q}, \quad \frac{3}{q}, \quad \dots, \quad \frac{q-1}{q}.$$

Ensuite, pour chaque r on a $x_{q+r} = x_r$.

On en déduit, pour $\frac{t}{q} < \xi \leq \frac{t+1}{q}$,

$$\frac{N(q,\xi)}{q} = \frac{N(2q,\xi)}{2q} = \frac{N(3q,\xi)}{3q} = \dots$$
$$= \lim_{r \to \infty} \frac{N(r,\xi)}{r} = \overline{M}(\xi) = \underline{M}(\xi) = M(\xi) = 1 - \frac{t+1}{q}.$$

Supposons maintenant x *irrationnel*. Au cours de la démonstration nous devrons considérer des suites, analogues à la suite (1), que nous désignerons de façon générique par

(1_p^0) $$\mu_p(x), \quad \mu_p(2x), \quad \mu_p(3x), \quad \dots, \quad \mu_p(nx), \quad \dots.$$

Pour tout couple d'entiers positifs n, p, on posera

$$\mu_p(nx) = nx - [nx]_p,$$

$[nx]_p$ étant le plus grand multiple de p contenu en nx.

Entre la suite (1) et une quelconque des suites (1_p^0) passent les relations suivantes :

a. $$\mu(nx) = \mu_p(nx) - [\mu_p(nx)];$$

b. $$\mu_p(nx) = p\,\mu\left(n\frac{x}{p}\right);$$

c. La relation (a) peut s'interpréter géométriquement en disant que la suite (1) est obtenue de la suite (1_p^0) en superposant l'un sur l'autre tous les intervalles $\overline{01}$, $\overline{12}$, $\overline{23}$, ..., $\overline{p-1\ \ p}$, et en appelant $\mu(nx)$ la nouvelle position que l'élément générique $\mu_p(nx)$ vient à prendre en $\overline{01}$.

Cela posé, observons que, quel que soit l'entier $q > 1$, la suite

(3°) $$\mu\left(\frac{1}{q}\right), \quad \mu\left(\frac{2}{q}\right), \quad \mu\left(\frac{3}{q}\right), \quad \dots$$

coïncide avec le groupe de points

$$\frac{1}{q}, \quad \frac{2}{q}, \quad \frac{3}{q}, \quad \dots, \quad \frac{q-1}{q}, \quad 0$$

(pris dans cet ordre) répété indéfiniment; c'est-à-dire que

$$\mu\left(\frac{n}{q}\right)=\frac{r}{q},$$

r étant le reste de la division de n par q.

Supposons maintenant d'abord x tel que

$$\frac{1}{q}<x<\frac{1}{q}+\frac{1}{pq^2}, \qquad \text{avec } p \text{ entier} > 0.$$

Pour chaque $n<q$ on aura

$$\frac{n}{q}<nx<\frac{n}{q}+\frac{n}{pq^2}<\frac{n+1}{q}\leqq 1.$$

Donc, pour ces valeurs de n, on a

$$\mu\left(\frac{n}{q}\right)<\mu(nx)<\mu\left(\frac{n+1}{q}\right).$$

Pour $n\geqq q$ nous remarquons que, si n_1 et n_2 sont deux de ces valeurs de n telles que

$$\mu\left(\frac{n_1}{q}\right)\leqq\mu(n_2 x)<\mu\left(\frac{n_1+1}{q}\right),$$

on aura généralement un certain nombre des inégalités successives

$$\mu\left(\frac{n_1+1}{q}\right)\leqq\mu[(n_2+1)x]<\mu\left(\frac{n_1+2}{q}\right),$$
$$\mu\left(\frac{n_1+2}{q}\right)\leqq\mu[(n_2+2)x]<\mu\left(\frac{n_1+3}{q}\right),$$
$$\mu\left(\frac{n_1+3}{q}\right)\leqq\mu[(n_2+3)x]<\mu\left(\frac{n_1+4}{q}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Deux cas peuvent se présenter :

α. Ou bien ces inégalités continuent, les coefficients n_1+i, n_2+i, n_1+i+1 des trois membres augmentant régulièrement d'une unité parfois jusqu'à l'inégalité

$$\mu\left(\frac{n_1+pq-1)}{q}\right)\leqq\mu[(n_2+pq-1)x]<\mu\left(\frac{n_1+pq}{q}\right);$$

β. Ou bien il existe un entier s tel que $1 \leqq s < pq$ et que

$$\begin{array}{l}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mu\left(\frac{n_1+s-1}{q}\right) \leqq \mu[(n_2+s-1)x] < \mu\left(\frac{n_1+s}{q}\right), \\
\mu\left(\frac{n_1+s+1}{q}\right) \leqq \mu[(n_2+s)x] \quad < \mu\left(\frac{n_1+s+2}{q}\right), \\
\mu\left(\frac{n_1+s+2}{q}\right) \leqq \mu[(n_2+s+1)x] < \mu\left(\frac{n_1+s+3}{q}\right), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mu\left(\frac{n_1+pq-1}{q}\right) \leqq \mu[(n_2+pq-2)x] < \mu\left(\frac{n_1+pq}{q}\right).
\end{array}$$

Il s'ensuit que

$$n_2 \leqq n_1 < n_2 + \left[\frac{n_1}{pq}\right],$$

$\left[\frac{n_1}{pq}\right]$ étant, comme d'habitude, le plus grand entier contenu en $\frac{n_1}{pq}$.

De ces observations on peut déduire des premières limitations pour les fréquences de la suite (1). Indiquons en effet avec

$$M_q(\xi) = 1 - \frac{t+1}{q}, \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqq \frac{t}{q} < \xi \leqq \frac{t+1}{q} \leqq 1,$$

la fréquence de la suite (3°). On a

$$M_q(\xi) - \frac{1}{pq} \leqq \underline{M}(\xi),$$

puisque *en général* des groupes de $q-t$ éléments consécutifs de la suite (1), groupes distants, l'un de l'autre, de q termes, viennent tomber, un pour chacun, dans les $q-t$ intervalles

$$\overline{\frac{t}{q}\,\frac{t+1}{q}},\ \overline{\frac{t+1}{q}\,\frac{t+2}{q}},\ \ldots,\ \overline{\frac{q-1}{q}\,1}.$$

L'exception est que, parmi p consécutifs de tels groupes, il y en a *un au plus* formé de $q-t-1$ éléments, un de ces intervalles étant privé d'un élément.

Pour une raison analogue on a

$$\overline{M}(\xi) \leqq M_q(\xi) + \frac{1}{pq}.$$

Supposons maintenant x tel que

$$\frac{p}{q} < x < \frac{p}{q} + \frac{1}{q^2},$$

avec p tel que $0 < p < q$.

Nous appliquons alors les considérations précédentes à la suite

$$\mu\left(\frac{x}{p}\right), \mu\left(2\frac{x}{p}\right), \mu\left(3\frac{x}{p}\right), \ldots, \mu\left(n\frac{x}{p}\right), \ldots;$$

puisque

$$\frac{1}{q} < \frac{x}{p} < \frac{1}{q} + \frac{1}{pq^2}.$$

La relation (b) permet d'indiquer immédiatement des limitations pour les fréquences $\underline{M}^*(\xi)$, $\overline{M}^*(\xi)$ de la suite (1_p^0). On a en effet, ξ étant toujours un nombre quelconque compris entre 0 et 1,

$$M_q(\xi) - \frac{1}{pq} \leqq \underline{M}^*(p\xi) \leqq \overline{M}^*(p\xi) \leqq M_q(\xi) + \frac{1}{pq}.$$

La propriété (c) permet alors de trouver des limitations pour les fréquences $\underline{M}(\xi)$, $\overline{M}(\xi)$ de la suite (1). On aura en effet

$$\begin{aligned}\left[\underline{M}^*(\xi) - \overline{M}^*(1)\right] + \left[\underline{M}^*(1+\xi) - \overline{M}^*(2)\right] + \left[\underline{M}^*(2+\xi) - \overline{M}^*(3)\right] + \ldots \\ + \left[\underline{M}^*(p-1+\xi) - \overline{M}^*(p)\right] \leqq \underline{M}(\xi) \leqq \overline{M}(\xi) \leqq \left[\underline{M}^*(\xi) - \overline{M}^*(1)\right] \\ + \left[\overline{M}^*(1+\xi) - \underline{M}^*(2)\right] + \left[\overline{M}^*(2+\xi) - \underline{M}^*(3)\right] + \ldots \\ + \left[\overline{M}^*(p-1+\xi) - \underline{M}^*(p)\right],\end{aligned}$$

$$p\left[M_q\left(\frac{\xi}{p}\right) - M_q\left(\frac{1}{p}\right) - \frac{2}{pq}\right] \leqq \underline{M}(\xi) \leqq \overline{M}(\xi) \leqq p\left[M_q\left(\frac{\xi}{p}\right) - M_q\left(\frac{1}{p}\right) + \frac{2}{pq}\right].$$

En répétant tous ces raisonnements avec quelque changement de signe, on démontre d'une façon analogue que si x est tel que $\frac{p}{q} > x > \frac{p}{q} - \frac{1}{q^2}$, on a les mêmes limitations.

Mais nous savons qu'un irrationnel x quelconque peut être rapproché autant qu'on le veut par des rationnels $\frac{p}{q}$ tels que $\left|\frac{p}{q} - x\right| < \frac{1}{q^2}$. Donc

$$\lim_{q \to \infty} \left\{ p\left[M_q\left(\frac{\xi}{p}\right) - M_q\left(\frac{1}{p}\right)\right]\right\} = \lim_{q \to \infty} M_q(\xi) = \underline{M}(\xi) = \overline{M}(\xi) = M(\xi) = 1 - \xi.$$

C. Q. F. D.