BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL DELENS

Du cercle aux coniques ; l'association isotrope

Bulletin de la S. M. F., tome 63 (1935), p. 231-245
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1935__63__231_0>

DU CERCLE AUX CONIQUES; L'ASSOCIATION ISOTROPE (1);

PAR M. PAUL DELENS.

La belle conférence donnée le 23 janvier 1935 par M. H. Lebesgue, *Sur les droites focales de M. Paul Robert et leur application à la théorie des coniques* (2), prête à d'intéressants rapprochements avec des théories voisines. En nous écartant peu de son thème principal, mais laissant en évidence le rôle des éléments complexes et de l'ombilicale (3), nous pourrons souligner par une suite d'exemples l'importance des associations isotropes, ci-dessous définies, et montrer aussi l'unité de la méthode.

1. Le *principe d'association isotrope* de Laguerre (*Œuvres*, t. II) et Darboux (*Principes de géométrie analytique*) consiste, par l'intermédiaire des droites isotropes dans le plan et sur la sphère, des développables isotropes dans l'espace, à associer à des éléments *cj.* (= *conjugués complexes*) des éléments réels qui, substitués aux premiers, permettent un *mode de représentation des imaginaires*, un *principe de transfert* des propriétés, de l'imaginaire au réel (et inversement). Un vocabulaire traduira les propriétés élémentaires de la correspondance au moyen d'*involutions orthogonales* (ou rectangulaires; en abrégé *i.r.*) d'éléments réels, elles-mêmes rapportées à des *involutions elliptiques* (*i.e.*), ce qui rejoint le point de vue projectif de Von Staudt, ainsi complété

(1) Conférence faite (sous forme un peu abrégée) le 26 juin 1935 à la *Société mathématique de France* (avec le sous-titre : *à propos d'une récente conférence de M. H. Lebesgue*).

(2) *Cf.* ce *Bulletin*, t. LXIII, fasc. I-II, 1935, où le texte, un peu développé, de cette conférence, aura été publié : M. Lebesgue a bien voulu me communiquer récemment les premières épreuves de sa rédaction.

(3) M. Lebesgue s'était au contraire — au moins dans son exposé oral — proposé l'emploi de démonstrations *réelles*; à ce point de vue, notre exposé, visant plutôt à *dénuder* les questions, est, en bien des points, susceptible d'aménagements intéressants (*Cf.* la note terminale).

pour les notions métriques ou anallagmatiques [1]. En rappelant sommairement les cas et les propriétés les plus simples, je ne pourrai insister assez ici sur l'ordre des éléments, l'orientation, souvent *essentiels* pour ces questions. Enfin les méthodes d'assotion isotrope s'appliquent aussi à deux éléments qui ne sont nécessairement ni *cj.*, ni tous deux réels (exemple, fin du n° 9).

(**a**). *Deux paires de points associés dans un plan*, A, B réels, A′, B′ *cj.*, sont constituées des sommets opposés d'un parallélogramme isotrope; A et B sont les sommets d'*i.r.* de droites, découpant sur la médiatrice de AB une *i.e.*, de points doubles A′, B′. On passe facilement au point de vue anallagmatique : *i.r.* de cercles par A, B, cercles-points (A′) et (B′) de ce faisceau. Laguerre et Darboux ont déjà traduit les propriétés d'association (quatre conditions simples) par diverses relations entre angles et distances définis à partir d'un point arbitraire M du plan; disons, par exemple, que pour les vecteurs $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ et leurs analogues $\overrightarrow{MA'}$, $\overrightarrow{MB'}$, les égalités respectives des moyennes additives $\overrightarrow{MV}$, $\overrightarrow{MV'}$, et harmoniques (au sens de Laguerre) $\overrightarrow{MH}$, $\overrightarrow{MH'}$, quantités définies pour $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ par

$$\overrightarrow{MV} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right), \qquad \overrightarrow{1/MH} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{1/MA} + \overrightarrow{1/MB}\right),$$

entraînent la coïncidence des systèmes de bissectrices et l'égalité

$$MA.MB = MA'.MB'.$$

Les mêmes auteurs ont montré l'identité des définitions du cercle $\frac{MA}{MB} = \text{const.}$ et $\left(\widehat{MA', MB'}\right) = \text{const.}$, rattaché à la définition projective (tangentielle) des coniques la relation

$$\varepsilon r + \varepsilon' r' = \textbf{const.} \qquad (\varepsilon,\ \varepsilon' = \pm 1), \qquad \ldots.$$

Nous utiliserons plus loin (n° 9) l'énoncé suivant (Laguerre) : *Si*

---

[1] La géométrie anallagmatique conduit à la représentation des sphères par les points *et les hyperplans* d'un espace à quatre dimensions, pourvu d'une hyperquadrique fondamentale; c'est dans cet espace qu'on reviendra au point de vue projectif.

deux points décrivent des divisions homographiques circulaires (ou circulaire et rectiligne, ou rectilignes), *il en est de même des points associés, toutes les correspondances restant homographiques*. Il ne s'agit pas là d'une association entre paires de cercles (ou droites), mais seulement entre les paires de ponctuelles homographiques sur ces supports.

(**a'**). Les associés *spatiaux* de A', B' *cj.* sont les deux cycles opposés portés par le cercle qui a ces points pour foyers et pour trace *normale*, sur tout plan passant par son axe A'B', deux points tels que A, B. Deux points réels A, B sont de même associés spatiaux de deux cycles *cj.* portés par un cercle *idéal* (d'équations réelles, de rayon imaginaire pur).

2. (**b**). Soient *deux droites d'un plan cj. de première espèce*. Pour deux droites parallèles, leurs traces sur un plan perpendiculaire ramènent à (**a**). Pour deux droites concourantes en O (non isotropes en général), un quadrilatère isotrope du plan à l'infini guide l'association; ses *trois* paires de sommets opposés définissent *trois* paires de droites associées issues de O : α', β' *cj.*, α, β réelles, α'', β'' *cj.*, situées respectivement dans les plans W, U, V d'un trièdre trirectangle réel (diagonal de $O.\alpha'\beta'\alpha\beta\alpha''\beta''$); dans W, par exemple, α' et β' sont les droites doubles d'une *i.e.* de rayons, découpée par les *i.r.* de plans menés par α ou β. L'orientation des droites suivant des *axes* permet d'associer *par couples* les *six* paires d'axes obtenues. Ceci ramène la figure spatiale à celle tracée sur une sphère de centre O, étudiée analytiquement par Darboux avec les génératrices isotropes, une droite α perçant la sphère en A et a, diamétralement opposés. Darboux a donné le tableau des six paires de points *associés sphériques*, foyers d'une conique sphérique; les droites AB et A'B' sont polaires réciproques, etc., et l'accord subsiste avec l'association spatiale (**a'**) : cercle de foyers A', B', de trace normale A, B sur (O), etc.

Transportons aux paires de droites certaines des relations établies par Darboux à partir d'un point arbitraire M de la sphère : les plans Mα, Mβ et leurs analogues ont *mêmes plans bissecteurs*; entre les distances $r_A = MA$, ..., les relations de Darboux

$$\text{(1)} \qquad \cos\theta = \frac{r_A r_B}{r_{A'} r_{B'}} = \frac{r_a r_b}{r_{a'} r_{b'}} \qquad \left(2\theta = \widehat{AB} = \widehat{\alpha, \beta}\right),$$

donnent, avec $R = OM$, $(M, \alpha) =$ distance de M à α, d'après $r_A r_a = 2R(M, \alpha)$, ...

$$\cos^2\theta = \frac{(M, \alpha)(M, \beta)}{(M, \alpha')(M, \beta')}. \tag{1'}$$

Il est d'ailleurs aisé d'établir ces relations, (1) en particulier, à partir du cas (**a**) du plan. Soient, dans un plan P tangent en N à la sphère (O), les paires de points associés A_0, B_0 et A'_0, B'_0, de centre commun N, le point arbitraire M_0 et $\rho_A = M_0A_0$, ... De l'antipode S de N, inversons P suivant (O); les relations

$$\rho_A\rho_B = \rho_{A'}\rho_{B'}, \qquad \rho_A = \frac{2R^2 r_A}{SM.SA}, \qquad \ldots,$$

donnent, avec $SA = 2R\cos\frac{\theta}{2}$, ..., $t = \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$, $t' = \operatorname{tang}\frac{\theta'}{2} = it$,

$$\frac{r_A r_B}{r_{A'} r_{B'}} = \frac{SA.SB}{SA'.SB'} = \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta'}{2}} = \frac{1+t'^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos\theta.$$

C. Q. F. D.

(**b**'). Laguerre avait montré que *les droites cj. α', β' définissent dans leur plan W une transformation ponctuelle indirecte Θ, qui est en général une similitude de rapport* $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2}$, *et son inverse*; Θ présente un cas particulier, translation et retournement autour d'un axe parallèle à la direction de translation, pour α' et β' parallèles; l'opération Θ est dégénérée, son inverse indéterminée (ou le contraire) pour α' et β' isotropes. Les points S et S' étant homologues pour Θ, les droites réelles α, β sont droites focales ou tangentes (en O, pour α', β' isotropes) des cercles $\mathfrak{S}$ orthogonaux à W et de trace normale S, S', associés de leurs foyers *cj.* sur α' et β'. On obtient ainsi, avec M. Robert [1], une relation *réelle* entre les droites α, β et les opérations Θ, Θ^{-1} images de α', β' (ceci par l'intermédiaire des points *cj.* de ces droites et leurs associés dans W et dans l'espace). Déduisons-en une construction simple des droites focales menées d'un point M (hors du

---

[1] *Cf.* ici et pour la suite diverses Notes de M. Robert et de l'auteur, principalement dans l'*Enseignement scientifique*, de 1928 à 1932. La démonstration en cause de M. Robert se rapporte au cas plus général des cercles, ici n° 7 (**e**).

plan du cercle) à un cercle de trace normale A, B sur le plan de symétrie : *projeter orthogonalement* A, B *en* a, b *sur la bissectrice de* $\widehat{AMB}$ *et mener de* M *les tangentes au cercle de trace normale* a, b *sur le même plan de symétrie* (triangles MAa, MBb indirectement semblables).

Soit C le centre d'un cercle $\mathfrak{S}$, OD la direction de son axe; l'*i.e.* de rayons du plan W est encore, par exemple, celle entre les droites OC et OD relatives aux divers cercles $\mathfrak{S}$. En tenant compte de l'orientation et portant OD $=$ R, rayon de $\mathfrak{S}$, on pourra revenir ici à l'image $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right)$ d'un cycle de $\mathfrak{S}$, ou d'un point imaginaire, utilisée en particulier par M. G. Bouligand [1] et par M. H. Mitault.

(**c**). Pour des *droites cj. de deuxième espèce, non coplanaires*, on opère encore avec les plans isotropes menés par les droites. Les axes de symétrie (ou renversement) $y'y$, $z'z$ des droites réelles α, β portent des *i.e.* ponctuelles découpées par les *i.r.* de plans menés par α et β, leur rapportant encore des *i.e.* de droites (intersections des plans précédents) constituant deux réglées de paraboloïdes équilatères, sur lesquelles α' et β', ou α'' et β'', sont les rayons doubles; on sépare les deux paires par l'orientation de α et β, etc.

(**d**). Lois d'incidence. *Un point imaginaire étant situé sur une droite imaginaire,* et son *cj.* sur la droite *cj.*, les involutions définies par leurs éléments doubles formés de ces paires *cj.* de points et de droites, respectivement, sont rapportées l'une à l'autre par ces éléments doubles : *le cercle réel associé de la paire de points cj. et les droites réelles associées des droites cj. sont paratactiques* [comme en (**b**$'$)]. En particulier, *si deux droites imaginaires ont un point commun*, et leurs *cj.* le point *cj.*, *les deux paires de droites réelles associées sont droites focales d'un même cercle.*

---

[1] *Cf.* G. Bouligand, *Premières leçons sur la théorie générale des groupes* (Paris, Vuibert, 1935), p. 177. Cette représentation s'associe naturellement ici à la conception des droites α', β' comme projections orthogonales des droites isotropes d'un plan W_0 et à la considération des ellipses de centre O du plan W, projections orthogonales de cercles concentriques de W_0.

3. Arrivons au sujet traité par M. Lebesgue. Rappelons le point de départ : un cercle $\mathcal{O}$ (centre O, rayon R) d'un plan W, rapporté à deux points inverses A, B (A intérieur); on mène les droites focales Φ, Φ' de A, la droite directrice Δ, polaire de A, et on projette le point courant M de $\mathcal{O}$ en P sur Φ, en H sur Δ. Ceci permet de transformer la définition du cercle $\frac{MA}{MB} = \cos\theta$, constante, en

$$(2) \qquad \frac{MP}{MH} = \cos\theta, \qquad \text{où } MP = \text{dist.}(M, \Phi), \qquad MH = \text{dist.}(M, \Delta).$$

M. Lebesgue a alors *projeté* la relation

$$(2') \qquad \frac{MP}{MH} = c, \text{ constante arbitraire,}$$

devenue ainsi propriété caractéristique d'une conique. Le point de départ de la théorie projective des coniques selon M. Lebesgue est donc la relation entre droite focale et cercle, à l'origine *cas particulier métrique* d'une relation anallagmatique, prolongée par l'amorce d'une polarité. Mais une définition projective (ponctuelle) des coniques doit pouvoir se ramener à la forme classique

$$(3) \qquad M(M_1 M_2 M_3 M_4) = \frac{\overline{MM_1M_3}.\overline{MM_2M_4}}{\overline{MM_1M_4}.\overline{MM_2M_3}} = k$$

ou

$$(3') \qquad \frac{(\overline{M, M_1M_3})(\overline{M, M_2M_4})}{(\overline{M, M_1M_4})(\overline{M, M_2M_3})} = k',$$

(k, k' const.); la forme (3'), qui traduit le théorème de Pappus, est préférable à (3) quand certains des points fixes viennent à coïncider. Supposons qu'ainsi M_1 et M_4 coïncident en T, M_2 et M_3 en T', points de contact des tangentes menées à un cercle $\mathcal{O}$ par un point A extérieur : le cercle est alors défini par la relation élémentaire [1]

$$(4) \qquad (M, TT')^2 = (M, AT)(M, AT').$$

Revenant au cas du début où A est intérieur à $\mathcal{O}$, AT et AT' *cj.*,

---

[1] Dans cette relation, comme dans d'autres, les distances peuvent être considérées comme des valeurs algébriques, convenablement précisées; de même pour les angles. Nous laisserons au lecteur le soin d'établir les conventions nécessaires.

la formule ($1'$) permet de transformer (4). Pour tout point M de W, $(M, \Phi) = (M, \Phi')$, donc ($1'$) devient ici, Φ et Φ' étant les associées réelles de AT, AT',

$$(M, \Phi)^2 = (M, AT)(M, AT')\cos^2\theta.$$

et (4) est ramenée à $(M, \Phi)^2 = (M, \Delta)^2 \cos^2\theta$, soit (2).

4. **Il est naturel, en géométrie projective, de considérer le point de vue dualistique et de chercher à adjoindre à (2), ou à ($2'$), une propriété tangentielle, ou une propriété *mixte*, comme celle énoncée dans la suite par M. Lebesgue : *on voit de Φ sous un angle dièdre droit le segment de tangente* MI *entre le point de contact et la droite directrice Δ, soit***

$$\widehat{M\Phi I} = 1 \text{ droit}, \tag{5}$$

d'où ensuite aussi

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \cos\theta \tag{6}$$

ou

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = c \qquad \left(\alpha = \widehat{MIP},\ \beta = \widehat{MIH}\right). \tag{6'}$$

Mais (5) est conséquence différentielle de ($2'$), et de même de ($6'$); inversement ($2'$) et ($6'$) sont des *intégrales* de la seule relation (5), dont la démonstation directe, *indépendamment de* (2) *ou* ($2'$), est intéressante.

Les points de contact T, T' des tangentes *cj.* issues de A, situés sur Δ, sont les foyers de leur associé spatial, le cercle $\mathcal{B}$, axial à $\mathcal{C}$; $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ ont pour centre radical A, d'où sont issues Φ, Φ', *droites focales communes des deux cercles*, associées aussi des tangentes *cj.* menées de A à $\mathcal{B}$. Dans W, en prolongeant AM jusqu'en J sur Δ, on obtient le triangle AIJ, autopolaire pour $\mathcal{C}$. Par $\mathcal{B}$ passent les trois sphères orthogonales à $\mathcal{C}$: (I, $\mathcal{B}$) de centre I, (J, $\mathcal{B}$) de centre J, et la sphère de diamètre IJ. Les *i.e.* de *droites conjuguées à $\mathcal{C}$, menées par* A, de points I, J sur Δ, les *i.r.* de sphères (I, $\mathcal{B}$), (J, $\mathcal{B}$), de plans par Φ, sont toutes rapportées l'une à l'autre (par incidence, par orthogonalité) : les plans (ΦI) et (ΦJ) sont rectangulaires, et ce dernier contient MP, d'où (5). C. Q. F. D.

L'intégration de (5), *prise comme point de départ*, est immédiate par la géométrie infinitésimale, après projection sur un plan perpendiculaire à Φ : pour un déplacement élémentaire MM_1 *sur une tangente* MI $\left(\text{on a alors } \frac{MH}{MI} = \frac{M_1H_1}{M_1I} = \sin\beta, \text{ constant}\right)$, (5) définit le point de contact M comme correspondant au minimum de $\frac{MP}{MH}$, d'où *sur la courbe enveloppée* $\frac{MP}{MH} = c$, soit (2'). La relation (5) est *l'équation différentielle* d'un faisceau (ponctuel et tangentiel) de coniques bitangentes d'un plan, ayant mêmes droites Φ et Δ. Elle est d'autre part aussitôt projetée par la méthode même de M. Lebesgue, à qui appartiennent en substance les remarques qui suivent.

5. J'affecte de l'indice o les éléments à projeter : plan W_0 portant une droite Δ_0 et un point A_0, d'où sont issues Φ_0 et sa symétrique Φ'_0 par rapport à W_0. Soient S le centre, W le plan de projection coupant W_0 suivant une droite Λ; Δ_0 est projetée en Δ, A_0 en A auquel sera attachée une certaine droite Φ, *fausse* ou *pseudo-projection* de Φ_0 (de même Φ' pour Φ'_0). L'*i.r.* de plans par Φ_0 (ou Φ'_0) rapporte sur Λ l'*i.e.* ponctuelle découpée sur Δ_0, projetée d'autre part sur Δ. Les *i.e.* sur Δ et Λ, rapportées l'une à l'autre dans W par les droites passant par A, définissent dans l'espace les axes cherchés Φ et Φ' des *i.r.* de plans dont les droites précédentes de W sont les traces.

Les *i.r.* de plans par Φ_0 et Φ, Φ'_0 et Φ', étant rapportées à la même *i.e.* de points sur Λ, *les quatre droites* Φ_0, Φ, Φ'_0, Φ' *sont focales d'un même cercle* $\mathcal{C}$ *d'axe* Λ. L'existence et la situation de Φ, Φ', seules solutions possibles, sont en évidence quand on utilise les éléments doubles, *cf.*, des involutions, soient T_0 et T'_0 sur Δ_0, T et T' sur Δ, G et G' sur Λ, foyers de cercles $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ayant pour axes respectifs les droites indiquées.

Il n'y a donc ici, outre la propriété d'incidence énoncée en (**d**), que la restitution, après projection, d'un *i.r.* de plans — d'où la conservation de (5) — autrement dit, *la propriété d'une i.e. de droites d'un plan de pouvoir être tracée par une i.r. de plans passant par une même droite* (¹). L'emploi des propriétés de

(¹) La projection d'une conique déterminée du faisceau considéré comporte l'élément de contact point-droite était naturel pour une théorie projective des coniques; il s'associe à la projection de la relation différentielle (5), plutôt que de la forme intégrale (2′) [ou (6′)].

La détermination d'un cercle, $\mathcal{B}$ par exemple, à partir des éléments réels des involutions, est aisée. Soient, dans W, φ la projection orthogonale de Φ, δ la parallèle à Δ menée par A, ψ (perpendiculaire à φ) et ε respectivement les traces des plans homologues de $(\Phi\varphi)$ et $(\Phi\delta)$ dans l'*i.r.* d'axe Φ : la droite ε porte le centre B de $\mathcal{B}$, de rayon ρ déterminé par $\rho^2 = -\overline{BD}.\overline{BD'}$, D, D′ appartenant à φ, ψ [1]. Inversement, un couple, soit DD′, de l'*i.e.* de centre B, tracée sur Δ, est vu de A sous un angle droit, et les droites focales Φ, Φ' menées de A à $\mathcal{B}$, cercle dont les sphères découpent l'*i.e.* sur Δ, se projettent sur W suivant la droite AD ou φ intérieure à $\mathcal{B}$.

Pour toute conique $\mathcal{C}$ du faisceau considéré, A pôle de Δ, B sur Δ, et le centre O sont alignés; Φ et Φ' sont des *droites focales* (ou axes focaux) *de Reye* [2], axes d'*i.r.* de plans conjugués aux quadriques du faisceau homofocal à $\mathcal{C}$. On peut aussi, dans des conditions analogues, définir une conique à partir de deux droites Φ, Ψ, sécantes à W, par la relation $(M, \Phi) = k(M, \Psi)$ pour les points M de W, correspondant à (3′), et projeter cette relation. Comme travail récent avec ces méthodes [3] et sur les droites de Reye, indiquons celui de M. C. H. Rowe [*Some theorems on the generators of a Hyperboloïd* (*Math. Ann.*, vol. **103**, 1930, p. 516-531)]; l'auteur (se limitant aux hyperboloïdes) obtient certaines généralisations des propriétés des coniques à centre, en substituant en particulier les plus courtes distances entre droites aux distances de points à droites.

---

encore le calcul de la constante au deuxième membre de (2′) en fonction de la constante initiale et des éléments fixes de la projection; on utilisera pour cela une position particulière de M. *Cf.* aussi H. Lebesgue, *loc. cit.*

(1) On termine facilement aussi quand les couples φ, ψ et δ, ε sont confondus.

(2) *Cf.* Th. Reye, *Leçons sur la géométrie de position*, traduction O. Chemin, I, p. 190; II, p. 202.

(3) J'ai donné quelques renseignements sur des travaux plus anciens dans la Note : *Représentation géométrique des éléments imaginaires. Un tour d'horizon* (*l'Enseignement scientifique*, 5e année, n° 43, 1931). Quant aux études relatives à la parataxie, il suffira de rappeler en outre les noms de MM. A. Bloch, J. Hadamard, A. Demoulin, E. Vessiot, B. Gambier, etc.

6. Dans la figure ci-dessus projetée on retrouve, avec les cercles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, la congruence des cercles ayant en commun les droites focales Φ, Φ' [*cf.* (**d**)], rattachés aux diverses droites de W et *pseudo-perspectifs* pour A (leurs foyers *cj.*, qui leur sont associés, sont perspectifs pour A). De même, les cercles $\mathcal{B}_0$. $\mathcal{B}$, ..., avec deux droites focales issues de S, quand W pivote autour de A, sont ∞^1 cercles d'une congruence analogue. Dans les mêmes conditions, les droites Φ_0, Φ, ..., et de même Φ'_0, Φ', ..., sont pseudo-perspectives pour S (par exemple) et forment les réglées des droites focales de $\mathcal{C}$ qui s'appuient sur la droite SA_0A.

Dans une Note aux *Comptes rendus* de 1930 (*Sur les représentations des cercles*), j'avais indiqué le principe de telles *pseudo-projections* (éléments associés perspectifs) et de transformations ponctuelles *généralisées*, du type ATA^{-1}, où A représente l'association isotrope, T la transformation ponctuelle à laquelle sont soumis les éléments associés. D'un autre côté, M. Robert s'est, à la même époque, attaché aux transformations *cycliques* — opérations les plus générales conservant cycles et parataxie, couples d'opérations sphériques *cj.* appliquées en particulier aux foyers des cycles réels (dont la dilatation est un exemple simple) — et à la traduction *réelle* de ces opérations ([1]). M. Gambier a aussi employé ces méthodes. On ne saurait naturellement oublier l'impulsion due à M. Hadamard pour toutes ces recherches.

On peut encore combiner les points de vue précédents et, s'il s'agit d'une correspondance entre deux figures particulières, bénéficier de l'indétermination de la transformation pour les autres éléments de l'espace. Restant ici au point de vue projectif, et en vue de nouvelles applications de l'association isotrope, dont je prolongerai d'abord les exemples, l'étude de la définition d'une conique, indifférente aux dilatations : (7) *lieu des centres des cycles tangents à deux cycles fixes d'un plan* — montrera la nécessité de généraliser cette définition en renonçant à l'axe focal et sortant du plan de la courbe.

([1]) J'ai donné, sans la même préoccupation, quelques conséquences analytiques du fait que, dans cette géométrie *cyclique*, un cycle est représenté par le système, ordonné, de ses deux foyers, et que c'est là la représentation analytique la plus générale du cycle.

7. (**e**). Cercles et cycles étant ici désignés par leurs foyers, soient (fg) et $(f'g')$ *deux cercles réels cosphériques* (ou coplanaires); les cônes isotropes menés par ces cercles leur associent les deux paires de cercles (ff') et (gg') *cj.*. (fg') et (gf') *cj.* Comme en (**b**), cas auquel on revient par inversion en cas de points réels communs aux cercles, l'orientation des cercles en *cycles* conduit à six paires de cycles, associées par deux. Sans détailler, remarquons qu'on peut continuer à définir les associations au moyen d'*i.e.* et d'*i.r.*, et qu'on reste aussi en accord avec les associations points-cycles envisagées en (**a'**), considérées ici sous les formes (f, g) et (g, f), (f, f) et (g, g). Les cercles (fg) et $(f'g')$ ont deux sphères d'inversion, dont au moins une réelle, sphères qu'on sépare pour les cycles. Sur une sphère d'inversion, réelle pour simplifier, les *i.r.* de sphères menées par (fg) et $(f'g')$ déterminent la même *i.e.* des cercles (réels ou idéaux) d'un faisceau, et aux sphères-points (f) et (f'), (g) et (g'), correspondent les cercles *cj.* (ff') et (gg'), éléments doubles de l'*i.e.* considérée. Au point de vue métrique, l'*i.e.* des axes des cercles précédents, passant par le pôle d'inversion, introduit les droites focales menées de ce point à (fg) et $(f'g')$. Comme en (**b'**) encore, les cercles paratactiques à (fg) et $(f'g')$ déterminent, sur la sphère d'inversion, une *transformation circulaire indirecte* et son inverse.

(**f**). Sans nous arrêter à des cas particuliers ni détailler plus, indiquons que le même principe d'association jouera pour *deux cercles de position quelconque*, les sphères d'inversion entre cercles réels du cas (**e**) étant, à l'exemple de (**c**), *mutatis mutandis*, remplacées par les cercles de symétrie anallagmatique [1]. Pour (**e**) et (**f**) on pourra, comme en (**d**), formuler des lois d'incidence point-cercle, cercle-cercle, entre éléments complexes, traduites par des relations de parataxie entre cercles réels (plus particulièrement entre cycles).

8. Revenons à la définition (7). Soit la conique $\mathcal{O}$, lieu des centres M des cycles (m, m') tangents aux cycles (f, g) de centre F, (f', g') de centre F', du plan W de la courbe; M est

[1] Rappelons toutefois le cas particulier des cercles (fg) et $(f'g')$ paratactiques, auxquels sont associées les droites isotropes (ff') et (gg'); en cas de cercles axiaux, (fg') et (gf') sont aussi des droites isotropes.

projection orthogonale sur W de m et m'. Les lieux de ces foyers sont les cercles *cj.* (ff') et (gg'), associés de (fg) et $(f'g')$ et symétriques par rapport à W, le lieu de m, par exemple, étant celui des intersections des génératrices des cônes isotropes, ou sphères-points, (f) et (f').

Toute conique est ainsi projection orthogonale de deux cercles *cj.*, mais pour aller plus loin et obtenir sur le cylindre projetant, de base $\mathcal{C}$, des sections circulaires réelles, il faut s'en tenir au cas de l'ellipse, où le centre d'homothétie S des cycles (f, g) et (f', g') leur est intérieur. Aux tangentes *cj.* ST, ST$'$ menées de S à ces cycles sont alors associées les droites $f'Sf$, $g'Sg$, *cj.*, et deux droites réelles SD, SL, focales communes des cercles (fg) et $(f'g')$. Dans le plan à l'infini, le quadrilatère isotrope de sommets τ et τ', φ et γ, δ et λ, traces des droites précédentes, définit, par polarité par rapport à l'ombilicale, un quadrangle inscrit dont les paires de côtés opposés sont les traces des plans asymptotiques et des plans de sections circulaires du cylindre droit de base $\mathcal{C}$: *les plans des sections circulaires réelles sont donc perpendiculaires à* SD et SL, *droites focales communes de* (fg) *et* $(f'g')$.

Soit $\mathcal{D}$ ou (dd') un cercle réel ainsi projeté suivant $\mathcal{C}$; la démonstration précédente n'établit pas directement que les droites réelles fg et $f'g'$ et les projetantes *cj.* de d et d' sont des droites associées, focales du cylindre projetant. Ceci résulte de l'*i.e.* portée par l'axe de $\mathcal{D}$ et de sa projection suivant une *i.e.* portée par l'axe non focal de l'ellipse $\mathcal{C}$, déterminant un cercle de trace normale F, F$'$ sur W. Remarquons qu'en tout point M_0 de $\mathcal{D}$ le plan tangent et la normale au cylindre sont projetés suivant la tangente et la normale à $\mathcal{C}$ en M, découpant des points homologues de l'*i.e.* projection. L'ellipse, projection orthogonale du cercle, est ainsi *d'abord* définie par la propriété *différentielle* de sa tangente, bissectrice extérieure des rayons vecteurs FM, F$'$M; un déplacement élémentaire *sur la tangente* y définit M par le minimum de FM + F$'$M, d'où $r + r' =$ const. *sur l'ellipse* [1].

---

[1] Cette démonstration de la relation focale de l'ellipse projection orthogonale du cercle, où intervient la géométrie infinitésimale, est distincte de celles de Courcelles et de M. Robert; la détermination finale de la constante $(2a)$ est immédiate.

D'après ce qui précède, (7) ne conduit pas à une définition projective générale des coniques relative au cycle (m, m') de centre M, définition qu'offre le retour à la forme (2′) employée par M. Lebesgue, avec le *lieu des centres* M *des cycles d'axes parallèles à* Φ (ou à Φ') *tangents à deux cylindres de révolution ayant pour axes l'un* Φ, *l'autre son symétrique* Φ_0 *par rapport au centre* O (cas général).

9. On peut encore rattacher à la conique $\mathcal{O}$ des cycles ou des cercles variables dont les axes sont les tangentes à $\mathcal{O}$; la définition (7) introduit les cercles $(p'q')$ dont la trace normale sur W est formée des points p, q de contact de (mm') avec (fg) et $(f'g')$. Les cercles (mm') sont orthogonaux à un cercle σ, de centre S, bitangent à $\mathcal{O}$, et les cercles $(p'q')$ demeurent axiaux à σ; d'ailleurs p', q', associés *cj.* dans W de p et q qui décrivent sur (fg) et $(f'g')$ des divisions inverses ou homologiques, donc homographiques, décrivent eux-mêmes sur σ des divisions homographiques [*cf.* n° 1 (**a**)]. Mais la propriété ainsi obtenue ne nous intéresse pas du point de vue projectif élémentaire, σ se projetant suivant une conique.

Nous retiendrons au contraire comme définition (ou propriété caractéristique) *projective au sens large* d'une conique la suivante (déjà considérée par Laguerre) : (8) *enveloppe des médiatrices des segments* PQ *du plan* W (ou des axes des cercles ω de trace normale P, Q sur W) *dont les extrémités décrivent sur deux cercles* ϖ *et* χ (ou deux droites) *des divisions indirectement semblables*. Cette définition équivaut en effet à : (8′) *les tangentes à la courbe* $\mathcal{O}$ (cercle ou conique) *issues des points* N *d'une droite* Δ *extérieure découpent une i.e. sur une tangente arbitraire*, dont le caractère projectif, de façon élémentaire, n'est pas douteux, et qui peut, ainsi que (8), être établie pour le cercle rapporté à un point A intérieur et sa polaire Δ, et même pour le cas particulier où A est le centre, Δ à l'infini. Les point doubles *cj.* P′, Q′ de l'*i.e.* considérée décrivent les tangentes *cj.* AT, AT′ issues de A; P et Q sont les associés réels de P′, Q′, donc [n° 1 (**a**)] décrivent des divisions toutes deux circulaires (ou toutes deux rectilignes) indirectement semblables, puisqu'elles se correspondent dans les similitudes indirectes Θ, Θ^{-1} attachées aux droites *cj.* AT, AT′ [n° 1 (**b**′)]. Autrement dit, les cercles ω, de trace normale P, Q, ont pour droites focales communes les associées Φ, Φ' de AT, AT′, et c'est encore le retour à la figure considérée par M. Lebesgue, mais cette fois avec une définition projective *tangentielle*.

Nous compléterons la figure en situant en général, pour une conique $\mathcal{O}$, les cercles ϖ et χ. Ces cercles ont déjà pour *centre de similitude indirecte* A, pour *axes de cette similitude* φ, projection de Φ, et sa perpendiculaire ψ. Leurs centres C, C_0 s'obtiennent pour les positions de P′ et Q′ à l'infini en P'_1 et Q'_2, respectivement, sur AT et AT′; ils sont les associés de Q'_1 et P'_2, sommets opposés du parallélogramme circonscrit à $\mathcal{O}$, dont A et son symétrique A_0 par rapport à O sont les deux autres sommets; donc sont symétriques par rapport à O et situés sur OE perpendiculaire à Δ. Du triangle ACC_0 on connaît cette droite OE, la médiane AO, les bissectrices $A\varphi$ et $A\psi$: la parallèle OD à Δ coupant φ et ψ en K et L, le cercle AKL détermine C et C_0.

Soient H et H′ les points, réels ou *cj.*, communs à ϖ et χ; pour H, par exemple, auquel sont associées, ainsi qu'à son homologue par Θ ou par Θ^{-1}, les deux paires de points $P'_3Q'_3$ et $P'_4Q'_4$, la droite $P'_3Q'_4$ passe par un point cyclique i, $P'_4Q'_3$ par l'autre j : $\mathcal{O}$ est inscrite dans le quadrilatère de côtés AT, AT′, $P'_3Q'_3$, $P'_4Q'_4$, les deux derniers côtés se coupant en α. Pour le faisceau tangentiel inscrit dans ce quadrilatère, $A\alpha$ a pour pôle H, donc H est sur Δ, polaire de A par rapport à $\mathcal{O}$; de même pour H′, donc Δ *est l'axe radical des cercles* ϖ *et* χ, ce qui suffit pour achever la détermination de ces cercles. Mais, en outre, le faisceau tangentiel précédent comprenant les coniques dégénérées $P'_3Q'_4$, $P'_4Q'_3$, l'involution de tangentes menées de H comprend les droites isotropes, rayons doubles, Hi et Hj; de même pour H′. Donc *le cercle de Monge de* $\mathcal{O}$ *appartient au faisceau des cercles* ϖ, χ.

On retrouve le point caractéristique M de la tangente variable quand N, sur Δ, appartient à cette tangente, donc occupe la position I, avec la propriété (5) $\widehat{M\Phi I} = 1$ droit, et aussi $\widehat{IPM} = 1$ droit [1], etc. Nous ne pouvons que signaler l'intérêt de deux cas particuliers :

---

(1) Il ne s'agit naturellement pas du point P considéré aux n° 3 et 4.

1° A foyer de la conique $\mathcal{C}$, dont on retrouve la définition par foyer et cercle directeur; 2° A centre O d'une ellipse, projection orthogonale de cercle, cas qui justifierait quelques développements [1].

---

[1] Le lecteur désireux de poursuivre l'étude de ce cas tiendra compte de l'indication donnée dans la seconde note du n° 2.

N. B. (*Note ajoutée à la correction des épreuves*). — Je suis revenu sur ce cas dans des études qui paraîtront en 1936 dans *Mathesis* et *l'Enseignement scientifique*, et qui comportent aussi des démonstrations élémentaires, par voie *réelle*, de plusieurs des propriétés utilisées ici.