

# BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE FRÉCHET

**Sur l'allure asymptotique des densités itérées dans  
le problème des probabilités 'en chaîne'**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 62 (1934), p. 68-83

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1934\\_\\_62\\_\\_68\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1934__62__68_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1934, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR L'ALLURE ASYMPTOTIQUE DES DENSITÉS ITÉRÉES  
DANS LE PROBLÈME DES PROBABILITÉS « EN CHAÎNE » (1);**

PAR M. MAURICE FRÉCHET

(Université de Paris).

INTRODUCTION.

**Problème initial.** — Dans la théorie des événements « en chaîne », on a à étudier le comportement quand  $n$  croît de quantités itérées  $n$  fois. La relation d'itération se présente, soit sous la forme algébrique

$$(I) \quad P_{jk}^{(n+n')} = \sum_{i=1}^{i=r} P_{ji}^{(n)} P_{ik}^{(n')},$$

soit sous la forme intégrale

$$(I) \quad P^{(n+n')}(E, F) = \int_V P^{(n)}(E, G) P^{(n')}(G, F) dG \quad (2).$$

On peut employer *deux méthodes très différentes* pour résoudre ce problème.

L'une est basée sur un « principe de moyenne » qui repose sur les conditions

$$(P) \quad \sum_{k=r} P_{kj}^{(n)} \geq 0 \quad \text{ou} \quad P^{(n)}(E, F) \geq 0,$$

$$(T) \quad \sum_{k=1} P_{jk}^{(n)} = 1 \quad \text{ou} \quad \int_V P^{(n)}(E, F) dE = 1$$

vérifiées quand les quantités itérées sont des probabilités (dans

(1) Les résultats de ce Mémoire ont été exposés publiquement dans mon cours de 1933 à l'Institut Henri Poincaré et résumés dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 195, 1932, p. 590. Toutefois, au lieu de supposer, comme précédemment, que l'une au moins des densités itérées de probabilité est continue, il m'a suffi de supposer ici que l'une au moins de ces densités est bornée.

(2) En ce qui concerne l'origine, la signification et la démonstration de ces formules, nous renvoyons à l'excellent petit livre de M. Hostinsky : *Méthodes générales du Calcul des probabilités*, (fasc. LII du *Mémorial des Sciences Mathématiques*, Gauthier-Villars, 1931). Pour les références bibliographiques, consulter aussi l'Index bibliographique de cet Ouvrage, page 60. Nous ne donnerons ici de titres complets que pour les Mémoires non cités dans cet Index.

l'itération algébrique) où des « densités » de probabilités (dans l'itération intégrale):

Cette première méthode est due à Markoff; elle a été retrouvée par MM. Urban, Paul Lévy, Hadamard, Hostinsky. Les résultats obtenus par Markoff pour l'itération algébrique ont été complétés par MM. Hadamard et Hostinsky et étendus au cas de l'itération intégrale par les mêmes auteurs, puis par nous-même dans un premier Mémoire (1) par la méthode même de Markoff. Cette méthode est simple et rapide dans le « cas régulier », où les quantités itérées convergent vers des limites indépendantes de la première variable ( $j$  ou  $E$ ) quand  $n$  croît indéfiniment.

On peut employer une autre méthode, un peu plus longue, mais *plus complète et plus générale*. Cette méthode est basée sur l'expression aussi explicite que possible des quantités itérées en fonction de  $n$ .

Elle est plus complète parce qu'elle fournit dans le problème des probabilités « en chaîne » des résultats (en particulier dans le cas singulier) que la première ne peut donner. C'est, au fond, la base de la démonstration développée par Poincaré dans le problème du battage des cartes. Elle a été ensuite reprise (pour la première fois, semble-t-il) par M. Romanovski, puis par M. Hostinsky et ses élèves. Dans un second Mémoire (2), nous avons complété par cette même seconde méthode les résultats obtenus par ces auteurs sur l'itération algébrique.

Nous avons dit que la seconde méthode est, non seulement plus complète, mais plus générale.

Contrairement à la première, *elle subsiste*, en effet, *quand on fait abstraction des conditions (P) et (T)*. C'est dire qu'elle peut s'appliquer à des problèmes, non seulement sans rapport avec la théorie des probabilités, mais *de nature mathématique plus générale*. Nous avons donc pu reprendre, dans un troisième Mémoire (3), le problème de l'itération algébrique sans faire usage des conditions propres à la théorie des probabilités.

---

(1) *Les probabilités en chaîne* (*Commentarii Helvetica*, vol. 5, 1933, p. 175-245).

(2) *Compléments à la théorie des probabilités discontinues « en chaîne »* (*Annali Scuole N. S. Pisa*, vol. II, 1932, p. 131-164).

(3) *Comportement analytique des solutions d'un système d'équations*

C'est dans les mêmes conditions de généralité que nous avons pu, dans un quatrième Mémoire <sup>(1)</sup>, étudier le comportement, quand  $n$  croît, des noyaux itérés de Fredholm, noyaux itérés dont les densités itérées de probabilité  $P^{(n)}(E, F)$  sont des cas particuliers. Nous avons montré dans notre premier Mémoire [*loc. cit.*, note <sup>(1)</sup>, page précédente] qu'en étendant l'étude, comme il est parfois nécessaire, au cas de noyaux et de domaines non bornés, on rencontre des complications inévitables. Nous avons voulu éliminer ces complications dans notre quatrième Mémoire en nous bornant au cas où le domaine  $V$  est borné et où les noyaux itérés sont chacun bornés, à la longue, c'est-à-dire à partir d'un certain rang.

Dans le troisième Chapitre du présent Mémoire, nous allons appliquer au cas des probabilités en chaîne les résultats concernant la suite des noyaux itérés de Fredholm obtenus dans notre quatrième Mémoire <sup>(1)</sup>.

Cette application est immédiate pour la plupart des résultats de ce précédent Mémoire, à l'exception d'un seul. Ce dernier résultat n'était applicable qu'à des noyaux vérifiant une condition très particulière. Or nous avons pu démontrer ici même, dans le premier Chapitre, que dans le cas où les noyaux sont des densités de probabilité, cette condition est vérifiée. Plus précisément : *quand l'une au moins des densités itérées de probabilité  $P^{(n)}(E, F)$  est bornée sur le domaine borné  $V$ , toutes les constantes fondamentales de module 1 du noyau  $p(E, F)$  vérifient une même équation binôme  $\lambda^N = 1$ .*

Nous avons enfin complété et précisé (p. 76-79) dans le second Chapitre certains résultats remarquables concernant les fonctions fondamentales correspondant aux constantes fondamentales de module 1. Il s'agit ici de résultats communiqués par M. Hadamard sans démonstration au Congrès international des Mathématiciens de Bologne de 1928 (voir le volume V, p. 136, des Comptes rendus de ce Congrès).

---

*linéaires et homogènes aux différences finies du premier ordre à coefficients constants (Publ. Fac. Sc. Univ. Masaryk, Brno, n° 178, 1933, p. 1-24).*

<sup>(1)</sup> *Allure asymptotique de la suite des noyaux itérés de Fredholm (Quarterly Journal of Oxford Series Math., 1934).*

CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS DES CONSTANTES FONDAMENTALES DE MODULE 1  
DES DENSITÉS DE PROBABILITÉS.

Nous traiterons le cas général où le noyau  $p(E, F)$  dépend de deux points variables  $E, F$  assujettis à rester sur un domaine  $V$  appartenant à l'espace à  $k$  dimensions.

Considérons un noyau  $p(E, F)$ , sur lequel nous supposerons d'abord seulement qu'il satisfait aux conditions qui se présentent dans la théorie des probabilités en chaîne, savoir :

$$(P) \quad p(E, F) \geq 0 \quad (\text{quand } E \text{ et } F \text{ varient sur } V),$$

$$(T) \quad \int_V p(E, F) dF = 1 \quad (\text{quel que soit } E \text{ sur } V),$$

Il existe au moins une constante fondamentale  $c$  de module 1 et au moins une fonction fondamentale correspondante  $\varphi(E)$ ; c'est-à-dire qu'on peut écrire

$$(1) \quad \varphi(E) = c \int_V p(E, F) \varphi(F) dF \quad \text{avec } |c| = 1 \text{ et } \varphi(E) \neq 0.$$

Car, en vertu de (T), on peut prendre  $c = 1$  et  $\varphi(E) = 1$ . Mais il peut y avoir d'autres solutions du système.

1° Il va nous être utile de supposer que le module de  $\varphi(E)$  est borné sur  $V$  et atteint son maximum en quelque point de  $V$ . Si  $\varphi(E)$  est continue,  $V$  étant borné, l'hypothèse précédente est réalisée. Mais nous allons voir qu'il en est encore de même, quand supposant encore  $V$  borné, on ne sait rien sur la continuité de  $p(E, F)$  et de ses itérés. Nous admettons, pourtant, que l'un au moins de ses itérés, soit  $P^{(m)}(E, F)$ , a une borne supérieure finie  $Q^{(m)}$  sur  $V$ .

Tout d'abord, en effet, comme on a aussi

$$(2) \quad \varphi(E) = c^m \int_V P_m(E, F) \varphi(F) dF,$$

on peut écrire

$$|\varphi(E)| \leq |c|^m Q_m \int |\varphi(F)| dF.$$

Ainsi, toute fonction fondamentale absolument intégrable sur  $V$  y a, en module, une borne supérieure finie  $M$ , et  $M$  est différent de zéro.

Soient alors  $\varepsilon$ ,  $\eta$  deux nombres positifs arbitrairement choisis parmi ceux pour lesquels  $\varepsilon < M$ ,  $\eta < 1$ . L'ensemble  $\nu$  des points  $E$  où  $|\varphi(E)| > M - \varepsilon$  comporte au moins un point, et l'on a, en vertu de (2), avec  $|c| = 1$ ,

$$\begin{aligned} |\varphi(E)| &\leq \int_{\nu} P_m(E, F) M dF + \int_{V-\nu} P_m(E, F) (M - \varepsilon) dF \\ &= M - \varepsilon \int_{V-\nu} P_m(E, F) dF. \end{aligned}$$

Or il existe au moins un point  $E'$  de  $V$ , où

$$M - |\varphi(E')| < \varepsilon \eta.$$

On aura donc

$$\int_{V-\nu} P_m(E', F) dF < \eta.$$

D'où

$$1 - \eta \leq \int_{\nu} P_m(E', F) dF \leq \int_{\nu} Q_m dF = Q_m \int_{\nu} dF.$$

D'ailleurs  $\eta$  peut être pris aussi petit que l'on veut, donc

$$\int_{\nu} dF \geq \frac{1}{Q_m}.$$

Soit  $\nu_n$  ce que devient  $\nu$  pour  $\varepsilon = \frac{M}{n}$ .

Il s'agit d'établir que l'ensemble  $\nu_{\omega}$  des points où

$$|\varphi(E)| = M$$

comporte au moins un point.

Or  $\nu_{\omega}$  est évidemment l'ensemble commun aux  $\nu_n$ . Puisque  $\nu_n$  appartient nécessairement à  $\nu_{n-1}$ , on a

$$\int_{\nu_1} dF - \int_{\nu_{\omega}} dF = \left[ \int_{\nu_1} dF - \int_{\nu_2} dF \right] + \dots + \left[ \int_{\nu_{n-1}} dF - \int_{\nu_n} dF \right] + \dots,$$

d'où

$$\int_{\nu_{\omega}} dF = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\nu_n} dF \quad \text{avec} \quad \int_{\nu_n} dF \geq \frac{1}{Q_m}.$$

On a finalement

$$\int_{v_\omega} dF \geq \frac{1}{Q_m}.$$

Donc : non seulement l'ensemble  $v_\omega$  des points où  $|\varphi(E)|$  atteint son maximum n'est pas vide, mais il a même une mesure positive et supérieure ou égale à  $\frac{1}{Q_m}$ .

2° Nous sommes maintenant en mesure d'étendre au cas actuel une propriété des constantes fondamentales que nous n'avions d'abord énoncée (dans une Note de Washington) que dans le cas où l'un des itérés de  $p(E, F)$  est continu.

Soit  $E_0$  un point de  $v_\omega$ , on a

$$|\varphi(E_0)| = M > 0$$

et, en vertu de (1),

$$(3) \quad \int_V p(E_0, F) \left[ 1 - c \frac{\varphi(F)}{\varphi(E_0)} \right] dF = 0.$$

En posant

$$c \frac{\varphi(F)}{\varphi(E_0)} = \alpha(F) + i\beta(F),$$

on a

$$\alpha^2(F) + \beta^2(F) \leq \left| c \frac{\varphi(F)}{\varphi(E_0)} \right|^2 = \left[ \frac{|\varphi(F)|}{M} \right]^2 \leq 1.$$

Donc

$$1 - \alpha(F) \geq 0$$

et, dans l'égalité résultant de (3),

$$\int_V p(E_0, F) [1 - \alpha(F)] dF = 0;$$

la quantité sous le signe  $\int$  est supérieure ou égale à zéro. Elle est donc nulle sur  $V$  sauf, peut-être, sur un ensemble de mesure nulle  $\omega'_0$  (1). Or, en vertu des conditions (P) et (T), l'ensemble  $\omega'_0$  sur lequel  $p(E_0, F) > 0$  est de mesure positive. Sur la partie  $\omega_0$  de  $\omega'_0$  qui n'appartient pas à  $\omega''_0$ ,  $\alpha(F)$  sera égal à 1 et, puisque

$$0 \leq \beta^2(F) \leq 1 - \alpha^2(F),$$

---

(1) Pour établir ce point, voir notre *Mémoire des Comm. Helv.* Nous supposons ici comme dans ce *Mémoire* que  $V$  est un domaine.

$\beta(F)$  y sera nul. Finalement, on aura

$$\varphi(F) = \frac{\varphi(E_0)}{c}$$

sur un ensemble  $\omega_0$  de mesure égale à celle de  $\omega'_0$ , donc positive.

On a, sur  $\omega_0$ ,  $|\varphi(F)| = M$ ; on peut donc remplacer dans le raisonnement précédent,  $E_0$  par un point quelconque  $E_1$  de  $\omega_0$ ; on en déduira l'existence d'un ensemble  $\omega_1$  de mesure positive, sur lequel

$$\varphi(F) = \frac{\varphi(E_1)}{c}$$

et ainsi de suite. On formera une suite illimitée d'ensembles  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n, \dots$  de mesures positives, et une suite de points  $E_1$  sur  $\omega_0, \dots, E_{n+1}$  sur  $\omega_n, \dots$  tels que sur  $\omega_n$  :

$$(4) \quad \varphi(F) = \frac{\varphi(E_n)}{c} = \frac{\varphi(E_0)}{c^{n+1}}.$$

D'ailleurs, en vertu de (2),  $\varphi(F)$  est aussi une fonction fondamentale relative au noyau borné  $P_m(E, F)$  et à la constante fondamentale  $c' = c^m$  de ce noyau, avec  $|c'| = 1$ . En recommençant le raisonnement précédent sur l'équation (2), on verrait qu'on peut former une suite d'ensembles  $W_0, W_1, \dots, W_n, \dots$  et une suite de points  $E'_0, E'_1$  sur  $W_0, \dots, E'_{n+1}$  sur  $W_n, \dots$  tels que sur  $W_n$  :

$$(5) \quad \varphi(F) = \frac{\varphi(E'_0)}{c^{m(n+1)}}.$$

Mais le raisonnement fait plus haut montre qu'on peut prendre pour  $W_n$  un ensemble qui ne diffère que par un ensemble de mesure nulle de l'ensemble  $W'_n$  formé par tous les points  $F$  où  $P_m(E'_n, F) > 0$ ; on a donc

$$1 = \int_{W'_n} P_m(E'_n, F) dF = \int_{W_n} P_m(E'_n, F) dF \leq Q_m \int_{W_n} dF.$$

Par suite, l'ensemble  $W_n$  garde, quel que soit  $n$ , une mesure au moins égale à un nombre positif  $\frac{1}{Q_m}$  indépendant de  $n$ .

Si les  $W_n$  étaient disjoints deux à deux, le domaine  $V$  aurait une mesure supérieure à  $\frac{n}{Q_m}$  quel que soit  $n$ , alors qu'on le suppose



borné. Il y a donc au moins deux ensembles  $W_\alpha$  et  $W_\beta$  (avec  $\alpha < \beta$ ) ayant un point commun  $F_0$  et l'on aura

$$\frac{\varphi(E_\alpha)}{c^{m(\alpha+1)}} = \varphi(F_0) = \frac{\varphi(E_0)}{c^{m(\beta+1)}} \quad \text{avec } \varphi(E_0) \neq 0, \quad c \neq 0.$$

D'où

$$c^{m(\beta-\alpha)} = 1,$$

$\beta - \alpha$  étant un entier positif.

Ainsi  $c$  est une racine d'une équation binôme.

Nous savons que s'il y a au moins une constante fondamentale de module 1 (à savoir l'unité), il ne peut y en avoir qu'un nombre fini :  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ . Soit  $N$  un multiple commun des degrés des équations binômes auxquelles satisfont  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ , ces quantités seront racines de

$$\lambda^N - 1 = 0.$$

Finalement toutes les constantes fondamentales de module 1 de  $p(E, F)$  sont racines d'une même équation binôme

$$\lambda^N = 1,$$

Ce résultat est établi, sans rien supposer sur la continuité de  $p(E, F)$  ou de ses itérés, sous la seule hypothèse que l'un au moins des itérés  $P^{(n)}(E, F)$  est borné et que l'ensemble  $V$  des états possibles est un domaine borné.

*Remarque.* — La démonstration précédente va nous permettre de prouver certains résultats énoncés sans démonstration par M. Hadamard et cités plus haut (p. 70). Elle nous conduira, en outre, à compléter sur certains points les résultats de M. Hadamard.

## CHAPITRE II.

### PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS FONDAMENTALES CORRESPONDANT A UNE CONSTANTE FONDAMENTALE DE MODULE 1.

Supposons qu'on représente, sur le cercle  $C. |z| = M$  du plan complexe les valeurs de module maximum  $M$  susceptibles d'être prises par  $\varphi(E)$  et soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble de leurs affixes. A tout point

de  $\mathcal{A}$ , image de  $\varphi(E_0)$  correspondra sur  $\mathcal{A}$  un point image de  $\varphi(E_1) = \frac{\varphi(E_0)}{c}$ , d'après la démonstration précédente. Comme  $|c| = 1$ , on peut poser  $c = e^{i\psi}$  et par conséquent l'ensemble  $\mathcal{A}$  des points images de  $\varphi(E)$  pour  $|\varphi(E)| = M$  reste *invariant* sur  $C$  dans une rotation d'angle  $\psi$  <sup>(1)</sup>. *C'est le premier résultat de M. Hadamard.*

Quand  $|\varphi(E)| = M$ , on peut poser  $\varphi(E) = Me^{i\theta(E)}$ . Chaque argument  $\theta(E)$  correspond à un point  $z$  de l'ensemble  $\mathcal{A}$ . A chaque point  $z = Me^{i\theta}$  de  $\mathcal{A}$  correspond un certain ensemble  $e_\theta$  de points  $E$  de  $V$  où  $\varphi(E) = Me^{i\theta}$ . Naturellement, deux ensembles  $e_\theta, e_{\theta'}$  correspondant à des valeurs distinctes de  $z = Me^{i\theta}, z' = Me^{i\theta'}$  sont *sans point commun*. Ces ensembles  $e_\theta$  forment un ensemble total  $\mathcal{E}$  appartenant à  $V$ . Nous venons d'énoncer le *second résultat* de M. Hadamard.

Mais nous pouvons préciser encore ces résultats. En effet, si  $F$  appartient à  $\omega_{N-1}$ , on aura, en vertu de (4),

$$\varphi(F) = \varphi(E_0).$$

Or  $E_0$  est un point quelconque de  $\mathcal{E}$ ; si  $\varphi(E_0) = Me^{i\theta}$ , on voit que  $e_\theta$  comprend  $\omega_{N-1}$  et par suite est de mesure positive : ainsi *chacun des ensembles  $e_\theta$  de M. Hadamard comprend une infinité de points et même est de mesure positive.*

On peut encore compléter comme suit les deux premiers résultats de M. Hadamard. On verrait, en effet, en raisonnant sur (5) comme sur (4), que  $e_\theta$  comprend aussi  $\omega_{N-1}$  et par suite est de mesure  $\geq$  à un nombre positif  $\frac{1}{Q_m}$  indépendant de  $\theta$ . Comme les  $e_\theta$  sont disjoints et appartiennent au domaine borné  $V$ , il en résulte que les  $e_\theta$  sont en nombre fini : *le nombre  $j$ , des valeurs distinctes de  $\varphi$  qui sont de module égal à son module maximum  $M$ , est fini et au plus égal à  $VQ_m$ .*

*Remarque.* — Soit  $\gamma_0$  le plus petit degré des équations binomes

---

<sup>(1)</sup> En réalité, nous prouvons seulement qu'une relation d'angle  $-\psi$  amène  $\alpha$  sur un ensemble de points de  $\alpha$ . Mais cela établit l'invariance quand on tient compte du fait établi plus loin que le nombre des points de  $\alpha$  est fini.

dont  $c$  est racine. Si  $z$  est l'une des valeurs de module  $M$  de  $\varphi$ , on a vu que  $\frac{z}{c^n}$  est aussi une telle valeur quel que soit  $n$ .

Or les valeurs  $z, \frac{z}{c}, \frac{z}{c^2}, \dots, \frac{z}{c^{\gamma_0-1}}$  sont distinctes.

Donc il y a au moins  $\gamma_0$  valeurs distinctes de  $\varphi$  qui sont de module  $M$ , on a donc  $\gamma_0 \leq j \leq VQ_m$ .

Il en résulte en particulier que l'on a  $\gamma_0 \leq VQ_m$  : *les degrés des équations binomes  $(\lambda_1)^{\gamma_1} - 1 = 0, \dots, (\lambda_r)^{\gamma_r} - 1 = 0$ , vérifiées par toutes les constantes fondamentales de module un de  $p(E, F)$ , sont au plus égaux à la partie entière  $\mu$  de  $VQ_m$  (1).* Il en résulte une limitation, assez grossière et qu'on pourrait sans doute améliorer, de  $N$ . On peut prendre pour  $N$  un multiple commun de  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ . Ceux-ci appartiennent à la suite  $1, 2, \dots, \mu$ . On peut donc prendre pour  $N$  le plus petit commun multiple  $\gamma$  des nombres  $1, 2, \dots, \mu$ . D'ailleurs  $\gamma \leq \mu!$  Ainsi la période asymptotique de  $p^{(n)}(E, F)$  est au plus égale à  $\mu!$

Nous venons de prouver que l'ensemble  $\mathcal{E}$  de M. Hadamard est composé d'un nombre fini d'ensembles disjoints  $e_\theta$  et que l'ensemble  $\mathcal{A}$  des points images des points de  $\mathcal{E}$  sur le cercle  $c$  est constitué par l'ensemble des sommets d'un polygone de  $j$  côtés nécessairement régulier puisqu'il est invariant dans une rotation d'angle  $\psi$ .

Ceci étant, arrivons au troisième résultat de M. Hadamard. Soit  $\varphi(E_0)$  l'une des valeurs de  $\varphi$  de module  $M$ ; on peut poser  $\varphi(E_0) = M e^{i\theta}$ . Nous savons que  $\varphi(F) = \frac{\varphi(E_0)}{c} = M e^{i(\theta-\psi)}$  sur un ensemble de mesure positive. Soit  $e' = e_{\theta-\psi}$  l'ensemble de tous les points  $F$  où  $\varphi(F) = M e^{i(\theta-\psi)}$ . On a

$$\begin{aligned} M e^{i\theta} = \varphi(E_0) &= c \int_{\mathcal{V}} p(E_0, F) \varphi(F) dF \\ &= c \int_{e'} p(E_0, F) \frac{M e^{i\theta}}{c} dF + c \int_{\mathcal{V}-e'} p(E_0, F) \varphi(F) dF. \end{aligned}$$

D'où

$$M e^{i\theta} \int_{\mathcal{V}-e'} p(E_0, F) dF = c \int_{\mathcal{V}-e'} p(E_0, F) \varphi(F) dF$$

(1) On a bien  $VQ_m \geq 1$ , car  $1 = \int_{\mathcal{V}} P^{(n)}(E, F) dF \leq VQ_m$ .

ou

$$\int_{V-e'} p(E_0, F) \left[ 1 - \frac{c \varphi(F)}{M e^{i\theta}} \right] dF = 0.$$

Or

$$\left| \frac{c \varphi(F)}{M e^{i\theta}} \right| \leq 1.$$

En posant

$$\frac{c \varphi(F)}{M e^{i\theta}} = \gamma(F) + i \delta(F),$$

on voit encore, comme plus haut, que

$$\int_{V-e'} p(E_0, F) [1 - \gamma(F)] dF = 0 \quad \text{avec} \quad p(E_0, F) [1 - \gamma(F)] \geq 0,$$

et par conséquent que

$$p(E_0, F) [1 - \gamma(F)]$$

est nul sur  $V - e'$ , sauf, peut-être, sur un ensemble  $u$  de mesure nulle. Or, en dehors de  $e'$ ,

$$\varphi(F) \neq \frac{M e^{i\theta}}{c};$$

donc

$$\gamma(F) + i \delta(F) \neq 1 \quad \text{avec} \quad \gamma^2(F) + \delta^2(F) \leq 1.$$

Le point de coordonnées cartésiennes  $\gamma(F)$ ,  $\delta(F)$  étant à distance de l'origine  $\leq 1$  et étant distinct du point  $(1, 0)$ , on a donc  $\gamma(F) < 1$ , sur  $V - e'$ .

Dès lors, sur  $V - e'$ ,  $p(E_0, F) = 0$  sauf, peut-être, sur  $u$ . En résumé, si  $E_0$  appartient à  $e_0$ ,  $p(E_0, F)$  ne peut être différent de zéro que si  $F$  appartient à  $e_{0-\psi}$  ou peut-être à l'ensemble de mesure nulle  $u$ .

C'est le *troisième résultat* de M. Hadamard, à l'exception de la réserve concernant  $u$ . Cela tient à ce que M. Hadamard, dont la communication, très condensée, n'explicite pas ses hypothèses sur le noyau, a vraisemblablement limité son raisonnement au cas où le noyau (ou l'un de ses itérés) est continu, cas où cette réserve devient inutile.

Si l'on ne supposait rien sur la continuité, l'omission de cette réserve infirmerait, non seulement notre raisonnement, mais le troisième résultat lui-même. Supposons, par exemple, qu'on ait

pris pour  $V$  le segment  $(-1, +1)$  et qu'on ait

$$p(x, y) = 1 \quad \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \leq y \leq 1 \quad \text{et si} \quad -1 \leq y \leq 0 < x \leq 1;$$

$$p(0, y) = \frac{1}{2},$$

et, dans les autres cas,

$$p(x, y) = 0.$$

On aura bien les conditions (P), (T). Ce noyau admet une fonction fondamentale

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0, \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

correspondant à la constante fondamentale de module 1 :  $c = -1$ .

On a ici  $M = 1$ ,  $\psi = \pi$ . Si  $x_0$  appartient à  $e_0$ , c'est-à-dire si  $\varphi(x_0) = 1$ , ou si  $x_0$  appartient à  $0 < x \leq 1$ ,  $p(x_0, y) = 1 \neq 0$  pour  $-1 \leq y \leq 0$ , c'est-à-dire non seulement quand  $y$  appartient à  $e_{-\pi}$ , c'est-à-dire quand  $\varphi(y) = -1$ , mais aussi quand  $y = 0$ .

*Remarque.* — Le résultat du paragraphe 1<sup>o</sup>, page 73, fournit une réponse à l'une des questions mentionnées par M. Hadamard : s'il pourrait arriver que le module de  $\varphi$  approchât asymptotiquement de sa borne supérieure sans jamais l'atteindre. Pour qu'il en soit ainsi, il faudrait ou que  $V$  soit illimité, ou que,  $V$  étant borné, non seulement  $p(E, F)$  ne soit pas borné, mais encore qu'aucun de ses itérés ne soit borné. D'ailleurs, dans ces cas, se présenterait une question préjudicielle :  $|\varphi(E)|$  serait-il borné ?

### CHAPITRE III.

#### APPLICATION AUX PROBABILITÉS CONTINUES EN CHAÎNE DE L'ÉTUDE DU COMPORTEMENT DES NOYAUX ITÉRÉS.

**Simplifications.** — On a, dans le problème des probabilités continues en chaîne, à étudier le comportement analytique de densités itérées  $P^{(n)}(E, F)$ . Comme  $P^{(n)}(E, F)$  est un noyau de Fredholm itéré, on peut d'abord appliquer textuellement tous les résultats démontrés dans notre Mémoire d'Oxford (*loc. cit.*, p. 70) pour les noyaux de Fredholm quelconques, pourvu qu'on

suppose encore que  $V$ , qui est ici l'ensemble des états possibles, soit borné et que les  $P^{(n)}(E, F)$  soient bornés à partir d'un certain rang.

Il ne reste plus qu'à voir si les conditions (T), (P) de la page 69, conduisent à certaines simplifications dans les énoncés généraux de ce Mémoire. On observe d'abord qu'on a, pour  $n > m$ ,

$$P^{(n)}(E, F) = \int_V P^{(m)}(E, G) P^{(n-m)}(G, F) dG \\ \leq Q_m \int_V P^{(n-m)}(E, G) dG = Q_m \quad \text{d'où} \quad Q_n \leq Q_m.$$

Ainsi, dans le cas actuel, il suffit que, pour au moins un rang  $m$ ,  $P^{(m)}(E, F)$  soit borné, pour que tous les  $P^{(n)}(E, F)$  soient bornés à partir de ce rang.

De plus, dans ce cas, les  $Q_n$ , étant tous pour  $n \geq m$  au plus égaux à  $Q_m$ , sont également bornés : donc on se trouve nécessairement dans ce que nous avons appelé « le cas borné » au cours de notre Mémoire d'Oxford. Ainsi, on voit que la suite des densités itérées converge toujours au sens de Cesàro et cela uniformément, et même normalement. D'ailleurs ici, la condition (T) étant, par hypothèse, satisfaite, la limite  $\Pi(E, F)$ , au sens de Cesàro, de  $P^{(n)}(E, F)$  vérifie, comme on l'a vu dans ce Mémoire d'Oxford, la condition

$$\int_V \Pi(E, F) dF = 1.$$

D'ailleurs, comme les  $P^{(n)}(E, F)$  restent  $\geq 0$ , on a aussi

$$\Pi(E, F) \geq 0.$$

De l'ensemble de ces deux relations résulte que  $\Pi(E, F)$  n'est jamais  $\equiv 0$ . Il en résulte aussi que cette limite de densités est elle-même aussi une densité de probabilité.

Enfin, on observera qu'en vertu de la condition (T<sub>1</sub>), l'unité est constante fondamentale de  $p(E, F)$ .

En tenant compte enfin de la propriété fondamentale démontrée ici au premier Chapitre, nous sommes maintenant en mesure d'énoncer les propriétés suivantes des densités itérées :

*Si l'ensemble  $V$  des états possibles est un domaine borné et si*

*l'une au moins.  $P^{(n)}(E, F)$ , des densités itérées de probabilité est bornée sur  $V$  :*

1° *Toutes les densités  $P^{(n)}(E, F)$  sont également bornées à partir du rang  $m$  (c'est-à-dire qu'il existe un nombre fixe  $Q_m$  tel que  $0 \leq P^{(n)}(E, F) \leq Q_m$  pour  $n \geq m$ ).*

2° *Toutes les constantes fondamentales de  $p(E, F)$  sont, en module,  $\geq 1$ .*

3° *Celles de ces constantes qui sont de module égal à 1 (il y en a au moins une, à savoir  $\lambda_1 = 1$ ), sont pôles simples de la résolvante de  $p(E, F)$  et sont racines d'une même équation binôme  $\lambda^N = 1$ .*

4° *Les densités itérées  $P^{(n)}(E, F)$  sont, toujours, des fonctions asymptotiquement périodiques de  $n$  et l'on peut prendre pour période asymptotique le nombre  $N$  qui est indépendant des états  $E, F$ .*

5° *Il en résulte, en particulier, que les densités itérées de probabilité  $P^{(n)}(E, F)$  convergent toujours, au sens de Cesàro, et cela normalement sur  $V$ , c'est-à-dire que la moyenne arithmétique*

$$\mathfrak{N}_\nu(E, F, n) = \frac{P^{(\nu+1)}(E, F) + \dots + P^{(\nu+n)}(E, F)}{n}$$

*converge normalement sur  $V$ , quand  $n$  croît, vers une limite  $\Pi(E, F)$  indépendante de  $\nu$  ( $\nu$  étant supposé arbitraire mais fixe et  $\geq m$ ).*

6° *L'erreur commise en prenant  $\mathfrak{N}_\nu(E, F, n)$  pour valeur approchée de  $\Pi(E, F)$  est un infiniment petit d'ordre au moins égal à celui de  $\frac{1}{n}$ . Plus précisément, le produit*

$$n[\mathfrak{N}_\nu(E, F, n) - \Pi(E, F)],$$

*et, par suite, les sommes partielles des termes de la série*

$$\sum_{n=m}^{n \rightarrow +\infty} [P^{(n)}(E, F) - \Pi(E, F)]$$

*sont bornés dans leur ensemble.*

7° *La limite généralisée  $\Pi(E, F)$  de  $P^{(n)}(E, F)$  est égale au noyau principal de  $p(E, F)$  relatif à la constante fondamentale  $\lambda_1 = 1$ .*

8° *A  $\lambda_1 = 1$  correspond au moins un système biorthogonal et*

normé de solutions fondamentales  $\Phi_j$  de  $p(E, F)$ ,  $\Theta_j$  de  $p(F, E)$ ; et, pour tout système de cette espèce, on a

$$(6) \quad \Pi(E, F) = \sum \Phi_j(E) \Theta_j(F).$$

9° On a

$$\Pi(E, F) \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_V \Pi(E, F) dF = 1.$$

CAS PARTICULIERS. — 10° Pour que la limite généralisée  $\Pi(E, F)$  soit indépendante de l'état initial  $E$ , il faut et il suffit qu'il existe une solution et une seule du système

$$(8) \quad Y(F) = \int_V p(G, F) Y(G) dG, \quad 1 = \int_V Y(F) dF,$$

et alors cette solution sera précisément l'expression  $\Pi(F)$  à laquelle se réduit  $\Pi(E, F)$ .

11° La condition nécessaire et suffisante précédente peut aussi être remplacée par la suivante : que l'unité, considérée comme constante fondamentale de  $p(E, F)$ , soit de rang 1, c'est-à-dire que le nombre de termes de la somme dans (6) soit égal à 1.

12° La même condition nécessaire et suffisante peut s'exprimer sous la forme : que l'unité, considérée comme racine du déterminant  $D(\lambda)$  de  $p(E, F)$ , soit racine simple de  $D(\lambda)$ . Au cas où,  $p(E, F)$  n'étant pas borné,  $D(\lambda)$  ne serait pas fini, on pourra remplacer  $D(\lambda)$  par le déterminant de Fredholm relatif au noyau principal de  $p(E, F)$  correspondant à  $\lambda_1 = 1$  (ce noyau principal est borné).

13° Pour que  $\Pi(E, F)$  soit indépendant de l'état initial  $E$  et de l'état final  $F$ , il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient simultanément réalisées :

a. que l'on ait l'égalité

$$(T_1) \quad \int_V p(E, F) dE = 1;$$

b. que l'unité considérée comme racine de  $D(\lambda)$  soit une racine simple. Et alors, la constante à laquelle se réduit  $\Pi(E, F)$  est égale à  $\frac{1}{\text{mesure de } V}$ .



14° Pour que les densités itérées  $P^{(n)}(E, F)$  soient des fonctions exactement périodiques de  $n$ , il faut et il suffit que les constantes fondamentales de  $p(E, F)$  soient toutes de module 1 et que  $p(E, F)$  se réduise à la somme de ses noyaux principaux (et par conséquent soit de rang fini).

15° Pour que les densités itérées  $P^{(n)}(E, F)$  convergent uniformément sur  $V$  au sens ordinaire, il faut et il suffit que l'unité soit la seule constante fondamentale de  $p(E, F)$  qui soit de module 1.

Dans ce cas, la série

$$s_\nu(E, F) = \sum_{n=\nu}^{n=\infty} [P^{(n)}(E, F) - \Pi(E, F)] \quad (\nu \geq m)$$

est normalement convergente. Autrement dit, non seulement le produit  $n[\mathcal{M}_\nu(E, F, n) - \Pi(E, F)]$  reste borné, mais encore il converge normalement, quand  $n$  croît, vers une limite, qui est  $s_\nu(E, F)$ .

16° Pour qu'on soit dans le cas régulier, c'est-à-dire pour que  $P^{(n)}(E, F)$  converge uniformément (au sens ordinaire) vers une limite  $\Pi(F)$  indépendante de l'état initial, il faut et il suffit :

- a. que l'unité soit racine simple de  $D(\lambda)$  :
- b. que l'unité soit la seule constante fondamentale de  $p(E, F)$  qui soit de module 1.