MICHEL GHERMANESCO

Sur les moyennes successives des fonctions

Bulletin de la S. M. F., tome 62 (1934), p. 245-264
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1934__62__245_0>

SUR LES MOYENNES SUCCESSIVES DES FONCTIONS;

PAR M. GHERMANESCO.

Ce petit travail est consacré à l'étude des propriétés des valeurs moyennes successives d'une fonction u, définie dans un domaine D, de l'espace à p dimensions, prises à l'intérieur ou sur la surface d'une hypersphère, ayant le centre en un point donné P et un rayon quelconque R, tel que l'hypersphère soit entièrement contenue dans le domaine D.

Si la fonction u est régulière dans D et si S_p désigne l'hypersphère considérée, la *moyenne périphérique* de la fonction u, par rapport à S_p, est définie par l'intégrale

$$m_0(u)_P = \frac{1}{S_p}\int_{S_p} u(M)\,dS_p,$$

M étant un point variable de la surface de S_p. On définit aussi la moyenne spatiale de la fonction u par l'intégrale

$$m_1(u) = \frac{p}{R^p}\int_0^R m_p R^{p-1}\,dR.$$

J'ai défini les moyennes successives d'une fonction sommable u par la relation (¹)

$$m_i = \frac{p+2i-2}{R^{p+2i-2}}\int_0^R R^{p+2i-3} m_{i-1}\,dR,$$

avec $m_0 =$ moyenne périphérique.

Une célèbre formule de Gauss montre que, si la fonction u est harmonique dans D, sa moyenne périphérique est égale, quel que soit le rayon R, à la valeur que prend la fonction u au centre P de l'hypersphère considérée S_p, ce qu'on exprime d'habitude en

---

(¹) M. GHERMANESCO, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1932, n° 11, p. 920-922. On doit à M. M. Nicolesco une autre définition indépendante de i (ce *Bull.* t. LX, 1932, p. 29).

disant que *les fonctions harmoniques restent invariables par médiation périphérique*. La réciproque de cette proposition a été établie par Koebe, E.-E. Levi, etc.

Le cas des fonctions ***métaharmoniques***, c'est-à-dire satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta u = \lambda u,$$

— λ étant une constante — a été aussi beaucoup étudié et c'est M. F. Sbrana qui, le premier [1], a mis l'expression de la moyenne périphérique d'une telle fonction sous la forme

$$m_0(u) = \Phi(R)\, u(P),$$

$\Phi(R)$ étant fonction de R seulement.

M. F. Sbrana s'occupe aussi [2] de la moyenne des fonctions ***n-harmoniques***, c'est-à-dire satisfaisant à l'équation [3]

$$\Delta^n u = 0.$$

Plus tard, M. J.-P. Robert s'occupe [4] de la moyenne des fonctions ***n-métaharmoniques***, c'est-à-dire satisfaisant à l'équation

$$\Delta^n u + \lambda_1 \Delta^{n-1} u + \lambda_2 \Delta^{n-2} u + \ldots + \lambda_n u = 0.$$

Presque en même temps je me suis aussi occupé de la même question [5] en retrouvant, entre autres, presque tous les résultats de M. J.-P. Robert, mais, bien entendu, par des moyens différents.

La liste des auteurs qui se sont aussi occupé de la question est assez remarquable : nous en avons cité ceux qui ont fait le premier pas seulement.

Ce travail a pour but d'approfondir un peu les propriétés des moyennes d'une fonction sommable quelconque, c'est-à-dire sans l'asservir à satisfaire à telle équation aux dérivées partielles.

---

(1) F. SBRANA, *Rend. Palermo*, t. LIII, 1929, p. 428-437.

(2) F. SBRANA, *Rend. Accad. Lincei*. 1925. p. 369-371.

(3) M. GHERMANESCO, *Mathematica*, t. VIII, 1933.

(4) J.-P. ROBERT, *Comptes rendus*, Paris, t. 191, 1930, p. 193; t. 192, 1931, p. 326, 1146, et dernièrement, *Thèse*, Paris, 1932.

(5) M. GHERMANESCO, *Comptes rendus*, Paris, 1931, t. 193, p. 107, 918; 1932, t. 194, p. 2011, ainsi que *Rend. Accad. Lincei*, octobre, novembre 1931.

Je commence donc par établir l'équation aux dérivées partielles satisfaite par une telle moyenne, ainsi que quelques propriétés générales. Je retrouve, comme application, les propriétés des moyennes des fonctions particulières citées plus haut.

Je donne ensuite une nouvelle définition pour les moyennes successives d'une fonction sommable, en y faisant intervenir aussi *l'ordre* de la moyenne considérée, ce qui est assez naturel, autant qu'indispensable; j'établis aussi l'équation aux dérivées partielles satisfaite par une moyenne d'ordre quelconque, avec application aux fonctions particulières, déjà citées.

Ce qui est digne de remarque dans tout ce travail c'est l'affranchissement de la condition d'analyticité, imposée par la plupart des auteurs non cités à la fonction dont on a défini les moyennes, ce qui fait que les résultats obtenus ont un caractère de généralité assez notable.

1. Nous nous proposons d'établir, en premier lieu, l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait la moyenne périphérique m_0 d'une fonction u, que nous supposerons continue, ainsi que les dérivées partielles des deux premiers ordres, dans une certaine région D, de l'espace à p dimensions et nulles en dehors de cette région et sommable sur toute hypersphère y continue.

Soit $P(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ un point de D, et considérons une hypersphère S_p de rayon R et de centre P contenue dans D. La moyenne périphérique m_0 de la fonction u, prise sur l'hypersphère S_p, sera donnée par l'expression, déjà écrite,

$$m_0(P) = \frac{K_p}{R^{p-1}} \int_{S_p} u(x'_1, x'_2, \ldots, x'_p)\, dS_p, \tag{1}$$

x'_i étant les coordonnées d'un point M situé sur S_p, et K_p désignant l'inverse de l'aire de l'hypersphère *unité*, c'est-à-dire

$$K_p = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}.$$

Pour calculer les dérivées partielles de la fonction m_0 par rapport aux coordonnées du point P et du rayon R dont elle dépend, nous allons faire le changement de variables

$$x'_i = x_i + \mathrm{R}\,\xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p);$$

lorsque le point $\mathrm{M}(x'_i)$ décrit l'hypersphère S_p, le point (ξ_i) décrit l'hypersphère Σ_p de rayon *un* ayant pour centre l'origine, et l'on a, entre les éléments d'aires correspondants $d\mathrm{S}_p$ et $d\Sigma_p$ des deux hypersphères, la relation

$$(2) \qquad d\mathrm{S}_p = \mathrm{R}^{p-1}\, d\Sigma_p.$$

La formule (1) devient

$$(3) \qquad m_0(\mathrm{P}, \mathrm{R}) = \mathrm{K}_p \int_{\Sigma_p} u(x_i + \mathrm{R}\,\xi_i)\, d\Sigma_p.$$

Le nouveau champ d'intégration ne dépendant pas du point P, on a immédiatement

$$(4) \qquad \Delta m_0(\mathrm{P}, \mathrm{R}) = \mathrm{K}_p \int_{\Sigma_p} \Delta u(x_i + \mathrm{R}\,\xi_i)\, d\Sigma_p,$$

ou, en revenant au champ primitif,

$$(5) \qquad \Delta m_0(\mathrm{P}, \mathrm{R}) = \frac{\mathrm{K}_p}{\mathrm{R}^{p-1}} \int_{\mathrm{S}_p} \Delta u(\mathrm{M})\, d\mathrm{S}_p,$$

avec

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2}.$$

On a ensuite, en dérivant la relation (4),

$$\frac{\partial m_0}{\partial \mathrm{R}} = \mathrm{K}_p \int_{\Sigma_p} \left(\sum_{i=1}^{p} \xi_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) d\Sigma_p,$$

ou, en revenant à l'hypersphère S_p,

$$\frac{\partial m_0}{\partial \mathrm{R}} = \frac{\mathrm{K}_p}{\mathrm{R}^{p-1}} \int_{\mathrm{S}_p} \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{x'_i - x_i}{\mathrm{R}} \frac{\partial u}{\partial x'_i} \right) d\mathrm{S}_p.$$

Mais $\dfrac{x'_i - x_i}{\mathrm{R}}$ ne sont autres que les cosinus directeurs de la normale extérieure à S_p et l'intégrale multiple du second membre est identique à l'intégrale de surface

$$\mathrm{J} = \int_{\mathrm{S}_p} \sum \frac{\partial u}{\partial x'_i}\, dx'_1\, dx'_2 \ldots dx'_{i-1}\, dx'_{i+1} \ldots dx'_p.$$

prise sur le côté extérieur de S_p, ou encore, d'après la formule de Green, à l'intégrale de volume

$$J = \int_{S_p} \left(\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) dx_1 dx_2 \ldots dx_p, \tag{6}$$

prise à l'intérieur de S_p.

On a donc

$$\frac{\partial m_0}{\partial R} = \frac{K_p}{R^{p-1}} J, \tag{7}$$

et, en dérivant cette relation par rapport à R,

$$\frac{\partial^2 m_0}{\partial R^2} = - \frac{(p-1) K_p}{R^p} J + \frac{K_p}{R^{p-1}} \frac{\partial J}{\partial R}.$$

Or il est facile de calculer $\frac{\partial J}{\partial R}$ en remplaçant les coordonnées rectangulaires x'_i par des coordonnées polaires dans l'intégrale (6), mais on peut arriver plus facilement au même résultat en observant que, quand R augmente de dR, l'accroissement ΔJ est représenté par une intégrale p-uple, étendue à la portion de l'espace, comprise entre les deux hypersphères concentriques de rayons R et $R + dR$. La partie principale de cet accroissement est évidemment égale au produit de dR par l'intégrale $(p-1)$-uple de $\sum_1^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_i'^2}$ étendue à la surface de l'hypersphère S_p. On a donc

$$\frac{\partial^2 m_0}{\partial R^2} = - \frac{(p-1) K_p}{R^p} J + \frac{K_p}{R^{p-1}} \int_{S_p} \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i'^2} \right) dS_p. \tag{8}$$

En comparant maintenant les formules (5), (7) et (8), on obtient

$$\boxed{\Delta m_0 = \frac{\partial^2 m_0}{\partial R^2} + \frac{p-1}{R} \frac{\partial m_0}{\partial R}}, \tag{9}$$

qui est l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la moyenne périphérique de la fonction donnée u; mais, comme cette équation est indépendante de u, elle représente l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la moyenne périphérique de *toute* fonction qui en a. Elle est quelque chose d'analogue à l'équation intégrale à laquelle satisfont tous les noyaux résolvants dans la théorie des équations intégrales de Fredholm.

L'importance de cette équation ne saurait échapper : elle va jouer le rôle fondamental dans toute question se rattachant aux valeurs moyennes d'une fonction de plusieurs variables.

2. L'équation aux dérivées partielles (9) mérite une étude à part, indépendamment de son étroite liaison avec la théorie des moyennes. Comme cela ne rentre pas dans l'objet de ces lignes, nous nous contenterons d'ajouter seulement quelques remarques quant à son intégration et aux problèmes qu'on peut s'y poser ayant trait toujours à notre préoccupation.

D'après la manière dont on l'a obtenue, il s'ensuit que l'intégrale de l'équation (9) se réduisant pour $R = 0$ à une fonction donnée $u(P)$, satisfaisant aux conditions posées, est donnée par la formule (1). Il est facile de s'assurer qu'elle en est la seule. Il suffit de montrer que l'équation (9) n'a pas d'intégrale se réduisant à *zéro* pour $R = 0$.

Posons à cet effet $m_0 = R^\alpha v$, v dépendant du point P et du rayon R, étant ***régulière et différente de zéro*** pour $R = 0$, et α étant ***la plus grande*** puissance positive de R, contenue comme facteur en m_0. Avec ce changement, l'équation (φ) devient

$$(9') \qquad R^2 \Delta v = R^2 \frac{\partial^2 v}{\partial R^2} + (2\alpha + p - 1) R \frac{\partial v}{\partial R} + \alpha(p + \alpha - 2) v.$$

Comme v est régulière pour $R = 0$, il en est de même pour les dérivées de v; en faisant donc $R = 0$ dans l'équation (9') il reste

$$\alpha(\alpha + p - 2) v = 0$$

pour $R = 0$. Trois cas peuvent se présenter :

a. $\alpha = 0$. Il s'ensuit immédiatement que $m_0 \neq 0$ pour $R = 0$, d'après l'hypothèse faite sur v;

b. $\alpha + p - 2$. Comme p est au moins égal à 2 et $\alpha > 0$, cette relation ne peut avoir lieu en général, sauf pour $p = 2$, dans quel cas $\alpha = 0$ et l'on retombe sur la première hypothèse;

c. $v = 0$ pour $R = 0$. C'est contrairement à l'hypothèse, à moins que $v \equiv 0$, quel que soit R.

On voit donc que, dans aucun cas, l'équation aux dérivées partielles (9) n'a pas de solution nulle pour $R = 0$.

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *L'équation aux dérivées partielles*

$$(9) \qquad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial R^2} + \frac{p-1}{R}\frac{\partial v}{\partial R}$$

admet une seule solution continue, ainsi que les dérivées partielles des deux premiers ordres, se réduisant à une fonction donnée pour $R = 0$.

Cette solution est la moyenne périphérique de la fonction donnée, prise sur l'hypersphère de rayon R *et étant contenue dans le domaine d'existence de la fonction donnée.*

Lorsque la fonction donnée est analytique, il en est de même de l'intégrale correspondante de l'équation (9).

La dernière proposition, que nous n'avons pas démontrée, est assez évidente sur la formule (1); c'est ce qui a permis d'établir une formule de la moyenne sous la forme d'un développement en série suivant les puissances du rayon R, en remplaçant dans (1), la fonction u par son développement taylorien.

La connaissance de l'équation aux dérivées partielles (9), satisfaite par la moyenne périphérique de toute fonction, rend plus aisé l'établissement de cette formule : on n'a qu'à essayer de la satisfaire par un développement en série de la forme

$$m_0(P) = v_0 + R v_1 + R^2 v_2 + \ldots,$$

les v_i étant des fonctions des coordonnées du point P; on obtient les conditions

$$v_{2k+1} = 0, \qquad \Delta v_{2k} = (2k+2)(2k+p)v_{2k+2},$$

avec $v_0 = u$, u étant la fonction dont on cherche la moyenne.

3. Lorsque la fonction donnée u est la solution d'une certaine équation aux dérivées partielles linéaire, la moyenne périphérique m_0 satisfait à la même équation. En effet, de la formule (3)

on déduit aisément

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots\alpha_p} m_0}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_p^{\alpha_p}} = \mathrm{K}_p \int_{\Sigma_p} \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots\alpha_p}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_p^{\alpha_p}} u(x_i+\mathrm{R}\xi_i)\,d\Sigma_p,$$

ou en revenant au champ d'intégration primitif

$$(10)\qquad \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_p} m_0(\mathrm{P})}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_p^{\alpha_p}} = \frac{\mathrm{K}_p}{\mathrm{R}^{p-1}} \int_{\mathrm{S}_p} \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots\alpha_p} u(\mathrm{M})}{\partial x_1'^{\alpha_1}\partial x_2'^{\alpha_2}\dots\partial x_p'^{\alpha_p}}\,d\mathrm{S}_p.$$

Supposons maintenant que la fonction donnée u satisfasse à une équation quelconque aux dérivées partielles, linéaire et à coefficients constants

$$(11)\qquad \mathrm{E}(u)=0,$$

la formule (10) nous permet facilement d'écrire

$$(12)\qquad \mathrm{E}[m_0(\mathrm{P})] = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}^{p-1}} \int_{\mathrm{S}_p} \mathrm{E}[u(\mathrm{M})]\,d\mathrm{S}_p = 0,$$

donc :

Théorème. — *Lorsque la fonction u satisfait à une équation aux dérivées partielles, linéaire et à coefficients constants, sa moyenne périphérique m_0 satisfait à la même équation et réciproquement*, car la relation (12) ne peut avoir lieu, quelle que soit l'hypersphère S_p, à moins d'avoir la relation (11).

Ce théorème entraîne la remarquable conséquence que voici :

Lorsque l'on connaît une intégrale u d'une équation aux dérivées partielles, linéaire et à coefficients constants, on peut en obtenir une deuxième par la formule (1) — R *y figurant comme paramètre — se réduisant à la première pour* $\mathrm{R}=0$.

4. Un problème remarquable qui se pose d'habitude dans la théorie des valeurs moyennes est celui de leur donner une expression dépourvue de tout signe d'intégration. C'est ce qu'on obtient à l'aide d'une série, lorsque la fonction considérée est analytique.

Il y a cependant des cas assez étendus où l'on peut obtenir la formule envisagée : c'est quand la fonction donnée satisfait à une équation linéaire aux laplaciens et à coefficients constants, de la forme générale

$$\Delta^n u + \lambda_1 \Delta^{n-1} u + \ldots + \lambda_n u = 0 \tag{13}$$

avec

$$\Delta^k = \Delta(\Delta^{k-1} u),$$

équation connue aujourd'hui sous le nom d'*équation n-métaharmonique*.

L'étude de ce cas est très aisée grâce à la forme de l'équation aux dérivées partielles (9) qui comprend la moyenne m_0 sous l'expression de son laplacien Δm_0. Elle nous donnera la moyenne m_0 sous la forme de l'intégrale d'une équation différentielle linéaire, par rapport au rayon R, considéré comme variable.

Désignons, en effet, par $B(v)$ l'expression

$$B(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial R^2} + \frac{p-1}{R} \frac{\partial v}{\partial R}$$

et par $B_n(v)$ l'expression obtenue en appliquant à la fonction v l'opération B, n fois de suite; si la fonction donnée u satisfait à l'équation aux dérivées partielles (13), sa moyenne périphérique m_0 sera — vu l'équation (9) — une intégrale de l'équation différentielle

$$B_n(m_0) + \lambda_1 B_{n-1}(m_0) + \ldots + \lambda_n m_0 = 0. \tag{14}$$

Réciproquement, si cette équation a lieu, on remonte — grâce à (9) — à l'équation (13), donc :

Théorème. — *La moyenne périphérique d'une fonction n-métaharmonique est l'intégrale d'une équation différentielle linéaire du $2n^{ième}$ ordre, par rapport au rayon* R, *pris comme variable indépendante et réciproquement.*

Nous allons voir plus loin que l'ordre de cette équation se réduit à n.

Nous avons donné ailleurs [1] l'intégration complète de l'équation différentielle (14). Nous en reproduisons ici la marche suivie, dans ses lignes générales, ainsi que les résultats obtenus. Remar-

---

[1] *Sur l'équation de Bessel* (*Bull. Sc. de l'École Pol. Timisoara*, t. 4, fasc. 3-4, 1932).

quons, en passant, qu'on a l'expression remarquable pour $B_n(v)$:

$$B_n(v) = \frac{d^n}{d\rho^n}\left[\rho^{n+1-\frac{p}{2}}\frac{d^n}{d\rho^n}\left(\rho^{\frac{p}{2}-1}v\right)\right] \tag{15}$$

avec $R^2 = 4\rho$.

Pour intégrer l'équation différentielle (14), nous allons chercher à y satisfaire par une solution de l'équation

$$B(v) = \alpha v, \tag{16}$$

α étant une constante que nous allons déterminer. On trouve que α doit être racine de l'équation

$$\alpha^n + \lambda_1\alpha^{n-1} + \lambda_2\alpha^{n-2} + \ldots + \lambda_n = 0 \tag{17}$$

et comme (16) n'est autre que l'équation bien connue de Bessel, au facteur α près, il s'ensuit que l'équation différentielle (14) admet les n intégrales régulières en ρ ($4\rho = R^2$)

$$v_i = J\left(\frac{p}{2}, \alpha_i\rho\right) \qquad (i = (1, 2, \ldots, n), \tag{18}$$

α_i étant les racines [1] de l'équation (17) et $J(\gamma, x)$ étant la fonction bien connue de Bessel

$$J(\gamma, x) = 1 + \frac{x}{1\cdot\gamma} + \frac{x^2}{2!\gamma(\gamma+1)} + \ldots.$$

Une autre suite de n intégrales particulières de l'équation différentielle (14) est fournie par la théorie de l'équation de Bessel

$$w_i = (\alpha_i\rho)^{1-\frac{p}{2}} J\left(2 - \frac{p}{2}, \alpha_i\rho\right), \tag{19}$$

de sorte que l'intégrale générale de l'équation différentielle (14) est donnée par

$$m_1 = \sum_{i=1}^{n} A_i v_i + \sum_{i=1}^{n} B_i w_i, \tag{20}$$

mais nous conserverons seulement l'expression

$$m_0(P) = \sum_{i=1}^{n} A_i v_i \tag{21}$$

---

[1] Pour la discussion complète des intégrales suivant les racines α_i ou la parité de p, voir *loc. cit.*

— les A_i étant des fonctions du point P — puisque la moyenne m_0 est régulière pour $R = 0$.

Il faut déterminer maintenant les fonctions $A_i(P)$. Or, supposons, comme il est naturel, vu l'équation (13), que la fonction u ait des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre $2n$; il en est de même pour la moyenne m_0 et la relation

$$(22)\qquad \Delta^i m_0(P) = \frac{K_p}{R^{p-1}} \int_{S_p} \Delta^i u(M)\, dS_p \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

qu'on déduit de (5) ou de (10), montre qu'on a $\Delta^i m_0(P) = \Delta^i u(P)$ pour $R = 0$. Mais de la relation (21) on déduit, compte tenu de (16) et de (17),

$$(23)\qquad \Delta^j m_0(P) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^j A_i v_i,$$

d'où, pour $R = 0$,

$$(24)\qquad \Delta^j m_0(P) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^j A_i(P) = \Delta^j u(P),$$

et l'élimination des fonctions $A_i(P)$ entre les relations (21) et (24) conduit à

$$(25)\qquad \begin{vmatrix} m_0 & u & \Delta u & \Delta^2 u & \ldots & \Delta^{n-1} u \\ v_1 & 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ v_2 & 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_n & 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

valable, quel que soit le point P, dans D.

Telle est la relation qui donne la moyenne périphérique de la fonction u, exprimée linéairement à l'aide des valeurs de la fonction u et des premiers $(n-1)$ laplaciens au point P, centre de l'hypersphère sur laquelle on a pris cette moyenne.

En désignant par V_n le déterminant Vandermonde des racines α_i, cette relation s'écrit encore

$$(26)\qquad V_n m_0(P) = \Phi_0^0(\rho) u(P) + \Phi_1^0(\rho) \Delta u(P) + \ldots + \Phi_{n-1}^0(\rho) \Delta^{n-1} u(P),$$

dans laquelle

$$(27)\qquad V_n \Phi_k^0(\rho) = (-1)^k \| v_i \quad 1 \quad \alpha_i \quad \alpha_i^2 \quad \ldots \quad \alpha_i^{k-1} \quad \alpha_i^{k+1} \quad \ldots \quad \alpha_i^{n-1} \|.$$

On a en particulier

$$(28) \qquad V_n \Phi_0^0(\rho) = \| v_i \quad \alpha_i \quad \alpha_i^2 \quad \dots \quad \alpha_i^{n-1} \|$$

et

$$(29) \qquad V_n \Phi_{n-1}^0(\rho) = (-1)^{n-1} \| v_i \quad 1 \quad \alpha_i \quad \alpha_i^2 \quad \dots \quad \alpha_i^{n-2} \|.$$

Sur ces expressions on lit facilement les relations

$$(30) \qquad \Delta\Phi_0^0(\rho) = (-1)^n \lambda_n \Phi_{n-1}^0(\rho),$$

$$(31) \qquad \Phi_{k-1}^0(\rho) = \Delta\Phi_k^0(\rho) + \lambda_{n-k} \Phi_{n-1}^0(\rho).$$

C'est sous la forme (26), mais sans donner explicitement les fonctions $\Phi_k^0(\rho)$, que M. J.-P. Robert a obtenu son résultat. Il a donné aussi la relation (31), qui est en défaut si $k = 0$, à moins que l'on ne suppose $\Phi_k^0(\rho) = 0$ pour k négatif; mais la relation (30) peut combler cette lacune.

Nous avons obtenu la relation (26) sur une autre voie encore, en utilisant une formule plus générale que celle de Green [1].

Terminons en remarquant que les fonctions $\Phi_k^0(\rho)$ sont des solutions de l'équation différentielle (14) ou, ce qui est la même chose, de l'équation aux dérivées partielles (13), 4ρ exprimant la distance de deux points et que, si l'on pose

$$V_{in} = \| \alpha_i^n \quad 1 \quad \alpha_i \quad \alpha_i^2 \quad \dots \quad \alpha_i^{i-1} \quad \alpha_i^{i+1} \quad \dots \quad \alpha_i^{n-1} \|,$$

$$A_n = \frac{1}{n!\,\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{p}{2}+m-1\right)},$$

on a

$$(32) \quad (-1)^i V_n \Phi_i^0(\rho) = A_i V_{ii}\rho^i + A_n V_{in}\rho^n + A_{n+1} V_{i,n+1}\rho^{n+1} + \dots,$$

expression assez curieuse de la fonction $\Phi_i^0(\rho)$.

5. Nous avons vu que la moyenne d'une fonction n-métaharmonique s'exprime par une relation telle que (25) ou (26). Inversement, supposons que la moyenne d'une fonction u s'exprime par une relation de la forme

$$(33) \quad m_0(P) = \varphi_0(\rho)F_0(P) + \varphi_1(\rho)F_1(P) + \dots + \varphi_{n-1}(\rho)F_{n-1}(P).$$

Nous allons montrer que, dans ce cas, la fonction u est n-méta-

[1] *Rend. Accad. Lincei*, nov. 1931.

harmonique. Les fonctions φ_i sont supposées distinctes et avoir des dérivées par rapport à ρ jusqu'à l'ordre $2n$, ce qui fait que la moyenne m_0 aura des dérivées par rapport aux x_i jusqu'au même ordre, grâce à la relation (9). Or cette même relation (9) qu'on peut écrire, en y faisant le changement de variable $4\rho = R^2$,

$$\Delta m_0(P) = \rho\frac{\partial^2 m_0}{\partial\rho^2} + \frac{p}{2}\frac{\partial m_0}{\partial\rho} = B(m_0), \tag{34}$$

nous permet de déduire de la relation donnée (33)

$$\Delta^k m_0(P) = F_0(P)B_k(\varphi_0) + F_1(P)B_k(\varphi_1) + \ldots + F_{n-1}(P)B_n(\varphi_{n-1}) \tag{35}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

L'élimination des fonctions $F_i(P)$ entre les relations (33) et (35) nous conduisent au déterminant nul

$$\begin{vmatrix} m_0 & \varphi_0 & \varphi_1 & \ldots & \varphi_{n-1} \\ \Delta m_0 & B(\varphi_0) & B(\varphi_1) & \ldots & B(\varphi_{n-1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta^n m_0 & B_n(\varphi_0) & B_n(\varphi_1) & \ldots & B_n(\varphi_{n-1}) \end{vmatrix} = 0, \tag{36}$$

qui exprime que la moyenne périphérique m_0 satisfait à une équation aux dérivées partielles par rapport aux coordonnées du point P, de la forme (13), ce qui amène, d'après la réciproque du théorème, à la conclusion que la fonction donnée u satisfait à la même équation, c'est-à-dire est une fonction métaharmonique.

La relation (36) montre aussi que les fonctions $\varphi_i(\rho)$ ne sont pas tout à fait arbitraires : comme il doit y avoir une relation linéaire et à coefficients constants entre les éléments d'une même ligne ou même colonne d'un déterminant nul, il s'ensuit que les fonctions $\varphi_i(\rho)$ satisfont à la même équation différentielle, qui est de la forme (14), les coefficients λ_i étant les mêmes qui entrent dans l'expression de l'équation aux dérivées partielles (13), satisfaite par la moyenne m_0 et donc aussi par la fonction u.

Nous pouvons énoncer aussi le théorème suivant :

Théorème. — *Lorsque la moyenne périphérique m_0 d'une fonction donnée u peut être exprimée par une relation de la forme*

$$m_0(P) = \varphi_0(\rho)F_0(P) + \varphi_1(\rho)F_1(P) + \ldots + \varphi_{n-1}(\rho)F_{n-1}(P),$$

les fonctions $\varphi_i(\rho)$ étant linéairement distinctes et ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $2n$, alors la fonction u est n-métaharmonique dans son domaine d'existence, tandis que les fonctions $\varphi_i(\rho)$ s'expriment linéairement à l'aide des fonctions $\varphi_i^0(\rho)$.

Lorsque $\varphi_i(\rho) \equiv \Phi_i^0(\rho)$, on a $F_i(P) \equiv \Delta^i u(P)$ et réciproquement.

Ce théorème, que nous désignerons sous le nom du *théorème de l'inversion de la moyenne*, va jouer un rôle important dans la suite.

6. Nous allons faire une première application de cet important théorème.

Nous avons trouvé (§ 4) l'équation différentielle linéaire et à coefficients constants du $2n^{\text{ième}}$ ordre à laquelle satisfait, par rapport à la variable ρ, la moyenne périphérique d'une fonction n-métaharmonique, en annonçant que cette moyenne satisfait aussi à une équation d'ordre n. C'est ce que nous ferons voir ici. En effet, on a vu (§ 4) que la moyenne d'une fonction n-métaharmonique est donnée par la relation (26)

$$(26)\quad V_n m_0(P) = \Phi_0^0(\rho)\, u(P) + \Phi_1^0(\rho)\, \Delta u(P) + \ldots + \Phi_{n-1}^0(\rho)\, \Delta^{n-1} u(P).$$

Dérivons les deux membres par rapport à ρ; on a

$$(37)\quad \begin{aligned} V_n m_0^{(k)}(P) = {} & \Phi_0^{0\,(k)}(\rho)\, u(P) + \Phi_1^{0\,(k)}(\rho)\, \Delta u(P) + \ldots \\ & + \Phi_{n-1}^{0\,(k)}(\rho)\, \Delta^{n-1} u(P) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Éliminons maintenant les fonctions $u(P)$, $\Delta u(P), \ldots \Delta^{n-1} u(P)$ entre les relations (26) et (37); il vient

$$(38)\quad \begin{vmatrix} m_0(P) & \Phi_0^0(\rho) & \Phi_1^0(\rho) & \ldots & \Phi_{n-1}^0(\rho) \\ m_0'(P) & \Phi_0^{0\prime}(\rho) & \Phi_1^{0\prime}(\rho) & \ldots & \Phi_{n-1}^{0\prime}(\rho) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ m_0^{(n)}(P) & \Phi_0^{0\,(n)}(\rho) & \Phi_1^{0\,(n)}(\rho) & \ldots & \Phi_{n-1}^{0\,(n)}(\rho) \end{vmatrix} = 0,$$

qui est une équation différentielle linéaire et homogène du $n^{\text{ième}}$ ordre à coefficients variables, à laquelle satisfait la moyenne périphérique m_0, en tant que fonction du rayon R ou de ρ.

Réciproquement, supposons que la moyenne périphérique m_0, d'une fonction u, satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre n, à coefficients réguliers pour $\rho = 0$

$$\varphi_0(\rho)\, m_0 + \varphi_1(\rho)\frac{dm_0}{d\rho} + \ldots + \varphi_n(\rho)\frac{d^n m_0}{d\rho^n} = 0,$$

nous allons montrer que la fonction u est encore n-métaharmonique.

En effet, toute intégrale de cette équation, donc aussi m_0, est une combinaison linéaire de n intégrales particulières distinctes $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$, c'est-à-dire

$$m_0(\mathrm{P}) = \mathrm{A}_1(\mathrm{P})\,\psi_1(\rho) + \mathrm{A}_2(\mathrm{P})\,\psi_2(\rho) + \ldots + \mathrm{A}_n(\mathrm{P})\,\psi_n(\rho)$$

les constantes par rapport à ρ, A_i devant être des fonctions du point P. Or, une telle expression rentre dans le cas du théorème de l'inversion de la moyenne, que nous avons établi tout à l'heure, donc :

Théorème. — *Lorsque la moyenne d'une fonction u est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre n, à coefficients variables, le rayon R ou ρ ($4\rho = \mathrm{R}'$) étant pris comme variable, alors la fonction donnée u est n-métaharmonique dans son domaine d'existence et réciproquement.*

* * *

7. Définissons maintenant les moyennes successives $m_i(\mathrm{P})$ d'une fonction u, par rapport à l'hypersphère S_p, à l'aide de la relation de récurrence

$$m_i(\mathrm{P}) = \frac{p+2i-2}{\mathrm{R}^{p+2i-2}}\int_0^{\mathrm{R}} \mathrm{R}^{p+2i-3}\, m_{i-1}(\mathrm{P})\, d\mathrm{R}. \tag{39}$$

On en déduit, inversement,

$$\mathrm{R}^{p+2i-3}\, m_{i-1}(\mathrm{P}) = \frac{1}{p+2i-2}\,\frac{d}{d\mathrm{R}}\left[\mathrm{R}^{p+2i-2}\, m_i(\mathrm{P})\right],$$

ou, en passant à la variable ρ,

$$m_i(\mathrm{P}) = \frac{1}{(p+2i)\,\rho^{\frac{p}{2}+i-1}}\,\frac{d}{d\rho}\left[\rho^{\frac{p}{2}+i}\, m_{i+1}(\mathrm{P})\right]; \tag{40}$$

ensuite

$$m_i(P) = \frac{1}{(p+2i)(p+2i+2)\rho^{\frac{p}{2}+i-1}} \frac{d^2}{d\rho^2}\left[\rho^{\frac{p}{2}+i+1} m_{i+2}(P)\right],$$

et en général

$$(41) \quad m_i(P) = \frac{1}{(p+2i)(p+2i+2)\ldots(p+2i+2k-2)\rho^{\frac{p}{2}+i-2}} \times \frac{d^k}{d\rho^k}\left[\rho^{\frac{p}{2}+i+k-1} m_{i+k}(P)\right].$$

En particulier, on a pour $i=0$

$$(42) \quad m_0(P) = \frac{1}{p(p+2)\ldots(p+2k-2)\rho^{\frac{p}{2}-1}} \frac{d^k}{d\rho^k}\left[\rho^{\frac{p}{2}-1} m_k(P)\right].$$

Des relations précédentes on déduit facilement que *lorsque la fonction donnée satisfait à une équation aux dérivées partielles, linéaire et à coefficients constants il en est de même pour toute moyenne $m_n(P)$ et réciproquement.*

En effet, la propriété a été déjà établie pour la moyenne périphérique $m_0(P)$; désignons par

$$(43) \qquad \varepsilon(u) = 0$$

l'équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire la fonction u; de la relation (42) on déduit, à cause de (10),

$$0 = \frac{d^k}{d\rho^k}\left[\rho^{\frac{p}{2}-1} \varepsilon(m_k)\right],$$

qui devant avoir lieu, quel que soit k, exige

$$(44) \qquad \varepsilon(m_k) = 0.$$

La réciproque est évidemment vraie, car de (44) on déduit, à cause de (42),

$$\varepsilon(m_0) = 0,$$

et par suite (43).

8. Supposons maintenant que la fonction u ait des dérivées partielles continues des deux premiers ordres; il en sera de même

de la moyenne $m_0(P)$, comme nous l'avons déjà montré (§ 1) et la relation (42) montre qu'il en est de même de toute moyenne $m_k(P)$. On déduit donc de la relation (39)

$$\Delta m_i = \frac{p+2i-2}{R^{p+2i-2}} \int_0^R R^{p+2i-3} \Delta m_{i-1}(P)\, dR,$$

et en particulier pour $i = 1$

$$\Delta m_1(P) = \frac{p}{R^p} \int_0^R R^{p-1} \Delta m_0(P)\, dR.$$

Introduisons maintenant dans cette relation, à la place de $\Delta m_0(P)$, son expression, donnée par la relation (9); il vient, en intégrant dans le second membre,

$$\begin{aligned} \Delta m_1(P) &= \frac{p}{R^p} \int_0^R R^{p-1} \left[\frac{d^2 m_0}{dR^2} + \frac{p-1}{R} \frac{dm_0}{dR} \right] dR \\ &= \frac{p}{R^p} \int_0^R \frac{d}{dR} \left(R^{p-1} \frac{dm_0}{dR} \right) dR, \end{aligned}$$

et l'on en obtient la relation remarquable

(45) $$\Delta m_1(P) = \frac{p}{R} \frac{dm_0(P)}{dR},$$

$m_1(P)$ étant ce qu'on appelle la *moyenne spatiale* de la fonction u.

Mais on a d'autre part, en dérivant (39), pour $i = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{dm_1}{dR} &= \frac{p}{R} m_0 - \frac{p^2}{R^{p+1}} \int_0^R R^{p-1} m_0\, dR, \\ \frac{d^2 m_1}{dR^2} &= \frac{p}{R} \frac{dm_0}{dR} - \frac{p(p+1)}{R^2} m_0 + \frac{p^2(p+1)}{R^{p+2}} \int_0^R R^{p-1} m_0\, dR. \end{aligned}$$

On en déduit

(46) $$\frac{d^2 m_1}{dR^2} + \frac{p+1}{R} \frac{dm_1}{dR} = \frac{p}{R} \frac{dm_0}{dR},$$

ou, compte tenu de (45),

(47) $$\boxed{\Delta m_1 = \frac{d^2 m_1}{dR^2} + \frac{p+1}{R} \frac{dm_1}{R}}$$

qui est l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la moyenne *spatiale* $m_1(\mathrm{P})$.

Considérons maintenant la relation (39) pour $i = 2$

$$m_2(\mathrm{P}) = \frac{p+2}{\mathrm{R}^{p+2}} \int_0^{\mathrm{R}} \mathrm{R}^{p+1} m_1(\mathrm{P})\, d\mathrm{R}.$$

On en parvient, par des calculs semblables, à l'équation

$$\Delta m_2 = \frac{d^2 m_2}{d\mathrm{R}^2} + \frac{p+3}{\mathrm{R}} \frac{dm_2}{d\mathrm{R}}.$$

Je dis qu'on a, d'une manière générale, les relations

$$\Delta m_i(\mathrm{P}) = \frac{p+2i-2}{\mathrm{R}} \frac{dm_{i-1}(\mathrm{P})}{d\mathrm{R}}, \tag{48}$$

$$\boxed{\Delta m_i = \frac{d^2 m_i}{d\mathrm{R}^2} + \frac{p+2i-1}{\mathrm{R}} \frac{dm_i}{d\mathrm{R}}.} \tag{49}$$

En effet, il suffit de les supposer vraies pour les entiers $1, 2, \ldots i$; on démontre, toujours comme précédemment, qu'elles sont vraies encore pour $i+1$.

Vu l'analogie frappante entre les équations (9) et (49), il s'ensuit que les moyennes d'ordre supérieur $m_i(\mathrm{P})$ jouissent des mêmes propriétés, du moins dans leurs traits généraux, de sorte que nous nous abstiendrons de les énoncer, pour éviter une quasi-tautologie. Ce qui sera désormais digne d'étude, ce seront les propriétés des moyennes des quelques fonctions particulières, comme les fonctions n-métaharmoniques, prises dans leur ensemble.

9. Considérons donc le cas d'une fonction n-métaharmonique u, avec ses moyennes successives $m_i(\mathrm{P})$, ainsi que les fonctions $\Phi_k^0(\rho)$, qui entrent dans l'expression (26) de la moyenne périphérique $m_0(\mathrm{P})$. Posons

$$\Phi_k^i(\rho) = \frac{p+2i-2}{\mathrm{R}^{p+2i-2}} \int_0^{\mathrm{R}} \Phi_k^{i-1}(\rho)\, \mathrm{R}^{p+2i-3}\, d\mathrm{R} \qquad (4\rho = \mathrm{R}^2), \tag{50}$$

les relations (26) et (39) permettent d'écrire

$$m_i(\mathrm{P}) = \Phi_0^i(\rho)\, u(\mathrm{P}) + \Phi_1^i(\rho)\, \Delta u(\mathrm{P}) + \ldots + \Phi_{n-1}^i(\rho)\, \Delta^{n-1} u(\mathrm{P}), \tag{51}$$

à l'aide de laquelle on démontre, comme nous l'avons déjà annoncé, les théorèmes pour une moyenne quelconque $m_i(P)$, analogues à ceux établis pour la moyenne superficielle $m_0(P)$,

Donnons à i les valeurs successives $0, 1, \ldots, n$ dans (51) et éliminons $u(P)$, $\Delta u(P)$, $\ldots$, $\Delta^{n-1} u(P)$ entre les relations ainsi obtenues ; nous avons

$$(52)\qquad \begin{vmatrix} m_0 & \Phi_0^0 & \Phi_1^0 & \ldots & \Phi_{n-1}^0 \\ m_1 & \Phi_0^1 & \Phi_1^1 & \ldots & \Phi_{n-1}^1 \\ m_2 & \Phi_0^2 & \Phi_1^2 & \ldots & \Phi_{n-1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_n & \Phi_0^n & \Phi_1^n & \ldots & \Phi_{n-1}^n \end{vmatrix} = 0.$$

On obtient une relation analogue entre $n+1$ moyennes *quelconques* $m_i(P)$.

Réciproquement, supposons qu'entre $n+1$ moyennes successives $m_i, m_{i+1}, \ldots, m_{i+n}$ il y ait une relation linéaire et homogène de la forme

$$(53)\qquad \varphi_i m_i + \varphi_{i+1} m_{i+1} + \ldots + \varphi_{i+n} m_{i+n} = 0,$$

les φ_i dépendant seulement du rayon R en tant que fonctions de ρ, $(4\rho = R^2)$. La relation (41) transforme (53) en une équation différentielle linéaire et homogène du $n^{\text{ième}}$ ordre par rapport à la moyenne m_{i+n}. Or cette propriété caractérise les fonctions n-métaharmoniques, donc...

Théorème. — *Lorsque $n+1$ moyennes d'ordres consécutifs d'une fonction donnée u sont liées par une relation linéaire et homogène, à coefficients fonctions du rayon* $R(4\rho = R^2)$, *alors la fonction donnée u est n-métaharmonique et réciproquement.*

10. Si dans la relation (51) on donne à i seulement n valeurs successives, on obtient du système d'équations en Δ_n^k, ainsi formé

$$(54)\qquad \begin{vmatrix} \Phi_0^i & \Phi_1 & \ldots & \Phi_{n-1}^i \\ \Phi_0^{i+1} & \Phi_1^{i+1} & \ldots & \Phi_{n-1}^{i+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi_0^{i+n-1} & \Phi_1^{i+n-1} & \ldots & \Phi_{n-1}^{i+n-1} \end{vmatrix} u(P)$$

$$= \begin{vmatrix} m_i(P) & \Phi_1^i & \Phi_2^i & \ldots & \Phi_{n-1}^i \\ m_{i+1}(P) & \Phi_1^{i+1} & \Phi_2^{i+1} & \ldots & \Phi_{n-1}^{i+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{i+n-1}(P) & \Phi_1^{i+n-1} & \Phi_2^{i+n-1} & \ldots & \Phi_{n-1}^{i+n-1} \end{vmatrix}.$$

de même que la relation plus générale

$$(55)\qquad \left\| \Phi_0^{i+k} \quad \Phi_1^{i+k} \quad \dots \quad \Phi_{n-1}^{i+k} \mid \Delta^j u(\mathrm{P}) \right. \\ = \left\| m_{i+k}(\mathrm{P}) \quad \Phi_0^{i+k} \quad \dots \quad \Phi_{j-1}^{i+k} \quad \Phi_{j+1}^{i+k} \quad \dots \quad \Phi_{n-1}^{i+k} \right\| \\ (j;\ k = 0, 1, \dots, n-1),$$

qui expriment la fonction n-métaharmonique donnée u, ou un laplacien quelconque $\Delta^j u$, linéairement à l'aide des n moyennes successives m_i, m_{i+1}, ..., m_{i+n-1}, i étant quelconque.

Supposons que, inversement, on puisse exprimer de cette manière une fonction donnée u. Nous allons montrer qu'elle est n-métaharmonique.

En effet, de la relation

$$\varphi u = \varphi_0 m_i + \varphi_1 m_{i+1} + \dots + \varphi_{n-1} m_{i+n-1},$$

on déduit, en divisant les deux membres par φ et en dérivant par rapport à ρ, une relation linéaire et homogène entre les moyennes m_i, m_{i+1}, ..., m_{i+n-1} et leurs dérivées premières, laquelle relation se transforme, à l'aide de (41), en une équation différentielle linéaire et homogène, du $n^{\text{ième}}$ ordre, par rapport à la moyenne m_{i+n+1}. Or cette propriété caractérise toujours les fonctions n-métaharmoniques, donc :

Théorème. — *Lorsqu'une fonction donnée u s'exprime, ainsi que ses laplaciens, linéairement à l'aide de n moyennes successives m_i, m_{i+1}, ... m_{i+n-1}, la fonction u est n-métaharmonique et réciproquement.*