BULLETIN DE LA S. M. F.

CARLO MIRANDA

Sur un nouveau critère de normalité pour les familles de fonctions holomorphes

Bulletin de la S. M. F., tome 63 (1935), p. 185-196

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1935__63__185_0>

SUR UN NOUVEAU CRITÈRE DE NORMALITÉ POUR LES FAMILLES DE FONCTIONS HOLOMORPHES;

PAR M. CARLO MIRANDA.

Dans ce travail je me propose de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Toute famille de fonctions $f(z)$ holomorphes dans un domaine* D, *où elles ne prennent pas la valeur a et où leurs dérivées $k^{\text{ièmes}}$ ne prennent pas la valeur $b \neq 0$, est normale dans ce domaine.*

Il est bien connu qu'il suffit de démontrer que la famille est normale dans tout cercle complètement intérieur à D. Soient z_0 le centre d'un tel cercle et R son rayon; le changement de variable

$$z = \mathrm{R}x + z_0$$

transforme ce cercle dans le cercle unité du plan de la variable x et les fonctions $f(z)$ dans certaines fonctions $g(x)$ qui ne prennent pas la valeur a et dont les dérivées $k^{\text{ièmes}}$ ne prennent pas la valeur $b\mathrm{R}^k$. Nous pouvons toujours supposer $a = 0$, $b\mathrm{R}^k = 1$, en effectuant au besoin la transformation linéaire

$$h(x) = \frac{g(x) - a}{b\mathrm{R}^k}.$$

Nous nous bornerons donc à démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME I'. — *Toute famille de fonctions $f(x)$ holomorphes dans le cercle $|x| < 1$, où elles ne prennent pas la valeur* 0 *et où leurs dérivées $k^{\text{ièmes}}$ ne prennent pas la valeur* 1 *est normale dans ce cercle.*

Un théorème analogue avait déjà été démontré par M. Florent Bureau (¹) en introduisant des hypothèses supplémentaires sur les

(¹) F. BUREAU : *a. Sur quelques propriétés des fonctions uniformes au voisinage d'un point singulier essentiel isolé* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 192, 1931, p. 1350); *b. Mémoire sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé* (*Mémoires de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, 3ᵉ série, t. 17).

valeurs des fonctions de la famille et de leurs dérivées à l'origine, ce qui l'empêchait de passer du cas du cercle-unité à celui d'un domaine quelconque.

La démonstration qui suit, qui a beaucoup de points communs avec celle de M. Bureau, est d'un caractère élémentaire. Elle est valable même dans le cas où $k = 0$, c'est-à-dire que le théorème I contient, comme cas particulier, le théorème fondamental de M. Paul Montel sur les familles de fonctions admettant deux valeurs exceptionnelles.

Je veux enfin remercier M. Paul Montel d'avoir bien voulu me conseiller de chercher une démonstration du théorème en question.

1. Rappel de formules et de théorèmes fondamentaux. — Si nous posons

$$\overset{+}{\log} a \begin{cases} = 0 & (0 \leqq a \leqq 1), \\ = \log a & (1 \leqq a), \end{cases}$$

nous avons les formules

$$\begin{aligned} \overset{+}{\log}(a_1 a_2) &\leqq \overset{+}{\log} a_1 + \overset{+}{\log} a_2, \\ \overset{+}{\log}(a_1 + a_2) &\leqq \overset{+}{\log} a_1 + \overset{+}{\log} a_2 + \log 2. \end{aligned}$$

Si $f(x)$ est une fonction méromorphe dans le cercle $|x| < 1$, posons, avec M. R. Nevanlinna,

$$(1) \qquad m(\rho, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |f(\rho e^{i\theta})| \, d\theta.$$

Il est bien connu que $m(\rho, f)$ est une fonction non décroissante de ρ et l'on a évidemment

$$\begin{aligned} m(\rho, f_1 + f_2) &\leqq \log 2 + m(\rho, f_1) + m(\rho, f_2), \\ m(\rho, f_1, f_2) &\leqq m(\rho, f_1) + m(\rho, f_2). \end{aligned}$$

Soit maintenant $f(x)$ une fonction holomorphe pour $|x| < 1$, nulle aux points $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. On doit à M. R. Nevanlinna la formule suivante

$$(2) \qquad \log f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(z)| \frac{z + x}{z - x} \, d\theta - \sum_{|x_n| \leqq \rho} \log \frac{\rho^2 - \bar{x}_n x}{\rho(x_n - x)} + i C,$$

où C est une constante réelle, $\bar{x}_n$ le conjugué de x_n et

$$x = re^{i\varphi}, \qquad z = \rho e^{i\theta}, \qquad r < \rho.$$

De la formule (1) l'on peut aisément déduire la formule suivante ([1]) :

$$\log|f(x)| \leq \frac{\rho+r}{\rho-r} m(\rho, f) - \frac{\rho-r}{\rho+r} m\left(\rho, \frac{1}{f}\right). \tag{3}$$

Si $f(x)$ ne s'annule jamais, on peut appliquer la formule (3) à la fonction $\frac{1}{f}$ et l'on obtient

$$\log|f(x)| \geq \frac{\rho-r}{\rho+r} m(\rho, f) - \frac{\rho+r}{\rho-r} m\left(\rho, \frac{1}{f}\right). \tag{4}$$

Soit toujours $f(x)$ une fonction qui ne prend pas la valeur zéro; en dérivant (2), on obtient

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(z)| \frac{2z}{(z-x)^2}\, d\theta,$$

$$\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right] = \frac{k!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(z)| \frac{2z}{(z-x)^{k+1}}\, d\theta$$

et, par suite,

$$\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| \leq \frac{2\rho}{(\rho-r)^2} X(\rho), \tag{5}$$

$$\left|\frac{f^{(k)}(x)}{f(x)}\right| \leq P_k\left[\rho, \frac{1}{\rho-r}, X(\rho)\right], \tag{6}$$

où

$$X(\rho) = m(\rho, f) + m\left(\rho, \frac{1}{f}\right), \tag{7}$$

et P_k est un polynome en ρ, $\frac{1}{\rho-r}$, $X(\rho)$, de degré k en $X(\rho)$ ([2]).

(5) et (6) nous donnent des inégalités de la forme

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) \leq A_k + B_k \log\frac{1}{\rho-r} + C_k \overset{+}{\log} X(\rho), \tag{8}$$

([1]) A. Bloch, *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires* (*Ann. de l'École Normale*, 3e série, t. 43, 1926, p. 350).

([2]) H. Cartan, *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés lacunaires et leurs applications* (*Ann. de l'École Normale*, 3e série, t. 45, 1928, p. 261-262).

où A_k, B_k, C_k sont des constantes positives dépendant seulement de k.

Nous aurons besoin dans la suite du lemme suivant, dont la démonstration est due à M. Bureau (¹) :

Si $\varphi(r)$ est une fonction réelle, positive, non décroissante et finie dans l'intervalle $(0, 1)$ ouvert à droite, satisfaisant pour $r > r_0$ à une inégalité de la forme

$$(9) \qquad \varphi(r) \leqq \sigma + \sigma_1 \log \frac{1}{\rho - r} + \sigma_2 \overset{+}{\log} \varphi(\rho)$$

avec

$$r < \rho < 1, \qquad \sigma \geqq 0, \qquad \sigma_1 \geqq 2\sigma_2, \qquad \sigma_2 \geqq 4,$$

on a

$$(10) \qquad \varphi(r) \leqq \sigma(\sigma_2 + 1) + \sigma_1(\sigma_2 + 3) \log \frac{1}{\rho - r}$$

pour

$$\frac{\sigma_2 - 1}{\sigma_2} < r < \rho < 1, \qquad r_0 < r.$$

Il faut enfin rappeler le théorème suivant, dû à M. Montel (²) :

Toute famille de fonctions $f(x)$ holomorphes dans le cercle $|x| < 1$, telle que les quantités $m(r, f)$ soient, pour chaque $r < 1$, également bornées, est normale dans ce cercle.

Une démonstration très simple de ce théorème a été donnée par M. Henri Cartan dans le cas où les fonctions de la famille ne prennent pas la valeur zéro (³).

2. Lemmes et théorèmes préliminaires. — Tout d'abord nous voulons démontrer certains lemmes et certains théorèmes, dont quelques-uns sont tout à fait immédiats. Il est utile de les énoncer explicitement pour pouvoir procéder plus vite dans la démonstration du théorème I'.

Lemme I. — *Si une suite de fonctions holomorphes dans le*

(¹) F. Bureau, *loc. cit.*, *b*, p. 44.
(²) P. Montel, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques*, p. 44 (Gauthier-Villars, Paris, 1927).
(³) H. Cartan, *loc. cit.*, p. 262.

cercle $|x|<1$

$$(11) \qquad f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_n(x),\quad \ldots$$

est telle qu'aucune suite partielle extraite des $f_n(x)$ *ne soit normale, on peut choisir les nombres* $r_0<1$, N_0, x_n $(|x_n|<r_0)$, *de façon que l'on ait, pour* $n>N_0$,

$$|f_n(x_n)|<1.$$

En effet, dans le cas contraire, on pourrait extraire de la suite (11) les suites partielles

$$\begin{array}{lllll} f_{11}(x), & f_{12}(x), & \ldots, & f_{1n}(x), & \ldots, \\ f_{21}(x), & f_{22}(x), & \ldots, & f_{2n}(x), & \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, \\ f_{n1}(x), & f_{n2}(x), & \ldots, & f_{nn}(x), & \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, \end{array}$$

de façon que l'on ait

$$|f_{ni}(x)|\geqq 1 \qquad \text{pour} \qquad |x|<1-\frac{1}{n-1} \qquad (i=1, 2, \ldots),$$

et que, de plus, la suite des $f_{ni}(x)$ soit contenue dans celle des $f_{n-1,i}$. La suite partielle

$$f_{11}(x),\quad f_{22}(x),\quad \ldots,\quad f_{nn}(x),\quad \ldots$$

serait alors, contre l'hypothèse, normale dans le cercle $|x|<1$, à cause d'un critère de normalité bien connu.

THÉORÈME II. — *Toute famille de fonctions* $f(x)$ *holomorphes dans le cercle* $|x|<1$, *qui ne prennent pas la valeur zéro, et telle qu'on ait, pour une certaine valeur de* k,

$$|f^{(k)}(x)|\geqq 1,$$

est normale dans ce cercle.

Soit

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_n(x),\quad \ldots$$

une suite quelconque extraite de la famille. Il suffira de démontrer qu'il est absurde de supposer qu'elle ne contienne aucune suite partielle normale.

Dans cette hypothèse, en vertu du lemme I et de la formule (4), on aurait, pour $r > r_0$, $n > N_0$,

$$(12)\qquad \begin{aligned} m(r, f_n) &\leqq \left(\frac{r+|x_n|}{r-|x_n|}\right)^2 m\left(r, \frac{1}{f_n}\right) + \frac{r+|x_n|}{r-|x_n|}\log|f_n(x_n)| \\ &\leqq \left(\frac{r+r_0}{r-r_0}\right)^2 m\left(r, \frac{1}{f_n}\right). \end{aligned}$$

D'autre part, puisque

$$\left|\frac{1}{f_n}\right| \leqq \left|\frac{f_n^{(k)}}{f_n}\right|,$$

nous avons, à cause de (8), pour $r < \rho$,

$$(13)\qquad m\left(r, \frac{1}{f_n}\right) \leqq A_k + B_k \log\frac{1}{\rho - r} + C_k \overset{+}{\log} X_n(\rho).$$

(12) et (13) nous donnent, pour $r_0 < r < \rho$,

$$(14)\qquad X_n(r) \leqq 2\frac{r^2 + r_0^2}{(r - r_0)^2}\left[A_k + B_k \log\frac{1}{\rho - r} + C_k \overset{+}{\log} X_n(\rho)\right],$$

d'où, si $r > \dfrac{r_0 + \rho}{r}$,

$$(14')\qquad X_n(r) \leqq 8\frac{\rho^2 + r_0^2}{(\rho - r_0)^2}\left[A_k + B_k \log\frac{1}{\rho - r} + C_k \overset{+}{\log} X_n(\rho)\right].$$

Puisqu'on peut toujours supposer

$$C_k \geqq 2B_k \geqq 8,$$

(14') nous donne, à cause du lemme de M. Bureau,

$$X_n(r) \leqq 8\frac{\rho^2 + r_0^2}{(\rho - r_0)^2}\left[A_k(C_k + 1) + B_k(C_k + 3)\log\frac{1}{\rho - r}\right]$$

pour

$$(15)\qquad 1 - \frac{(\rho - r_0)^2}{8C_k(\rho^2 + r_0^2)} < r < \rho < 1, \qquad r > \frac{\rho + r_0}{r},$$

les inégalités (15) étant évidemment compatibles si $1 - \rho$ est assez petit.

Les $X_n(r)$ sont donc, pour chaque valeur de r, également bornées ; les $m(r, f_n)$ jouissent alors de la même propriété, et le théorème de M. Montel nous assure que la suite des $f_n(x)$ est normale, ce qui est contraire à l'hypothèse que nous avons faite. Le théorème est donc démontré.

Une conséquence de ce théorème est le lemme suivant, dont la démonstration est analogue à celle du lemme I :

Lemme II. — *Si une suite de fonctions holomorphes dans le cercle* $|x| < 1$,

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_n(x),\quad \ldots$$

qui ne prennent pas la valeur zéro, est telle qu'aucune suite partielle extraite des f_n *ne soit pas normale, on peut choisir, quel que soit* k, *les nombres* $r_k < 1$, N_k, $x_n^{(k)}$ $(|x_n^{(k)}| < r_k)$, *de façon que, pour* $n > N_k$, *on ait*

$$|f_n^{(k)}(x_n^{(k)})| < 1.$$

Théorème III. — *Toute famille de fonctions* $f(x)$ *holomorphes dans le cercle* $|x| < 1$, *qui ne prennent pas la valeur zéro et dont les dérivées* $k^{\text{ièmes}}$ *sont également bornées, est normale dans ce cercle.*

En effet, soit

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_n(x),\quad \ldots$$

une suite extraite de la famille, et supposons qu'on ait

$$|f_n^{(k)}(x)| < L.$$

Il suffira de démontrer qu'il est absurde de supposer que la suite des $f_n(x)$ ne contienne aucune suite partielle normale. En effet, dans cette hypothèse, on aurait, à cause du lemme II, pour $n > N_{k-1}$,

$$f_n^{(k-1)}(x) = f_n^{(k-1)}(x_n^{(k-1)}) + \int_{x_n^{(k-1)}}^{x} f_n^{(k)}(z)\,dz,$$

$$|f_n^{(k-1)}(x)| \leqq 2L + 1.$$

Pour $n > N_i$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$, on aurait, de la même façon,

$$|f_n(x)| \leqq 2^k L + 2^k - 1,$$

ce qui assure que la suite des $f_n(x)$ ne peut pas ne pas être normale.

Il s'ensuit :

Lemme III. — *Si une suite de fonctions holomorphes dans le cercle* $|x|<1$,

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_n(z),\quad \ldots,$$

qui ne prennent pas la valeur zéro, est telle qu'aucune suite partielle extraite des f_n *ne soit pas normale. on peut choisir, quel que soit* k, *les nombres* $r'_k<1$, N'_k, $y'^{(k)}_n$ $(|y'^{(k)}_n|<r'_k)$, *de façon que, pour* $n>N'_k$, *on ait*

$$|f_n^{(k)}(y'^{(k)}_n)|>2.$$

Théorème IV. — *Toute famille de fonctions* $f(x)$ *holomorphes dans le cercle* $|x|<1$, *qui ne prennent pas la valeur zéro, et telles que les fonctions*

$$\frac{f^{(k+1)}(x)}{f^{(k)}(x)-1}$$

soient également bornées, est normale dans ce cercle.

Soit

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_n(x),\quad \ldots$$

une suite quelconque extraite de la famille, et supposons qu'on ait

$$\left|\frac{f_n^{(k+1)}(x)}{f_n^{(k)}(x)-1}\right|<L.$$

Il suffira de démontrer qu'il est absurde de supposer que la suite des f_n ne contienne aucune suite partielle normale. En effet, dans cette hypothèse, on aurait, à cause du lemme II, pour $n>N_k$,

$$|f_n^{(k)}(x)-1|\leqq e^{2L}\,|f_n^{(k)}(x_n^{(k)})-1|;$$

d'où

$$|f_n^{(k)}(x)|\leqq 2e^{2L}+1,$$

ce qui assure, à cause du théorème III, que la suite des $f_n(x)$ ne peut pas ne pas être normale. Il s'ensuit :

Lemme IV. — *Si une suite de fonctions holomorphes dans le cercle* $|x|<1$,

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_n(x),\quad \ldots,$$

qui ne prennent pas la valeur zéro, est telle qu'aucune suite partielle extraite des f_n ne soit normale, on peut choisir, quel que soit k. les nombres $r''_k < 1$, N''_k, $z_n^{(k)}(|z_n^{(k)}| < r''_k)$. de façon que, pour $n > N''_k$, on ait

$$\left| \frac{f_n^{(k+1)}(z_n^{(k)})}{f_n^{(k)}(z_n^{(k)}) - 1} \right| > 1.$$

3. **Démonstration du théorème I'.** — Nous pouvons maintenant démontrer le théorème I'.

Remarquons, tout d'abord, que toute suite extraite de la famille, contenant une infinité de polynomes de degrés inférieurs ou égaux à k, contient au moins une suite partielle uniformément convergente, parce que la suite formée par ces polynomes est normale en vertu du théorème III.

Il suffira donc de démontrer que si

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots$$

est une suite quelconque, extraite de la famille, ne contenant aucun polynome de degré inférieur ou égal à k, il est absurde de supposer qu'elle ne contienne aucune suite partielle normale. Dans ces hypothèses, remarquons, avec M. Bureau, que

$$\left| \frac{1}{f_n} \right| \leqq \left| \frac{f_n^{(k)}}{f_n} \right| + \left| \frac{f_n^{(k)} - 1}{f_n^{(k+1)}} \right| \cdot \left| \frac{f_n^{(k+1)}}{f_n} \right|, \tag{16}$$

d'où

$$m\left(r, \frac{1}{f_n}\right) \leqq \log 2 + m\left(r, \frac{f_n^{(k)}}{f_n}\right) + m\left(r, \frac{f_n^{(k+1)}}{f_n}\right) + m\left(r, \frac{f_n^{(k)} - 1}{f_n^{(k+1)}}\right). \tag{17}$$

Appelons $r' < 1$ le plus grand des nombres r_0, r'_k, r''_k, et N le plus grand des nombres N_0, N'_k, N''_k. Pour $r > r'$, $n > N$, on a la formule suivante :

$$m(r, f_n) \leqq \left(\frac{r + r'}{r - r'}\right)^2 m\left(r, \frac{1}{f_n}\right), \tag{18}$$

qui s'obtient en substituant r' à r_0 dans (12).

On a également, à cause des lemmes III et IV, en appliquant la formule (3) aux fonctions $f_n^{(k)} - 1$ et $\dfrac{f_n^{(k+1)}}{f_n^{(k)} - 1}$,

$$m\left(r, \frac{1}{f_n^{(k)} - 1}\right) \leqq \left(\frac{r + r'}{r - r'}\right)^2 m(r, f_n^{(k)} - 1), \tag{19}$$

$$m\left(r, \frac{f_n^{(k)} - 1}{f_n^{(k+1)}}\right) \leqq \left(\frac{r + r'}{r - r'}\right)^2 m\left(r, \frac{f_n^{(k+1)}}{f_n^{(k)} - 1}\right). \tag{20}$$

(17), (18), (20) nous donnent

$$(21)\quad X_n(r) \leqq 2\frac{r^2+r'^2}{(r-r')^2}\left[\log 2 + m\left(r, \frac{f_n^{(k)}}{f_n}\right) + m\left(r, \frac{f_n^{(k+1)}}{f_n}\right) + \left(\frac{r+r'}{r-r'}\right)^2 m\left(r, \frac{f_n^{(k+1)}}{f_n^{(k)}-1}\right)\right].$$

(8) et (21) nous donnent, pour $\frac{r'+\rho}{2} < r < \rho$,

$$(22)\quad X_n(r) \leqq 8\frac{\rho^2+r'^2}{(\rho-r')^2}\left[\log 2 + A_k + A_{k+1} + (B_k + B_{k+1})\log\frac{1}{\rho - r} + (C_k + C_{k+1})\overset{+}{\log} X_n(\rho) + 4\left(\frac{\rho+r'}{\rho-r'}\right)^2 m\left(r, \frac{f_n^{(k+1)}}{f_n^{(k)}-1}\right)\right].$$

Il faut maintenant majorer $m\left(r, \frac{f_n^{(k+1)}}{f_n^{(k)}-1}\right)$. Si nous remplaçons, dans la formule (8), f par $f_n^{(k)} - 1$, k par 1 et ρ par $\rho_1 = \frac{r+\rho}{2}$, nous avons

$$(23)\quad m\left(r, \frac{f_n^{(k+1)}}{f_n^{(k)}-1}\right) \leqq A_1 + B_1 \log 2 + B_1 \log\frac{1}{\rho - r} + C_1 \overset{+}{\log} X'_n(\rho_1),$$

où

$$X'_n(\rho_1) = m(\rho_1, f_n^{(k)} - 1) + m\left(\rho_1, \frac{1}{f_n^{(k)} - 1}\right).$$

(19) nous donne, pour $r = \rho_1$,

$$X'_n(\rho_1) \leqq 2\frac{\rho_1^2 + r'^2}{(\rho_1 - r')^2} m(\rho_1, f_n^{(k)} - 1);$$

d'où, puisque $\frac{r'+\rho}{2} < r < \rho_1 < \rho$,

$$\begin{aligned}(24)\quad X'_n(\rho_1) &\leqq 8\frac{\rho^2+r'^2}{(\rho-r')^2}[\log 2 + m(\rho_1, f_n^{(k)})] \\ &\leqq 8\frac{\rho^2+r'^2}{(\rho-r')^2}\left[\log 2 + m\left(\rho_1, \frac{f_n^{(k)}}{f_n}\right) + m(\rho_1, f_n)\right] \\ &\leqq 8\frac{\rho^2+r'^2}{(\rho-r')^2}\left[\log 2 + A_k + B_k \log\frac{2}{\rho - r} + C_k \overset{+}{\log} X_n(\rho) + X_n(\rho)\right] \\ &\leqq 8\frac{\rho^2+r'^2}{(\rho-r')^2}\left[A_k + (B_k + 1)\log 2 + \frac{B_k}{\rho - r} + (C_k + 1)X_n(\rho)\right].\end{aligned}$$

(22), (23) et (24) nous donnent enfin une inégalité de la forme

$$(25) \qquad X_n(r) \leqq \sigma + \sigma_1 \log \frac{1}{\rho - r} + \sigma_2 \overset{+}{\log} X_n(\rho).$$

En vertu du lemme de M. Bureau (25) nous donne, pour chaque valeur de r, une borne supérieure de $X_n(r)$, dont l'existence est, à cause du théorème de M. Montel, incompatible avec les hypothèses que nous avons fait. Le théorème I′ est donc établi. Nous voulons encore remarquer que, dans la démonstration du théorème I′, il n'est pas nécessaire de supposer $k > 0$. En effet, si $k = 0$, (18) et (20) sont encore valables et (16), (17), (22), (23) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(16') \qquad \left|\frac{1}{f_n}\right| \leqq 1 + \left|\frac{f_n - 1}{f'_n}\right| \left|\frac{f'_n}{f_n}\right|,$$

$$(17') \qquad m\left(r, \frac{1}{f_n}\right) \leqq \log 2 + m\left(r, \frac{f_n - 1}{f'_n}\right) + m\left(r, \frac{f'_n}{f_n}\right),$$

$$(22') \quad X_n(r) \leqq 8\,\frac{\rho^2 + r'^2}{(\rho - r')^2}\left[\log 2 + A_1 + B_1 \log \frac{1}{\rho - r} + C_1 \overset{+}{\log} X_n(\rho) + 4\left(\frac{\rho + r'}{\rho - r'}\right)^2 m\left(r, \frac{f'_n}{f_n - 1}\right)\right],$$

$$(23') \quad m\left(r, \frac{f'_n}{f_n - 1}\right) \leqq A_1 + B_1 \log 2 + B_1 \log \frac{1}{\rho - r} + C_1 \overset{+}{\log}\left[m(\rho_1, f_n - 1) + m\left(\rho_1, \frac{1}{f_n - 1}\right)\right].$$

Pour achever la démonstration du théorème il suffit donc de démontrer qu'aussi la formule (19) est valable pour $k = 0$, ce qui, dans ce cas, n'est pas une conséquence du lemme III et de la formule (3).

Dans ce but, remarquons que si la suite des f_n ne contient aucune suite partielle normale, la suite des $\frac{1}{f_n - 1}$ jouit de la même propriété. En vertu du lemme I, en appliquant la formule (4) à ces fonctions, nous avons alors

$$(19') \qquad m\left(r, \frac{1}{f_n - 1}\right) \leqq \left(\frac{r + r'}{r - r'}\right)^2 m(r, f_n - 1)$$

si $1 - r'$ est suffisamment petit.

Le théorème I′ est donc établi même si $k = 0$. Il est bien connu que, par conséquent, aussi le théorème I est vrai pour $k = 0$, pourvu que l'on ait $a \neq b$.

Notre théorème contient donc, comme cas particulier, le théorème de M. Montel sur les familles de fonctions admettant deux valeurs exceptionnelles.