BULLETIN DE LA S. M. F.

BERTRAND GAMBIER

Tétraèdres inscrits dans une cubique gauche (ou une biquadratique) et circonscrits à une développable de classe 3 (ou 4) ou à une quadrique

Bulletin de la S. M. F., tome 63 (1935), p. 56-90

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1935__63__56_0>

TÉTRAÈDRES INSCRITS DANS UNE CUBIQUE GAUCHE (OU UNE BIQUADRATIQUE) ET CIRCONSCRITS A UNE DÉVELOPPABLE DE CLASSE 3 (OU 4) OU A UNE QUADRIQUE;

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

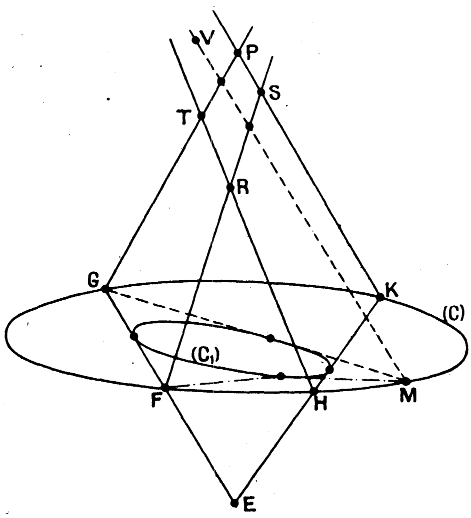
1. Introduction. — Le problème consistant à déterminer les tétraèdres inscrits dans une cubique gauche (ou une biquadratique) et circonscrits à une développable de classe 3 (ou classe 4 et genre 1) ou à une quadrique, est évidemment un cas spécial du problème consistant à trouver un tétraèdre inscrit dans une quadrique (issue de la cubique ou de la biquadratique) et circonscrit à une quadrique (inscrite dans la développable).

Je vais rappeler quelques résultats relatifs aux tétraèdres inscrits dans une quadrique Q et circonscrits à une quadrique Q_1.

Soit d'abord le *cas très particulier où* Q *et* Q_1 *ont quatre génératrices communes* formant un quadrilatère gauche PSRT; un plan tangent *quelconque* α à Q_1 coupe les côtés de ce quadrilatère en FGHK (*fig.* 1), EFG, EHK étant les deux génératrices de Q_1 situées dans ce plan; soit un point V *quelconque* de Q, M la trace sur α de la génératrice de Q, VM, de même système que PS; les droites GM, FM traces sur α des plans VPT, VSR tangents à Q_1 sont tangentes à la conique C_1 section par α du cône S_1 de sommet V circonscrit à Q_1; GF est une nouvelle tangente de C_1; or le triangle MFG est inscrit dans la conique C section de Q par α, de sorte qu'il existe ∞^1 triangles inscrits dans C et circonscrits à C_1 : chacun d'eux donne manifestement un tétraèdre dont V est sommet, les trois autres étant sur C, inscrit dans Q et circonscrit à Q_1; *on trouve ainsi* ∞^5 *tétraèdres*, puisque α et V dépendent chacun de deux paramètres et qu'il y a ∞^1 tétraèdres pour chaque couple α, V. (Je dois cette démonstration si simple à M. Charles H. Rowe.)

Écartons ce cas, ainsi que celui où Q et Q_1 seraient tangentes en un point (et un seul), ou auraient une génératrice commune; nous rapportons les deux quadriques à leur tétraèdre conjugué

Fig. 1.



commun, de sorte que les équations de Q et Q_1 soient

$$(Q) \qquad hx^2 + ky^2 + lz^2 + mt^2 = 0,$$

$$(Q_1) \qquad \frac{x^2}{h_1} + \frac{y^2}{k_1} + \frac{z^2}{l_1} + \frac{t^2}{m_1} = 0.$$

Les racines de l'équation en λ relative au faisceau $Q - \lambda Q_1 = 0$ sont $\lambda_1 = hh_1$, $\lambda_2 = kk_1$, $\lambda_3 = ll_1$, $\lambda_4 = mm_1$. Si l'on pose

$$(1) \qquad \begin{cases} H = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^2 - 4(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_4\lambda_2) - 4\lambda_1^2, \\ K = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^2 - 4(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_4\lambda_1) - 4\lambda_2^2, \\ L = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^2 - 4(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_4\lambda_1) - 4\lambda_3^2, \\ M = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^2 - 4(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) - 4\lambda_4^2, \end{cases}$$

j'ai démontré que le point A (x_0, y_0, z_0, t_0) de Q et la face α (BCD) tangente à Q_1, de coordonnées (u_0, v_0, w_0, h_0) sont liés par la relation

$$(2) \qquad H u_0 x_0 + K v_0 y_0 + L w_0 z_0 + M h_0 t_0 = 0,$$

et alors le cône C de sommet A, ayant pour base la section de Q par α est capable de ∞^1 trièdres circonscrits au cône C_1 de sommet A circonscrit à Q_1 ; *on trouve ainsi* ∞^4 *tétraèdres de l'espèce cherchée* (2 paramètres pour A par exemple, 1 pour α, 1 pour le choix du tétraèdre de sommet A et base dans α). La corrélation (2) a pour conséquence que, si α est donné, A se trouve dans le plan $\alpha_1(\mathrm{H}u_0, \mathrm{K}v_0, \mathrm{L}w_0, \mathrm{M}h_0)$; *la correspondance* (α, α_1) *est une homographie conservant le tétraèdre conjugué commun.* Si A est donné sur Q, le plan α passe constamment par le point $A_1(\mathrm{H}x_0, \mathrm{K}y_0, \mathrm{L}z_0, \mathrm{M}t_0)$ et *la correspondance* (A_1, A) *est la même homographie que précédemment la correspondance* (α, α_1).

Un cas particulier (1), qui sera important pour nous, correspond au cas $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4$ qui donne $\mathrm{H} = \mathrm{K} = -\mathrm{L} = -\mathrm{M}$, de sorte que la correspondance (α, α_1) ou (A_1, A) se réduit à *l'involution biaxiale dont les axes sont les arêtes opposées* S_1S_2, S_3S_4 *du tétraèdre conjugué commun à* Q *et* Q_1 (S_i *étant le sommet du cône correspondant à* λ_i). J'ai démontré tous ces résultats dans un Mémoire imprimé aux *Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. LI, 1934, p. 153-198). Nous n'aurons besoin de ces résultats que pour le cas de la biquadratique.

2. Cubique gauche et développable cubique. — La cubique Γ est représentée unicursalement au moyen d'un paramètre et nous choisissons *arbitrairement* deux polynomes fixes de degré 4 en t, $f_1(t)$ et $f_2(t)$. *Le tétraèdre défini par les racines de l'équation* $\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) = 0$, *où le rapport* $\lambda_1 : \lambda_2$ *varie, reste circonscrit à une développable* Δ *cubique*, car par chaque point A de Γ passent trois faces ABC, ACD, ADB (2); il est clair que la face BCD a ses coordonnées rationnelles par rapport au t de A, de sorte que A et BCD se correspondent dans une dualité où Γ et Δ s'échangent.

(1) On vérifie aisément que l'on a $\mathrm{H} + \mathrm{K} + \mathrm{L} + \mathrm{M} = 0$; or les relations qui expriment que A_1 et A coïncident sont $\frac{\mathrm{H}x_0}{x_0} = \frac{\mathrm{K}y_0}{y_0} = \frac{\mathrm{L}z_0}{z_0} = \frac{\mathrm{M}t_0}{t_0}$. Elles admettent la solution $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, t_0 quelconque; si un point autre qu'un sommet des tétraèdres conjugués est conservé, deux coordonnées x_0, y_0, par exemple, seront non nulles et alors $\mathrm{H} = \mathrm{K}$; dans ce cas une arête du tétraèdre est conservée; pour que l'arête opposée soit conservée aussi, il faut que $\mathrm{L} = \mathrm{M}$ et alors $\mathrm{H} + \mathrm{K} + \mathrm{L} + \mathrm{M} = 0$ entraîne $\mathrm{H} = \mathrm{K} = -\mathrm{L} = -\mathrm{M}$.

(2) Les arêtes des tétraèdres engendrent une surface réglée de degré 6, genre 1, ayant Γ pour ligne triple.

Supposons que le t de A soit calculé par l'équation de degré 6

$$(1) \qquad f_2 f'_1 - f_1 f'_2 = 0.$$

Pour ce point A particulier, B est confondu avec A et C et D sont deux points différents de A sur Γ; en étudiant, comme dégénérescence du tétraèdre général, ce tétraèdre spécial AACD, on voit que les deux faces ACD, BCD issues de CD et tangentes à Δ sont *confondues*, de sorte que CD est *génératrice de* Δ : *donc les* 12 *points où* Γ *perce* Δ *sont répartis en* 6 *couples de* 2 *points appartenant à une génératrice de* Δ; les plans AAC, AAD déterminés par la tangente en A à Γ et les points C, D sont les limites des plans ABC, ABD, donc tangents à Δ; *on voit que les* 12 *plans tangents à* Γ *et à* Δ *sont répartis en* 6 *couples de* 2 *plans se croisant suivant une tangente à* Γ : ce nouvel énoncé est celui qui se déduit du précédent par la corrélation qui échange Γ et Δ.

On peut remarquer qu'une cubique gauche Γ donnée *a priori* dépend de 12 paramètres, de même une développable cubique Δ; *le total* Γ, Δ *dépend donc de* 24 *paramètres et le couple* Γ, Δ *n'admet aucun tétraèdre de l'espèce en jeu*, car on a 4 inconnues (les t des sommets) liées par 8 équations (2 équations pour réaliser le contact de chaque face avec Δ). *Les couples spéciaux* Γ, Δ *obtenus à l'instant dépendent de* 18 *paramètres*; en effet, puisqu'un tel couple admet ∞^1 tétraèdres, si x est le nombre de paramètres nécessaires pour obtenir Γ, Δ, le nombre nécessaire pour obtenir Γ, Δ et *deux* tétraèdres est $x+2$; or ce dernier nombre peut être obtenu non pas en fixant Γ, puis Δ, puis les deux tétraèdres, mais en fixant Γ, puis les deux tétraèdres (ce qui donne f_1 et f_2, et Δ); on trouve ainsi

$$x+2 = 12+4+4 = 20, \qquad x = 18;$$

donc il a été nécessaire de lier par 6 relations les 24 paramètres du couple Γ, Δ général pour arriver au couple Γ, Δ spécial : nous avons obtenu l'interprétation géométrique de ces 6 relations. Nous avons de plus obtenu ce résultat important, à savoir *que si deux tétraèdres ont leurs sommets sur une même cubique, leurs* 8 *faces sont tangentes à une même développable cubique* (déterminée sans ambiguïté par trois faces du premier et trois faces du second ou quatre faces du premier et deux du second); si l'on marque 8 points sur une cubique gauche, il y a 35 systèmes de deux tétraèdres obtenus avec ces 8 points.

Il est intéressant de signaler le cas intermédiaire entre le cas général (24 paramètres) et le cas spécial (18 paramètres) ainsi obtenu. Choisissons un tétraèdre T (12 paramètres), une cubique Γ circonscrite (4 paramètres), une développable cubique Δ inscrite (4 paramètres) : *on obtient ainsi un système* Γ, Δ *dépendant de* 20 *paramètres, n'admettant que l'unique tétraèdre* T; il se trouve que ce nombre est effectivement la différence entre 24 et 4 : les 8 équations signalées plus haut entre 4 inconnues exigent donc 4 conditions de compatibilité [1].

3. **Tétraèdres inscrits dans une cubique gauche Γ et circonscrits à une quadrique Q_1.** — Duporcq a déjà esquissé l'étude de ces tétraèdres (*Nouvelles Annales*, 4e série, t. 2, 1902, p. 66); il démontre la proposition exacte (mais incomplète) : *trois tétraèdres inscrits à une même cubique gauche* Γ *sont circonscrits à une même quadrique* Q_1, *et il existe alors* ∞^2 *tétraèdres de cette espèce.*

En effet, dit Duporcq, si $f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0$ sont les équations en t de degré 4 définissant les sommets des trois tétraèdres T_1, T_2, T_3 en jeu, l'équation $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$ représente, si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ varient *ad libitum*, ∞^2 tétraèdres inscrits dans Γ et dont les faces

---

(1) Bien que le raisonnement du texte soit suffisant, car les 20 paramètres en jeu sont effectivement indépendants, il est bon de le confirmer par une autre voie; donnons-nous la cubique Γ (12 paramètres), un premier tétraèdre T (4), puis un plan arbitraire (2), issu d'un point fixe ω, coupant Γ en 3 points A, B, C; les développables Δ tangentes aux quatre faces du tétraèdre et au plan ABC dépendent encore de 2 paramètres; dans la série des ∞^2 développables obtenues il n'y a qu'une série ∞^1 qui admettent, avec Δ, ∞^1 tétraèdres; en effet, si par AB, par exemple, on mène un plan *arbitraire* (qui donne le paramètre unique de la série ∞^1 annoncée), il y a une développable Δ unique tangente aux 4 faces de T, au plan ABC et au nouveau plan issu de AB; ce plan perçant Γ en D, la développable Δ est tangente aussi aux faces BCD et CAD, d'après ce qui a été dit dans le texte; en retranchant de la série ∞^2 de développables trouvées la série ∞^1 qui vient d'être obtenue, il reste bien ∞^2 développables Δ n'ayant avec Γ qu'un tétraèdre de l'espèce cherchée. Chacun de ces systèmes Γ, Δ a bien fait intervenir successivement $12 + 4 + 2 + 2$ ou 20 paramètres.

enveloppent une quadrique car, par toute corde de C il passe seulement deux de ces faces. Duporcq a simplement oublié de faire remarquer que si les 12 faces forment, pour la détermination d'une quadrique, un système surabondant (de surabondance 3), déjà les 8 faces de T_1 et T_2 forment un système de surabondance 1 (toute quadrique tangente à 7 de ces faces est tangente à la huitième; si la quadrique est, de plus, obligée à toucher deux faces du troisième trièdre, elle touche automatiquement les deux restantes). Le lecteur a pu constater que je n'ai eu, en hommage à la mémoire du géomètre ingénieux qu'était Duporcq, qu'à reprendre mot pour mot le raisonnement de Duporcq relatif à l'équation à trois termes $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$ pour trouver le résultat relatif aux développables cubiques.

Il résulte de l'association des deux raisonnements que si une cubique Γ et une quadrique Q_1 admettent deux tétraèdres T_1 et T_2 de l'espèce en jeu, elles admettent nécessairement les ∞^1 tétraèdres relatifs à Γ et à la développable Δ correspondant à T_1 et T_2; mais admettent-elles simplement cette série ∞^1 ou admettent-elles effectivement une série ∞^2? *La réponse est que l'existence de deux tétraèdres déclenche l'existence de ∞^2 tétraèdres*, et c'est encore un résultat qui a échappé à Duporcq.

Soit une cubique gauche Γ que nous pouvons, par homographie, réduire à $(t, t^2, t^3, 1)$; considérons le cône S qui a pour sommet le point A de paramètre t sur Γ et pour directrice Γ, puis le cône S_1 circonscrit de A à Q_1; exprimons que S est capable d'un (et par suite de ∞^1) trièdres circonscrits à Q_1 : nous obtenons une équation en t, E, algébrique, d'un certain degré (dont nous allons *démontrer* qu'il est égal à 4); soient en effet A et B les points de Γ correspondant à deux racines de cette équation; menons par AB les deux plans tangents à Q_1 : ils sont tangents à S_1^A et S_1^B; ils recoupent Γ en C et D respectivement; d'après la définition de A, les deux plans ABC, ABD tangents à S_1^A menés par la génératrice AB de S^A fournissent un plan (AC, AD) tangent à S_1^A, donc à Q_1; pour la même raison le plan (BC, BD) est tangent à Q_1; donc le tétraèdre ABCD est inscrit dans Γ, circonscrit à Q_1, de sorte que C et D sont nécessairement aussi racines de l'équation E. S'il existe deux tétraèdres, nous avons vu qu'il en existe une infinité, *de sorte que l'équation* E *se réduit à une identité* :

mais alors le raisonnement qui vient d'être fait peut être appliqué à un point A *quelconque* de Γ et à un point B *quelconque* de Γ : la corde AB, qui dépend de 2 paramètres, donne un tétraèdre ABCD de l'espèce en jeu, *de sorte que l'existence de nos* ∞^2 *tétraèdres est assurée s'il existe deux tétraèdres*; le cas de ∞^1 tétraèdres ne peut donc exister.

Si l'on donne *a priori* une cubique Γ et une quadrique Q_1, on fait jouer $12 + 9$ ou 21 paramètres; si l'on donne un tétraèdre T, puis une cubique Γ circonscrite, puis une quadrique Q_1 inscrite, on fait jouer successivement $12 + 4 + 5$ ou 21 paramètres, *ce qui est le même total que précédemment* et donne une forte probabilité pour affirmer que le couple Γ, Q_1 obtenu à partir de T est le couple général : la démonstration rigoureuse s'obtient par comparaison avec le raisonnement qui suit.

De combien de paramètres dépend le couple Γ, Q_1 qui admet ∞^2 tétraèdres? On donne Γ (12 paramètres), 3 tétraèdres T_1, T_2, T_3 (12 paramètres nouveaux) : Q_1 se trouve complètement déterminée; le nombre 24 ainsi obtenu surpasse le nombre strict relatif à Γ et Q_1 de 2 unités nécessaires pour choisir T_1 dans la série ∞^2, de 2 unités pour T_2, de 2 unités pour T_3; on trouve donc 18; pour un tel couple Γ, Q_1 le système formé par Γ, Q_1 et *un* tétraèdre dépend de 20 paramètres : or nous avons trouvé avant des systèmes Γ, Q_1, T dépendant de 21 paramètres indépendants : il y a donc différence essentielle entre les deux résultats et nous avons ainsi la preuve complète que le couple Γ, Q_1 *général*, dépendant de 21 paramètres, conduit à une équation E, non identique, de degré 4 exactement. C'est ce qu'un calcul, assez long, mais sans difficulté (que jai indiqué dans le Mémoire déjà cité), prouve d'ailleurs.

Je signale divers paradoxes faciles à lever : partons d'une cubique Γ et de la développable cubique Δ qui admet avec Γ une série de ∞^1 tétraèdres; nous avons vu que le couple Γ, Δ dépend exactement de 18 paramètres; si nous inscrivons une quadrique Q_1 dans Δ, on obtient un système Γ, Δ, Q_1 dépendant de 20 arbitraires; ce nombre 20 est égal au nombre 18 strictement nécessaire pour Γ, Q_1 augmenté de 2, car il existe ∞^2 développables Δ circonscrites à Q_1 et admettant avec Γ une série de ∞^1 tétraèdres : il suffit en effet, en considérant l'équation $\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + \lambda_3 f_3(t) = 0$, de lier $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ par une relation linéaire *arbitraire* (et homogène).

Nous n'avons pas, non plus, dit ce qui arrive pour la développable Δ si l'équation $\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) = 0$ a une racine fixe, commune à f_1 et f_2; on écrit l'équation $(t-a)[\lambda_1 \varphi_1(t) + \lambda_2 \varphi_2(t)] = 0$, où φ_1 et φ_2 sont de degré 3; les plans correspondants aux solutions de $\varphi_1(t) = 0$ ou $\varphi_2(t) = 0$ se coupent suivant une droite δ et l'équation $\lambda_1 \varphi_1(t) + \lambda_2 \varphi_2(t) = 0$ correspond évidemment aux divers plans qui pivotent autour de δ; un tel plan donne une face BCD dont on joint les sommets au point fixe $A(t = a)$; il est clair que si l'on donne B, le plan δB est déterminé, donc C et D; les deux plans ABC, ABD étant les seuls à passer par AB, les faces passant par A enveloppent donc un cône de degré 2 de sommet A et, en utilisant le plan particulier δA, on voit que ce cône est tangent au plan δA, donc à la droite δ. De la sorte, si une cubique Γ et une développable cubique Δ admettent 2 tétraèdres ayant un sommet commun, Δ se décompose en une droite et un cône du second degré tangent à la droite, ayant son sommet au point commun aux 2 tétraèdres et Γ, Δ admettent ∞^1 tétraèdres. *De même si une cubique* Γ *et une quadrique* Q_1 *admettent deux tétraèdres ayant un sommet commun, l'équation* E *se réduit à une identité, et* Γ, Q_1 *admettent encore* ∞^2 *tétraèdres.*

La remarque qui vient d'être faite permet d'obtenir aisément les cônes circonscrits à Q_1 des divers points de Γ et les génératrices de Q_1, dans le système où la génératrice est dans un seul plan tangent à une développable Δ arbitraire (Δ étant obtenue en prenant deux tétraèdres relatifs à Γ et Q_1). On peut, en effet, remarquer que l'équation

$$(1)\qquad \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + \lambda_3 f_3(t) = 0$$

est équivalente au système

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 X + \lambda_2 Y + \lambda_3 Z = 0, \\ \dfrac{X}{f_1(t)} = \dfrac{Y}{f_2(t)} = \dfrac{Z}{f_3(t)}. \end{array}\right.$$

Ce système (2) peut être interprété ainsi : on coupe la quartique plane auxiliaire $\gamma[f_1(t), f_2(t), f_3(t)]$, tracée dans un plan (X, Y, Z) quelconque, par la droite de ce plan dont $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sont les coordonnées homogènes; les 4 paramètres t ainsi obtenus donnent sur Γ le tétraèdre général relatif à Γ et Q_1; si l'on assujettit la droite $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ à passer par un point fixe du plan (X, Y, Z), on obtient une développable Δ circonscrite à Q_1 et enveloppe des faces des ∞^1 tétraèdres correspondant individuellement à chaque droite tracée; si le point fixe est le point t_0 pris sur γ, la développable Δ se décompose en le cône circonscrit à Q_1 du point de Γ qui a pour paramètre t_0 et une génératrice de Q_1 qui n'admet avec chaque développable Δ' qu'un plan la contenant et tangent à Δ' (il suffit de marquer sur γ le point t_0 et de le joindre au point fixe f relatif à Δ' pour avoir la droite fournissant l'unique tétraèdre commun à Δ' et à la développable décomposée).

Appliquons le raisonnement qui précède à l'un des trois points doubles de γ; soient t_1, t_2 les valeurs de t fournissant ce point double et M_1, M_2 les points de Γ correspondant à t_1 et t_2; une droite issue du point double coupe γ en deux points t_3, t_4; on a ainsi un tétraèdre variable $M_1 M_2 M_3 M_4$ dont l'arête $M_1 M_2$ est fixe; donc $M_1 M_2$ *est génératrice de* Q_1; ici le cône de sommet M_1 se décompose donc en deux droites, dont l'une est $M_1 M_2$ et l'autre une droite $M_1 \mu_1$ issue de M_1; cette droite $M_1 \mu_1$ est l'enveloppe du plan $M_1 M_3 M_4$; de même on trouve une droite $M_2 \mu_2$ issue de M_2; les deux droites $M_1 \mu_1$, $M_2 \mu_2$ appartiennent au système de génératrices déjà signalées sur Q_1 (correspondant respectivement à M_2 et M_1), de sorte que $M_1 M_2$ est une génératrice de Q_1 du système opposé; en joignant le point double $(t_1 t_2)$ de γ au point image d'une développable Δ, on obtient un tétraèdre $M_1 M_2 M_3 M_4$ et par suite les *deux* plans $M_1 M_2 M_3$, $M_1 M_2 M_3$ issus à Δ de la droite $M_1 M_2$. Nous avons donc obtenu ce résultat : Γ *perce* Q_1 *en six points répartis en* 3 *couples de* 2 *points situés sur une génératrice de* Q_1; cet ensemble de 3 conditions (qui réduit à 18 le nombre de paramètres nécessaires pour obtenir Γ et Q_1) est *nécessaire*; il est *suffisant*; ce résultat découle au fond des décomptes déjà faits; mais on peut le voir aussi en utilisant la remarque de M. Rowe; car G′, G″, G‴ étant ces trois sécantes doubles de Γ, chaque quadrique Q′, Q″, Q‴ déterminée par Γ et un couple (G″, G‴), (G‴, G′), (G′, G″), coupe Q_1 suivant 4 droites; si donc on prend un plan α tangent, *quelconque*, à Q_1, coupant Γ en 3 points B, C, D, les plans tangents à Q_1 autres que α issus de BC, CD, DB se recoupent en un point A situé *simultanément* sur Q′, Q″, Q‴, donc sur Γ.

Je cite un dernier résultat signalé par Duporcq ; si nous considérons quatre tétraèdres T_1, T_2, T_3, T_4, nous avons en éliminant le tétraèdre T_i une quadrique Q_i ; *les quatre quadriques* Q_i *ont une génératrice commune (du système par lequel on peut mener à une développable* Δ *deux plans tangents).* En effet, Q_1 et Q_2, étant inscrites toutes deux dans la développable déterminée par Γ, T_3 et T_4, ont une génératrice commune G; un plan *quelconque* issu de G perce Γ en 3 points de paramètres t_1, t_2, t_3, de sorte que, ce plan étant tangent à Q_1 et à Q_2, on a pour Q_1 un tétraèdre (t_1, t_2, t_3, α), pour Q_2 un tétraèdre (t_1, t_2, t_3, β); on a donc deux identités en t :

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda_2 f_2(t)+\lambda_3 f_3(t)+\lambda_4 f_4(t)\equiv A(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-\alpha), \\ \mu_1 f_1(t)+\mu_3 f_3(t)+\mu_4 f_4(t)\equiv B(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-\beta), \end{cases}$$

où λ_2, λ_3, λ_4, μ_1, μ_3, μ_4 sont certaines constantes (dépendant de l'orientation du plan choisi autour de G); on en conclut aussitôt, par élimination de f_3 ou f_4,

$$(4)\quad \begin{cases} \mu_1\lambda_3 f_1(t)-\lambda_2\mu_3 f_2(t)+(\mu_4\lambda_3-\lambda_4\mu_3)f_4(t) \\ \quad\equiv (t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)[-\mu_3(t-\alpha)+\lambda_3(t-\beta)], \\ \mu_1\lambda_4 f_1(t)-\lambda_2\mu_4 f_2(t)+(\mu_3\lambda_4-\mu_4\lambda_3)f_3(t) \\ \quad\equiv (t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)[-\mu_4(t-\alpha)+\lambda_4(t-\beta)]. \end{cases}$$

Ceci prouve que le tétraèdre $\left(t_1, t_2, t_3, \dfrac{\lambda_3\beta-\mu_3\alpha}{\lambda_3-\mu_3}\right)$ est inscrit dans Γ et circonscrit à Q_3 *et comme le plan issu de* G *peut varier*, G *est une génératrice de* Q_3 ; *de même pour* Q_4. On peut remarquer que si l'on imagine la quartique gauche unicursale auxiliaire $\gamma'(f_1, f_2, f_3, f_4)$ nous avons utilisé les sécantes triples $g_1(t_1, t_2, t_3)$ de γ' et les plans projetant ces sécantes sur chaque face du tétraèdre de référence à partir du sommet opposé; de la sorte, u étant le paramètre qui individualise un plan arbitraire issu de G, les expressions λ_2, λ_3, λ_4, μ_1, μ_3, μ_4 sont des polynomes de degré 2 en u.

On peut écrire les équations (3) et (4) sous une forme plus simple, qui fait intervenir les coordonnées plüchériennes de la droite g, laquelle engendre une quadrique, comme l'on sait. On écrit au lieu de (3) et (4) les équations

$$(5)\quad \begin{cases} \star + p_{34} f_2(t) + p_{42} f_3(t) + p_{23} f_4(t) \equiv A(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-\alpha), \\ p_{34} f_1(t) + \star + p_{41} f_3(t) + p_{13} f_4(t) \equiv B(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-\beta), \\ p_{24} f_1(t) + p_{41} f_2(t) + \star + p_{12} f_4(t) \equiv C(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-\gamma), \\ p_{23} f_1(t) + p_{31} f_2(t) + p_{12} f_4(t) + \star \equiv D(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-\delta). \end{cases}$$

Les p_{ik} sont des polynomes du second degré en u, où u est le paramètre qui individualise le plan mené par G; les deux racines de p_{34} correspondent à chacun des deux plans passant par G et tangents à la développable (Γ, T_3, T_4). On remarquera que le rapport anharmonique sur Γ des quatre sommets α, β, γ, δ de ces quatre tétraèdres qui ont leur base dans le plan $G(u)$ est égal au rapport anharmonique des quatre plans passant par g et les sommets du tétraèdre de référence de l'espace auxiliaire (X, Y, Z, T).

Je donne une application élégante de la construction qui précède; nous allons résoudre le problème de géométrie plane suivant : *construire une quartique plane unicursale γ connaissant les valeurs (t_1, t'_1), (t_2, t'_2), (t_3, t'_3) du paramètre t correspondant aux trois points doubles de γ.* Nous prenons sur la cubique gauche $\Gamma(t, t^2, t^3, 1)$ les cordes $M_i M'_i$ joignant t_i et t'_i $(i = 1, 2, 3)$, la quadrique Q_1 déterminée par ces trois cordes admet avec Γ une série ∞^2 de tétraèdres; trois arbitrairement choisis donnent les trois polynomes $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ et la quartique plane γ dont ces polynomes représentent les coordonnées homogènes du point courant répond à la question. Remplacer les trois tétraèdres par trois autres revient à effectuer une transformation homographique sur γ. On sait d'ailleurs que γ dépend de 11 paramètres, a *trois* invariants relatifs au groupe des homographies; ces invariants sont par exemple $(t_1 t_2 t_3 t'_i)$ $(i = 1, 2, 3)$. On voit que l'on peut réaliser bien des dispositions diverses; la quadrique d'équation

$$C'(y - x^2) + B'(zx - y^2) + B'' xy = 0$$

conduit à une quartique n'ayant qu'un point double $(t = 0,\ t = \infty)$ comptant pour la réunion de trois points doubles. La quadrique d'équation

$$2B'(zx - y^2) + 2B''(xy - z) + A'' z^2 = 0$$

conduit à une quartique n'ayant qu'un point de rebroussement $(t = 0)$ comptant pour la réunion de trois points doubles.

Les développements précédents conduisent à une nouvelle génération géométrique de ces divers tétraèdres définis par les équations

$$\text{(I)} \qquad \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) = 0,$$

$$\text{(II)} \qquad \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + \lambda_3 f_3(t) = 0,$$

$$\text{(III)} \qquad \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + \lambda_3 f_3(t) + \lambda_4 f_4(t) = 0,$$

où les f_i sont des polynomes *donnés* de degré 4 en t, et les λ_i des paramètres *arbitraires* (définis à un facteur près).

Pour le premier type, les sommets décrivent Γ, les faces touchent la développable cubique Δ. Nous allons montrer qu'*il existe une quadrique* H *telle que tous les tétraèdres du type* (I) *soient tous conjugués par rapport à* H; *la dualité déjà indiquée, transformant le sommet* A *en la face opposée* BCD, *n'est autre que la polarité relativement à* H, *les points de* Γ *devenant les plans de* Δ.

Rappelons que si l'on donne *a priori* deux quadriques h, H *quelconques*, il n'existe aucun tétraèdre T inscrit dans h, conjugué à H; pourtant il y a 8 inconnues (2 pour chaque sommet de T qui est point de h) et six équations seulement. Rapportons h et H à leur tétraèdre conjugué commun, leurs équations sont alors

$$(h) \qquad hx^2 + ky^2 + lz^2 + mt^2 = 0,$$

$$(\mathrm{H}) \qquad \frac{x^2}{h_1} + \frac{y^2}{k_1} + \frac{z^2}{l_1} + \frac{t^2}{m_1} = 0.$$

Si l'on a $hh_1 + kk_1 + ll_1 + mm_1 = 0$, il y a ∞^3 tétraèdres inscrits dans h, conjugués à H; on prend un point A *arbitraire* sur h, le plan polaire α de A vis-à-vis de H coupe h suivant une conique σ harmoniquement circonscrite à la section Σ de H et donne ∞^1 tétraèdres ayant pour sommet commun A. Le système h, H dépend de 17 paramètres, le système T, h, H dépend de 20 paramètres.

Imaginons maintenant un tétraèdre T (12 paramètres), une cubique gauche Γ circonscrite (4 paramètres), une quadrique H conjuguée (3 paramètres). Γ *est circonscrite à* ∞^1 *tétraèdres conjugués à* H, *chaque point* A *de* Γ *étant sommet d'un tel tétraèdre, dont les* 3 *autres sommets* BCD *sont à l'intersection de* Γ *et du plan polaire* α *de* A *vis-à-vis de* H; en effet, il existe ∞^2 quadriques h circonscrites à Γ, donc à T; A est sur chaque quadrique h et le plan polaire α de A vis-à-vis de H donne comme sections des ∞^2 quadriques h *toutes* les coniques σ circonscrites au triangle BCD; *toutes* ces coniques étant harmoniquement circonscrites à la section Σ de H par α, BCD est nécessairement conjugué par rapport à Σ. (Démonstration : BCD, dans α, étant triangle de référence, les équations d'une conique σ et de la section Σ sont, ponctuellement et tangentiellement respectivement,

$$(\sigma) \qquad 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0,$$
$$(\Sigma) \qquad au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0.$$

On a, *quels que soient* B, B′, B″,

$$Bb + B'b' + B''b'' = 0,$$

donc $b = b' = b'' = 0$.) Considérons donc deux tétraèdres T_1, T_2 inscrits dans Γ, qui ont servi de base pour former l'équation (I) et trouver la développable cubique Δ; il existe une quadrique H et une seule conjuguée par rapport à T_1, pour laquelle le sommet A_2 de T_2 soit pôle du plan $B_2C_2D_2$; les équations obtenues sont linéaires aussi bien par rapport aux coefficients de l'équation ponctuelle que de l'équation tangentielle; d'après ce qui vient d'être dit, le tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$ est lui aussi conjugué ainsi que tous ceux de la famille déterminée par T_1 et T_2. Le système (Γ, Δ) ou (Γ, Δ, H) ou (Δ, H) ou (Γ, H) dépend de 18 paramètres; pour interpréter les 3 conditions nécessaires et suffisantes à établir entre Γ et H pour l'existence d'*un* (et par suite de ∞^1) tétraèdre de cette espèce, raisonnons sur l'un des 6 points a_i ($i = 1, \ldots, 6$), où Γ perce H; le plan polaire de a_1 coupe Γ en a_1, puis en deux autres points c_1, d_1; le tétraèdre dégénéré $a_1a_1c_1d_1$ fournit les résultats suivants : la tangente a_1t_1 à Γ en a_1 a pour conjuguée vis-à-vis de H une *sécante double* de Γ (ce qui fait déjà deux relations), et ensuite c_1d_1 sont conjuguées par rapport à H (c'est la troisième relation); les 3 relations obtenues ainsi pour a_1 sont *nécessaires et suffisantes*.

Pour appliquer ce qui précède au type (II), rappelons-nous que nous avons introduit la quartique plane $\gamma[f_1(t), f_2(t), f_3(t)]$ du plan π auxiliaire (X, Y, Z); chaque tétraèdre T correspond individuellement à une droite ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) de ce plan, les t des 4 sommets étant fournis par l'intersection de γ et de la droite

$$\lambda_1 X + \lambda_2 Y + \lambda_3 Z = 0;$$

les ∞^2 tétraèdres obtenus ont leurs faces tangentes à la quadrique Q_1 ; si l'on fixe le sommet A sur Γ, le plan BCD de la face opposée est assujetti à pivoter autour d'une génératrice g de Q_1, génératrice qui correspond homographiquement à A sur Γ; les deux paramètres en jeu sont donc la position de A sur Γ et l'orientation de la face BCD autour de g. Si la droite $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ du plan (π) pivote autour d'un point *fixe* $M(X_0, Y_0, Z_0)$ de ce plan, les ∞^1 tétraèdres correspondant aux ∞^1 droites issues de M enveloppent une développable cubique Δ et sont conjugués par rapport à une quadrique H : les points M du plan (π) et les quadriques H se correspondent ainsi *un à un*, il y a donc ∞^2 quadriques H, chacune ayant pour image un point de π; il est important de montrer que *ces quadriques* H *forment un système linéaire ponctuel :* en effet écrire que la droite g de Q_1 est dans le plan polaire (vis-à-vis de H) du point A qui correspond à g entraîne deux conditions linéaires par rapport aux coefficients de l'équation *ponctuelle* de H, l'ensemble des conditions en nombre infini que l'on obtient en prenant successivement tous les points de Γ se réduit, d'après ce qui précède, nécessairement à *sept* (1) (il suffira de choisir 4 points de Γ et on a 8 équations se réduisant à 7) : le système ainsi obtenu coïncide nécessairement avec le système H. Choisissons maintenant *arbitrairement* deux de ces quadriques, H_1 et H_2, les points images de π étant M_1 et M_2; pour un point lui-même *arbitraire* de Γ, soit A, *la droite intersection des plans polaires de* A *par rapport à* H_1 *et* H_2 *est nécessairement la droite g correspondante;* si nous considérons le faisceau ponctuel $\alpha H_1 + \beta H_2 = 0$, où $\alpha : \beta$ est une constante variable, chaque quadrique de ce faisceau est manifestement conjuguée au tétraèdre conjugué commun à H_1 et H_2, tétraèdre qui est précisément celui de notre système ∞^2 dont l'image est la droite M_1M_2; *la quadrique en question appartient à notre système ∞^2 et a pour image un point de la*

(1) La raison qui sert à faire comprendre la réduction à 7 de ces 8 équations est que le rapport anharmonique sur Γ des 4 points choisis est égal au rapport anharmonique sur Q_1 des 4 génératrices correspondantes.

droite M_1M_2. *De la sorte une droite* δ *de* π, *prise dans son ensemble, est l'image d'un tétraèdre* T; *si on la considère comme lieu d'un point mobile, elle devient l'image du système linéaire ponctuel de quadriques* H *conjuguées à un même tétraèdre* T.

Or, dans un faisceau ponctuel de quadriques, il en existe *quatre* qui se réduisent à un cône : ici, un point, de paramètre t_0 sur γ, commun à γ et δ, donne ∞^1 tétraèdres ABCD où le sommet A est fixe sur Γ; le *trièdre* A(BCD) a ses faces tangentes à Q_1 ou, si l'on préfère, au cône S_1 circonscrit à Q_1 du point A; ses arêtes sont génératrices du cône S qui a pour sommet A et pour directrice Γ; enfin elles sont deux à deux conjuguées par rapport à un troisième cône C, qui est le cône du faisceau linéaire (H_1, H_2) qui a son sommet en A sur le tétraèdre T d'image δ : par polarité relative à C les cônes S et S_1 s'échangent. Nous devons encore faire quelques remarques : le fait que dans le faisceau $\alpha H_1 + \beta H_2 = 0$, d'image M_1M_2, il y a quatre cônes et quatre seulement, prouve que la biquadratique (H_1, H_2) est indécomposée et sans point double. Le système H a son équation ponctuelle réductible à la forme $\alpha H_1 + \beta H_2 + \gamma H_3 = 0$, de sorte que l'équation tangentielle est de la forme

$$0 = \alpha^3 \overline{H}_1 + \beta^3 \overline{H}_2 + \gamma^3 \overline{H}_3 + \beta^2\gamma K_{23} + \beta\gamma^2 L_{23} + \ldots + \alpha\beta\gamma H_{123},$$

où $\overline{H}_1$, $\overline{H}_2$, $\overline{H}_3$ sont les premiers membres des équations tangentielles des quadriques H_1, H_2, H_3; K_{23}, L_{23}, égalées à zéro, donnent les équations tangentielles des quadriques enveloppes des plans coupant l'une des quadriques H_2 ou H_3 suivant une conique harmoniquement inscrite ou circonscrite à la section de l'autre quadrique; H_{123} a une définition un peu plus compliquée. Or, *toutes* les quadriques $\alpha H_1 + \beta H_2 + \gamma H_3 = 0$ sont harmoniquement inscrites dans *toutes* les quadriques contenant Γ; il en résulte que les 7 nouvelles quadriques $K_{23}, L_{23}, \ldots, H_{123}$ sont aussi harmoniquement inscrites dans les quadriques contenant Γ, les formes $\overline{H}_1$, $\overline{H}_2$, $\overline{H}_3$, H_{123}, K_{23}, L_{23}, ..., au nombre de *dix* se réduisent à *sept* linéairement distinctes. D'autre part, quand on choisit trois quadriques *au hasard*, d'équation ponctuelle $H_1 = 0$, $H_2 = 0$, $H_3 = 0$, le lieu des points A de l'espace tels que leurs plans polaires α_1, α_2, α_3 vis-à-vis de H_1, H_2, H_3 concourent suivant une droite, est défini par l'ensemble des deux équations

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial H_1}{dx} & \dfrac{\partial H_1}{\partial y} & \dfrac{\partial H_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial H_2}{dx} & \dfrac{\partial H_2}{\partial y} & \dfrac{\partial H_2}{dz} \\ \dfrac{\partial H_3}{\partial x} & \dfrac{\partial H_3}{\partial y} & \dfrac{\partial H_3}{\partial z} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial H_2}{\partial x} & \dfrac{\partial H_1}{\partial y} & \dfrac{\partial H_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial x} & \dfrac{\partial H_2}{\partial y} & \dfrac{\partial H_2}{\partial t} \\ \dfrac{\partial H_3}{\partial x} & \dfrac{\partial H_3}{\partial y} & \dfrac{\partial H_3}{\partial t} \end{vmatrix} = 0$$

qui définissent une courbe de degré 9, *décomposée en le lieu véritable de degré* 6 et la courbe *parasite*

$$\frac{\dfrac{\partial H_1}{\partial y}}{\dfrac{\partial H_1}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial H_2}{\partial y}}{\dfrac{\partial H_2}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial H_3}{\partial y}}{\dfrac{\partial H_3}{\partial x}}$$

qui est de degré 3. Ici, d'après la construction des quadriques H_1, H_2, H_3, la courbe de degré 6 du cas général comprend la cubique Γ comme morceau de décomposition. Il y aurait intérêt à voir ce qu'est l'autre morceau de décomposition.

Il reste maintenant à examiner les tétraèdres du type (III) dont nous n'avons indiqué que les résultats dus à Duporcq. On pourrait recommencer ce qui a été dit pour le type (II). Ici on a une quartique unicursale gauche γ,

$$\gamma[f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)],$$

de l'espace auxiliaire (X, Y, Z, T); à un plan *donné* de coordonnées tangentielles $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ dans cet espace (E) correspond un tétraèdre T unique de notre série ∞^3; à un point *fixe* $M(X_0, Y_0, Z_0\ T_0)$ de E, considéré comme enveloppe de ∞^2 plans, correspond une quadrique Q_1 à laquelle restent tangentes les faces de la série ∞^2 de tétraèdres correspondant un à un aux plans issus de M; si le point M est non pas quelconque mais pris sur γ, la quadrique Q_1, du cas général se décompose en le point A de Γ qui a même paramètre que M sur γ, et en un point complémentaire *a* : en effet le sommet A de T étant donné, on peut choisir *arbitrairement* deux autres sommets B, C sur Γ pour déterminer λ_1, λ_2, λ_3, λ_4; de la sorte on trouve une série ∞^2 de faces telles que ABC qui sont finalement les ∞^2 plans issus de A; la face opposée BCD doit donc envelopper un point (A étant donné, B et C étant ensuite choisis, la face BCD est complètement déterminée, donc enveloppe bien un point). Quand A varie sur Γ, le point a engendre un certain lieu G dont nous allons montrer que c'est une droite (celle de Duporcq). En tout cas, quelle que soit la nature de ce lieu, si l'on a construit ce lieu et indiqué pour chaque point A de Γ la position de a, on retrouve nos 3 paramètres ainsi, on prend A (1 paramètre), puis un plan arbitraire (2 paramètres) autour de a. Pour trouver a il suffit soit de trouver 3 plans qui se croisent en a, soit deux droites qui s'y croisent. Il y a dans E ∞^4 droites qui peuvent chacune être considérées comme enveloppe de ∞^1 plans, donc image d'une développable cubique Δ ou d'une quadrique H (car on a extrait alors de notre série ∞^3 de tétraèdres une série ∞^1); il existe donc ∞^4 quadriques H et le plan polaire α de A vis-à-vis de l'une quelconque passe en a; ce résultat prouve comme plus haut que les ∞^4 quadriques H forment un système linéaire *ponctuel*, défini par 5 *quelconques* d'entre elles: H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 [1].

Il y a dans E ∞^3 points M dont chacun est l'image d'une quadrique Q_4; pour l'une, *choisie*, de ces quadriques, chaque point A

---

[1] Quand on trace au hasard 5 quadriques H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 dans un espace vierge, le lieu des points A dont les plans polaires concourent en un point a est défini par deux équations telles que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} & \frac{\partial H_1}{\partial y} & \frac{\partial H_1}{\partial z} & \frac{\partial H}{\partial t} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} & \frac{\partial H_2}{\partial y} & \frac{\partial H_2}{\partial z} & \frac{\partial H_2}{\partial t} \\ \frac{\partial H_3}{\partial x} & \frac{\partial H_3}{\partial y} & \frac{\partial H_3}{\partial z} & \frac{\partial H_3}{\partial t} \\ \frac{\partial H_4}{\partial x} & \frac{\partial H_4}{\partial y} & \frac{\partial H_4}{\partial z} & \frac{\partial H_4}{\partial t} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} & \frac{\partial H_1}{\partial y} & \frac{\partial H_1}{\partial z} & \frac{\partial H_1}{\partial t} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} & \frac{\partial H_2}{\partial y} & \frac{\partial H_2}{\partial z} & \frac{\partial H_2}{\partial t} \\ \frac{\partial H_3}{\partial x} & \frac{\partial H_3}{\partial y} & \frac{\partial H_3}{\partial z} & \frac{\partial H_3}{\partial t} \\ \frac{\partial H_5}{\partial x} & \frac{\partial H_5}{\partial y} & \frac{\partial H_5}{\partial z} & \frac{\partial H_5}{\partial t} \end{vmatrix} = 0,$$

dont il faut retrancher la courbe (déjà rencontrée, de degré 9) obtenue en annulant les déterminants extraits des 3 premières lignes. On a ainsi un lieu de degré 16-9 ou 7, qui est en même temps lieu des A et des a. Dans notre question le lieu se décompose; on a un premier lieu qui est la cubique Γ associée à la droite G lieu de a; le lieu se complète donc par une cubique gauche, portant les couples A, a qui se correspondent. On voit qu'il y a là une série de problèmes intéressants. Si l'on prend 6 quadriques, les points A dont les plans polaires se coupent en un point a sont définis par 3 équations (les deux déjà écrites et une troisième où l'indice 4 ou 5 est remplacé par 6); on a trois surfaces de degré 4 ayant en commun la courbe gauche de degré 9 déjà signalée et éliminée.

de Γ a une génératrice g qui lui correspond, le plan BCD pivotant autour de g, quand A reste fixe : mais BCD passe par a, *donc a est sur* G *ou, si l'on préfère,* G *passe par a.* Nous avons donc ce résultat fondamental : *il existe ∞^3 quadriques* Q_1 *pour le type* III *et les droites g en nombre ∞^3, correspondant à un point donné* A *de* Γ *se croisent toutes en a*; or à deux points M, M′ de E correspondent deux quadriques Q_1, Q'_1 circonscrites à la développable Δ dont MM′ est l'image (cette fois la droite est considérée comme lieu de points [1])] donc ayant une génératrice G commune (d'espèce opposée à g et g') : G *passe donc au point a; la variation de* A *sur* Γ *pendant que* M, M′ *restent fixes, montre que* G *est le lieu du point a; les ∞^3 quadriques* Q_1 *ont toutes en commun la droite* G; *sur* Γ *et* G *les points* A, *a se correspondent homographiquement.* On remarquera que *les ∞^3 quadriques* Q_1 *trouvées pour le type* III *forment un système linéaire tangentiel*; en effet elles sont harmoniquement inscrites à H_1, H_2, H_3, H_4, H_5; on a aussi 5 équations linéaires par rapport aux coefficients de l'équation tangentielle de Q_1; de plus Q_1 doit contenir la droite G, ce qui se traduit par des relations linéaires encore par rapport aux coefficients de l'équation tangentielle (en nombre 3, dont la réunion avec les 5 précédentes ne conduit qu'à 6 relations distinctes). Duporcq avait signalé la droite G, sans remarquer qu'elle était commune aux ∞^3 quadriques Q_1; pourtant, ayant remarqué qu'elle était commune à 4 d'entre elles, *choisies arbitrairement*, le reste devait s'ensuivre. Mais je dois toujours, en hommage à la mémoire de Duporcq, signaler que l'on ne peut perfectionner que ce qui existe déjà : sans les résultats de Duporcq, j'aurais sans doute oublié de constater l'existence de ceux que j'indique ici.

Je signale enfin un paradoxe relatif au type II : nous avons signalé les ∞^1 tétraèdres ayant en commun l'arête M_1M_2 obtenue pour un point double de la quartique auxiliaire γ; dans ces tétraèdres l'arête M_3M_4 est astreinte à 3 conditions : 1° couper Γ (et même

---

[1] Si dans un plan fixe Π de E, on marque un point fixe aussi M, les ∞^1 droites issues de M dans Π fournissent chacune une développable cubique : les ∞^1 développables sont circonscrites à la quadrique Q_1, qui a M pour image; chaque droite issue de M dans le plan π donne aussi une quadrique H; les ∞^1 quadriques H forment un faisceau linéaire ponctuel.

deux fois); 2° conper $M_1\mu_1$; 3° couper $M_2\mu_2$; elle engendre la quadrique Q déterminée par Γ et les deux génératrices G'', G''' de Q_1 qui sont sécantes doubles de Γ; *or la droite* M_1M_2 *satisfait aux* 3 *conditions et pourtant n'appartient pas à* Q; c'est le paradoxe : il faut montrer que les 3 conditions définissent *d'abord* ∞^1 génératrices de Q, *puis* l'unique droite M_1M_2. C'est très facile, si l'on fait abstraction pour la première condition de l'obligation de couper Γ en *deux* points; les droites assujetties à couper Γ, $M_1\mu_1$, $M_2\mu_2$ forment 3 séries : les quadriques Q, puis les droites, issues de M_1 et s'appuyant sur $M_2\mu_2$, puis les droites analogues relatives à M_2 et $M_1\mu_1$. Les droites de la première série se trouvent être sécantes *doubles* de Γ; les droites de la seconde ou troisième série sont sécantes *simples*, sauf M_1M_2 qui est commune à ces deux séries, sans appartenir à la première.

4. Tétraèdres inscrits dans une biquadratique $\mathcal{B}$ et circonscrits à une développable de classe 4 et genre 1 : première solution. — Nous allons dans cette question rencontrer des circonstances différentes, nous donnant divers types de solutions que nous construirons synthétiquement, sans avoir décidé si ces solutions sont les seules.

Une biquadratique $\mathcal{B}$, supposée indécomposable et sans point double, peut, par homographie, être réduite à la courbe $(p, p', p'', 1)$, où pu est la fonction bien connue de Weierstrass. Imaginons une droite δ quelconque et le faisceau de plans issus de δ, d'équation

$$(1) \qquad \lambda_1(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1) + \lambda_2(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2) = 0,$$

de sorte que α_i, β_i, γ_i, δ_i sont donnés ($i = 1, 2$) et que $\lambda_1 : \lambda_2$ est variable. L'équation, où a est une constante,

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\lambda_1[\alpha_1 p(u-a) + \beta_1 p'(u-a) + \gamma_1 p''(u-a) + \delta_1] \\ &+ \lambda_2[\alpha_2 p(u-a) + \beta_2 p'(u-a) + \gamma_2 p''(u-a) + \delta_2] = 0, \end{aligned}$$

définit sur $\mathcal{B}$ un quadruple de points A, B, C, D dont la somme des arguments vaut $4a$: on suppose donc que $4a$ n'est pas une période (2ω ou $2\omega'$) de façon que les points A, B, C, D ne soient pas coplanaires. *Les faces du tétraèdre* ABCD *enveloppent une développable* Δ *de classe* 4 *et genre* 1 *: chaque point* A *de* $\mathcal{B}$

détermine un seul tétraèdre ABCD *ayant* A *pour sommet et un seul tétraèdre* A'B'C'D' *dont la face* B'C'D' *passe par* A. Le premier point est évident; quant au point A', il a pour argument $u' = u + 4a$, u étant celui de A. L'équation de la face BCD s'obtient *rationnellement* au moyen des coordonnées de A, *mais la correspondance ainsi obtenue n'est pas une dualité; elle est simplement birationnelle de* $\mathcal{B}$ *à* Δ; les arêtes de ces tétraèdres engendrent une surface réglée R de degré 10 ayant $\mathcal{B}$ pour ligne triple; pour obtenir ce dernier résultat, il suffit de chercher le nombre de génératrices qui croisent une génératrice donnée; une génératrice G donnée porte deux points singuliers, qui sont ceux où elle perce $\mathcal{B}$ et où elle est rencontrée par deux génératrices de R; si u_1, u_2 sont les arguments de ces deux points, et si u, v sont ceux des points analogues pour la génératrice G' qui rencontre G, on a

$$(3) \qquad u_1 + u_2 + u + v = 0 \qquad \text{ou} \qquad v = -(u_1 + u_2 + u),$$

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 p(u-a) + \ldots + \delta_1 & \alpha_1 p(-u_1 - u_2 - u - a) + \ldots + \delta_1 \\ \alpha_2 p(u-a) + \ldots + \delta_2 & \alpha_2 p(-u_1 - u_2 - u - a) + \ldots + \delta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

On doit pour l'équation (4), qui donne huit valeurs de u, éliminer celles pour lesquelles on a $u = -u_1 - u_2 - u$, qui sont au nombre de quatre; donc G est rencontrée par un total de $2 + 2 + 4$ ou 8 génératrices; R est donc de degré 10.

On peut dire que, pour obtenir un tétraèdre T, on a égalé à une constante variable la fonction

$$(5) \qquad \frac{\alpha_1 p(u-a) + \beta_1 p'(u-a) + \gamma_1 p''(u-a) + \delta_1}{\alpha_2 p(u-a) + \beta_2 p'(u-a) + \gamma_2 p''(u-a) + \delta_2}.$$

La dérivée de cette expression, égalée à zéro, a 8 racines [dans un parallélogramme des périodes, la fraction (5) a 4 pôles simples, donc sa dérivée a 4 pôles doubles]. Si A est le point de $\mathcal{B}$ correspondant à l'une des 8 racines, le tétraèdre ABCD correspondant a un sommet B confondu avec A, de sorte que le raisonnement analogue fait pour les tétraèdres relatifs à une cubique gauche nous montre que la corde CD correspondante est une génératrice de Δ, tandis que la tangente en A à $\mathcal{B}$ est l'intersection de deux plans tangents à la fois à $\mathcal{B}$ et à Δ; $\mathcal{B}$ est de classe 8, la développable Δ de degré 8; $\mathcal{B}$ et Δ ont 32 intersections, 32 plans tangents communs; *sur les* 32 *intersections de* $\mathcal{B}$ *et* Δ, *il y en a donc déjà*

16 *situées, par couples de* 2, *sur* 8 *génératrices de* Δ, *les* 16 *autres se réduisent à* 8 *points de contact de* $\mathcal{B}$ *avec* Δ. En effet, si nous prenons une de ces nouvelles intersections, cela nous donne un point A, pour lequel le plan $B'C'D'$ précédemment cité doit coïncider avec l'une des faces ABC, ACD, ADB; supposons que $B'C'D'$ coïncide avec ABC; les systèmes de trois points (B', C', D'), (A, B, C) forment un groupe de 6 points, si les deux systèmes sont totalement distincts, ces 6 points seraient sur $\mathcal{B}$ d'une part, dans un même plan de l'autre; il y a donc impossibilité. Supposons que A coïncide avec D' : alors comme il n'y a qu'un tétraèdre ayant A (ou D') pour sommet et que A et A' sont distincts (car leurs arguments diffèrent de $4a$), B coïncide avec B', C avec C' et le plan $B'C'D'$ recoupe $\mathcal{B}$ en un nouveau point A coïncidant avec D', de sorte que la tangente en A à $\mathcal{B}$ est dans le plan $B'C'D'$ tangent en A à Δ, donc $\mathcal{B}$ est tangente en A à Δ; si l'on suppose que c'est B qui coïncide avec B' (A pouvant n'être pas en coïncidence avec un point du groupe B', C', D'), comme il n'y a qu'un tétraèdre de sommet B et que les arêtes issues de B (ou B') se réduisent à BA, BC, BD (ou BA' distincte de BA, $B'C'$, $B'D'$), il faut que BA coïncide avec BC' ou BD', donc A coïncide avec C' ou D', et l'on retombe sur ce qui précède : *la proposition est donc établie*. Le même procédé prouverait aussi que *les* 16 *plans tangents simultanément à* $\mathcal{B}$ *et* Δ, *autres que les* 8 *couples déjà signalés, doivent se réduire à* 8 *seulement, dont chacun compte pour deux;* autrement dit huit tangentes de $\mathcal{B}$ sont tangentes à Δ; mais alors nous retombons sur les huit intersections doubles de $\mathcal{B}$ et Δ; cela prouve simplement que l'on peut substituer à chaque propriété géométrique la propriété corrélative; en effet une polarité transforme un tétraèdre de l'espèce indiquée en un autre dont les faces sont tangentes à une développable $\overline{\mathcal{B}}$ de classe 4 transformée de $\mathcal{B}$ et dont les sommets sont sur une biquadratique $\overline{\Delta}$ transformée de Δ; de la sorte les 16 intersections réparties sur 8 génératrices de Δ conduisent aux 16 plans tangents répartis en 8 couples se croisant suivant une tangente de $\mathcal{B}$.

Nous avons ainsi obtenu des résultats qui généralisent de façon très simple ceux trouvés pour une cubique et une développable cubique. Essayons de même quelques décomptes : *le couple général* $\mathcal{B}$, Δ *dépend de* 32 *paramètres et n'admet aucun* *tétraèdre.* Si l'on part d'un tétraèdre T (12 paramètres), d'une biquadratique $\mathcal{B}$ circonscrite (8 paramètres), d'une développable Δ inscrite (8 paramètres), *on trouve un couple* $\mathcal{B}$, Δ *ne dépendant que de* 28 *paramètres et n'admettant que l'unique tétraèdre* T. Si l'on prend deux tétraèdres T_1, T_2 *quelconques*, leur ensemble, qui dépend de 24 paramètres, détermine une seule courbe $\mathcal{B}$, une seule développable Δ et *le couple* $\mathcal{B}$, Δ *ainsi obtenu dépend de* 24 *paramètres et admet uniquement les deux tétraèdres* T_1, T_2. Les couples $\mathcal{B}$, Δ obtenus dans l'étude qui précède dépendent des 16 paramètres de $\mathcal{B}$, des 4 paramètres qui fixent la droite auxiliaire δ, puis de la constante a; *on a ainsi un couple* $\mathcal{B}$, Δ *dépendant de* 21 *paramètres, au lieu de* 32, 28, 24 *comme le couple général ou les couples à* 1 *et* 2 *tétraèdres.* Les 16 conditions, que nous avons obtenues comme interprétation géométrique, se réduisent à 11 conditions analytiques.

Ayant obtenu le couple $\mathcal{B}$, Δ qui précède, nous pouvons inscrire dans Δ une infinité simple de quadriques Q_1; $\mathcal{B}$ et Q_1 admettent, comme tétraèdres inscrits dans $\mathcal{B}$ et circonscrits à Q_1, la série des ∞^1 tétraèdres relatifs à $\mathcal{B}$ et Δ; ici encore nous pouvons nous poser la question : $\mathcal{B}$ et Q_1 admettent-ils simplement ces ∞^1 tétraèdres, ou bien admettent-ils ∞^2 tétraèdres? Il est clair que $\mathcal{B}$ et Q_1 ne peuvent admettre plus de ∞^2 tétraèdres, car *deux* points arbitraires A et B étant choisis sur $\mathcal{B}$, on peut mener à Q_1 deux plans tangents et deux seulement par AB, recoupant $\mathcal{B}$, l'un en C et C_1, l'autre en D et D_1 : les quatre combinaisons seules possibles CD, CD_1, C_1D, C_1D_1 fournissent avec AB quatre tétraèdres dont il reste à voir si les faces issues de C_iD_j ($i = 0$ ou 1, $j = 0$ ou 1) sont ou non tangentes à Q_1. L'ensemble $\mathcal{B}$, Δ, Q_1 dépend de 22 paramètres; si, effectivement, $\mathcal{B}$ et Q_1 n'admettent que ∞^1 tétraèdres, le couple $\mathcal{B}$, Q_1 dépend lui aussi de 22 paramètres; mais si $\mathcal{B}$, Q_1 admettent ∞^2 tétraèdres, le nombre de paramètres dont $\mathcal{B}$ et Q_1, dans leur ensemble, dépendent, est égal à $22-p$, où p est un certain entier positif non nul. Une autre question se pose : quatre points u_1, u_2, u_3, u_4 de $\mathcal{B}$ déterminent un tétraèdre T_1; quatre autres points v_1, v_2, v_3, v_4 tels que $\Sigma v_i = \Sigma u_j$ déterminent un autre tétraèdre T_2; les 8 faces de T_1 et T_2 déterminent une seule développable de l'espèce indiquée ici, mais nous verrons que pour $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \omega$ ou ω' ou $\omega + \omega'$, les 8 faces sont 8 plans associés, c'est-à-dire tels que toutes les quadriques tangentes à 7 d'entre elles sont tangentes à la huitième; si $u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ n'est pas égale à une de ces valeurs, les 8 faces déterminent-elles une seule développable ou bien déterminent-elles ∞^2 développables (dont une seule rentre dans notre construction)? Ce sont des questions qui restent à résoudre.

J'indique d'ailleurs une raison qui semble prouver que le couple $\mathcal{B}$, Q_1 n'admet que ∞^1 tétraèdres et que les 8 faces T_1 et T_2 (quand $\Sigma u_i = \Sigma v_j$ diffère de ω, ω' ou $\omega + \omega'$) déterminent une seule développable de classe 4. Considérons l'équation

$$(6)\quad \begin{aligned} &\lambda_1[\alpha_1 p(u-a) + \beta_1 p'(u-a) + \gamma_1 p''(u-a) + \delta_1] \\ &+ \lambda_2[\alpha_2 p(u-a) + \ldots] + \lambda_3[\alpha_3 p(u-a) + \ldots + \delta_3] = 0, \end{aligned}$$

analogue à (2); *on obtient, en faisant varier* λ_1, λ_2, λ_3 ad libitum ∞^2 *tétraèdres dont les faces enveloppent cette fois une surface irréductible de classe* 4; en effet une corde AB de $\mathcal{B}$ est arête d'un seul tétraèdre et donne ainsi deux plans ABC, ABD; ensuite, prenant le point A′ dont l'argument surpasse de $4a$ celui de A, la corde A′B est arête d'un tétraèdre $A'BC_1D_1$ dont la face BC_1D_1 passe par A, donc par AB; de même le point B′, analogue à A′, donne une nouvelle face passant par AB, sans que AB soit arête. On a, cette fois, un résultat distinct de celui trouvé pour une cubique et une développable cubique.

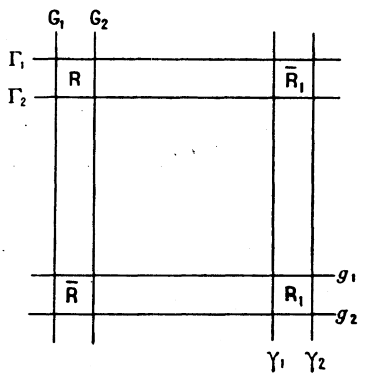
On peut remarquer que donner *a priori* un tétraèdre T (12 paramètres), une biquadratique $\mathcal{B}$ circonscrite (8 paramètres), une quadrique Q_1 inscrite (5 paramètres) fournit un total T, $\mathcal{B}$, Q_1 dépendant de 25 paramètres; donner *a priori* deux tétraèdres T_1, T_2 (24 paramètres), *quelconques*, détermine une biquadratique $\mathcal{B}$ *unique* (on peut donner d'abord $\mathcal{B}$, 16 paramètres, puis deux tétraèdres *quelconques* T_1, T_2 inscrits dans $\mathcal{B}$; on retrouve le total 24); il y a ensuite ∞^1 quadriques inscrites dans T_1 et T_2, de sorte que le système T_1, T_2, $\mathcal{B}$, Q_1 dépend encore de 25 paramètres, tout comme le couple *général* $\mathcal{B}$, Q_1 ($16 + 9 = 25$); de la sorte il y a une très forte probabilité pour que le couple *général* $\mathcal{B}$, Q_1 admette un nombre fini de tétraèdres (ce nombre fini étant au moins égal à 2).

5. Tétraèdres inscrits dans une biquadratique $\mathcal{B}$ et circonscrits

à une développable de classe 4 et genre 1 : deuxième solution. — Nous construisons, encore synthétiquement, une autre solution.

Je me sers de résultats que j'ai obtenus dans mon Mémoire sur les transformations homographiques qui conservent une biquadratique (*Journ. de Math.*, t. **12**, 1933, p. 309-336). Je donne ici toutes les explications nécessaires au lecteur. La courbe $\mathcal{B}$ étant donnée, choisissons arbitrairement une quadrique Q contenant $\mathcal{B}$;

Fig. 2.



il existe *trois* quadriques contenant aussi $\mathcal{B}$, telles que, Q′ étant l'une, la courbe $\mathcal{B}$ possède ∞^1 quadrilatères gauches R inscrits dans $\mathcal{B}$, dont les côtés appartiennent alternativement à l'une (fixée) des semi-quadriques portées par Q et à l'une (fixée également) des semi-quadriques portées par Q′; il existe aussi ∞^1 quadrilatères gauches R_1 de même définition, relatifs aux semi-quadriques complémentaires des précédentes; ayant choisi arbitrairement *un* quadrilatère R, *un* quadrilatère R_1, l'ensemble de leurs 8 côtés est manifestement situé sur une quadrique Q_1, comme le montre la figure schématique 2, où G_1, G_2, g_1, g_2 sont génératrices de Q, Γ_1, Γ_2, γ_1, γ_2 de Q′; G_1, G_2, γ_1, γ_2 sont quatre droites sécantes, chacune, à chacune des quatre droites Γ_1, Γ_2, g_1, g_2 d'après la définition de R, R_1 ou les propriétés des génératrices de système opposé d'une quadrique ([1]). La quadrique Q_1 coupe Q suivant G_1,

([1]) La figure 2 est celle que l'on obtient par perspective à partir d'un point

G_2, g_1, g_2 et Q' suivant Γ_1, Γ_2, γ_1, γ_2; réciproquement, si une quadrique Q_1 coupe Q et Q' suivant quatre génératrices, on reconstitue la figure 1 et les deux quadrilatères R, R_1 inscrits dans la courbe $\mathcal{B}$ commune à Q, Q'. On remarque que les génératrices de Q du système G_1 donnent sur $\mathcal{B}$ une relation $u_1 + u_2 = h$, où h est constant, tandis que sur Q' les génératrices du système Γ_1 donnent une relation $u_1 + v_1 = k$, où k est constant; de la sorte les quatre sommets de R donnent une somme d'arguments égale à $2h$ (si l'on prend G_1 et G_2) ou $2k$ (si l'on prend Γ_1 et Γ_2); donc $2h = 2k$, de sorte que k vaut $h + \omega$, $h + \omega'$ ou $h + \omega + \omega'$, et réciproquement. On voit aussi pourquoi on a 3 quadriques Q' suivant que l'on adopte pour k soit $h + \omega$, soit $h + \omega'$, soit $h + \omega + \omega'$. Si l'on supposait de plus $k = -h$, c'est-à-dire en supposant $k = h + \omega$, $2h = -\omega$ (à un multiple près des périodes), ce qui revient à prendre h égal à $-\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega}{2}$, $-\frac{\omega}{2} + \omega'$, $\frac{\omega}{2} - \omega'$, on n'obtiendrait pour Q et Q' que l'une ou l'autre de deux quadriques remarquables q $\left(\text{portant les semi-quadriques } \pm \frac{\omega}{2}\right)$, q' $\left(\text{portant les semi-quadriques } \pm \frac{\omega}{2} \mp \omega'\right)$ qui jouent un grand rôle dans les transformations homographiques de $\mathcal{B}$ en elle-même; le couple (Q, Q') est *conjugué* par rapport aux quadriques (q, q'), c'est-à-dire qu'en un point quelconque de $\mathcal{B}$ les plans tangents à ces 4 quadriques se divisent harmoniquement; de plus il y a une involution biaxiale admettant pour axes deux génératrices d'une semi-quadrique q et échangeant $\mathcal{B}$ avec elle-même. Ici nous supposons Q distincte de q ou q', de façon que Q' ne coïncide pas avec q; on constate d'autre part que λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 étant les racines de l'équation en λ relative au faisceau $Q - \lambda Q' = 0$, on a, comme condition nécessaire et suffisante, $\lambda_i\lambda_j - \lambda_k\lambda_l = 0$, i, j, k, l étant les quatre racines dans un certain ordre, et ceci montre l'existence des 3 séries.

Ainsi $\mathcal{B}$ dépend de 16 paramètres, Q d'un paramètre nouveau; Q' est complètement connue (ou du moins a 3 déterminations dont nous choisissons l'une) et Q_1 dépend de deux paramètres nouveaux. Nous indiquons les équations en supposant $\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3\lambda_4 = 0$,

---

de Q_1 où les deux génératrices qui s'y croisent sont rectangulaires, le plan de perspective étant parallèle au plan tangent en ce point.

Q et Q′ rapportées à leur tétraèdre conjugé commun, ce qui permet d'écrire les équations

$$(\mathrm{Q}) \qquad x^2+y^2-z^2-1=0,$$

$$(\mathrm{Q}') \qquad m^2x^2+\frac{y^2}{m^2}-p^2z^2-\frac{1}{p^2}=0$$

(en prenant le plan de l'infini pour l'une des faces du tétraèdre).

On constate alors que les génératrices (de système convenablement choisi sur Q et Q′)

$$(1) \qquad \begin{cases} x-z-\mu(1+y)=0, \\ x+z+\dfrac{1}{\mu}(y-1)=0, \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} pmx-p^2z+\lambda\left(\dfrac{py}{m}-1\right)=0, \\ pmx+p^2z+\dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{py}{m}+1\right)=0, \end{cases}$$

se rencontrent si l'on a la relation

$$(3) \qquad 4(p^2m^2-1)-(p^2-m^2)\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\left(\mu-\frac{1}{\mu}\right)=0,$$

ce qui donne le quadrilatère R

$$\mu,\quad \lambda,\quad -\frac{1}{\mu},\quad -\frac{1}{\lambda}.$$

Les génératrices de système opposé sur chaque quadrique s'obtiendront en remplaçant y par $-y$, λ et μ par λ' et μ', de sorte que l'on retrouve la relation (3).

Il est assez facile de voir que la quadrique Q_1 admet l'involution biaxiale dont les axes sont les arêtes S_1S_2, S_3S_4, du tétraèdre conjugué [1]. Nous écrivons donc l'équation de Q_1 (S_1S_2 étant Oz, S_3S_4 la droite à l'infini du plan horizontal)

$$(\mathrm{Q}_1) \qquad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2B''xy+2C''z+D=0.$$

En éliminant z entre les équations (1), nous obtenons

$$(4) \qquad 2x-y\left(\mu-\frac{1}{\mu}\right)-\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)=0.$$

---

[1] Ce résultat tient à ce que, dans cette involution, G_1 et G_2 s'échangent g_1 et g_2 aussi, et de même le couple (Γ_1, Γ_2) et le couple (γ_1, γ_2). Le quadrilatère R fait en effet écrire $u_1+u_2=a$, $u_3+u_4=a$, $u_1+u_2=a+\omega$, $u_2+u_4=a+\omega$, d'où $u_3=u_2+\omega$, $u_4=u_1+\omega$; ce sont les sommets opposés de R qui s'échangent dans cette involution.

En remplaçant μ par $-\frac{1}{\mu}$ nous obtenons

$$(4') \qquad 2x - y\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right) + \mu + \frac{1}{\mu} = 0.$$

Si donc on pose $\mu - \frac{1}{\mu} = M$, le produit des deux équations (4) et (4') donne

$$(5) \qquad (2x - yM)^2 - M^2 - 4 = 0.$$

Posant de même $\mu' - \frac{1}{\mu'} = M'$, nous aurons à exprimer que l'élimination de z entre les équations Q, Q_1 conduit au résultat

$$(6) \qquad [(2x - yM)^2 - M^2 - 4][(2x + yM')^2 - M'^2 - 4] = 0.$$

Or l'élimination de z donne

$$(7) \quad [Ax^2 + A'y^2 + A''(x^2 + y^2 - 1) + 2B''xy + D]^2 - 4C''^2(x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

On arrive ainsi, aisément, à l'équation de Q_1

$$(Q_1) \quad \begin{aligned} &4x^2 - MM'y^2 + 2(M' - M)xy \\ &+ 2\varepsilon(M + M')z + MM' - 4 + A''(z^2 - x^2 - y^2 + 1) = 0, \end{aligned}$$

le symbole ε signifiant ± 1; nous n'avons encore exprimé qu'un fait, à savoir que Q_1 coupe Q suivant quatre génératrices. Nous recommençons les opérations suivant la même marche avec Q' et Q_1, posant

$$\lambda - \frac{1}{\lambda} = L, \qquad \lambda' - \frac{1}{\lambda'} = L',$$

et nous rappelant le résultat

$$(8) \qquad LM = L'M' = \frac{4(p^2m^2 - 1)}{p^2 - m^2}.$$

On trouve ainsi une nouvelle équation de Q_1

$$(Q_1) \quad \begin{aligned} &(4p^2m^2 - \overline{A}''m^2)x^2 - \left(\frac{p^2LL'}{m^2} + \frac{\overline{A}''}{m^2}\right)y^2 + \overline{A}''p^2z^2 \\ &+ 2p^2(L - L')xy + 2\eta p^2(L + L')z + LL' - 4 + \frac{\overline{A}''}{p^2} = 0. \end{aligned}$$

η signifie ± 1; on constate, comme vérification, que l'on peut identifier les deux formes d'équation de Q_1 et l'on obtient, en ne conservant que M et M′, $\varepsilon = \eta$, puis

$$A'' = \frac{4p^2}{p^2 - m^2} - \frac{p^2 m^2 MM'}{p^2 m^2 - 1}, \qquad \overline{A}'' = \frac{16p^2(p^2 m^2 - 1)}{(p^2 - m^2)^2 MM'} - \frac{4p^2 m^2}{p^2 - m^2}.$$

Ces résultats acquis, utilisons la remarque que M. Rowe nous a donnée : un plan tangent, α, de Q_1 étant choisi, la biquadratique (Q, Q′) ou $\mathcal{B}$ est coupée par α en quatre points A, B, C, D; choisissons-en 3, par exemple B, C, D; les plans tangents à Q_1, autres que α, menés par BC, CD, DB se recoupent en un point $\overline{A}$ situé sur Q, et encore sur Q′, car Q_1 coupe Q (et aussi Q′) suivant quatre droites; donc $\overline{A}$ est sur $\mathcal{B}$; remarquons que A est dans le plan α_1 correspondant à α quand on associe Q_1 à une quadrique *quelconque* $Q + hQ' = 0$, où h est *arbitraire* (autre que o ou ∞) (¹); or cette homographie (α, α_1) conserve le tétraèdre conjugué commun à Q_1 et à la quadrique $Q + hQ' = 0$; le calcul qui a été fait a montré que le tétraèdre conjugué en jeu *varie* quand h varie, mais que les droites $S_1 S_2$ (axe des z) et $S_3 S_4$ (droite de l'infini du plan horizontal) restent toujours conjuguées par rapport à Q_1 d'une part et $Q + hQ'$ de l'autre; donc les sommets de ce tétraèdre variable décrivent ces deux droites, qui se conservent chacune dans son ensemble (point pour point); l'*homographie est donc une homographie biaxale, et d'après le paragraphe* 1, *est même une involution biaxale dont les axes sont* $S_1 S_2$ *et* $S_3 S_4$; cela exige même que, si l'on considère la biquadratique $Q + hQ' = 0$, $Q_1 = 0$, variable avec h, mais passant par les points fixes $Q = 0$, $Q' = 0$, $Q_1 = 0$, la quadrique Q_1 se conserve dans une involution biaxale dont les axes s'appuient sur $S_1 S_2$ et $S_3 S_4$ (S_1 s'échangent avec S_2, S_3 avec S_4) et qui laisse inaltérée la biquadratique $(Q + hQ', Q_1)$. Le plan α_1 *n'est autre alors que le symétrique de* α *par rapport à* Oz; *chaque point* $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ *est le symétrique de* A, B, C, D *respectivement* (²).

(¹) Pour Q et Q_1 il n'y a pas de correspondance (α, α_1), car α étant donné on peut choisir arbitrairement le sommet opposé à la face α; de même pour Q′ et Q_1.

(²) On vérifie aisément que l'équation en λ relative au système

$$Q + hQ' - \lambda Q_1 = 0$$

satisfait effectivement à la condition $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4$ qui est caractéristique;

Nous avons ainsi obtenu une propriété très curieuse de toute biquadratique $\mathcal{B}$; *nous avons choisi l'un des trois couples* ($S_1 S_2$, $S_3 S_4$) *d'arêtes opposées du tétraèdre conjugué commun aux quadriques du faisceau ponctuel déterminé par* $\mathcal{B}$, *puis l'une des* ∞^3 *quadriques* Q_1 *relatives à ce couple; un plan tangent quelconque à* Q_1 *étant donné et coupant* $\mathcal{B}$ *en* A, B, C, D, *nous prenons le transformé de* **A** *dans l'involution biaxiale, d'axes* ($S_1 S_2$, $S_3 S_4$), *soit* $\bar{A}$: *le tétraèdre* $\bar{A}BCD$ *a ses faces tangentes à* Q_1 ; *on a ainsi* ∞^2 *tétraèdres relatifs à* $\mathcal{B}$ *et* Q_1 ; chaque plan *tangent à* Q_1 *est support de* 4 *tels tétraèdres; chaque point de* $\mathcal{B}$ *est sommet de* 4 *tels tétraèdres.*

Ce dernier résultat s'obtient ainsi : l'involution biaxiale d'axes $S_1 S_2$, $S_3 S_4$ fait correspondre au point u le point $u + \omega$, de sorte que le tableau suivant contient 8 groupes dont chacun

$$\begin{array}{cccc} ABCD & \bar{A}\bar{B}CD & \bar{A}B\bar{C}D & \bar{A}BC\bar{D} \\ \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} & AB\bar{C}\bar{D} & A\bar{B}C\bar{D} & A\bar{B}\bar{C}D \end{array}$$

donne des points coplanaires; l'adjonction de 2ω ou 4ω à une somme d'arguments nulle donne en effet une autre somme nulle (à un multiple près de périodes). Nous avons maintenant un autre tableau donnant 8 tétraèdres :

$$\begin{array}{cccc} \bar{A}BCD & A\bar{B}CD & AB\bar{C}D & ABC\bar{D} \\ A\bar{B}\bar{C}\bar{D} & \bar{A}B\bar{C}\bar{D} & \bar{A}\bar{B}C\bar{D} & \bar{A}\bar{B}\bar{C}D \end{array}$$

et l'on voit bien que le sommet A est commun à 4 tétraèdres. Pour chacun de ces tétraèdres la somme des arguments vaut ω. *Nous avons montré que le couple* $\mathcal{B}$, Q_1 *dépend de* 19 *paramètres.*

Supposons maintenant que nous adjoignions à Q_1 une autre quadrique Q'_1 du même groupe, dépendant donc de 3 nouveaux

---

λ_1 et λ_2 sont racines de l'équation

$$[1 + hm^2 + (4 - A'')\lambda]\left[1 + \frac{h}{m^2} - (A'' + MM')\lambda\right] - \lambda(M' - M)^2 = 0$$

et λ_3, λ_4 de l'équation

$$[\lambda A'' - \gamma + hp^2)]\left[\lambda(A'' + MM' - 4) - 1 + \frac{h}{p^2}\right] - \lambda(M' + M)^2 = 0.$$

Ces deux équations ont même terme en λ^2 et même terme en λ.

paramètres ; prenons un plan α tangent simultanément à Q_1 et Q'_1 : il nous donne 4 *tétraèdres* $\overline{A}BCD$, $A\overline{B}CD$, $AB\overline{C}D$, $ABC\overline{D}$ *inscrits dans* $\mathcal{B}$ *et circonscrits à la développable* (Q_1, Q'_1) ; *de même un point* A *quelconque de* $\mathcal{B}$ *fournit* 4 *tétraèdres :* nous avons donc une figure essentiellement différente de celle qui correspond à la première solution, puisque cette première solution donnait pour chaque point de $\mathcal{B}$ un seul tétraèdre ayant un sommet en ce point. Le système $\mathcal{B}$, Q_1, Q'_1 et développable (Q_1, Q'_1) dépend de 22 paramètres, en supposant que Q'_1 corresponde à un couple $\overline{Q}$, $\overline{Q}'$ autre que Q, Q' ; inscrivons dans la développable (Q_1, Q'_1) une quadrique Q_2 : $\mathcal{B}$ *et* Q_2 *admettent* ∞^1 *tétraèdres ; il me paraît assez vraisemblable que ce couple* $\mathcal{B}$, Q_2 *n'en admet que* ∞^1 ; quand $\mathcal{B}$ est donnée, le système Q_1, Q'_1, Q_2 fait intervenir 7 paramètres, et il me paraît assez vraisemblable que Q_2, *seule*, fait intervenir 7 paramètres (pour que ce nombre, relatif à Q_2 seule, fût inférieur, il faudrait qu'une infinité de couples Q_1, Q'_1 conduisent à la même quadrique Q_2).

Je signale quelques propositions à comparer avec celles relatives à la cubique ou celles déjà trouvées pour la première solution des biquadratiques.

La quadrique Q_1 *contient les sommets des quadrilatères* R *et* R_1 ; *ces* 8 *sommets sont, par couples de* 2, *répartis sur les* 4 *génératrices* G_1, G_2, γ_1, γ_2 *de* Q_1 (*dont* 2 *appartiennent à* Q, *et* 2 *à* Q') *et aussi sur les* 4 *génératrices* g_1, g_2, Γ_1, Γ_2.

Réciproquement, sur une quadrique Q_1 quelconque, prenons 4 génératrices G_1, G_2, γ_1, γ_2 d'un système, 4 génératrices g_1, g_2, Γ_1, Γ_2 de l'autre ; le quadrilatère $\overline{R}$ de côtés G_1, G_2, g_1, g_2 fournit ∞^1 quadriques Q ; le quadrilatère complémentaire $\overline{R}_1$, Γ_1, Γ_2, γ_1, γ_2 fournit ∞^1 quadriques Q' et nous reconstituons la figure 2 ; la biquadratique (Q, Q') dépend, quand Q_1 est donnée, de 10 paramètres : 8 pour le choix des génératrices, et 1 pour le choix de Q, 1 pour le choix de Q' ; quand les 8 génératrices de Q_1 sont données, les ∞^2 biquadratiques obtenues passent par les sommets des deux quadrilatères R et R_1 ; nous avons ainsi associé à Q_1, ∞^{10} biquadratiques telles que l'on puisse inscrire dans chacune ∞^2 tétraèdres circonscrits à Q_1 ; comme vérification nous avons retrouvé le nombre 19 comme total de paramètres dont dépend le couple $\mathcal{B}$, Q_1 ($16+3$ si l'on commence par $\mathcal{B}$ pour finir par Q_1, $9+10$ si l'on commence par Q_1 pour finir par $\mathcal{B}$).

Si l'on intervertit le rôle des couples (R, R_1) et ($\overline{R}$, $\overline{R}_1$), autrement dit en considérant l'une des quadriques $\overline{Q}$ déterminée par G_1, G_2, Γ_1, Γ_2 et l'une des quadriques $\overline{Q}'$ déterminée par g_1, g_2, γ_1, γ_2, on a un système remarquable de 4 quadriques

$$Q\begin{cases} G_1 & G_2 \\ g_1 & g_2 \end{cases} \quad Q'\begin{cases} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} & \overline{Q} & \\ Q & & Q' \\ & \overline{Q}' & \end{matrix}$$
$$\overline{Q}\begin{cases} G_1 & G_2 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{cases} \quad \overline{Q}'\begin{cases} g_1 & g_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{cases}$$

qui toutes coupent Q_1 suivant 4 génératrices et telles que dans le diagramme $Q\overline{Q}Q'\overline{Q}'$ chaque quadrique coupe suivant 4 droites les deux quadriques contiguës : on peut remarquer que le système Q_1, Q, Q', $\overline{Q}$, $\overline{Q}'$ dépend en tout de $9+8+1+1+1+1$ ou 21 paramètres; or nous avons vu plus haut que si l'on donne une biquadratique $\mathcal{B}$ (16 paramètres), on peut, ayant choisi une quadrique Q contenant $\mathcal{B}$, obtenir la quadrique Q' associée à Q (pour un choix du couple d'arêtes opposées du tétraèdre conjugué aux quadriques contenant $\mathcal{B}$), puis une quadrique $\overline{Q}$ déterminée par un quadrilatère R et un quadrilatère R_1 ; R a ses côtés alternativement sur une semi-quadrique Q et une semi-quadrique Q'; R_1 a ses côtés sur les semi-quadriques complémentaires; si maintenant on prend une nouvelle quadrique $\overline{Q}'_1$, *correspondant au même choix de* Q et Q' (ce qui fait au total $16+1+2+2=21$ paramètres pour Q, Q', $\overline{Q}$ et $\overline{Q}'$), cette quadrique $\overline{Q}'$ est déterminée par deux quadrilatères $\overline{R}$ et $\overline{R}_1$ respectivement de même nature que R et R_1 ; mais alors il est clair que la quadrique Q_1 déterminée par R et $\overline{R}_1$ coupe Q, Q', $\overline{Q}$ et $\overline{Q}'$ chacune suivant 4 droites; de même la quadrique Q'_1 déterminée par $\overline{R}$ et R_1 ; *on a donc un système très remarquable de* 6 *quadriques* (Q, Q'), ($\overline{Q}$, $\overline{Q}'$), (Q_1, Q'_1) *tel que chaque quadrique d'un couple coupe chaque quadrique des autres couples suivant* 4 *droites; l'ensemble des génératrices communes forme* 16 *droites dont* 8 *convena-*

blement choisies sont sur une quadrique d'un couple, et les 8 *autres sur l'autre quadrique du même couple.*

Nous avons ici obtenu des couples $\mathcal{B}$, Q_1 avec ∞^2 tétraèdres et dépendant de 19 paramètres, tandis que le couple général $\mathcal{B}$, Q_1 dépend de 25 paramètres. Si nous choisissons une quadrique Q'_1 associée à $\mathcal{B}$, du même système que Q_1 (même couple du tétraèdre conjugué commun), mais correspondant à un autre couple Q, Q', nous avons une développable Δ (Q_1, Q'_1) dépendant, quand $\mathcal{B}$ est donnée, de 6 paramètres; le couple $\mathcal{B}$, Δ ainsi obtenu dépend de 22 paramètres (tandis que dans la première solution le couple $\mathcal{B}$, Δ dépend de 21 paramètres). Ici, si nous prenons un plan tangent à la fois à $\mathcal{B}$ et à Δ, touchant $\mathcal{B}$ au point A, réunion de A et B du cas général, et recoupant $\mathcal{B}$ en C, D nous trouvons comme cas limite du tableau des 8 plans indiqués plus haut le tableau

$$\begin{matrix} AACD & \bar{A}\bar{A}CD & AA\bar{C}D & \bar{A}\bar{A}C\bar{D} \\ \bar{A}\bar{A}\bar{C}\bar{D} & AA\bar{C}\bar{D} & A\bar{A}C\bar{D} & A\bar{A}\bar{C}D \end{matrix}$$

On remarque que les deux plans, tangents à Δ, issus de $C\bar{D}$, sont cette fois confondus en un seul $A\bar{A}C\bar{D}$ (au lieu de $A\bar{B}C\bar{D}$ et $\bar{A}BC\bar{D}$ du cas général); donc $C\bar{D}$ (et de même $\bar{C}D$) est une génératrice de Δ; les deux tétraèdres d'arête $C\bar{D}$ sont $AAC\bar{D}$ et $\bar{A}\bar{A}C\bar{D}$; on a, suivant la tangente AA à $\mathcal{B}$ deux plans tangents à Δ, AACD et $AA\bar{C}\bar{D}$; *donc les* 32 *intersections de* $\mathcal{B}$ *et* Δ *sont réparties sur* 16 ***génératrices de*** Δ; ***les*** 32 ***plans tangents à*** $\mathcal{B}$ ***et*** Δ ***sont répartis en*** 16 ***couples se croisant suivant une tangente de*** Δ : ceci généralise toujours le résultat de la cubique et de la développable cubique, mais autrement que pour la première solution relative à une biquadratique et une développable de classe 4.

Je fais maintenant une remarque importante pour la comparaison des deux types de solutions trouvées dans ce travail. Sur une courbe $\mathcal{B}$, deux tétraèdres T_1, T_2, dont les sommets donnent la même somme d'arguments $4a$, déterminent ***une développable*** Δ ***et une seule, formant avec*** $\mathcal{B}$ ***un couple de la première solution; mais rien n'autorise à déduire de là que ces*** 8 ***faces déterminent une seule développable de classe*** 4 ***et genre*** 1; les 8 points ne sont pas ***quelconques sur*** $\mathcal{B}$ (si $4a$ est différent de ω, ω' ou $\omega + \omega'$, ils déterminent une seule courbe $\mathcal{B}$; si $4a$ vaut ω,

ω', $\omega + \omega'$, ils déterminent ∞^2 biquadratiques, mais peu importe pour l'instant) : on ne peut donc affirmer si les 8 plans sont indépendants au point de vue de la détermination d'une développable de degré 4 et genre 1 ; cette question serait à étudier.

Pour $4a$ *égal à* ω (*ou* ω', *ou* $\omega + \omega'$), *les deux tétraèdres* T_1, T_2 *inscrits dans* $\mathcal{B}$ *donnent* 8 *plans qui déterminent un réseau de quadriques d'une part et une infinité de développables de classe* 4 *et genre* 1 : en effet les 8 sommets de T_1 et T_2 déterminent ∞^2 biquadratiques ; sur l'une, $\mathcal{B}$ qui nous sert de point de départ, la somme des arguments est la même pour T_1 ou pour T_2, de sorte que T_1 et T_2 conduisent à une développable Δ de la *première* solution; pour les autres biquadratiques nous ne pouvons rien dire sans étude spéciale, que nous n'entreprendrons pas. Nous bornant à $\mathcal{B}$, nous avons vu que les tétraèdres T_1 et T_2 satisfont aux conditions de la *seconde* solution et qu'il existe ∞^3 quadriques Q_1 : toutes celles qui sont tangentes au plan $B_1C_1D_1$ sont inscrites dans le tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$; de même on peut obliger Q_1 à toucher le plan B_2, C_2, D_2, donc les faces de T_2 et il reste *un* paramètre pour Q_1 ; deux de ces quadriques Q_1 et Q'_1 donnent alors une développable $\overline{\Delta}$, de classe 4, genre 1, associée à $\mathcal{B}$ suivant la *seconde* solution et non la première, de sorte que les deux développables Δ, $\overline{\Delta}$ associées à $\mathcal{B}$, T_1, T_2 sont *distinctes :* la proposition en résulte.

6. **Conclusion.** — J'ai tenu à faire une étude détaillée de la question ; pour les cubiques gauches et les développables cubiques, la question est résolue d'une façon très satisfaisante, le mérite en revenant surtout à Duporcq, dont le travail est d'autant plus suggestif qu'il est incomplet, tout en étant d'une élégance remarquable. Pour cette partie, nous avons pu donner des conditions nécessaires et suffisantes.

Au contraire, pour les biquadratiques et développables de classe 4, il existe divers types de solutions, au moins *deux* (nous ne pouvons dire s'il en existe d'autres que celles obtenues ici par synthèse), et cela explique la difficulté de donner des conditions *nécessaires et suffisantes;* nous avons donné des conditions *suffisantes.* Il reste un point à élucider : si une biquadratique $\mathcal{B}$ et une développable Δ admettent ∞^1 tétraèdres (de l'une ou l'autre des deux espèces indiquées ici), et si l'on inscrit une quadrique Q_1 dans Δ, la biquadratique $\mathcal{B}$ et la quadrique Q_1 admettent-elles ∞^1 tétraèdres seulement (ceux relatifs à $\mathcal{B}$ et Δ) ou ∞^2 ? Nous n'avons pas résolu cette question : nous serions heureux qu'un lecteur arrive à perfectionner notre étude sur ce point. Je crois assez vraisemblable que les couples signalés au paragraphe 4 et au paragraphe 5 n'admettent que ∞^1 tétraèdres. Pour le cas du n° 5, je perfectionne le calcul indiqué; nous avons obtenu *une* quadrique Q_1 (à deux paramètres M, M′) correspondant à *un* couple Q, Q′ sans paramètre; il est bon de diriger le calcul de façon à mettre en évidence aussi le paramètre relatif au choix de Q.

Il suffit pour cela de reprendre les équations Q et Q′ du n° 5, de remplacer x, y, z, t (variable d'homogénéité) par αx, βy, γz, δt où α, β, γ, δ sont des constantes, puis d'écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{llll} \alpha^2 = H, & \beta^2 = K, & \gamma^2 = -L, & \delta^2 = -P, \\ m^2\alpha^2 = H_1 & \dfrac{\beta^2}{m^2} = K_1, & p^2\gamma^2 = -L_1, & \dfrac{\delta^2}{p^2} = -P_1, \end{array}\right.$$

ce qui donne

$$m^2 = \frac{H_1}{H} = \frac{K}{K_1}, \qquad p^2 = \frac{L_1}{L} = \frac{P}{P_1},$$

de sorte que l'on a les équations

$$(Q)\qquad Hx^2 + Ky^2 + Lz^2 + Pt^2 = 0, \qquad HK = H_1K_1,$$

$$(Q')\qquad H_1x^2 + K_1y^2 + L_1z^2 + P_1t^2 = 0, \qquad LP = L_1P_1,$$

$$(Q_1)\qquad \begin{aligned} &4Hx^2 - MM'Ky^2 + 2(M'-M)\sqrt{HK}\,xy \\ &\quad + 2(M+M')\sqrt{LP}\,z + (4-MM')P \\ &\quad - 4\left(\frac{L_1H}{L_1H - H_1L} - \frac{L_1H_1MM'}{L_1H_1 - LH}\right)(Hx^2 + Ky^2 + Lz^2 + P) = 0. \end{aligned}$$

On peut ensuite prendre

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{llll} H = 1 + ha_1, & K = 1 - ha_1, & L = 1 + ha_3, & P = 1 - ha_3, \\ H_1 = 1 - ha_1, & K_1 = 1 + ha_1, & L_1 = 1 - ha_3, & P_1 = 1 + ha_3. \end{array}\right.$$

La biquadratique $\mathcal{B}$ est alors définie par les deux équations

$$(q)\qquad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$

$$(q')\qquad a_1(x^2 - y^2) + a_3(z^2 - t^2) = 0,$$

de sorte que q et q' sont les deux quadriques *spéciales* qui ont été signalées : *chacune d'elles possède* ∞^1 *quadrilatères gauches tracés sur elle et inscrits dans* $\mathcal{B}$; la quadrique Q a pour équation $q + hq' = 0$. Q′ pour équation $q - hq' = 0$, où h est un paramètre variable. On trouve alors pour équation de Q_1

$$\begin{aligned}
&(1 - h^2 a_1^2)\left\{ \left[\frac{4(1 + ha_3)}{a_1 - a_3} + \frac{(1 - ha_3)MM'}{a_1 + a_3}\right]x^2 \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \left[\frac{4(1 - ha_3)}{a_1 - a_3} + \frac{(1 + ha_3)MM'}{a_1 + a_3}\right]y^2 \right\}\\
&+ (1 - h^2 a_3^2)\left\{ \left[\frac{4(1 + ha_1)}{a_1 - a_3} + \frac{(1 - ha_1)MM'}{a_1 + a_2}\right]z^2 \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \left[\frac{4(1 - ha_1)}{a_1 - a_3} + \frac{(1 + ha_1)MM'}{a_1 + a_3}\right]t^2 \right\}\\
&+ 4h(M' - M)\sqrt{1 - h^2 a_1^2}\, xy + 4h(M' + M)\sqrt{1 - h^2 a_3^2}\, zt = 0;
\end{aligned}$$

les 3 paramètres sont h, M, M′.

Pour Q'_1 on peut prendre une équation analogue avec les paramètres h_1, M_1, M'_1. On forme ensuite l'équation tangentielle de Q_1 et celle de Q'_1 ; on constate aisément que l'équation tangentielle obtenue à partir de

$$A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2B'' xy + 2C'' z + D = 0$$

est

$$\begin{aligned}
&(A' u^2 + A v^2 - 2B'' uv)(C''^2 - DA'')\\
&\quad + (D w^2 + h^2 A'' - 2hC'' w)(B''^2 - AA') = 0.
\end{aligned}$$

On trouve donc, ce calcul fait, l'équation tangentielle de la quadrique Q_2 annoncée, inscrite dans la développable Δ (Q_1, Q'_1) et il semble bien que les 7 paramètres h, M, M′, h_1, M_1, M'_1, λ ne doivent pas se réduire à un nombre moindre.