BULLETIN DE LA S. M. F.

NIKOLA OBRECHKOFF

Sur la sommation des séries trigonométriques de Fourier par les moyennes arithmétiques

Bulletin de la S. M. F., tome 62 (1934), p. 84-109
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1934__62__84_0>

SUR LA SOMMATION DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES DE FOURIER PAR LES MOYENNES ARITHMÉTIQUES;

PAR M. NIKOLA OBRECHKOFF.

Soit $f(x)$ une fonction, définie dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, intégrable au sens de M. Lebesgue. Soit

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

la série de Fourier correspondante. On a donné des différentes conditions suffisantes pour la sommation de la série (1) par la méthode de Cesàro. C'est M. Fejér [1] le premier, qui a démontré que la série (1) est sommable (C, 1) en chaque point x de continuité de la fonction $f(x)$ avec la somme $f(x)$ et ainsi a posé la base des recherches pour la sommabilité de la série (1). Posons

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t) - 2A], \tag{2}$$

où A est une fonction de x, qui est égal à $f(x)$ aux points de continuité de la fonction $f(x)$. M. Lebesgue [2] a démontré que la série (1) est sommable (C, 1) avec la somme A si l'on a

$$\Phi^*(h) = \int_0^h |\varphi(t)|\, dt = o(h) \qquad (h \to 0).$$

M. Hardy [3] a démontré que dans cette condition la série (1) est sommable (C, δ) pour chaque $\delta > 0$. Mais avant lui presque en même temps MM. Chapman, Riesz, Gronwall, Young ont démontré que si $\varphi(t) \to 0$ pour $t \to 0$ la série (1) est sommable (C, δ) pour

---

(1) L. FEJÉR, *Mathematische Annalen*, t. 58, 1903, p. 51-69.
(2) H. LEBESGUE, *Mathematische Annalen*, t. 61, 1905, p. 251-280.
(3) G. H. HARDY, *Proceedings of the London math. Soc.*, t. 12, p. 365-372.

chaque $\delta > 0$. En 1913 M. Noaillon [1] démontre que pour la sommabilité (C, 1) il suffit que

$$\Phi^*(h) = O(h), \qquad \int_0^h \varphi(t)\,dt = o(h).$$

Posons pour $k > 0$

$$(3) \qquad \varphi_k(t) = k t^{-k} \int_0^t (t-\tau)^{k-1} \varphi(\tau)\,d\tau, \qquad \varphi_0(t) = \varphi(t).$$

En 1926, MM. Hardy et Littlewood [2] ont démontré que de $\varphi_1(h) = o(1)$, $\Phi^*(h) = O(h)$ il suit la sommabilité (C, δ) de la série (1) pour chaque $\delta > 0$. Les mêmes auteurs [3] ont démontré en 1927 que si $\varphi_\alpha(t) = o(1)$, $t \to 0$, $0 < \alpha < 1$, la série (1) sera sommable (C, δ), pour chaque $\delta > \alpha$. MM. Bosanquet et Paley [4] ont prouvé l'extension suivante : si $\varphi_\alpha(t) \to 0$, $t \to 0$, $\alpha \geqq 0$, la série sera sommable (C, δ) pour chaque $\delta > \alpha$.

M. Pollard [5] a généralisé le résultat de M. Lebesgue dans le sens suivant : si pour un nombre entier k on a

$$\int_0^h |\varphi_k(t)|\,dt = o(h) \qquad (h \to 0),$$

la série sera sommable (C, $k+1$). Dans le même travail il généralise le théorème de M. Noaillon; si pour un nombre entier r

$$\varphi_{r+1}(h) \to 0, \qquad \int_0^h |\varphi_r(t)|\,dt = O(h),$$

la série sera sommable (C, $r+1$).

Il reste donc à préciser ces théorèmes relatifs à l'ordre de la sommation, ce que nous faisons dans ce travail, et qui a été bien

---

(1) P. Noaillon, *Bulletin de l'Académie de Belgique*, 1913, p. 524-541.

(2) G. H. Hardy et J. E. Littlewood, *Journal of the Lond. math. Soc.*, t. 61, 1926, p. 134-138.

(3) G. H. Hardy et J. E. Littlewood, *Proceedings Cambr. Ph. Soc.*, t. 23, 1927, p. 681-684.

(4) L. S. Bosanquet, *Proceedings of the Lond. math. Soc.*, t. 31, 1930, p. 144-164. — R. E. A. Paley, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 26, 1929-1930, p. 173-203.

(5) S. Pollard, *Journal of the Lond. math. Soc.*, t. 1, 1926, p. 233-235.

marqué comme désirable par M. Kogbetliantz ([1]). Nous donnons aussi des théorèmes pour la sommation de la série conjuguée.

1. Si nous posons

$$(1)\qquad s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{n} (a_\mu \cos \mu x + b_\mu \sin \mu x),$$

nous aurons

$$s_n(x) = A + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(t) \left(\frac{1}{2} + \cos t + \ldots + \cos n t \right) dt,$$

où la fonction $f(x)$ est prolongée en dehors de $(0, 2\pi)$ périodiquement. Désignons par $s_n^k(x)$ les moyennes de Cesàro d'ordre k pour la série (1), c'est-à-dire

$$s_n^k(x) = \frac{1}{A_n^k} \left[A_n^k \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{n} A_{n-\mu}^k (a_\mu \cos \mu x + b_\mu \sin \mu x) \right],$$

et par $b(t)$ les moyennes de Cesàro d'ordre k pour la série

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$b(t) = \frac{1}{A_n^k} \left(\frac{A_n^k}{2} + \sum_{\mu=1}^{n} A_{n-\mu}^k \cos \mu t \right).$$

De (4) on obtient alors facilement la formule fondamentale

$$(5)\qquad s_n^k(x) - A = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(t)\, b(t)\, dt.$$

2. Maintenant nous démontrerons une inégalité, qui sera la base de notre recherche.

α. *Pour chaque* t, $0 < t \leqq \pi$ *nous avons*

$$(6)\qquad |b^{(p)}(t)| < M \frac{n^{p-k}}{t^{k+1}} + N \frac{1}{n t^{k+1}}, \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots),$$

où M *et* N *ne dépendent pas de* n *et* t.

([1]) E. Kogbetliantz, *Sommation des séries et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques* (*Mémorial des Sciences mathématiques*, Paris, 1931).

Désignons par

$$g(t) = A_n^k b(t),$$

et par $T_n^k(z)$ les moyennes

$$T_n^k(z) = \sum_{\mu=0}^{n} A_{n-\mu}^k z^\mu$$

pour la série $1 + z + z^2 + \ldots$. De l'équation

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_0^\infty z^n x^n = \sum_0^\infty T_n^k(z) x^n$$

nous avons, de la formule de Cauchy,

$$(7) \qquad T_n^k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dx}{(1-x)^{k+1}(1-zx)x^{n+1}},$$

où l'intégrale est prise sur la circonférence $|x| = z < 1$. Mais d'autre part de la relation

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_0^\infty A_n^k x^n,$$

nous avons

$$A_n^k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dx}{x^{n+1}(1-x)^{k+1}}.$$

De cette formule et de (7) on a

$$(8) \qquad T_n^k(z) - \frac{A_n^k}{1-z} = \frac{z}{2\pi i(z-1)} \int_C \frac{dx}{x^{n+1}(1-x)^k(1-zx)}.$$

De cette formule par le théorème de Cauchy on obtient facilement, $z = e^{it}$,

$$(9) \quad g(t) = R\left[T_n^k(z) - \frac{A_n^k}{1-z}\right] = R\frac{z}{2\pi i(z-1)} \int_\gamma \frac{dx}{x^{n+1}(1-x)^k(1-zx)}$$
$$+ R\frac{z}{(z-1)2\pi i} \int_\delta \frac{dx}{x^{n+1}(1-x)^k(1-zx)}$$
$$+ R\frac{z\lambda}{(z-1)2\pi i} \int_{1+\rho}^\infty \frac{dx}{x^{n+1}(x-1)^k(1-zx)},$$

où γ est une petite circonférence avec le centre, le point $\frac{1}{z} = e^{-it}$.

δ est aussi une circonférence autour du point 1, dont le rayon est égal à ρ et λ est une constante dépendant seulement de k (si k est un nombre entier $\lambda = 0$). Les cercles γ et δ sont choisis de façon qu'ils n'ont pas des points communs. Prenons la dérivée d'ordre p des deux membres de la formule (9); on obtient que $g^{(p)}(t)$ se présente comme une fonction linéaire avec des coefficients constants multipliés par e^{it} des intégrales des formes suivantes :

$$a_{\mu\nu} = \frac{1}{(z-1)^\nu} \int_\gamma \frac{dx}{x^{n+1}(1-x)^k(1-zx)^\mu},$$

$$b_{\mu\nu} = \frac{1}{(z-1)^\nu} \int_\delta \frac{dx}{x^{n+1}(1-x)^k(1-zx)^\mu},$$

$$c_{\mu\nu} = \frac{1}{(z-1)^\nu} \int_{1+\rho}^{\infty} \frac{dx}{x^{n+1}(x-1)^k(1-zx)^\mu},$$

où l'on a

$$1 \leqq \nu \leqq p + 2 - \mu, \qquad 1 \leqq \mu \leqq p + 1.$$

Considérons d'abord le cas $t \geqq \frac{1}{n}$. Soit le rayon de γ égal à $\frac{1}{n}$ et $\rho = \frac{1}{n}$. Alors sur γ nous avons

$$\left| x - \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{n}, \qquad |x - 1| > \alpha t, \qquad |x| \geqq 1 - \frac{1}{n},$$

$$\frac{1}{|x|^{n+1}} < \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} < 2e, \qquad |z - 1| > \beta t,$$

où α et β sont des constantes qui ne dépendent pas de n et t. Pour $a_{\mu\nu}$ on aura

$$|a_{\mu\nu}| < \frac{2\pi \frac{1}{n} 2e}{\alpha^k t^k \beta^\nu t^\nu \left(\frac{1}{n}\right)^\mu} = \mathbf{M}_{\mu,\nu} \frac{n^{\mu-1}}{t^{k+\nu}}.$$

On voit facilement qu'il existe une constante K ne dépendant de n et t telle que l'on a

$$\mathbf{M}_{\mu,\nu} \frac{n^{\mu-1}}{t^{k+\nu}} < \mathrm{K} \frac{n^p}{t^{k+1}}.$$

En effet nous avons

$$\frac{n^{\mu-1}}{t^{k+\nu}} \leqq \frac{n^{\mu-1} \pi^p}{t^{k+p+2-\mu}},$$

parce que $t \leqq \pi$, $0 \leqq p + 2 - \mu - \nu \leqq p$. D'autre part nous avons

$$\frac{n^{\mu-1}}{t^{k+p+2-\mu}} \leqq \frac{1}{4^{p+1-\mu}} \frac{n^p}{t^{k+1}},$$

parce que cette inégalité est équivalente avec $(nt)^{p+1-\mu} \geqq 4^{p+1-\mu}$, ce qui est évident. Donc, si nous désignons par K un nombre plus grand que les nombres $\mathrm{M}_{\mu,\nu} \frac{\pi^p}{4^{p+1-\mu}}$, nous aurons

$$(10) \qquad |a_{\mu\nu}| < \mathrm{K} \frac{n^p}{t^{k+1}}, \qquad \frac{4}{n} \leqq t \leqq \pi.$$

Sur δ on a

$$\left| x - \frac{1}{z} \right| > dt, \qquad |x - 1| = \frac{1}{n}, \qquad |z - 1| > dt,$$

où $d > 0$ est une constante qui ne dépend pas de n et t. Alors pour $b_{\mu\nu}$ nous avons

$$(11) \qquad |b_{\mu\nu}| < 4\pi e \frac{\frac{1}{n}}{t^\nu d^\nu \left(\frac{1}{n}\right)^k d^\mu t^\mu} \equiv \mathrm{N}_{\mu,\nu} \frac{n^{k-1}}{t^{\mu+\nu}}.$$

Si $p \leqq k - 1$, alors

$$\mu + \nu \leqq p + 2 \leqq k + 1, \qquad t^{k+1-\mu-\nu} \leqq \pi^k, \qquad \frac{n^{k-1}}{t^{\mu+\nu}} < \pi^k \frac{n^{k-1}}{t^{k+1}}.$$

Si $p > k - 1$,

$$\frac{n^{k-1}}{t^{\mu+\nu}} < \pi^p \frac{n^{k-1}}{t^{p+2}} \leqq \pi^p \frac{n^p}{t^{k+1}} 4^{k-p-1},$$

parce que $nt \geqq 4$. Donc si K_1 est un nombre fini plus grand que les nombres $\mathrm{N}_{\mu,\nu}\pi^k$, $\mathrm{N}_{\mu,\nu}\pi^k 4^{k-p-1}$ on aura

$$(12) \qquad \begin{cases} |b_{\mu\nu}| < \mathrm{K}_1 \dfrac{n^{k-1}}{t^{k+1}} & \text{pour } p \leqq k - 1, \\[2ex] |b_{\mu\nu}| < \mathrm{K}_1 \dfrac{n^p}{t^{k+1}} & \text{pour } p > k - 1. \end{cases}$$

Considérons maintenant les intégrales $c_{\mu\nu}$. Nous avons

$$|c_{\mu\nu}| < \frac{1}{d^\nu t^{\mu+\nu}} \int_{1+\frac{1}{n}}^{\infty} \frac{dx}{x^n (x-1)^k};$$

si $k > 1$,

$$\int_{1+\frac{1}{n}}^{\infty} \frac{dx}{x^n (x-1)^k} < \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} \frac{dx}{x^k} = \frac{n^{k-1}}{k-1};$$

si $k < 1$,

$$\int_{1+\frac{1}{n}}^{\infty} \frac{dx}{x^n(x-1)^k} = \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} \frac{dx}{x^k(x+1)^n}$$

$$= \frac{n^k}{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1} + k\int_{\frac{1}{n}}^{\infty} \frac{1}{n-1}\,\frac{dx}{x^{k+1}} = O(n^{k-1}),$$

donc

$$|c_{\mu\nu}| < T_{\mu,\nu}\,\frac{n^{k-1}}{t^{\mu+\nu}},$$

où $T_{\mu,\nu}$ sont des constantes qui ne dépendent pas de n et t. De cela on obtient comme ci-dessus une inégalité de la forme (12). L'inégalité (6) s'obtient immédiatement comme conséquence des inégalités (10), (11), (12), pour $t \geqq \frac{4}{n}$. Pour démontrer que (6) est valable aussi pour $0 < t < \frac{4}{n}$ nous montrerons l'inégalité suivante :

β. *Pour chaque* t, $0 \leqq t \leqq \pi$, *on a*

(13) $$|g^{(p)}(t)| < G n^{p+k+1},$$

où G *est une constante qui ne dépend pas de* n *et de* t.

En effet, on a

$$g^{(p)}(t) = \alpha_0 + \sum_{\mu=1}^{n} \mu^p A_{n-\mu}^k \cos\left(\mu t + p\,\frac{\pi}{2}\right),$$

où $\alpha_0 = \frac{A_n^k}{2}$ pour $p = 0$, $g^{(0)}(t) = g(t)$, et $\alpha_0 = 0$ pour $p > 0$. Parce que $A_{n-\mu}^k < G(n-\mu)^k < Gn^k$, nous aurons

$$|g^{(p)}(t)| < G\sum_{\mu=1}^{n} \mu^p n^k < G n^{p+k+1}.$$

Donc, si $t < \frac{4}{n}$, on a

$$|g^{(p)}(t)| < G n^p\left(\frac{4}{t}\right)^{k+1},$$

et il suffit de prendre M plus grand que $4^{k+1}G$ pour voir que l'inégalité (6) reste vraie aussi pour $0 < t < \frac{4}{n}$.

On voit facilement que de (6) résulte pour $p \geqq k-1$ l'inégalité

$$(14) \qquad |g^{(p)}(t)| < M_1 \frac{n^p}{t^{k+1}} \qquad (0 < t \leqq \pi),$$

où M_1 ne dépend pas de n et de t. Nous démontrerons que cette inégalité reste valable lorsque p n'est pas un nombre entier. Soit a un nombre arbitraire fixe, $0 < a \leqq \pi$, $p = m + \delta$, $0 < \delta < 1$, m est un nombre entier. Pour la dérivée d'ordre non entier $p = m + \delta$, nous employons la définition suivante de Liouville-Riemann :

$$f^{(p)}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_x^a (t-x)^{-\delta} f^{(m+1)}(t)\, dt.$$

Alors nous démontrons l'inégalité :

γ. *Pour* $m \geqq k-1$ *on a*

$$(15) \qquad |g^{(p)}(t)| < M_2 \frac{n^p}{t^{k+1}} \qquad (0 < t \leqq a),$$

où M_2 *est une constante indépendante de n et de t.*

Soit d'abord $\frac{1}{n} \leqq t \leqq b < a$, où b est un nombre fixe. Nous avons

$$|g^{(m)}(t)| < M \frac{n^m}{t^{k+1}}, \qquad |g^{(m+1)}(t)| < M \frac{n^{m+1}}{t^{k+1}}.$$

Donc pour $g^{(p)}(t)$ nous avons

$$g^{(p)}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_t^{t+\frac{1}{n}} (\tau - t)^{-\delta} g^{(m+1)}(\tau)\, d\tau$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_{t+\frac{1}{n}}^a (\tau - t)^{-\delta} g^{(m+1)}(\tau)\, d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)}(\alpha + \beta),$$

$$|\alpha| < M n^{m+1} \int_t^{t+\frac{1}{n}} (\tau - t)^{-\delta} \frac{d\tau}{\tau^{k+1}}$$
$$< M \frac{n^{m+1}}{t^{k+1}} \int_t^{t+\frac{1}{n}} (\tau - t)^{-\delta}\, d\tau = O\left(\frac{n^p}{t^{k+1}}\right).$$

$$\beta = \int_{\frac{1}{n}}^{a-\frac{1}{n}} g^{(m+1)}(t+u) u^{-\delta}\, du$$
$$= g^{(m)}(t+u) u^{-\delta} \Big|_{\frac{1}{n}}^{a-\frac{1}{n}} + \delta \int_{\frac{1}{n}}^{a-\frac{1}{n}} g^{(m)}(u+t) u^{-\delta-1}\, du = O\left(\frac{n^p}{t^{p+1}}\right).$$

Il est facile de voir, que l'inégalité (13) reste valable pour $0 \leqq t \leqq a$. En effet on a

$$\int_t^a g^{(m+1)}(\tau)(\tau - t)^{-\delta}\, d\tau = \mathrm{R}\left(\sum_{\mu=1}^{n} \mathrm{A}_{n-\mu}^{k} \mu^{m+1} \int_t^a e^{i\tau\mu}(\tau - t)^{-\delta}\, d\tau\right),$$

mais

$$\mu^{m+1}\int_t^a e^{i\tau\mu}(\tau - t)^{-\delta}\, d\tau = \mu^{m+1}\int_t^{t+\frac{1}{n}} + \mu^{m+1}\int_{t+\frac{1}{n}}^{a} = \alpha_1 + \beta_1,$$

$$\alpha_1 = \mathrm{O}\left(n^{m+1}\int_t^{t+\frac{1}{n}} (\tau - t)^{-\delta}\, d\tau\right) = \mathrm{O}(n^p),$$

$$\beta_1 = -ie^{i\mu\tau}(\tau - t)^{-\delta}\mu^m \Big|_{t+\frac{1}{n}}^{a} - \delta i \mu^m \int_{t+\frac{1}{n}}^{a} e^{i\mu\tau}(\tau - t)^{-\delta-1}\, d\tau$$

$$= \mathrm{O}(\mu^p) = \mathrm{O}(n^p).$$

Donc

$$(16) \qquad g^{(p)}(t) = \mathrm{O}\left(\sum_{\mu=0}^{n} \mathrm{A}_{n-\mu}^{k} n^p\right) = \mathrm{O}(n^{k+p+1}) \qquad (0 \leqq t \leqq a).$$

Soit maintenant $t \geqq a - \frac{1}{n}$; nous avons

$$|g^{(p)}(t)| < c\mathrm{M}\int_t^a n^{m+1}(\tau - t)^{-\delta}\, d\tau = \mathrm{M}_1 n^{m+1}(a - t)^{1-\delta} < \mathrm{M}'' n^p.$$

Si $b \leqq t \leqq a - \frac{1}{n}$,

$$g^{(p)}(t) = c\int_t^{t+\frac{1}{n}} + c\int_{t+\frac{1}{n}}^{a} = ci + cj,$$

$$|i| \leqq \mathrm{M}\int_t^{t+\frac{1}{n}} n^{m+1}(\tau - t)^{-\delta}\, d\tau = \frac{\mathrm{M}\, n^{m+1}}{1-\delta}\, n^{\delta-1} = \mathrm{M}' n^p.$$

$$j = \int_{t+\frac{1}{n}}^{a} g^{(m+1)}(\tau)(\tau - t)^{-\delta}\, d\tau$$

$$= g^{(m)}(\tau)(\tau - t)^{-\delta}\Big|_{t+\frac{1}{n}}^{a} + \delta\int_{t+\frac{1}{n}}^{a} g^{(m)}(\tau)(\tau - t)^{-\delta-1}\, d\tau$$

$$= g^{(m)}(a)(a - t)^{-\delta} - g^{(m)}\left(t + \frac{1}{n}\right) n^{\delta}$$

$$+ \delta\int_{t+\frac{1}{n}}^{a} g^{(m)}(\tau)(\tau - t)^{-\delta-1}\, d\tau,$$

et puisque

$$a - t \geqq \frac{1}{n}, \qquad (a-t)^{-\delta} \leqq n^{\delta}, \qquad |g^{(m)}(t)| < Kn^{m},$$

nous aurons

$$j = O(n^p) + O(n^p) + O\left(\int_{t+\frac{1}{n}}^{a} n^m (\tau - t)^{-\delta-1}\, d\tau\right) = O(n^p).$$

Nous avons reçu

$$|g^{(p)}(t)| < M_1 \frac{n^p}{t^{k+1}}, \qquad \text{pour} \quad 0 < t \leqq b < a$$

et

$$|g^{(p)}(t)| < M_2 n^p < M_2 a^{k+1} \frac{n^p}{t^{k+1}} \qquad \text{pour} \quad b \leqq t \leqq a;$$

donc si nous désignons par M_3 le plus grand des nombres M_1 et $M_2 a^{k+1}$ nous aurons pour chaque t,

$$|g^{(p)}(t)| < M_3 \frac{n^p}{t^{k+1}} \qquad (0 < t \leqq a),$$

et l'inégalité (15) est démontrée.

3. Maintenant nous démontrons des théorèmes nouveaux pour la sommation par la méthode de Cesàro des séries de Fourier. Posons pour $p > 0$

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} \varphi(t)\, dt,$$

$$\mu_p(x) = \Gamma(p+1) x^{-p} \varphi_p(x) = p x^{-p} \int_0^x (x-t)^{p-1} \varphi(t)\, dt,$$

$$\mu_0(x) = \varphi(x).$$

Nous avons le théorème suivant :

I. *Si pour un $p \geqq 0$ on a*

$$\int_0^t |\mu_p(\tau)|\, d\tau = o(t) \qquad (t \to 0),$$

la série de Fourier (1) *sera sommable* (C, k) *pour chaque* $k > p$ *avec la somme* A.

Supposons d'abord que $p = m$ est un nombre entier. De la formule (5) on a

$$s_n^k(x) - A = \frac{2}{\pi}\int_0^a \varphi(t)\,b(t)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_a^\pi \varphi(t)\,b(t)\,dt = u + v,$$

où $0 < a < \pi$. En intégrant par partie nous avons, pour u,

$$\begin{aligned}(17)\quad u &= \frac{2}{\pi}\varphi_1(a)\,b(a) - \frac{2}{\pi}\int_0^a \varphi_1(t)\,b'(t)\,dt\\ &= \frac{2}{\pi}\varphi_1(a)\,b(a) - \frac{2}{\pi}\varphi_2(a)\,b'(a) + \frac{2}{\pi}\int_0^a \varphi_2(t)\,b''(t)\,dt\\ &= \ldots = \frac{2}{\pi}A + (-1)^m\frac{2}{\pi}B,\end{aligned}$$

$$A = \varphi_1(a)\,b(a) - \varphi_2(a)\,b'(a) + \ldots + (-1)^{m-1}\varphi_m(a)\,b^{(m-1)}(a),$$

$$B = \int_0^a \varphi_m(t)\,b^{(m)}(t)\,dt.$$

Soit p non entier, $p = m + \delta$, $0 < \delta < 1$, alors on peut toujours supposer que $m > k - 1$ puisque chaque série sommable (C, α) est aussi sommable (C, β) pour $\beta > \alpha$. Considérons l'intégrale

$$j = \int_0^a \varphi_p(t)\,b^{(p)}(t)\,dt;$$

nous avons

$$\begin{aligned}j &= \frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\int_0^a \varphi_p(t)\,dt\int_t^a (\tau - t)^{-\delta}\,b^{(m+1)}(\tau)\,d\tau\\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\int_0^a b^{(m+1)}(\tau)\,d\tau\int_0^\tau (\tau - t)^{-\delta}\varphi_p(t)\,dt.\end{aligned}$$

La formule connue

$$\varphi_{m+\delta}(x) = \varphi_p(x) = \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^x (x - t)^{\delta-1}\varphi_m(t)\,dt$$

nous donne

$$\begin{aligned}\int_0^\tau (\tau - t)^{-\delta}\varphi_p(t)\,dt &= \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^\tau (\tau - t)^{-\delta}\,dt\int_0^t (t - u)^{\delta-1}\varphi_m(u)\,du\\ &= \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^\tau \varphi_m(u)\,du\int_u^\tau (\tau - t)^{-\delta}(t - u)^{\delta-1}\,dt,\end{aligned}$$

d'où, par le changement de variable $t = u + (\tau - u)\lambda$, nous avons

$$\int_0^\tau (\tau - t)^{-\delta} \varphi_p(t)\, dt = \Gamma(1-\delta) \int_0^\tau \varphi_m(u)\, du = \Gamma(1-\delta)\, \varphi_{m+1}(u).$$

Donc il résulte

$$\begin{aligned} j &= \int_0^a \varphi_{m+1}(u)\, b^{(m+1)}(u)\, du \\ &= \varphi_{m+1}(a)\, b^{(m)}(a) - \int_0^a \varphi_m(u)\, b^{(m)}(u)\, du, \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$B = \varphi_{m+1}(a)\, b^{(m)}(a) - \int_0^a \varphi_p(u)\, b^{(p)}(u)\, du.$$

L'inégalité (6) nous montre que pour $q < k$ on a $b^{(q)}(a) = o(1)$ et $\int_a^\pi \varphi(t) b(t)\, dt = o(1)$ lorsque a est un nombre fixe. Donc pour démontrer le théorème il suffit de démontrer que

$$\int^a \varphi_p(u)\, b^{(p)}(u)\, du = o(1),$$

ou, ce qui est le même, d'établir que

(18) $$\alpha = \int_0^a t^p \mu_p(t)\, b^{(p)}(t)\, dt = o(1).$$

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement petit et a choisi de façon que pour $0 < t \leqq a$ on ait

$$\Phi(t) = \int_0^t |\mu_p(\tau)|\, d\tau < \varepsilon t.$$

Alors pour $n > \frac{1}{a}$ nous avons

$$\alpha = \int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^a = \alpha_1 + \alpha_2.$$

De l'inégalité (16) on a

$$|\alpha_1| < K n^{p+1} \int_0^{\frac{1}{n}} t^p |\mu_p(t)|\, dt < K \frac{\Phi\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = o(1).$$

Si nous posons $k = p + q$, $0 < q$, l'inégalité (15) nous donne

$$
\begin{aligned}
|\alpha_2| &< N \int_{\frac{1}{n}}^{a} |\mu_p(t)| \frac{dt}{n^q t^{q+1}} \\
&= N \int_{\frac{1}{n}}^{a} \Phi'(t) \frac{dt}{n^q t^{q+1}} \\
&= N \left[\frac{\Phi(a)}{n^q a^{q+1}} - \frac{\Phi\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \right] + N(q+1) \int_{\frac{1}{n}}^{a} \frac{\Phi(t)\, dt}{n^q t^{q+2}} \\
&= \alpha'_2 + N(q+1)\alpha''_2,
\end{aligned}
$$

$$
\alpha'_2 = o(1), \qquad \alpha''_2 < \varepsilon \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} \frac{dt}{n^q t^{q+1}} = \frac{\varepsilon}{q}.
$$

Donc pour chaque $\varepsilon > 0$ nous avons $\overline{\lim_{n \to \infty}} |\alpha| < \varepsilon N \frac{q+1}{q}$, ce qui nous montre que $\lim \alpha = 0$ et le théorème est démontré. Il est évident que ce théorème contient comme des cas particuliers les théorèmes énoncés de MM. Lebesgue, Hardy-Littlewood, Pollard, Bosanquet.

II. *Si pour un* $p \geq 0$ *on a*

$$
\Phi(t) = \int_0^t |\mu_p(\tau)|\, d\tau = O(t), \qquad \mu_{p+1}(t) \to 0, \qquad t \to 0,
$$

la série de Fourier (1) *sera sommable* (C, k) *pour chaque* $k > p$ *avec la somme* A.

Il s'agit de démontrer que (18) est vraie. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement petit et m un nombre arbitraire, tel que $\frac{m}{n} < a$, a étant choisi de façon que $|\mu_{p+1}(t)| < \varepsilon$, pour $0 \leq t \leq a$. Nous avons

$$
\alpha = \int_0^{\frac{m}{n}} + \int_{\frac{m}{n}}^{a} t^p \mu_p(t)\, b^{(p)}(t)\, dt = \alpha_1 + \alpha_2.
$$

En intégrant par partie nous avons pour α_1

$$\alpha_1 = c\int_0^{\frac{m}{n}} \varphi_p(t)\, b^{(p)}(t)\, dt$$

$$= c\varphi_{p+1}\left(\frac{m}{n}\right) b^{(p)}\left(\frac{m}{n}\right) - c_1 \int_0^{\frac{m}{n}} t^{p+1}\mu_{p+1}(t)\, b^{(p+1)}(t)\, dt = \alpha_1' + \alpha_1'',$$

où c et c_1 sont des constantes. Nous avons

$$\alpha_1' = \mathrm{O}\left[\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{p+1}\mu_{p+1}\left(\frac{m}{n}\right)}{\left(\frac{m}{n}\right)^{k+1} n^{k-p}}\right] = \mathrm{O}\left[\frac{\mu_{p+1}\left(\frac{m}{n}\right)}{m^q}\right] = \mathrm{o}(1), \qquad q = k - p.$$

Soit ε_n le maximum de $|\mu_{p+1}(t)|$ pour $0 \leq t \leq \frac{m}{n}$, alors on a

$$|\alpha_1''| < \mathrm{K}\varepsilon_n \int_0^{\frac{m}{n}} t^{p+1}\, |b^{(p+1)}(t)|\, dt < \mathrm{K}\varepsilon_n n^{p+2} \int_0^{\frac{m}{n}} t^{p+1}\, dt < \mathrm{K}\varepsilon_n m^{p+2},$$

donc $\alpha_1'' = \mathrm{o}(1)$ si m est un nombre fixe. Pour α_2 nous avons

$$|\alpha_2| < \mathrm{M}\int_{\frac{m}{n}}^{a} |\mu_p(t)|\, t^p \frac{dt}{n^q t^{p+1}}$$

$$= \mathrm{M}\int_{\frac{m}{n}}^{a} \Phi'(t) \frac{dt}{t^{q+1} n^q}$$

$$= \mathrm{M} n^{-q}\Phi(a) a^{-q-1} - \mathrm{M}\frac{\Phi\left(\frac{m}{n}\right)}{\frac{m}{n}} m^{-q} + \mathrm{M}(1+q)\int_{\frac{m}{n}}^{a} \Phi(t)\frac{dt}{n^q t^{q+1}}$$

$$= \mathrm{O}(m^{-q}) + \mathrm{O}\left(\int_{\frac{m}{n}}^{a} \frac{dt}{n^q t^{q+1}}\right) = \mathrm{O}(m^{-q}).$$

Donc on peut choisir m assez grand pour que $|\alpha_2| < \varepsilon$ et le théorème est démontré. Naturellement le théorème II contient comme des cas particuliers les théorèmes énoncés de MM. Noaillon, Pollard.

III. *Si pour un* $p \geq 0$ *on a*

$$\Phi(t) = \int_0^t |\mu_p(\tau)|\, d\tau = \mathrm{o}(t) \qquad (t \to 0),$$

on aura

$$S_n^{(p)}(x) = o(\log n).$$

Comme ci-dessus il faut étudier l'intégrale $\alpha = \int_0^a t^p \mu_p(t)\, b^{(p)}(t)\, dt$. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement petit et a tel que l'on a

$$\Phi(t) < \varepsilon t, \qquad 0 \leqq t \leqq a.$$

Alors nous avons

$$\alpha = \int_a^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^a = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$|\alpha_1| < M \int_0^{\frac{1}{n}} t^p n^{p+1} |\mu_p(t)|\, dt < M \frac{\Phi\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to 0,$$

$$|\alpha_2| < M \int_{\frac{1}{n}}^a |\mu_p(t)| \frac{dt}{t} = M \left[\frac{\Phi(a)}{a} - \frac{\Phi\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \right]$$

$$< K + \varepsilon M \int_{\frac{1}{n}}^a \frac{dt}{t} < K + \varepsilon M \log n,$$

pour chaque $\varepsilon > 0$, donc $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = o(1) + o(\log n) = o(\log n)$.

De l'exemple de M. Hahn (¹) on voit facilement que dans l'énoncé des théorèmes I et II on ne peut pas remplacer k par p dans le cas $p = 1$. Il est très probable que, aussi dans le cas général, on ne peut pas remplacer k par p.

4. Nous considérons maintenant l'ordre d'approximation de la fonction $f(x)$ par les moyennes arithmétiques.

IV. *Si pour un* $p \geqq 0$, *on a*

$$(19) \qquad \int_0^t |\mu_p(\tau)|\, d\tau = O(t^{1+\alpha}) \qquad (0 < \alpha \leqq 1,\ t \to 0),$$

(¹) H. Hahn, *Jahresbericht der Deut. Math. Vereinigung*, 25, 1917, p. 359-366.

alors pour chaque k, $p+1 \geqq k > p+\alpha$, on a

$$s_n^{(k)}(x) - \mathrm{A} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \tag{20}$$

et pour $k = p + \alpha$, on a

$$s_n^{(k)}(x) - \mathrm{A} = \mathrm{O}\left(\frac{\log n}{n^\alpha}\right). \tag{21}$$

De plus si (19) est valable uniformément sur un ensemble E, alors (20) et (21) seront aussi valables uniformément sur le même ensemble E. En effet pour $s_n^{(k)}(x) - \mathrm{A}$ nous avons la formule (17), dans laquelle pour chaque $q \leqq m$, $k - q \geqq k - m \geqq \alpha + \delta$, nous avons, à cause de l'inégalité (6),

$$b^{(q)}(a) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+\delta}}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \qquad (\delta > 0), \tag{22}$$

$$b^{(q)}(a) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{\log n}{n^\alpha}\right) \qquad (\delta = 0). \tag{23}$$

On a les mêmes inégalités pour l'intégrale $\int_a^\pi \varphi(t) b(t)\,dt$. Il nous reste à étudier l'intégrale

$$\alpha = \int_0^a t^p \mu_p(t)\, b^{(p)}(t)\,dt.$$

Soit $n > \frac{1}{a}$ et posons

$$\alpha = \int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^a = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$|\alpha_1| < \mathrm{M}\,n^{p+1} \int_0^{\frac{1}{n}} t^p\,|\mu_p(t)|\,dt < \mathrm{M}\,n^{p+1}\frac{1}{n^p}\int_0^{\frac{1}{n}} |\mu_p(t)|\,dt$$
$$= \mathrm{O}\left(n\,\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$
$$|\alpha_2| < \mathrm{M}_1\,\frac{1}{n^\delta}\int_{\frac{1}{n}}^a t^p\,|\mu_p(t)|\,\frac{dt}{t^{p+\delta+1}} = \mathrm{M}_1\,n^{-\delta}\int_{\frac{1}{n}}^a \Phi'(t)\,\frac{dt}{t^{\delta+1}},$$

où l'on a posé

$$\Phi(t) = \int_0^t |\mu_p(\tau)|\,d\tau, \qquad (\delta = k - p,\ \delta \geqq \alpha).$$

Donc

$$|\alpha_2| < M_1 n^{-\delta}\left[\frac{\Phi(a)}{a^{\delta+1}} - \frac{\Phi\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\delta+1}}\right] + M_2 n^{-\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{a}\frac{dt}{t^{\delta-\alpha+1}}$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) + O\left(n^{-\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{a}\frac{dt}{t^{\delta-\alpha+1}}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right), \quad \text{si} \quad \delta > \alpha,$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) + O\left(\frac{\log n}{n^{\alpha}}\right) \quad \text{si} \quad \delta = \alpha,$$

et le théorème est démontré. Si l'on pose $p = 0$, $\mu_0(t) = \varphi(t)$, on obtient comme cas particulier un théorème de M. Alexits (¹), qui est une généralisation d'un théorème de M. Serge Bernstein.

De la démonstration on voit immédiatement qu'on a le théorème suivant :

Si pour un $p \geqq 0$ on a

$$\int_0^t |\mu_p(\tau)|\, d\tau = o(t^{1+\alpha}) \qquad (0 < \alpha \leqq 1,\ t \to 0),$$

alors pour $p + 1 \geqq k > p + \alpha$ on aura

$$s_n^{(k)}(x) - A = o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right),$$

et pour $k = p + \alpha$

$$s_n^{(k)}(x) - A = o\left(\frac{\log n}{n^{\alpha}}\right).$$

Nous démontrons ensuite dans le cas $k > p + \alpha$ un théorème plus précis.

V. *Si pour un* $p \geqq 0$, $0 < \alpha \leqq 1$, *on a*

$$\int_0^t |\mu_p(\tau)|\, d\tau = O(t^{1+\alpha}), \qquad \int_0^t \mu_p(\tau)\, d\tau = o(t^{1+\alpha}), \qquad (t \to 0),$$

alors pour $p + 1 \geqq k > p + \alpha$ *on aura*

$$s_n^{(k)}(x) - A = o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

(¹) G. Alexits, *Mathematische Annalen*, 100, 1928, p. 264-277.

D'après les inégalités (22) et (23) il reste à étudier l'intégrale

$$\alpha = \int_0^a t^p \mu_p(t)\, b^{(p)}(t)\, dt.$$

Soit m un nombre arbitraire mais $< n$ et posons

$$\Phi(t) = \int_0^t |\mu_p(\tau)\, d\tau, \qquad \psi(t) = \int_0^t \mu_p(\tau)\, d\tau.$$

Soit $\frac{m}{n} < a$ et divisons l'intégrale α en deux autres

$$\alpha = \int_0^{\frac{m}{n}} + \int_{\frac{m}{n}}^a = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Nous avons pour α_1,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \int_0^{\frac{m}{n}} \psi'(t) t^p b^{(p)}(t)\, dt \\
&= \psi(t)\, t^p\, b^{(p)}(t) \Big|_0^{\frac{m}{n}} - \int_0^{\frac{m}{n}} \psi(t) t^p\, b^{(p+1)}(t)\, dt \\
&\quad - p \int_0^{\frac{m}{n}} \psi(t) t^{p-1}\, b^{(p)}(t)\, dt \\
&= \alpha_1' + \alpha_1'' + \alpha_1''',
\end{aligned}$$

$$\alpha_1' = \psi\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^p b^{(p)}\left(\frac{m}{n}\right) = o\left[\left(\frac{m}{n}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{m}{n}\right)^p \frac{1}{n^\delta\left(\frac{m}{n}\right)^{k+1}}\right]$$

$$= o\left(\frac{1}{m^{k-\alpha-p}}\,\frac{1}{n^\alpha}\right) = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \text{si} \quad \frac{m}{n} \to 0 \quad \text{et} \quad \delta = k - p > \alpha.$$

Soit ε_n le maximum de $\left|\frac{\psi(t)}{t^{1+\alpha}}\right|$ pour $0 \leqq t \leqq \frac{m}{n}$, donc $\varepsilon_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Alors nous avons pour α_1''

$$|\alpha_1''| < K\varepsilon_n \int_0^{\frac{m}{n}} t^{\alpha+p+1} n^{p+2}\, dt = \frac{K\varepsilon_n}{\alpha+p+1}\left(\frac{m}{n}\right)^{\alpha+p+2} n^{p+2} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

pour m fixe, quelque grand que soit. Pour α_1''' nous avons

$$|\alpha_1'''| < p\,\varepsilon_n K \int_0^{\frac{m}{n}} t^{\alpha+p} n^{p+1}\, dt = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Il reste à étudier α_2; nous avons

$$|\alpha_2| < \mathrm{M}\int_{\frac{m}{n}}^{a} t^p\,\Phi'(t)\,\frac{dt}{n^\delta t^{p+\delta+1}}$$

$$= \mathrm{M}\left[\Phi(a)n^{-\delta}a^{-\delta-1} - \Phi\left(\frac{m}{n}\right)n^{-\delta}\left(\frac{m}{n}\right)^{-\delta-1}\right]$$

$$+ \mathrm{M}(\delta+1)\int_{\frac{m}{n}}^{a}\Phi(t)\,\frac{dt}{n^\delta t^{\delta+2}} = \alpha'_2 + \alpha''_2,$$

$$\alpha'_2 = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\delta a^{\delta+1}}\right) + \mathrm{O}\left[\left(\frac{m}{n}\right)^{\alpha+1}\frac{n}{m^{\delta+1}}\right] = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\,\frac{1}{m^{\delta-\alpha}}\right),$$

d'où il résulte qu'on peut prendre m assez grand que l'on ait

$$\alpha'_2 < \varepsilon\, n^{-\alpha},$$

où $\varepsilon > 0$ est un nombre arbitrairement petit. Pour α''_2 nous avons

$$\alpha''_2 = \int_{\frac{m}{n}}^{a}\Phi(t)\frac{dt}{n^\delta t^{\delta+2}} < \mathrm{M}_1\int_{\frac{m}{n}}^{a} n^{-\delta}\,\frac{dt}{t^{\delta-\alpha+1}} < \frac{\mathrm{M}_1}{\delta-\alpha}\,\frac{1}{m^{\delta-\alpha}}\,\frac{1}{n^\alpha},$$

et l'on peut choisir m de façon que l'on ait

$$\alpha''_2 < \varepsilon\,\frac{1}{n^\alpha}.$$

Donc nous aurons $\alpha_2 = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et le théorème est démontré.

5. Nous démontrons maintenant un théorème pour les moyennes de Cesàro en supposant que la fonction $f(x)$ satisfait à une condition, introduite par M. Szasz.

VI. *Supposons qu'il existe des nombres g et α, $0 < \alpha \leqq 1$, tels que*

$$\int_0^h |\varphi(t) - g t^\alpha|\,dt = \mathrm{o}(h^{1+\alpha}) \qquad (h \to 0). \tag{24}$$

Alors nous avons : pour $1 > k > \alpha$

$$\lim n^\alpha[s_n^{(k)}(x) - \mathrm{A}] = g\omega, \tag{25}$$

où ω est une constante donnée par

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \omega &= \frac{2}{\pi}\Gamma(k+1)\int_0^\infty \frac{\psi(t)}{t^{k-\alpha+1}}\,dt,\\ \psi(t) &= \cos\left[t-\frac{\pi}{2}(k+1)\right]+\frac{\sin k\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-tv}v^{-k}\frac{dv}{1+v^2},\end{aligned}\right.$$

pour $k=1>\alpha$

$$(27)\qquad \lim n^\alpha[s_n^{(k)}(x)-A]=\frac{4g}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^{2-\alpha}}\,d\theta,$$

pour $k=\alpha<1$

$$(28)\qquad \lim \frac{n^\alpha}{\log n}[s_n^{(k)}(x)-A]=0,$$

et pour $k=\alpha=1$

$$(29)\qquad \lim \frac{n}{\log n}[s_n^{(k)}(x)-A]=\frac{2}{\pi}g.$$

D'abord on voit facilement que pour ∞ l'intégrale (26) est absolument convergente. Puisque

$$\psi(0)=\cos\pi\frac{k+1}{2}+\frac{\sin k\pi}{\pi}\int_0^\infty v^{-k}\frac{dv}{1+v^2}=0,$$

et $\psi'(0)$ est un nombre fini, la fonction $\psi(t)$ pour $t=0$ a la forme $t\eta(t)$, où $\eta(t)$ est bornée autour de $t=0$; donc l'intégrale (26) a un sens aussi pour $t=0$, c'est-à-dire est convergente. Nous démontrons maintenant que l'intégrale

$$\omega_n=\frac{2}{\pi}\frac{n^\alpha}{A_n^k}\int_0^\pi t^\alpha g(t)\,dt,\qquad g(t)=A_n^k b(t),$$

tend vers ω, lorsque $n\to\infty$ $(1>k>\alpha)$. En faisant le changement de variable $nt=\theta$, à cause de la formule asymptotique $A_n^k\sim\dfrac{n^k}{\Gamma(k+1)}$ on voit tout de suite que $\omega_n\sim\delta_n$, où

$$\delta_n=\frac{2}{\pi}\Gamma(k+1)\int_0^{n\pi}\theta^\alpha g\left(\frac{\theta}{n}\right)\frac{d\theta}{n^{k+1}}.$$

En posant $p\to 0$ la formule (9) nous donne

$$g(t)=R(j)+R(T),$$

où

$$j = \frac{z^{n+k+1}}{(z-1)^{k+1}}, \qquad T = \frac{z \sin k\pi}{\pi(z-1)} \int_1^\infty \frac{dx}{(x-1)^k x^{n+1}(1-zx)},$$

$$e^{it} = z, \qquad t = \frac{\theta}{n}.$$

En supposant que θ est un nombre fixe > 0, on obtient

$$\lim_{n \to \infty} \frac{j}{n^{k+1}} = \lim \frac{e^{i\frac{\theta}{n}(n+k+1)}}{\left(e^{i\frac{\theta}{n}} - 1\right)^{k+1} n^{k+1}} = \frac{e^{i\left[\theta - \frac{\pi}{2}(k+1)\right]}}{\theta^{k+1}},$$

donc

$$\lim R\left(\frac{j}{n^{k+1}}\right) = \frac{\cos\left[\theta - \frac{\pi}{2}(k+1)\right]}{\theta^{k+1}},$$

et il est évident que si θ reste dans un intervalle fini (a, b), $a > 0$, $b > a$, cette relation est remplie uniformément. Posons dans T, $x = 1 + \frac{u}{n}$, on obtient

$$\frac{T}{n^{k+1}} = \frac{z \sin \pi k}{\pi(z-1)n} \int_0^\infty \frac{du}{u^k\left(1 + \frac{u}{n}\right)^{n+1}[n(1-z) - zu]}.$$

Si θ est fixe, parce que $n(z-1) \to i\theta$, $\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \to e^u$, on obtient

$$\lim_{n \to \infty} \frac{T}{n^{k+1}} = \frac{\sin \pi k}{\pi\theta} \int_0^\infty \frac{u^{-k} e^{-u}\, du}{\theta - ui},$$

d'où il résulte

$$\lim R\left(\frac{T}{n^{k+1}}\right) = \frac{\sin \pi k}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} u^{-k} \frac{du}{\theta^2 + u^2}. \tag{30}$$

Si nous posons $u = \theta v$, l'intégrale se transforme en

$$\frac{\sin k\pi}{\pi\, \theta^{k+1}} \int_0^\infty e^{-\theta v} v^{-k} \frac{dv}{1 + v^2}.$$

Si θ reste dans un intervalle (a, b), $0 < a \leqq \theta \leqq b$, il existe un nombre fini N, tel que pour chaque $n > N$, on a

$$|n(1-z) - zu| > \frac{1}{2}|i\theta - u| > \frac{\theta}{2} > \frac{a}{2}, \qquad |n(1-z) - zu| > \frac{u}{2}.$$

Alors parce que les intégrales (30) et $\frac{T}{n^{k+1}}$ sont absolument convergentes, on voit facilement que (30) est remplie uniformément. Posons

$$p_n = \frac{\pi}{2\Gamma(k+1)}\delta_n = \int_0^{n\pi} \theta^\alpha g\left(\frac{\theta}{n}\right)\frac{d\theta}{n^{k+1}}$$
$$= \int_0^{\eta} + \int_{\eta}^{A} + \int_A^{n\pi} = p'_n + p''_n + p'''_n,$$

et soient η, A choisis de façon qu'on a

$$\int_0^{\eta} \theta^\alpha d\theta < \varepsilon, \qquad \int_A^{\infty} \frac{d\theta}{\theta^{k-\alpha+1}} < \varepsilon, \qquad \left|\int_0^{\eta} \frac{\psi(\theta)}{\theta^{k-\alpha+1}} d\theta\right| < \varepsilon,$$

où $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement petit. Alors parce que

$$|g(t)| < Mn^{k+1},$$

on aura

$$(31)\quad \begin{cases} |p'_n| < M\int_0^{\eta} \theta^\alpha d\theta < M\varepsilon, \\ |p'''_n| < M\int_A^{n\pi} \theta^\alpha \dfrac{d\theta}{\left(\dfrac{\theta}{n}\right)^{k+1} n^{k+1}} < M\int_A^{\infty} \dfrac{d\theta}{\theta^{k-\alpha+1}} < M\varepsilon. \end{cases}$$

Parce que

$$|\psi(\theta)| < 1 + \frac{\sin k\pi}{\pi}\int_0^{\infty} v^{-k}\frac{dv}{1+v^2} < 2,$$

l'intégrale

$$\int_A^{\infty} \frac{\psi(\theta)}{\theta^{k-\alpha+1}} d\theta,$$

est absolument convergente, donc on peut encore choisir A de façon qu'on ait

$$\left|\int_A^{\infty} \frac{\psi(\theta)}{\theta^{k-\alpha+1}} d\theta\right| < \varepsilon.$$

Parce que nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\eta}^{A} \theta^\alpha g\left(\frac{\theta}{n}\right)\frac{d\theta}{n^{k+1}} = \int_{\eta}^{A} \frac{\psi(\theta)}{\theta^{k-\alpha+1}} d\theta,$$

on obtient facilement, d'après les inégalités (31),

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\int_0^{n\pi} \theta^\alpha g\left(\frac{\theta}{n}\right)\frac{d\theta}{n^{k+1}} - \int_0^{\infty} \frac{\psi(\theta)}{\theta^{k-\alpha+1}} d\theta\right| < K\varepsilon,$$

où K est une constante finie pour chaque $\varepsilon > 0$, c'est-à-dire

$$\lim_{n \to \infty} \delta_n = \omega. \tag{32}$$

Considérons maintenant le cas $k = \alpha < 1$. Nous avons dans ce cas

$$\omega_n \sim \frac{2}{\pi}\Gamma(\alpha+1)\tau_n, \qquad \text{où} \qquad \tau_n = \int_0^\pi t^\alpha g(t)\,dt.$$

Écrivons

$$\tau_n = \int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} = \tau'_n + \tau''_n, \qquad |\tau'_n| < M \int_0^{\frac{1}{n}} t^\alpha n^{\alpha+1}\,dt = O(1) = o(\log n).$$

D'après la formule (9) on trouve facilement

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t),$$

$$g_1(t) = \frac{\cos\left[t\left(n + \frac{\alpha+1}{2}\right) - \frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right]}{2^{\alpha+1}\sin^{\alpha+1}\frac{t}{2}},$$

$$g_2(t) = R\,\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\,\frac{z}{(z-1)2\pi i}\int_0^1 y^{\alpha+n}(1-y)^{-\alpha}\frac{dy}{y-z},$$

où $z = e^{it}$. On voit facilement qu'il existe une constante finie $\lambda > 0$, telle qu'on a $|z-1| > \lambda t$, $|y-z| > \lambda t$. Donc nous avons

$$|g_2(t)| < \frac{M'}{\lambda^2 t^2}\int_0^1 y^{\alpha+n}(1-y)^{-\alpha}\,dy$$
$$= \frac{M'}{\lambda^2 t^2}\,\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+2)} < \frac{M''}{t^2 n^{1-\alpha}}.$$

Alors pour τ''_n nous aurons

$$\tau''_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} g_1(t)t^\alpha\,dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} g_2(t)t^\alpha\,dt = g_1 + g_2,$$

$$|g_2| < \frac{M_2}{n^{1-\alpha}}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{dt}{t^{2-\alpha}} = O(1) = o(\log n),$$

$$g_1 = \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{h}{\sin h}\right)^{1+\alpha}\frac{\cos\left(2nh + h\alpha + h - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}{h}\,dh.$$

La fonction $\frac{h}{\sin h}$ est croissante pour $0 < h < \frac{\pi}{2}$, donc d'après le second théorème des moyennes nous aurons

$$g_1=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha+1}\int_\zeta^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos[2h(n+\mu)+\nu]}{h}\,dh,\qquad \frac{1}{2n}<\zeta<\frac{\pi}{2},$$

μ et ν étant des constantes. En posant $2nh=u$, nous obtenons

$$\begin{aligned}g_1&=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha+1}\int_{2n\zeta}^{n\pi}\frac{\cos\left(u+\frac{\mu}{n}+\nu\right)}{u}\,du\\&=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha+1}\frac{\sin\left(u+\frac{\mu}{n}+\nu\right)}{u}\Bigg|_{2n\zeta}^{n\pi}+\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha+1}\int_{2n\zeta}^{n\pi}\frac{\sin\left(u+\frac{\mu}{n}+\nu\right)}{u^2}\,du\\&=O(1)=o(\log n).\end{aligned}$$

Donc dans le cas $k=\alpha<1$, nous avons

$$\omega_n=o(\log n). \tag{33}$$

Soit $k=1>\alpha$. On obtient facilement de (9)

$$g(t)=R\left[\frac{z^{n+2}}{(z-1)^2}-\frac{z}{(z-1)^2}\right]=\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}},$$

et comme ci-dessus on démontre que

$$\omega_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{n\pi}\theta^\alpha\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}\frac{\theta}{n}}{2n^2\sin^2\frac{\theta}{2n}}\,d\theta$$

tend vers

$$\omega=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^{2-\alpha}}\,d\theta. \tag{34}$$

Si $k=\alpha=1$, on a

$$\int_0^1\theta g\left(\frac{\theta}{n}\right)\frac{d\theta}{n^2}=O(1)=o(\log n),$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{n}\int_1^{n\pi}\theta g\left(\frac{\theta}{n}\right)\frac{d\theta}{n^2}&=\frac{2}{\pi}\int_1^{n\pi}\frac{\theta\,d\theta}{4n^2\sin^2\frac{\theta}{2n}}\\&\quad-\frac{2}{\pi}\int_1^{n\pi}\theta\frac{\cos\frac{\theta}{n}(n+1)}{n^2\sin^2\frac{\theta}{2n}}\,d\theta=\alpha_n-\beta_n.\end{aligned}$$

Comme ci-dessus on voit que $\beta_n = O(1) = o(\log n)$. Si nous posons $\theta = 2nu$,

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\,du}{\sin^2 u} \sim \frac{2}{\pi}\log n,$$

d'après la règle de l'Hospital. Donc dans ce cas nous avons

$$\lim \frac{\omega_n}{\log n} = \frac{2}{\pi}. \tag{35}$$

Si nous posons $\eta(t) = n^\alpha \frac{g(t)}{A_n^k}$, la formule (5) nous donne

$$n^\alpha[s_n^{(k)}(x) - A] = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(t)\eta(t)\,dt,$$

d'où il résulte

$$n^\alpha[s_n^{(k)}(x) - A] - g\omega_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi [\varphi(t) - gt^\alpha]\eta(t)\,dt. \tag{36}$$

Parce que $|\eta(t)| < \mathrm{M}n^\alpha \frac{n^{k+1}}{n^k} = \mathrm{M}n^{\alpha+1}$, on a pour

$$i = \int_0^{\frac{1}{n}} [\varphi(t) - gt^\alpha]\eta(t)\,dt, \qquad |i| < \mathrm{M}n^{\alpha+1}\int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi(t) - gt^\alpha|\,dt \to 0,$$

d'après la condition (24). Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement petit et a choisi de façon que l'on a

$$\Phi(h) = \int_0^h |\varphi(t) - gt^\alpha|\,dt < \varepsilon h^{1+\alpha}, \qquad 0 < h \leqq a.$$

Alors nous avons

$$\int_0^\pi [\varphi(t) - gt^\alpha]\eta(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^a + \int_a^\pi = i + i' + i'',$$

$$|i'| < \mathrm{M}\int_{\frac{1}{n}}^a \Phi'(t)\frac{dt}{n^\delta t^{k+1}} = \mathrm{M}\left[\Phi(a)n^{-\delta}a^{-k-1} - \Phi\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{-k-1}n^{-\delta}\right]$$

$$+ j = o(1) + j, \qquad \delta = k - \alpha > 0,$$

$$j < \mathrm{M}(k+1)\varepsilon\int_{\frac{1}{n}}^a \frac{dt}{n^\delta t^{\delta+1}} < \mathrm{M}(k+1)\varepsilon\int_{\frac{1}{n}}^\infty \frac{dt}{n^\delta t^{\delta+1}} = \mathrm{M}\frac{k+1}{\delta}\varepsilon,$$

$$i'' = o(1),$$

d'où il résulte que

(37) $$n^\alpha[s_n^{(k)}(x) - A] - g\omega_n = o(1), \qquad k > \alpha.$$

Si $k = \alpha$ les mêmes inégalités sont valables à l'expression pour j, pour lequel nous avons

$$j < M(k+1)\varepsilon \int_{\frac{1}{n}}^{a} \frac{dt}{t} < M(k+1)\varepsilon \log n,$$

c'est-à-dire $j = o(\log n)$. Dans ce cas nous avons

(38) $$\frac{n^\alpha}{\log n}[s_n^{(\alpha)}(x) - A] - g\frac{\omega_n}{\log n} = o(1).$$

En se basant sur les formules (32), (33), (34), (35), (37), (38), on obtient immédiatement le théorème énoncé. Pour le cas particulier $k = 1$, $0 < \alpha \leqq 1$, on a le théorème de M. Szász [1].

On démontre facilement que dans le cas $1 \geqq k > \alpha > 0$, on peut remplacer dans l'énoncé du théorème VI, la condition (24) par les conditions

$$\int_0^h |\varphi(t) - gt^\alpha|\, dt = O(h^{1+\alpha}),$$

$$\int_0^h [\varphi(t) - gt^\alpha]\, dt = o(h^{1+\alpha}), \qquad h \to 0.$$

---

[1] O. Szász, *Acta Mathematica*, t. 48, 1926, p. 355-362.

(*A suivre.*)