BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL VINCENSINI

Sur certains systèmes cycliques arbitrairement déformables

Bulletin de la S. M. F., tome 63 (1935), p. 155-184
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1935__63__155_0>

SUR CERTAINS SYSTÈMES CYCLIQUES ARBITRAIREMENT DÉFORMABLES;

PAR M. P. VINCENSINI.

Introduction.

Soient une surface S et un système cyclique (C), tels qu'il existe une correspondance biunivoque entre les éléments de contact de S et les cercles du système (C).

Si, lorsqu'on déforme S arbitrairement, chaque élément de contact entraînant le cercle associé (l'ensemble constituant une figure invariable), (C) reste cyclique, nous dirons que le système cyclique envisagé est *arbitrairement déformable avec* S.

Tout système cyclique est arbitrairement déformable au moins d'une façon; il suffit d'envisager la surface S enveloppe des plans des cercles, et d'associer, en système invariable, chaque cercle à l'élément de contact correspondant.

D'ailleurs, une surface S arbitrairement donnée, fournit une infinité de systèmes cycliques arbitrairement déformables formés de cercles situés dans ses plans tangents: on obtient tous ces systèmes en considérant une déformée arbitraire S_0 de S, en prenant les cercles d'intersection des plans tangents à S_0 avec une sphère fixe de rayon nul, puis en déformant S_0 (les cercles restant invariablement liés aux plans tangents) de façon à l'amener sur S.

Un exemple particulièrement important de systèmes cycliques arbitrairement déformables est fourni par les cercles de rayon constant a, situés dans les plans tangents à une surface pseudo-sphérique quelconque de courbure totale $-\frac{1}{a^2}$ et centrés aux points de contact correspondants.

Les surfaces applicables sur les surface de révolution peuvent être associées à des systèmes cycliques arbitrairement déformables remarquables. Au tome III de la *Théorie générale des surfaces*,

G. Darboux a montré qu'a toute surface S de ce genre, on peut associer ∞^2 systèmes cycliques arbitrairement déformables, tels que les plans des différents cercles de l'un quelconque de ces systèmes soient orthogonaux aux éléments de contact correspondants (chaque plan passe par le point de contact associé).

J'ai complété ce résultat de Darboux dans un Mémoire des *Annales des l'École Normale* ([1]), où j'ai montré que *les seules surfaces* S *telles qu'on puisse leur associer des systèmes cycliques arbitrairement déformables dont les cercles sont dans des plans normaux aux éléments de contact de* S, *issus des points de contact, sont les surfaces applicables sur les surfaces de révolution.*

L'élément linéaire de S ayant la forme

$$ds^2 = du^2 + G\, dv^2 \qquad [G = f(u)],$$

le cercle du système cyclique le plus général du genre indiqué situé dans le plan tangent au point $M(u, v)$, a son centre I sur la tangente à la courbe déformée de méridien issue de M; en outre, si l'on pose $\overline{MI} = a$ et si l'on désigne par ρ le rayon du cercle, on a

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1+\lambda G}{G}} \left[\mu - \int_{u_0}^{u} \sqrt{\frac{G}{1+\lambda G}}\, du \right], \\ \rho &= \sqrt{\frac{1}{\sqrt{G}}} \left[\mu - \int_{u_0}^{u} \sqrt{\frac{G}{1+\lambda G}}\, du \right], \end{aligned} \right.$$

où λ et μ sont deux constantes arbitraires.

Nous désignerons par (Γ) les systèmes cycliques, définis par les formules (1), arbitrairement déformables avec une surface quelconque applicable sur une surface de révolution.

Les axes des cercles de l'un quelconque des ∞^2 systèmes cycliques (Γ), attachés à une surface déterminée S, forment une *congruence cyclique* θ qui reste cyclique lorsque S se déforme arbitrairement en entraînant les rayons de θ supposés invariablement liés aux plans tangents correspondants.

Dans le Mémoire actuel nous effectuons la recherche *de tous les systèmes cycliques formés de cercles normaux aux plans*

([1]) *Sur la déformation des systèmes cycliques*, 3e série, t. XLVII, 1930, p. 381.

tangents d'une surface S (*les plans ne passent plus nécessairement par les points de contact correspondants*) *restant cycliques lorsque la surface se déforme arbitrairement.*

Les congruences (cycliques) des axes des cercles de l'un des systèmes cycliques cherchés, sont formées de droites situées dans les plans tangents de S et, si l'on suppose chaque rayon de l'une quelconque (C) de ces congruences, invariablement lié au plan tangent correspondant, la congruence ne cesse de rester cyclique lorsque S se déforme arbitrairement en entraînant ses plans tangents. (C) est *arbitrairement déformable avec* S.

Les congruences des axes des systèmes cycliques arbitrairement déformables dont il est question ci-dessus, ne sont pas les *seules* congruences cycliques dont les rayons sont situés dans les plans tangents à une certaine surface, arbitrairement déformables avec la surface.

Le problème général de la recherche des congruences cycliques arbitrairement déformables semble très difficile. Nous l'avons résolu complètement dans le cas particulier où la surface S est l'une des nappes focales de la congruence cyclique envisagée.

Nous commençons notre travail par la mise en équations du problème général de la recherche des systèmes cycliques arbitrairement déformables avec une surface quelconque, et cela, en vue surtout de préciser le degré de difficulté de la question, moins grand qu'on ne pourrait le supposer *a priori*, puisque, dans le système à résoudre, n'interviennent que les dérivées partielles du *premier ordre* des éléments qui fixent le système cyclique par rapport à la surface déformée.

Nous appliquons ensuite les résultats généraux au problème particulier qui fait l'objet de cette étude (recherche des systèmes cycliques arbitrairement déformables avec S, les cercles étant orthogonaux aux plans tangents correspondants de S).

On trouve deux types distincts de surfaces pouvant être associés à des systèmes cycliques arbitrairement déformables du genre indiqué.

1° Les surfaces applicables sur les surfaces de révolution (avec leurs dégénérescences développables).

Si la surface S est la surface la plus générale applicable sur une surface de révolution, on peut lui associer ∞^2 systèmes cycliques arbitrairement déformables [les systèmes (Γ) précédemment définis]. Le nombre de ces systèmes cycliques devient ∞^4 si la surface est à courbure totale constante.

Si S est l'une des nappes de la développée d'une surface pseudosphérique S', aux ∞^2 systèmes cycliques (Γ) du cas général, il faut ajouter le système de Ribaucour de rayon constant relatif à S' (les cercles étant associés, non pas aux plans tangents de S' mais à ceux de S).

Si S est développable, aux ∞^4 systèmes (Γ) il faut ajouter une nouvelle famille de systèmes cycliques dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument et de deux constantes arbitraires; si l'on fixe les deux constantes, les systèmes cycliques obtenus ont même congruence des axes; les congruences des axes des systèmes cycliques de la nouvelle famille appartiennent par suite à la classe des congruences ∞ fois cycliques, étudiée plus particulièrement par Ribaucour, C. Guichard et L. Bianchi.

2° Des surfaces (Σ) ayant un ds^2 dépendant de cinq constantes arbitraires. A chaque surface (Σ) on peut associer un système cyclique arbitrairement déformable. Ceux de ces systèmes cycliques qui sont formés de cercles de rayon constant *correspondent à des surfaces* (Σ) *admettant même* ds^2 *que les quadriques imaginaires de Darboux tangentes au cercle de l'infini.*

I. — Systèmes cycliques arbitrairement déformables généraux.

Considérons un système cyclique (C) arbitrairement déformable avec une certaine surface S. Le plan du cercle relatif au point M de S coupe le plan tangent en M à S suivant une certaine droite D [1]; par M menons la parallèle MT à D; l'ensemble des droites (MT) forme une congruence rectiligne ($\mathfrak{C}$) dont S est l'une des nappes focales. Rapportons S au système formé par les arêtes de rebroussement de l'une des familles de développables de ($\mathfrak{C}$)

---

(1) Le cas où le plan du cercle est parallèle au plan tangent sera étudié plus loin.

($v =$ const.) et leurs trajectoires orthogonales ($u =$ const.). Son élément linéaire aura la forme

$$ds^2 = \mathrm{E}\, du^2 + \mathrm{G}\, dv^2.$$

Appelons (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) les cosinus directeurs de la tangente à la courbe ($v =$ const.) de la tangente à la courbe $u =$ const., et de la normale en M à S.

D, D′, D″ étant les coefficients de la deuxième forme fondamentale de la surface

$$-\mathrm{S}\, dX_3\, dx = \mathrm{D}\, du^2 + 2\mathrm{D}'\, du\, dv + \mathrm{D}''\, dv^2$$

(x, y, $z =$ coordonnées du point M), pendant toute déformation de S, les coefficients des deux formes ci-dessus vérifient le système de *Gauss Codazzi*

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{D}\mathrm{D}''-\mathrm{D}'^2}{\mathrm{EG}} = \mathrm{K}\ (\text{courbure}), \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{E}}}\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{E}}}\right) + \dfrac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} + \dfrac{\mathrm{D}''}{\mathrm{G}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{G}}}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\mathrm{D}''}{\sqrt{\mathrm{G}}}\right) + \dfrac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} + \dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{E}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

Rappelons enfin les formules connues

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}X_2 + \dfrac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{E}}}X_3, \qquad \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}X_1 + \dfrac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{G}}}X_3, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = -\dfrac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{E}}}X_1 - \dfrac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{G}}}X_2, \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}X_2 + \dfrac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{E}}}X_3, \qquad \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}X_1 + \dfrac{\mathrm{D}''}{\sqrt{\mathrm{G}}}X_3, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = -\dfrac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{E}}}X_1 - \dfrac{\mathrm{D}''}{\sqrt{\mathrm{G}}}X_2. \end{cases}$$

Si Δ est la droite suivant laquelle le plan du cercle C coupe le plan (X_2X_3), ρ le rayon de C, a et b les coordonnées de son centre relatives à D et Δ, θ l'angle du plan $(\mathrm{D}\Delta)$ avec le plan tangent en M à S, c la distance algébrique du point M au point où le plan $(\mathrm{D}\Delta)$ coupe l'axe X_2, t l'angle que fait le rayon aboutissant au point courant P du cercle C avec la direction (X_1, Y_1, Z_1), les coordonnées du point P par rapport au trièdre mobile attaché à la surface (X_1, X_2, X_3) sont

$$(4)\qquad \begin{cases} l = a + \rho\cos t, \\ m = c + (b + \rho\sin t)\cos\theta, \\ n = (b + \rho\sin t)\sin\theta, \end{cases}$$

a, b, c, ρ, θ, sont, de même que E et G, des fonctions des deux variables u et v.

Les coordonnées de P par rapport aux axes fixes ont les expressions suivantes :

$$(5)\qquad \begin{cases} \xi = x + lX_1 + mX_2 + nX_3, \\ \eta = y + lY_1 + mY_2 + nY_3, \\ \zeta = z + lZ_1 + mZ_2 + nZ_3. \end{cases}$$

Pour que l'ensemble des cercles C constitue un système cyclique, il faut et il suffit qu'en posant

$$(6)\qquad T = S\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2, \qquad U = S\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial\xi}{\partial u}, \qquad V = S\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial\xi}{\partial v},$$

la condition

$$(7)\qquad T\left(\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u}\right) + U\left(\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial v}\right) + V\left(\frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial t}\right) = 0$$

soit identiquement satisfaite en t.

En outre, pour que le système soit arbitrairement déformable avec S, il faut que la condition (7) reste identiquement vérifiée lorsque D, D′, D″ varient en satisfaisant constamment aux équations (2) de Gauss-Codazzi.

On trouve immédiatement

$$T = S\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 = \rho^2.$$

Calculons $U = S\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial\xi}{\partial u}$. En observant que $\frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E}\,X_1$ on obtient

$$\begin{aligned} U = S & \left[\frac{\partial l}{\partial t}X_1 + \frac{\partial m}{\partial t}X_2 + \frac{\partial n}{\partial t}X_3\right] \\ & \times\left[\sqrt{E}\,X_1 + \frac{\partial l}{\partial u}X_1 + l\frac{\partial X_1}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial u}X_2 + m\frac{\partial X_2}{\partial u} + \frac{\partial n}{\partial u}X_3 + n\frac{\partial X_3}{\partial u}\right] \\ = & \sqrt{E}\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial l}{\partial t}\frac{\partial l}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial t}\frac{\partial m}{\partial u} + \frac{\partial n}{\partial t}\frac{\partial n}{\partial u} + \left(l\frac{\partial m}{\partial t} - m\frac{\partial l}{\partial t}\right)SX_2\frac{\partial X_1}{\partial u} \\ & + \left(m\frac{\partial n}{\partial t} - n\frac{\partial m}{\partial t}\right)SX_3\frac{\partial X_2}{\partial u} + \left(n\frac{\partial l}{\partial t} - l\frac{\partial n}{\partial t}\right)SX_1\frac{\partial X_3}{\partial u}. \end{aligned}$$

Tenant compte des formules (3), et des expressions (4) de l, m, n, on obtient sans peine

$$U = \rho \left(\frac{\partial b}{\partial u} + \cos\theta \frac{\partial c}{\partial u}\right)\cos t - \rho\left(\sqrt{E} + \frac{\partial a}{\partial u}\right)\sin t$$
$$- \frac{\rho}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}[a\cos\theta\cos t + (c + b\cos\theta)\sin t + \rho\cos\theta]$$
$$+ c\rho\cos t\sin\theta \frac{D'}{\sqrt{G}} + \rho(a\sin\theta\cos t + b\sin\theta\sin t + \rho\sin\theta)\frac{D_1}{\sqrt{E}},$$

soit, en posant

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} M &\equiv \rho\left(\frac{\partial b}{\partial u} + \cos\theta\frac{\partial c}{\partial u}\right)\cos t - \rho\left(\sqrt{E} + \frac{\partial a}{\partial u}\right)\sin t \\ &\qquad - \frac{\rho}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}[a\cos\theta\cos t + (c + b\cos\theta)\sin t + \rho\cos\theta], \\ P &\equiv c\rho\cos t\sin\theta, \\ Q &\equiv \rho(a\sin\theta\cos t + b\sin\theta\sin t + \rho\sin\theta), \end{aligned}\right.$$

$$(9)\qquad U = M + P\frac{D'}{\sqrt{G}} + Q\frac{D}{\sqrt{E}}.$$

Un calcul analogue, fait pour V, conduit à l'expression.

$$(10)\qquad V = N + P\frac{D''}{\sqrt{G}} + Q\frac{D'}{\sqrt{E}},$$

P et Q étant *les mêmes fonctions qui figurent dans* U, et N ayant la valeur

$$(11)\quad N \equiv \rho\left[\cos\theta\left(\sqrt{G} + \frac{\partial c}{\partial v}\right) + \frac{\partial b}{\partial v}\right]\cos t - \rho\frac{\partial a}{\partial v}\sin t$$
$$+ \frac{\rho}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}[a\cos\theta\cos t + (c + b\cos\theta)\sin t + \rho\cos\theta].$$

La condition (7), peut alors s'écrire

$$T\left\{\frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} + \frac{D}{\sqrt{E}}\frac{\partial Q}{\partial v} + \left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial u}\right)D' - \frac{D''}{\sqrt{G}}\frac{\partial P}{\partial u}\right.$$
$$\left. + P\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\sqrt{G}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{G}}\right)\right] + Q\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\right)\right]\right\}$$
$$+ U\left\{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial t}\frac{D''}{\sqrt{G}} + \frac{\partial Q}{\partial t}\frac{D'}{\sqrt{E}}\right\}$$
$$+ V\left\{\frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t}\frac{D'}{\sqrt{G}} - \frac{\partial Q}{\partial t}\frac{D}{\sqrt{E}}\right\} = 0.$$

D'après les formules (2) de Codazzi, on a

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\right) = \frac{D'}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} + \frac{D''}{G}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\sqrt{G}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{G}}\right) = -\frac{D'}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} - \frac{D}{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial u},$$

Si l'on tient compte de ces deux relations, on constate que les dérivées de D, D' et D'' *disparaissent de la condition* (7), ce qui est une cause de grande simplification pour le problème.

La condition (7) prend alors la forme

$$(12)\quad \begin{aligned} T\Bigg\{&\frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} + \left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial Q}{\partial v} - \frac{P}{E}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)D \\ &+\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{P}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \frac{Q}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)D' \\ &+\left(-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{Q}{G}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)D''\Bigg\} \\ &+U\left\{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial t}\frac{D''}{\sqrt{G}} + \frac{\partial Q}{\partial t}\frac{D'}{\sqrt{E}}\right\} \\ &+V\left\{\frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t}\frac{D'}{\sqrt{G}} - \frac{\partial Q}{\partial t}\frac{D}{\sqrt{E}}\right\} = 0. \end{aligned}$$

Il n'y a plus maintenant qu'à remplacer T par ρ^2, U et V par leurs expressions (9) et (10), M, N, P, Q par leurs expressions (8) et (11), pour expliciter la condition (12).

Le calcul, trop long pour être reproduit, peut s'effectuer d'une façon assez symétrique ; en particulier, les termes du second degré en D, D', D'' *disparaissent grâce à l'équation de Gauss*, et l'ensemble du premier membre se présente sous forme linéaire en $\sin t$ et $\cos t$; ces deux circonstances sont extrêmement favorables à la mise en équations du problème de déformation qui nous occupe.

Nous nous bornons à donner le résultat du calcul. L'équation (12) peut être mise sous la forme

$$(13)\quad \begin{aligned} &(AD + A'D' + A''D'' + A''')\sin t \\ &+ (BD + B'D' + B''D'' + B''')\cos t + (CD + C'D' + C''D'' + C''') = 0, \end{aligned}$$

où A, A′, ..., C‴ ont les expressions suivantes :

$$A \equiv \frac{\rho b}{\sqrt{E}} \cos\theta \frac{\partial\theta}{\partial v} - \frac{b}{\sqrt{E}} \sin\theta \frac{\partial\rho}{\partial v} + \rho \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}} \sin\theta\cos\theta - \frac{\rho}{\sqrt{E}} \cos\theta \sin\theta \frac{\partial c}{\partial v},$$

$$A' \equiv \frac{b}{\sqrt{E}}\left(\sin\theta \frac{\partial\rho}{\partial u} - \rho\cos\theta \frac{\partial\theta}{\partial u}\right)$$
$$+ \frac{\rho}{\sqrt{E}} \sin\theta\cos\theta \frac{\partial c}{\partial u} + \frac{\rho\sin\theta}{\sqrt{EG}} \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}(b + c\cos\theta),$$

$$A'' \equiv \frac{\rho}{G} \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} \sin\theta(b + c\cos\theta),$$

$$A''' \equiv \sqrt{E}\frac{\partial\rho}{\partial v} - \rho\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\sin^2\theta + \frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left(c\frac{\partial\rho}{\partial v} - \rho\frac{\partial c}{\partial v}\right)$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\left(c\frac{\partial\rho}{\partial u} - \rho\frac{\partial c}{\partial u}\right) + b\cos\theta\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\rho}{\partial v}\right)$$
$$+ \rho\cos^2\theta\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial c}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial c}{\partial v}\right)$$
$$+ b\rho\sin\theta\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right) + K\rho\sqrt{EG}\cos\theta(b + c\cos\theta),$$

$$B \equiv \frac{a}{\sqrt{E}}\left(\rho\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial v} - \frac{\partial\rho}{\partial v}\sin\theta\right),$$

$$B' \equiv \frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}\left(\rho\frac{\partial c}{\partial v} - c\frac{\partial\rho}{\partial v}\right) + \frac{c\rho}{\sqrt{G}}\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial v} - \frac{a\rho}{\sqrt{E}}\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}$$
$$+ \frac{a}{\sqrt{E}}\frac{\partial\rho}{\partial u}\sin\theta + \rho\sin\theta + \frac{a\rho}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\sin\theta,$$

$$B'' \equiv \frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}\left(c\frac{\partial\rho}{\partial u} - \rho\frac{\partial c}{\partial u}\right) + \frac{a\rho}{G}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\sin\theta - \frac{c\rho}{\sqrt{G}}\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial u},$$

$$B''' \equiv \rho\sin\theta\left(\frac{\partial c}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial c}{\partial u}\right) + \frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial v} - \frac{\partial b}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial v} + \cos\theta\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial c}{\partial v} - \frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial c}{\partial u}\right)$$
$$+ \sqrt{G}\frac{\partial\rho}{\partial u}\cos\theta + \rho\sqrt{G}\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{a\rho}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial v}\sin\theta$$
$$+ \frac{a\rho}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial u}\sin\theta + \frac{a}{\sqrt{E}}\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cos\theta$$
$$+ \frac{a}{\sqrt{G}}\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos\theta + K\sqrt{EG}\,a\rho\cos\theta,$$

$$
\begin{aligned}
C \equiv & -\frac{\rho^2}{\sqrt{E}}\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial v} - \frac{b}{\sqrt{E}}\frac{\partial c}{\partial v}\sin\theta\cos\theta + \frac{a}{\sqrt{E}}\frac{\partial a}{\partial v}\sin\theta + \frac{ac}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\sin\theta \\
& - b\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\cos\theta\sin\theta - \frac{b}{\sqrt{E}}\frac{\partial b}{\partial v}\sin\theta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C' \equiv & -\frac{\rho^2}{\sqrt{E}}\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{\rho^2}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\sin\theta + \frac{a}{\sqrt{E}}\frac{\partial a}{\partial u}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{E}}\frac{\partial c}{\partial u}\sin\theta\cos\theta \\
& - \frac{c}{\sqrt{G}}\frac{\partial a}{\partial v}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{E}}\frac{\partial b}{\partial u}\sin\theta + a\sin\theta + \frac{c^2}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\sin\theta \\
& + \frac{ac}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\sin\theta + \frac{bc}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\sin\theta\cos\theta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C'' \equiv & \; c\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\sin\theta + \frac{c}{\sqrt{G}}\frac{\partial a}{\partial u}\sin\theta + \frac{c^2}{G}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\sin\theta \\
& + \frac{bc}{G}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\sin\theta\cos\theta + \frac{\rho^2}{G}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\sin\theta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C''' \equiv & \; \frac{\rho^2}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial v} + \frac{\rho^2}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}(c\sqrt{E})\cos\theta \\
& + \frac{\partial}{\partial u}(a\sqrt{G})\cos\theta + \left(\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial c}{\partial v} - \frac{\partial c}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial v}\right)\cos\theta + \sqrt{E}\frac{\partial b}{\partial v} + \frac{c}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial u} \\
& + \frac{c}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial b}{\partial v} + \frac{b}{\sqrt{E}}\frac{\partial b}{\partial u}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cos\theta + \frac{a}{\sqrt{E}}\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cos\theta \\
& + \frac{a}{\sqrt{G}}\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos\theta + \frac{b}{\sqrt{G}}\frac{\partial b}{\partial v}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos\theta + \frac{c}{\sqrt{E}}\frac{\partial c}{\partial u}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cos\theta \\
& + \frac{c}{\sqrt{G}}\frac{\partial c}{\partial v}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos\theta + \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial v} - \frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial b}{\partial u} + b\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos^2\theta \\
& + \frac{b}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial c}{\partial v}\cos^2\theta + \frac{b}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial c}{\partial u}\cos^2\theta \\
& + \sqrt{EG}\cos\theta - K\sqrt{EG}\,bc\sin^2\theta + K\sqrt{EG}\,\rho^2\cos\theta.
\end{aligned}
$$

La forme linéaire en $\sin t$ et $\cos t$ de l'équation (13) montre que, pour que l'équation soit identiquement vérifiée, il faut et il suffit que les coefficients de $\sin t$ et de $\cos t$ et le terme indépendant de t soient nuls. En outre, pour que le système (C) reste cyclique dans toute déformation de S, il faut et il suffit que les trois coefficients ci-dessus restent nuls lorsque D, D′, D″ varient en satisfaisant aux équations de Gauss-Codazzi.

Chacun des coefficients est une *forme linéaire* en D, D′, D″; pour qu'une telle forme reste nulle lorsque D, D′, D″ varient comme il vient d'être dit, il faut et il suffit que les coefficient de D, D′, D″ et le terme indépendant soient nuls; on obtiendra donc le système d'équations définissant tous les systèmes cycliques arbitrairement déformables, en annulant les douze coefficients A, A′, ..., C‴.

$$(14) \qquad A = A' = A'' = \ldots = C''' = 0.$$

On a douze équations pour sept fonctions inconnues, E, G, a, b, c, ρ, θ; une surface quelconque étant donnée, il n'existe généralement pas de systèmes cycliques arbitrairement déformables avec la surface, en dehors des systèmes bien connus formés de cercles *situés dans les plans tangents à la surface.*

La détermination de ces derniers systèmes peut d'ailleurs se faire à partir du système (14), en tenant compte des conditions

$$c = b = \theta = 0.$$

L'absence de fautes de calcul dans l'établissement du système (14) sera justifiée par certains résultats ultérieurs, directement contrôlables; mais, nous pouvons, dès à présent, donner un exemple simple, rassurant sur la validité des calculs. On sait que les systèmes cycliques réels de *rayon constant* comprennent deux types : les systèmes de Ribaucour, dont les cercles sont dans les plans tangents d'une surface pseudo-sphérique quelconque, et les systèmes engendrés par une famille plane à un paramètre de cercles de rayon constant, dont le plan roule sur une développable quelconque.

Si nous faisons $b = c = \theta = 0$, $\rho = \text{const.}$, dans le système (14), celui-ci se réduit au système des deux équations $B''' = 0$, $C''' = 0$, qui s'écrivent

$$K\sqrt{EG}\,a\rho = 0,$$

$$\sqrt{EG}(1 + K\rho^2) + \frac{\partial}{\partial u}(a\sqrt{G}) + \frac{a}{\sqrt{E}}\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} + \frac{a}{\sqrt{G}}\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0.$$

On a deux hypothèses possibles, $a = 0$, $K = 0$; si $a = 0$, on a $K = -\frac{1}{\rho^2}$, et l'on retrouve le premier type; si $K = 0$, on retrouve le second.

Dans la mise en équations du problème, nous avons supposé que le plan du cercle générateur du système cyclique *coupait* le plan tangent correspondant à la surface; si donc il existait des systèmes cycliques arbitrairement déformables formés de cercles situés dans des plans parallèles aux plans tangents de la surface associée S, ces systèmes ne seraient pas fournis par le système d'équations (14).

Examinons ce cas particulier; désignons par H le point où l'axe Ω du cercle C relatif au point M de S coupe le plan tangent en M, par F et F' les foyers de la congruence des axes situés sur Ω et par I le centre de C; si ρ est le rayon de C on sait que pour tout système cyclique

$$\overline{IF} \times \overline{IF'} = -\rho^2. \tag{15}$$

Cette relation peut s'écrire

$$\overline{HF} \times \overline{HF'} - \overline{HI}\,(\overline{HF} + \overline{HF'}) = -\rho^2. \tag{16}$$

J'ai montré dans un Mémoire antérieur [1] que pour toute déformation de S le produit $\overline{HF} \times \overline{HF'}$ reste constant sur chaque rayon de la congruence des axes Ω, et que la seule relation entre $\overline{HF}$ et $\overline{HF'}$ (autre que $\overline{HF} \times \overline{HF'} = \text{const.}$) qui puisse se conserver au cours d'une déformation arbitraire est $\overline{HF} + \overline{HF'} = 0$ (S est alors applicable sur une surface spirale).

Si donc le système cyclique (C) existe, on aura constamment au cours de la déformation

$$\overline{HF} + \overline{HF'} = 0 \tag{17}$$

(16) montre alors que

$$\overline{HF} \times \overline{HF'} = -\rho^2. \tag{18}$$

Il n'existe entre F et F' qu'*un seul* point vérifiant simultanément (17) et (18) (le mileu de FF'); la comparaison de (15 et (18) montre dès lors que I est confondu avec H et que les cercles du système cyclique sont dans les plans tangents à S.

Nous pouvons donc énoncer ce résultat

Les systèmes formés de cercles situés dans les plans tangents exceptés, il n'existe pas de systèmes cycliques formés de cercles situés dans des plans parallèles aux plans tangents à une surface, arbitrairement déformables avec la surface.

---

[1] *Sur la déformation des surfaces, et sur quelques propriétés des surfaces spirales* (*Bulletin de la Société mathématique de France;* 1931).

Tous les systèmes cycliques (autres que ceux formés de cercles situés dans les plans tangents), arbitrairement déformables, sont par suite donnés par le système (14).

Nous allons poursuivre la recherche en supposant que les cercles C sont orthogonaux aux plans tangents correspondants de S (leurs axes sont dans les plans tangents).

II. — Systèmes cycliques arbitrairement déformables avec une surface dont les plans tangents contiennent les axes des cercles.

Les notations étant celles du paragraphe I, les conditions qui expriment que le cercle générateur C d'un système cyclique est orthogonal au plan tangent en M (u, v) à la surface S sont

$$b = 0, \qquad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Si l'on a égard aux expressions de $A, A', \ldots, C'''$ données précédemment, on constate aussitôt que cinq des équations du système (14) sont identiquement vérifiées ($A \equiv A' \equiv A'' \equiv B''' \equiv C''' \equiv 0$).

Le système à intégrer se réduit à

$$A'' = B = B' = B'' = C = C' = C'' = 0,$$

soit, en explicitant les équations

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sqrt{E}\frac{\partial\rho}{\partial v} - \rho\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial v} + \frac{c}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\rho}{\partial v}\\
&\qquad - \frac{\rho}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial c}{\partial v} + \frac{c}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial u} - \frac{\rho}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial c}{\partial u} = 0,\\
&a\frac{\partial\rho}{\partial v} = 0,\\
&\rho\frac{\partial c}{\partial v} - c\frac{\partial\rho}{\partial v} + a\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\frac{\partial\rho}{\partial u} + \rho\sqrt{G} + \frac{a\rho}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0,\\
&c\frac{\partial\rho}{\partial u} - \rho\frac{\partial c}{\partial u} + \frac{a\rho}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0,\\
&\frac{ac}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - a\frac{\partial a}{\partial v} = 0,\\
&\frac{\rho^2+c^2}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} + a\left(\frac{\partial a}{\partial u} + \sqrt{E}\right) + \frac{ac}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} - c\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\frac{\partial a}{\partial v} = 0,\\
&\frac{\rho^2+c^2}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + c\left(\frac{\partial a}{\partial u} + \sqrt{E}\right) = 0.
\end{aligned}\right.$$

La deuxième équation du système (α) montre qu'on a deux hypothèses possibles $a = 0$, $\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0$.

Supposons $a = 0$. — L'axe du cercle C relatif au point M passe alors par M, et S′ est l'une des nappes focales de la congruence des axes des cercles C. Le problème prend la forme suivante :

Rechercher les systèmes cycliques arbitrairement déformables avec l'une des deux nappes focales de la congruence des axes des cercles.

Le système donnant les solutions de ce dernier problème, qui s'obtient en posant $a = 0$ dans le système (α), est le suivant :

$$
(\beta)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{c^2+\rho^2}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + c\sqrt{E} = 0,\\
&\frac{c^2+\rho^2}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0,\\
&c\frac{\partial\rho}{\partial u} - \rho\frac{\partial c}{\partial u} = 0,\\
&\rho\frac{\partial c}{\partial v} - c\frac{\partial\rho}{\partial v} + \rho\sqrt{G} = 0,\\
&\sqrt{E}\frac{\partial\rho}{\partial v} - \rho\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\rho}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial c}{\partial v} - \frac{\rho}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial c}{\partial u}\\
&\qquad + \frac{c}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial u} + \frac{c}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\rho}{\partial v} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

La deuxième équation du système (β) donne $\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0$; G est donc une fonction de v que, moyennant un changement du paramètre v, nous pouvons réduire à l'unité ($G = 1$).

Alors le système (β) s'écrit

$$
(\gamma)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(19)\quad c\sqrt{E} + (c^2+\rho^2)\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0,\\
&(20)\quad c\frac{\partial\rho}{\partial u} - \rho\frac{\partial c}{\partial u} = 0,\\
&(21)\quad \rho\frac{\partial c}{\partial v} - c\frac{\partial\rho}{\partial v} + \rho = 0,\\
&(22)\quad \sqrt{E}\frac{\partial\rho}{\partial v} - \rho\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} - \rho\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial c}{\partial v} + c\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\rho}{\partial v} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on tient compte de (21), (22) s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0.$$

ρ est par suite une fonction de u seul $[\rho = f(u)]$, et l'équation (21) devient

$$\rho\left(1 + \frac{\partial c}{\partial v}\right) = 0.$$

Comme $\rho \neq 0$, on a $\frac{\partial c}{\partial u} + 1 = 0$, d'où

$$c = -v + U \qquad [U = \text{fonction de } u].$$

Remplaçons dans (20) c et ρ par leurs expressions, nous obtenons l'équation

$$f'(u)v + f(u)U' - Uf'(u) = 0,$$

qui entraîne

$$f'(u) = 0,$$
$$f(u)U' - Uf'(u) = 0,$$

et par suite

$$\rho = f(u) = \omega \text{ (constante)},$$
$$U = \varphi = \text{const.},$$
$$c = -v + \varphi.$$

Portant les expressions précédentes de c et de ρ dans (19), on obtient pour déterminer E l'équation suivante :

$$(-v + \varphi)\sqrt{E} + [(v - \varphi)^2 + \omega^2]\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0.$$

L'intégration est immédiate et donne

$$E = \mathfrak{U}^2[(v - \varphi)^2 + \omega^2].$$

U est une fonction de u, que moyennant un changement sur le paramètre u on peut réduire à l'unité.

L'élément linéaire de S prend alors la forme

$$ds^2 = [(v - \varphi)^2 + \omega^2]\,du^2 + dv^2.$$

On reconnaît là l'élément linéaire du *caténoïde de paramètre* ω, rapporté à ses parallèles $v = \text{const.}$, et à ses méridiens $u = \text{const.}$

Les congruences des axes des systèmes cycliques cherchés, formées par les tangentes aux courbes $u =$ const. (correspondant aux méridiens) des déformées du caténoïde, sont donc les congruences des normales aux surfaces pseudo-sphériques.

Les cercles du système cyclique arbitrairement déformable attaché à une telle congruence sont d'ailleurs les cercles du système cyclique de Ribaucour associé à la surface pseudo-sphérique correspondante (cercles de rayon constant égal au rayon de courbure ω de la surface, situés dans les plans tangents de celle-ci et centrés aux points de contact correspondants).

On peut donc énoncer ce résultat, qui donne une propriété *caractéristique* des développées des surfaces pseudo-sphériques

Les seuls systèmes cycliques arbitrairement déformables avec l'une des nappes focales de la congruence des axes sont les systèmes cycliques de Ribaucour de rayon constant, associés à une surface pseudo-sphérique quelconque.

La déformation peut affecter indifféremment l'une ou l'autre des deux nappes de la développée de la surface pseudo-sphérique.

Recherche de toutes les congruences cycliques arbitrairement déformables avec une nappe focale. — Les congruences des normales aux surfaces pseudo-sphériques, fournissent des exemples de congruenees cycliques restant cycliques au cours d'une déformation arbitraire d'une de leurs nappes focales, les rayons étant entraînés dans la déformation.

Il est clair que l'analyse qui précède *n'a pas nécessairement donné toutes les congruences cycliques vérifiant la condition précédente.*

On a, en effet, supposé que les cercles du système cyclique associé à la congruence *restaient invariablement liés* aux plans tangents de la surface focale déformée (aux rayons correspondants de la congruence envisagée). Or, rien ne dit, *a priori*, que l'on ne puisse pas trouver des congruences cycliques arbitrairement déformables avec une nappe focale, pour lesquelles, au cours de la déformation, les cercles du système cyclique associé glissent le long de leurs axes, leurs rayons subissant une dilatation convenable.

Cherchons s'il existe d'autres congruences cycliques arbitrairement déformables avec une nappe focale, que celles déterminées plus haut.

Soit (Θ) une telle congruence, (S) la nappe focale que l'on déforme arbitrairement; les rayons de (Θ) sont tangents aux courbes $u =$ const. de (S), dont l'élément linéaire est supposé mis sous la forme

$$ds^2 = \mathrm{E}\, du^2 + \mathrm{G}\, dv^2.$$

La condition qui exprime que (Θ) est cyclique se déduit de (13) (§ I) en tenant compte de ce que $a = b = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Les expressions de A, A′, A″, ..., C‴ montrent immédiatement que $\mathrm{A} \equiv \mathrm{A}' \equiv \mathrm{A}'' \equiv \mathrm{B} \equiv \mathrm{B}''' \equiv \mathrm{C}''' \equiv 0$; (13) se réduit donc ici à

$$\mathrm{A}''' \sin t + (\mathrm{B}'\mathrm{D}' + \mathrm{B}''\mathrm{D}'') \cos t + (\mathrm{C}'\mathrm{D}' + \mathrm{C}''\mathrm{D}'') = 0, \tag{23}$$

les quantités A‴, B′, B″, C′, C″ *ne dépendant que des éléments* (c *et* ρ) *qui fixent le cercle associé à chaque rayon de* (Θ) *par rapport à la surface S supposée connue.*

(23) doit être une identité en t, et le rester lorsque D, D′, D″ varient en satisfaisant constamment à l'équation de Gauss et aux deux équations de Codazzi.

Pour que (23) soit une identité en t, il faut et il suffit que l'on ait

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}''' = 0, \\ \mathrm{B}'\mathrm{D}' + \mathrm{B}''\mathrm{D}'' = 0, \\ \mathrm{C}'\mathrm{D}' + \mathrm{C}''\mathrm{D}'' = 0. \end{array}\right. \tag{24}$$

Ici, nous ne pouvons pas, comme nous l'avons fait au paragraphe I, exprimer la *permanence* de la congruence (Θ) en annulant B′, B″, C′, C″; cela tient à ce que, *a priori*, ces quatre coefficients *peuvent dépendre des quantités* D, D′, D″.

Mais la forme même du système (24) va nous permettre de conclure.

La première équation du système ne contient pas les quantités D, D′, D″.

Considérons le système formé par les deux dernières équations;

on en déduit, en supposant D' et $D'' \neq 0$, ce qui écarte les surfaces S développables

$$B'C'' - C'B'' = 0.$$

Cette nouvelle équation, jointe à $A''' = 0$, donne un système de deux équations du premier ordre *indépendant de* D, D', D'', auquel doivent satisfaire c et ρ. Ces deux dernières fonctions peuvent donc s'exprimer indépendemment de D, D', D'', et seulement au moyen de l'élément linéaire de S. Si donc on considère une congruence cyclique (Θ) arbitrairement déformable au sens indiqué, le cercle attaché à chaque rayon (défini par c et ρ) *reste invariablement lié au plan tangent correspondant à* S *au cours de la déformation.*

On est par suite dans le cas, étudié plus haut, qui nous a conduit aux congruences des normales aux surfaces pseudo-sphériques.

L'hypothèse $D' = D'' = 0$, correspondant aux surfaces S développables, écartée precédemment, est évidemment incompatible avec une déformation *arbitraire* de S.

On peut donc énoncer le résultat suivant :

Les seules congruences cycliques arbitrairement déformables avec une de leurs nappes focales, sont les congruences des normales aux surfaces pseudo-sphériques.

III. — Étude des cas où $\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0$.

Le cas où $a = 0$ ayant été étudié au paragraphe précédent, nous supposerons dans toute la suite $a \neq 0$. Si $c = 0$, le plan de chaque cercle est normal au plan tangent correspondant à S au point de contact correspondant; les systèmes cycliques, arbitrairement déformables pour lesquels il en est ainsi, sont les systèmes cycliques (Γ), attachés aux surfaces applicables sur les surfaces de révolution, signalés dans l'introduction; nous supposerons donc aussi $c \neq 0$.

Cela étant, le système (α) du paragraphe II s'écrit

$$(25)\quad \rho\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}+\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial v}+\frac{\rho}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial c}{\partial v}-\frac{c}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial u}+\frac{\rho}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial c}{\partial u}=0,$$

$$(26)\quad \rho\frac{\partial c}{\partial v}+a\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\frac{\partial\rho}{\partial u}+\rho\sqrt{G}+\frac{a\rho}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=0,$$

$$(27)\quad c\frac{\partial\rho}{\partial u}-\rho\frac{\partial c}{\partial u}+\frac{a\rho}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=0,$$

$$(28)\quad c\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-\sqrt{E}\frac{\partial a}{\partial v}=0,$$

$$(29)\quad \frac{\rho^2+c^2}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}+a\left(\frac{\partial a}{\partial u}+\sqrt{E}\right)+\frac{ac}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}-c\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\frac{\partial a}{\partial v}=0,$$

$$(30)\quad \frac{\rho^2+c^2}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}+c\left(\frac{\partial a}{\partial u}+\sqrt{E}\right)=0.$$

Multiplions les deux membres de l'équation (29) par c, ceux de (30) par $-a$ et ajoutons; nous obtenons

$$\frac{\rho^2}{\sqrt{G}}\left(c\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-a\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)=0;$$

ρ, rayon du cercle générateur du système cyclique, n'étant pas identiquement nul, on aura

$$(31)\quad c\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-a\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=0;$$

(31) pourra remplacer (29).

Si, tenant compte de (28) dans (25), on multiplie les deux membres de (26) par $-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}$, ceux de (27) par $\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$ et si l'on ajoute (25), (26) et (27), on obtient la combinaison

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\rho}{\partial u}\left(c\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-a\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)=0,$$

identiquement vérifiée en vertu de (31); (26), conséquence de (25), (27) et (31) peut être négligée, et le système à résoudre peut s'écrire

(25) $$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial c}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial c}{\partial u}=0,$$

(27) $$c\frac{\partial\rho}{\partial u}-\rho\frac{\partial c}{\partial u}+\frac{a\rho}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=0,$$

(28) $$c\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-\sqrt{E}\frac{\partial a}{\partial v}=0,$$

(31) $$c\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-a\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=0,$$

(30) $$\frac{c^2+\rho^2}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}+c\left(\frac{\partial a}{\partial u}+\sqrt{E}\right)=0.$$

En multipliant les deux membres de (26) par $-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}$, et ceux de (27) par $\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$, comme nous l'avons fait plus haut, nous avons écarté le cas de nullité des quantités $\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}$, $\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$. Si l'une de ces quantités était nulle, (31) prouve que l'autre le serait aussi (puisque, par hypothèse, a et c ne sont pas nuls); la surface S serait alors développable et rapportée à un système orthogonal formé de deux familles de géodésiques parallèles ($ds^2 = du^2 + dv^2$); le système d'équations ci-dessus donnerait immédiatement, U et V étant deux fonctions arbitraires de u et de v respectivement,

(32) $$\begin{cases} a = l - u & (l = \text{const.}), \\ c = \mathrm{UV}, & \rho = \mathrm{U}; \end{cases}$$

d'où une infinité de systèmes cycliques arbitrairement déformables, d'une définition géométrique d'ailleurs très simple.

Sur la surface S considérons un système orthogonal formé de lignes géodésiques parallèles (α) et (β). Soient, β_0 une courbe déterminée du système (β), (α_0) une courbe déterminée du système (α), et γ la développante d'une courbe α issue du point où α coupe β_0. H étant le point de γ correspondant à un point quelconque M de α, menons par H, dans le plan tangent en M à S, la perpendiculaire Δ à MH; prenons sur Δ, $\overline{\mathrm{HI}} = \mathrm{V\,U}$, V et U étant des fonctions arbitraires des distances géodésiques du point M aux courbes α_0 et β_0 respectivement; le cercle C, de centre I, d'axe Δ

et de rayon U, est le cercle générateur du système cyclique arbitrairement déformable du type actuellement étudié le plus général, associé à S.

La congruence des droites Δ est la congruence des axes de tous les systèmes cycliques correspondant aux différents couples de fonctions U et V; (Δ) appartient donc à la classe des congruences ∞ fois cycliques signalées dans l'introduction.

Le système cyclique arbitrairement déformable avec S le plus général du type étudié, est déterminé dès que l'on se donne la géodésique β_0 (deux constantes arbitraires) et les deux fonctions arbitraires U et V.

Nous continuons en écartant le cas des surfaces développables.

(28) et (31) donnent

$$\frac{\partial a}{\partial v}\sqrt{E} - a\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0;$$

d'où

$$\frac{a}{\sqrt{E}} = f(u).$$

Moyennant un changement du paramètre u, on peut réduire la fonction $f(u)$ à l'unité, et poser $\sqrt{E} = a$.

Le système précédent peut alors s'écrire

$$\frac{\partial a}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial c}{\partial v} + \frac{1}{a}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial c}{\partial u} = 0,$$

$$c\frac{\partial \rho}{\partial u} - \rho\frac{\partial c}{\partial u} + \frac{a\rho}{\sqrt{G}}\frac{\partial a}{\partial v} = 0,$$

$$c\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - a\frac{\partial a}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{(c^2+\rho^2)}{\sqrt{G}}\frac{\partial a}{\partial v} + c\left(a + \frac{\partial a}{\partial u}\right) = 0.$$

La première équation, compte tenu de la troisième, s'écrit

$$\frac{\partial a}{\partial v}\left(c + \frac{c}{\sqrt{G}}\frac{\partial c}{\partial v} + \frac{\partial c}{\partial u}\right) = 0.$$

Nous devons supposer $\frac{\partial a}{\partial v} \neq 0$ $\left(\text{c'est-à-dire } \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} \neq 0\right)$; car, comme on l'a fait observer plus haut, si $\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}$ était nul, $\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$ le serait aussi et S serait développable; nous pouvons donc écrire la première équation

$$c+\frac{c}{\sqrt{G}}\frac{\partial c}{\partial v}+\frac{\partial c}{\partial u}=0.$$

Si l'on remplace dans la deuxième équation $a\frac{\partial a}{\partial v}$ par $c\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$ (troisième), cette deuxième équation devient

$$c\frac{\partial\rho}{\partial u}-\rho\frac{\partial c}{\partial u}+\frac{c\rho}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=0;$$

l'intégration est immédiate et donne

$$\sqrt{G}=\frac{c}{\rho}V \qquad (V=\text{fonction de } v).$$

En changeant le paramètre v nous pouvons prendre

$$\sqrt{G}=\frac{c}{\rho}. \tag{33}$$

Le système à résoudre se réduit finalement au système des trois équations

$$(\delta)\quad\left\{\begin{aligned}&(34)\quad c\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{c}{\rho}\right)-a\frac{\partial a}{\partial v}=0,\\&(35)\quad \frac{\rho(c^2+\rho^2)}{c}\frac{\partial a}{\partial v}+c\left(a+\frac{\partial a}{\partial u}\right)=0,\\&(36)\quad c+\rho\frac{\partial c}{\partial v}+\frac{\partial c}{\partial u}=0,\end{aligned}\right.$$

aux fonctions inconnues a, c, ρ, où, en vertu de l'hypothèse $\frac{\partial\rho}{\partial v}=0$, ρ est une certaine fonction du seul paramètre u que nous désignerons par U' ($U'=$ dérivée de U).

L'intégration de (36) donne

$$c=e^{-u}\mathcal{F}(v-U) \qquad (\mathcal{F}=\text{fonction de l'argument } v-U).$$

(34) permet de calculer a; elle peut s'écrire

$$\frac{\partial a^2}{\partial v}=2c\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{c}{\rho}\right)=2e^{-u}\mathcal{F}(v-u)\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{e^{-u}\mathcal{F}(v-U)}{U'}\right];$$

Si l'on pose $\mathcal{F}^2(v-U)=\theta'(v-U)$ (l'accent étant un indice de dérivation), on trouve immédiatement, en négligeant d'écrire l'argument $\xi = v - U$

$$\frac{\partial a^2}{\partial v} = -2e^{-2u}\frac{U'+U''}{U'^2}\theta' - e^{-2u}\theta'';$$

d'où

$$(37)\quad a^2 = -e^{-2u}\left[2\frac{U'+U''}{U'^2}\theta + \theta'\right] + \mathfrak{U} \qquad (\mathfrak{U} = \text{fonction de } u).$$

L'expression de c^2 au moyen de θ est

$$(38)\qquad c^2 = e^{-2u}\theta'.$$

a^2, c^2 et $\rho = U'$ devant avoir des expressions positives pour des surfaces S *réelles* et des systèmes cycliques associés *réels*, notons une fois pour toutes, que nous n'envisagerons, dans le plan (u, v), que des domaines pour lesquels ces trois conditions sont remplies. En outre, une fois a^2 et c^2 connus, nous devrons prendre pour a et c les racines positives des expressions précédentes, car $a = \sqrt{E}$ et $c = \rho\sqrt{G}$ d'après (33).

Il ne reste plus maintenant qu'à déterminer les trois fonctions inconnues $U(u)$, $\mathfrak{U}(u)$ et $\theta(\xi)$. A cet effet, multiplions les deux membres de l'équation (35) par $2ac$, puis remplaçons a^2, c^2 et ρ par leurs expressions en U, $\mathfrak{U}$, θ; nous obtenons sans peine l'équation suivante :

$$(39)\quad 2e^{-2u}\frac{d}{du}\left(\frac{U'+U''}{U'^2}\right)\theta\theta' + (2U'^2 + 2U'U'' - 2\mathfrak{U} - \mathfrak{U}')\theta' + U'^3\theta'' = 0.$$

(39) est une équation linéaire et homogène en $\theta\theta'$, θ', θ'' dont les coefficients ne dépendent que de u; appliquons-lui le procédé connu d'intégration. Considérons les équations obtenues en donnant à u une valeur fixe quelconque u_0; trois cas seront à envisager suivant qu'il existera *trois* relations linéaires et homogènes indépendantes à coefficients constants entre $\theta\theta'$, θ', θ'', *deux* ou *une* seulement.

Cas de trois relations. — On aura alors nécessairement

$$\theta' \equiv \theta'' \equiv 0$$

et, par suite, $c = 0$ comme le montre (38). L'hypothèse actuelle ne donne donc pas de systèmes cycliques nouveaux.

Cas de deux relations. — Nous aurons alors

$$\begin{matrix} A\,\theta\theta' + B\,\theta' + C\,\theta'' = 0 \\ A'\theta\theta' + B'\theta' + C'\theta'' = 0 \end{matrix} \qquad (A,\ B,\ \ldots,\ C'' = \text{const.}),$$

$\theta\theta'$, θ' et θ'' seront proportionnels à des nombres fixes

$$\frac{\theta\theta'}{\alpha} = \frac{\theta'}{\beta} = \frac{\theta''}{\gamma}.$$

La première équation donne

$$\theta = \frac{\alpha}{\beta} = \text{const.}, \qquad \theta' = 0;$$

comme dans le cas précédent, l'hypothèse actuelle ne conduit à aucun système cyclique arbitrairement déformable nouveau.

Notons d'ailleurs qu'aucun des deux nombres α, β ne peut être nul (on aurait alors nécessairement $\theta' = 0$).

Cas d'une seule relation. — Soit

$$A\,\theta\theta' + B\,\theta' + C\,\theta'' = 0, \tag{40}$$

la relation à coefficients constants à laquelle satisfait la fonction inconnue $\theta(\xi)$, $(\xi = v - U)$.

(40) est une équation différentielle ordinaire dont on a immédiatement l'intégrale première

$$A\,\theta^2 + 2B\,\theta + 2C\,\theta' + k = 0 \qquad (k = \text{constante arbitraire}). \tag{41}$$

C n'étant pas nul, car alors, comme le montre (39), $\rho = U' = 0$, nous pouvons poser $C = -\frac{1}{2}$; l'équation (41) prendra alors la forme

$$\theta' = A\,\theta^2 + 2B\,\theta + k; \tag{42}$$

d'où l'on déduit

$$\xi + \xi_0 = \int \frac{d\theta}{A\,\theta^2 + 2B\,\theta + k} \qquad (\xi_0 = \text{constante arbitraire}).$$

Si l'on a égard à l'expression de $\xi(\xi = v - U)$, on voit que la constante ξ_0 peut être négligée (il suffit de remplacer v par $v + \xi_0$).

Suivant que $Ak - B^2$ est positif négatif ou nul, on obtient pour θ l'une des formes suivantes (on a posé $\sqrt{Ak - B^2} = m$ dans la première forme et $\sqrt{B^2 - Ak} = m$ dans la seconde),

$$\theta = \frac{m}{A}\operatorname{tang}(m\xi) - \frac{B}{A},$$

$$\theta = -\frac{m}{A}\operatorname{cotg}h(m\xi) - \frac{B}{A},$$

$$\theta = -\frac{1}{A\xi} - \frac{B}{A}.$$

Dans les cas particuliers $A = 0$, ou bien $A = B = 0$, on trouve les formes simples

$$(42') \qquad \theta = \frac{1}{2B}e^{2B\xi} - \frac{k}{2B}, \qquad \theta = k\xi.$$

Il reste finalement à déterminer les fonctions U et $\mathfrak{U}$ par les conditions suivantes [on se rappelle qu'on a fixé C dans (41) en le prenant égal à $-\frac{1}{2}$]

$$(43) \qquad \begin{cases} -\dfrac{e^{-2u}}{U'^3}\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{U'+U''}{U'^2}\right) = A, \\ -\dfrac{2U'^2 + 2U'U'' - 2\mathfrak{U} - \mathfrak{U}'}{2U'^3} = B. \end{cases}$$

La première de ces deux équations ne contient pas $\mathfrak{U}$, et fournit par intégration U avec trois constantes arbitraires.

Si l'on pose $\frac{1}{U'} = y$, l'équation s'écrit

$$y^3(y' - y'') = -Ae^{2u};$$

le changement de fonction $\varphi(u) = ye^{-\frac{u}{2}}$, donne à l'équation la forme

$$\varphi^4 - 4\varphi^3\varphi'' + 4A = 0,$$

que l'on intègre par deux quadratures, introduisant chacune une constante arbitraire. Une troisième quadrature donne

$$U - U_0 = \int \frac{du}{y},$$

en introduisant une nouvelle constante, additive, et pouvant par suite être négligée (U n'intervient que par $\xi = v - U$).

Une fois U connu, la deuxième équation (43) fournit $\mathfrak{U}$ avec introduction d'une nouvelle constante.

En définitive, le dernier cas que nous venons d'étudier conduit à l'existence de ∞^6 ds^2 nouveaux (∞^5 en négligeant une homothétie), définissant des surfaces [que nous appellerons (Σ)], auxquelles on peut attacher des systèmes cycliques arbitrairement déformables formés de cercles orthogonaux aux plans tangents.

Les constantes figurant dans le ds^2 le plus général sont A, B, k, et les trois constantes introduites dans la détermination de U et $\mathfrak{U}$.

Le ds^2 d'une surface Σ arbitraire a la forme

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2, \tag{44}$$

avec

$$\mathrm{E} = a^2 = -e^{-2u}\left[2\frac{\mathrm{U}' + \mathrm{U}''}{\mathrm{U}'^2}\theta(v - \mathrm{U}) + \theta'(v - \mathrm{U})\right] + \mathfrak{U},$$
$$\mathrm{G} = e^{-2u}\frac{\theta'}{\mathrm{U}'^2}.$$

Quant au système cyclique associé à Σ, il est défini par

$$\left\{\begin{aligned} a &= \sqrt{\mathrm{E}},\\ c &= e^{-u}\sqrt{\theta'},\\ \rho &= \mathrm{U}'. \end{aligned}\right. \tag{45}$$

En conclusion, il existe deux types distincts de surfaces auxquelles on peut associer des systèmes cycliques arbitrairement déformables, dont les axes des cercles sont situés dans les plans tangents à la surface.

a. Les surfaces applicables sur les surfaces de révolution.
b. Les surface (Σ) *d'élément linéaire* (44).

Pour les surfaces applicables sur les surfaces de révolution, il y a lieu d'envisager trois cas, suivant qu'il s'agit de la surface la plus générale, d'une surface développable, ou d'une nappe de développée de surface pseudo-sphérique.

Si S est la surface la plus générale déformée d'une surface de révolution, *on peut lui associer* ∞^2 *systèmes cycliques arbitrairement déformables :* les systèmes (Γ) définis dans l'introduction [si S est à courbure totale constante, le nombre des systèmes (Γ) s'élève à ∞^4].

Si S est développable, aux systèmes (Γ) (en nombre ∞^4 et non plus ∞^2), il faut ajouter les systèmes définis par les formules (32), dépendant, de deux fonctions arbitraires d'un argument chacune, et de deux constantes arbitraires.

Si S est une nappe de développée de surface pseudo-sphérique, aux ∞^2 systèmes (Γ) du cas général, il faut adjoindre le système cyclique de Ribaucour de rayon constant relatif à la surface pseudo-sphérique développante.

Les systèmes cycliques associés aux surfaces (Σ), sont définis par les formules (45).

Il est à noter que les systèmes de Ribaucour, de rayon constant, offrent l'exemple de systèmes cycliques permanents dans une infinité de déformations arbitraires différentes; à la déformation de l'une ou de l'autre des deux nappes focales de la congruence des axes, et à celle de la surface pseudo-sphérique (σ) enveloppe des plans des cercles, il convient d'ajouter *au moins* la déformation de l'une quelconque des transformées de Bäcklund de (σ).

L'étude que nous allons faire au paragraphe suivant va accroître encore l'intérêt du type précédent de systèmes cycliques.

IV. — Systèmes cycliques de rayon constant associés aux surfaces (Σ) (1).

Nous avons besoin ici, de rappeler un résultat établi par L. Bianchi dans un Mémoire de 1901, *Sur la déformation des congruences* (*Ann. di. mat.* 3e série, t. VI).

Dans le Mémoire cité, L. Bianchi s'est posé le problème suivant :

Parmi les congruences normales dont les rayons sont situés dans les différents plans tangents d'une surface S (*qui, comme l'on sait, restent normales lorsque* S *se déforme arbitrairement en entraînant ses plans tangents et les rayons associés*), *en existe-t-il pour lesquelles l'une des surfaces orthogonales aux*

(1) Nous laissons de côté les systèmes de rayon constant associés aux surfaces développables, qui s'obtiennent en remplaçant U par une constante dans les formules (32) du paragraphe III.

rayons, soit (σ), *reste constamment à courbure totale constante lorsque* S *se déforme arbitrairement?*

Il a montré qu'il existe des surfaces S dont les plans tangents contiennent les rayons d'une congruence normale arbitrairement déformable au sens indiqué; ces surfaces *ont des éléments linéaires appartenant à des quadriques imaginaires de Darboux (tangentes en un point au cercle de l'infini)*; en outre, sur (S) et (σ) *tous les systèmes conjugués se correspondent.*

Cela étant, récrivons le système (S) du paragraphe précédent, en introduisant l'hypothèse supplémentaire $\rho = \text{const.}$ (nous prendrons $\rho = 1$ en négligeant une homothétie).

$$(\delta_1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & c\frac{\partial c}{\partial u} - a\frac{\partial a}{\partial v} = 0, \\ & (c^2+1)\frac{\partial a}{\partial v} + c^2\left(a + \frac{\partial a}{\partial u}\right) = 0, \\ & c + \frac{\partial c}{\partial u} + \frac{\partial c}{\partial v} = 0. \end{aligned} \right.$$

Rappelons-nous que

$$a = \sqrt{E},$$

comme on l'a vu au paragraphe précédent, et observons, qu'en vertu de l'hypothèse actuellement faite ($\rho = 1$), l'équation (33) donne

$$c = \sqrt{G}.$$

Montrons que la congruence cyclique (Ω) formée par les axes des cercles (C) de rayon 1, définis par rapport à S par les coordonnées a et c de leurs centres relatives aux axes (X_1), (X_2) attachés à S, *est normale.*

$\lambda(u, v)$ étant l'ordonnée [dans le plan (X_1 X_2)] d'un point P de l'axe Ω du cercle (C) relatif au point M(x, y, z) de S, les coordonnées de P sont

$$\begin{aligned} x_1 &= x + aX_1 + \lambda X_2, \\ y_1 &= y + aY_1 + \lambda Y_2, \\ z_1 &= z + aZ_1 + \lambda Z_2. \end{aligned}$$

Un calcul simple donne, si l'on tient compte des formules (3) du paragraphe I, où $\sqrt{E}$ et $\sqrt{G}$ sont remplacés respectivement par

a et c,

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \left(\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\lambda}{c}\frac{\partial a}{\partial v} + a\right)X_1 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{a}{c}\frac{\partial a}{\partial v}\right)X_2 + \left(D + \frac{D'\lambda}{c}\right)X_3,$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \left(\frac{\partial a}{\partial v} - \frac{\lambda}{a}\frac{\partial c}{\partial u}\right)X_1 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \frac{\partial c}{\partial u} + c\right)X_2 + \left(D' + \frac{D''\lambda}{c}\right)X_3.$$

Pour que la congruence (Ω) soit normale, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer λ, pour que la normale à la surface (σ) décrite par P coïncide avec le rayon Ω [soit parallèle à l'axe (X_2, Y_2, Z_2)], et pour cela que l'on ait

$$SX_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \qquad SX_2 \frac{\partial x_1}{\partial v} = 0,$$

soit, comme le montrent les expressions de $\frac{\partial x_1}{\partial u}$ et de $\frac{\partial x_1}{\partial v}$

$$(\delta_2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} - \dfrac{a}{c}\dfrac{\partial a}{\partial v} = 0, \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial v} + \dfrac{\partial c}{\partial u} + c = 0. \end{cases}$$

La comparaison des deux équations précédentes avec la première et la troisième des équations du système (δ_1), montre immédiatement, que si l'on prend P au centre du cercle (C) ($\lambda = c$), le système (δ_2) est vérifié. Nous pouvons dès lors énoncer deux conclusions :

1° La congruence (Ω) est normale;

2° Le centre du cercle (C) décrit l'une des surfaces orthogonales aux rayons de (Ω).

Les systèmes cycliques (C) de rayon constant que nous recherchons sont donc formés de cercles situés dans les différents plans tangents à une certaine surface (σ), et centrés aux points de contact correspondants.

Ces systèmes sont des *systèmes de Ribaucour* et (σ) est une surface *pseudo-sphérique*.

La proposition de L. Bianchi, énoncée au début du paragraphe, nous permet maintenant d'énoncer cette conclusion, qui la complète dans un certain sens :

Les seules surfaces S *auxquelles on peut associer des systèmes cycliques formés de cercles de rayon constant orthogonaux aux plans tangents, sont les surfaces ayant même ds^2 que les quadriques imaginaires de Darboux, déterminées par L. Bianchi, dont les plans tangents portent les rayons d'une congruence pseudo-sphérique normale permanente par déformation arbitraire de* S.

Le système cyclique arbitrairement déformable associé à une surface (S), *est le système de Ribaucour relatif à la surface pseudo-sphérique* (σ) *correspondante.*

Le ds^2 des surfaces S solutions de notre problème, se déduit des formules données au paragraphe III.

Ici, $\rho = U' = 1$, d'où $U = u - u_0$, u_0 étant une constante que l'on peut négliger, comme on l'a déjà expliqué ($\xi = v - u$). En outre, A étant nul, on a [*voir* (42')]

$$\theta = \frac{1}{2B} e^{2B(v-u)} - \frac{k}{2B}.$$

Il reste à calculer $\mathfrak{U}$; la deuxième équation (43) s'écrit

$$2\mathfrak{U} + \mathfrak{U}' = 2(B+1)$$

et donne par intégration

$$\mathfrak{U} = le^{-2u} + B + 1 \qquad (l = \text{const.}).$$

Les expressions E et G figurant dans (44) s'écrivent donc dans le cas actuel

$$E = e^{-2u}\left[l + \frac{k}{B} - \left(\frac{B+1}{B}\right) e^{2B(v-u)}\right] + B + 1,$$
$$G = e^{-2u}\, e^{2B(v-u)}.$$

En désignant par D la constante $l + \frac{k}{B}$ figurant dans E, nous pouvons écrire l'élément linéaire cherché

$$ds^2 = \left\{ e^{-2u}\left[D - \frac{B+1}{B} e^{2B(v-u)}\right] + B + 1 \right\} du^2 + e^{-2u}\, e^{2B(v-u)}\, dv^2,$$

B et D étant deux constantes arbitraires.