BULLETIN DE LA S. M. F.

J. NEYMAN

Sur la vérification des hypothèses statistiques composées

Bulletin de la S. M. F., tome 63 (1935), p. 246-266
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1935__63__246_0>

SUR LA VÉRIFICATION DES HYPOTHÈSES STATISTIQUES COMPOSÉES;

PAR M. J. NEYMAN.

1. Historique. — On sait que les problèmes de vérification des hypothèses ont été traités depuis Thomas Bayes (¹) [1]. Les solutions qu'on obtenait dépendaient des probabilités *a priori*. Celles-ci étant généralement inconnues, on a été obligé d'en faire des hypothèses arbitraires qui rendaient les résultats inapplicables aux problèmes pratiques.

Il y a 35 ans, Karl Pearson [2] publia une méthode de vérification d'une hypothèse statistique particulière, méthode connue sous le nom de χ^2. Il n'était pas question des probabilités *a priori* dans ce Mémoire qui a joué un rôle remarquable. Il a été suivi d'une série de travaux du même auteur ainsi que de ses continuateurs dont les représentants principaux sont MM. W. P. Elderton, R. A. Fisher, E. S. Pearson, « Student », J. Wishart et d'autres. Je dois mentionner aussi des travaux de Lexis et Bortkiewicz concernant l'hypothèse sur la constance des probabilités.

Quoique une quantité de problèmes d'une grande importance fussent résolus par ces auteurs, l'origine de la théorie générale de vérification des hypothèses se rattache aux remarques extrêmement intéressantes des géomètres français, notamment de J. Bertrand [3] et de M. E. Borel [4]. Ils considéraient le procédé de vérification d'une hypothèse H, qui est au fond celui qu'applique l'école anglaise. On observe un fait E et l'on choisit comme base pour la vérification de l'hypothèse H un caractère $f(E)$ de E. On calcule la probabilité P déterminée par H de $f(E)$. Si la probabilité P est jugée petite, on rejette H; si, au contraire, P est considérable, on ne trouve pas de raisons suffisantes pour rejeter H.

(¹) Les chiffres entre crochets désignent, dans ce qui suit, le numéro de l'ouvrage cité dans la liste qui termine le présent Mémoire.

On sait que Bertrand a été sceptique sur la valeur scientifique des résultats d'un tel procédé. D'autre part, M. Borel a insisté sur le fait que ce résultat peut être valable, à condition que le caractère $f(E)$ du fait observé qui serve de base pour vérifier H, soit « en quelque sorte remarquable ».

Cette dernière remarque a précédé une série de travaux [1] amorçant la théorie générale de vérification des hypothèses où au fond, on s'efforçait de donner un sens précis aux paroles un peu vagues de M. Borel concernant le caractère du fait observé qui est « en quelque sorte remarquable ».

Avant d'en venir au problème qui est le sujet principal de cette Note, il nous paraît utile de rappeler brièvement les résultats obtenus jusqu'ici.

2. Notations et remarques préliminaires. — Je désignerai par $P\{E\}$ la probabilité de tout événement E, et par $P\{E_1 | E_2\}$ celle de l'événement E_1 calculée en supposant qu'un autre événement E_2 s'est déjà produit. Si

$$(1) \qquad X_1,\quad X_2,\quad \ldots,\quad X_n$$

désignent un système de n variables aléatoires et

$$(2) \qquad x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_n$$

un système de valeurs particulières de ces variables, je vais désigner par E le point dans l'espace W à n dimensions, dont les coordonnées sont égales à (2). Le point E va être appelé le point empirique et W l'espace empirique. Soit w un ensemble mesurable quelconque dans W, et $P\{E \in w\}$ la probabilité pour que le point E tombe dans w. La probabilité $P\{E \in w\}$ considérée comme fonction de l'ensemble w sera dite la loi de probabilité totale des variables (1).

Toute hypothèse H concernant la nature de la loi de probabilité $P\{E \in w\}$ est dite une *hypothèse statistique*. Une hypothèse statistique est dite *simple* si elle détermine la valeur de $P\{E \in w\}$ d'une manière univoque pour tout ensemble mesurable w dans W.

---

(1) *Voir* [5]-[18].

Toute hypothèse statistique qui n'est pas simple est dite *composée ;* il doit y avoir au moins un ensemble mesurable w' dans W tel que la valeur de $P\{E \in w'\}$ ne se trouve pas déterminée uniquement par H, si H est une hypothèse composée. Donc si H est composée il doit exister un ensemble des hypothèses simples, H', qui peuvent être obtenues de H en lui ajoutant quelques suppositions supplémentaires. De ces hypothèses H' je dirai qu'elles ne contredisent pas H.

Dans ce qui suit, je vais considérer les méthodes de vérification des hypothèses statistiques. Une telle méthode consiste à choisir un ensemble mesurable w_0 dans W et à prendre pour règle de rejeter l'hypothèse H qu'on vérifie lorsque le point empirique E déterminé par les valeurs observées des (1) tombe dans w_0. Si le point E ne tombe pas dans w_0, on s'abstient alors de rejeter H, ce que je vais désigner en disant qu'on accepte H.

L'ensemble w_0 dont on se sert de cette manière pour « vérifier » l'hypothèse H est dit un *ensemble critique*, et son complémentaire $W - w_0$, un *ensemble d'acceptation*. Si deux méthodes de vérification d'une hypothèse H diffèrent entre elles, c'est que les ensembles critiques correspondant son différents. Choisir une méthode de vérification, c'est choisir un ensemble critique.

Le choix d'un ensemble critique doit être basé sur les considérations des erreurs qu'on peut commettre en vérifiant une hypothèse. Celles-ci peuvent être d'une des deux catégories suivantes : 1° on peut rejeter l'hypothèse H_0 qu'on vérifie lorsqu'en fait elle est exacte et 2° on peut accepter H_0 lorsqu'elle est fausse.

Remarquons que, lorsqu'il est question de vérifier une hypothèse H_0, c'est qu'on admet la possibilité d'au moins une autre hypothèse contradictoire à H_0 que je vais appeler une hypothèse alternative, qui peut être exacte. Je vais supposer que dans tous les cas particuliers on peut définir un ensemble Ω des hypothèses simples qui sont possibles. On peut alors dire que l'erreur de la seconde catégorie consiste à accepter l'hypothèse H_0 qu'on vérifie, lorsque c'est une hypothèse H_1 contenue dans Ω contradictoire à H_0 qui est exacte.

Dans les récents travaux [1], on a cherché les méthodes de véri-

---

[1] *Voir* [8], [9], [10].

fication (c'est-à-dire les ensembles critiques) satisfaisant aux deux conditions suivantes :

1° que lorsque l'hypothèse H_0 à vérifier est exacte, la probabilité pour qu'elle soit rejetée soit au plus égale ou, s'il se peut, égale à un nombre déterminé d'avance α;

2° que lorsque c'est une hypothèse alternative H_1 qui est exacte, la probabilité pour qu'on rejette H_0 soit en général aussi grande que possible.

On voit que ces deux conditions demandent à être précisées.

3. **Ensembles critiques uniformément les plus puissants.** — Soit w un ensemble critique quelconque, destiné à la vérification d'une hypothèse statistique H_0. Considérons la probabilité $P\{E \in w \mid H_0\}$ calculée en supposant que l'hypothèse H_0 est juste. Si cette probabilité est bien déterminée par H_0 (ce qui a toujours lieu lorsque l'hypothèse H_0 est simple et dans certains cas lorsqu'elle est composée), la valeur $P\{E \in w \mid H_0\} = \alpha$ sera alors appelée *l'aire* de l'ensemble critique w. Si la probabilité $P\{E \in w \mid H_0\}$ n'est pas déterminée (ce qui peut avoir lieu quand H_0 est composée), nous dirons que l'aire de l'ensemble w est indéterminée.

On voit que $P\{E \in w \mid H_0\}$ est égale à la probabilité d'une erreur de la première catégorie calculée en supposant que l'hypothèse à vérifier H_0 est exacte. Il en résulte la tendance d'utiliser seulement les ensembles critiques qui ont une aire α bien déterminée, et assez petite. Je vais supposer que w est un tel ensemble.

Désignons par H_1 une hypothèse admissible simple, alternative à H_0 et la probabilité déterminée par cette hypotèse

$$\beta(H_1 \mid w) = P\{E \in w \mid H_1\} \tag{3}$$

pour que le point empirique E tombe dans l'ensemble critique w. On voit que $1 - \beta(H_1 \mid w)$ est la probabilité d'une erreur de la seconde catégorie, calculée en supposant que l'hypothèse exacte est H_1. On appelle $\beta(H_1 \mid w)$ la *puissance* de l'ensemble critique w par rapport à l'hypothèse H_1.

On dit [1] *qu'un ensemble w_0 est un ensemble critique d'aire α*

---

[1] *Voir* [8] et [9].

le plus puissant par rapport à une hypothèse alternative simple H_1 *s'il possède les propriétés suivantes :*

a, l'aire de w_0 *est bien déterminée et est égale à* α;

b, la puissance de w_0 *par rapport à* H_1 *est au moins égale à celle de n'importe quel ensemble* w *dont l'aire est bien déterminée et égale à* α.

Nous dirons qu'un ensemble w_0 *est un ensemble critique d'aire* α, *uniformément le plus puissant par rapport à l'ensemble* Ω *des hypothèses alternatives simples, s'il est un ensemble critique d'aire* α *le plus puissant par rapport à n'importe quelle hypothèse simple alternative à* H_0 *et faisant partie de* Ω.

Il est aisé de voir que s'il existe un ensemble critique d'aire α, uniformément le plus puissant par rapport à Ω, alors en l'appliquant à la vérification de l'hypothèse H_0 on aura l'avantage que : 1° la probabilité déterminée par H_0 de l'erreur de la première catégorie est égale à α et 2° quelle que soit l'hypothèse alternative qui soit exacte, la probabilité d'une erreur de la seconde catégorie est minimum.

Malheureusement, les ensembles uniformément les plus puissants n'existent que bien rarement. Ordinairement, un ensemble d'aire α qui est le plus puissant par rapport à une hypothèse alternative simple H_1, ne l'est pas pour une autre H_2 et, ce qui est plus, la puissance de cet ensemble par rapport à H_2 peut être plus petite que α. Donc, si l'on applique un tel ensemble pour la vérification de H_0 et s'il se trouve que l'hypothèse exacte est $H_2 \neq H_0$, l'hypothèse à vérifier H_0 sera plus souvent acceptée que dans les cas où elle serait une hypothèse vraie.

Dans les cas où les ensembles critiques uniformément les plus puissants n'existent pas, il y a donc lieu de rechercher comment on pourrait définir les ensembles critiques pour qu'ils ne possèdent pas de tels inconvénients.

4. Ensembles critiques bien placés. — Soit H_0 une hypothèse statistique à vérifier et w_0 un ensemble critique ayant une aire bien déterminée et égale à α. Considérons la probabilité déterminée par n'importe quelle hypothèse simple H contenue dans Ω pour que le point empirique tombe dans w_0, que nous avons désigné par

$$\beta(H \mid w_0) = P\{E \in w_0 \mid H\}. \tag{4}$$

Si l'hypothèse à vérifier H_0 est simple, alors $\beta(H_0 \mid w_0)$ a un sens et est égale à α. Si H_0 est composée et H'_0 une hypothèse simple qui ne contredit pas H_0, alors $\beta(H'_0 \mid w_0) = \alpha$. Comme cette égalité a lieu pour n'importe quelle hypothèse simple qui ne condredit pas H_0, on peut omettre le trait désignant l'hypothèse simple H'_0 et considérer que $\beta(H \mid w_0)$ est définie aussi pour l'hypothèse composée H_0 et que

$$\beta(H_0 \mid w_0) = \alpha. \tag{5}$$

La fonction $\beta(H \mid w_0)$ de l'hypothèse H ainsi définie sera dite la fonction de puissance.

Les raisonnements de la fin du paragraphe précédent suggèrent qu'il est désirable de chercher les ensembles critiques w_0 tels que la fonction de puissance correspondant ait un minimum absolu pour $H = H_0$.

Nous dirons qu'un ensemble w_0 est un ensemble critique d'aire α bien placé (1) *lorsque son aire est bien déterminée par l'hypothèse à vérifier* H_0, *et est égale à α et lorsque la fonction de puissance* $\beta(H \mid w_0)$ *est minimum pour* $H = H_0$.

Supposons que toutes les hypothèses simples admissibles de l'ensemble Ω déterminent la loi de probabilité $P\{E \in w\}$ des variables (1) comme une fonction d'ensemble ayant la même forme analytique, dépendant d'un certain nombre l des paramètres θ_1, $\theta_2, \ldots, \theta_l$ inconnus et qu'elles ne diffèrent entre elles que par les valeurs qu'elles fixent pour ces paramètres.

Alors la fonction de puissance d'un ensemble critique w_0 peut être considérée comme une fonction des paramètres $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_l$, que je vais désigner par $\beta(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_l \mid w_0)$.

Dans un ouvrage récent [10], on a considéré le cas où le nombre des paramètres inconnus est égal à un. Dans ce cas, l'hypothèse H_0

---

(1) Ce terme, qui correspond au terme anglais *unbiassed critical set*, m'a été suggéré par M. Georges Darmois, ce dont je lui suis très reconnaissant. *Voir* [10].

à vérifier est une hypothèse simple. On y a cherché les ensembles critiques définis comme il suit :

On dit qu'un ensemble w_0 est un ensemble critique d'aire α bien placé du type A. *lorsque la fonction de puissance $\beta(\theta \mid w_0)$ est dérivable deux fois et lorsque*

$$\frac{d\beta(\theta_0 \mid w_0)}{d\theta} = 0 \tag{6}$$

et

$$\frac{d^2\beta(\theta_0 \mid w_0)}{d\theta^2} = \max. \tag{7}$$

où θ_0 est la valeur du paramètre θ fixée par l'hypothèse H_0 *qu'on vérifie.*

Je vais maintenant traiter un problème analogue dans le cas où l'hypothèse à vérifier est une hypothèse composée.

5. **Ensembles critiques bien placés du type B.** — Considérons le cas où il n'y a que deux paramètres inconnus θ_1 et θ_2 et supposons que l'hypothèse à vérifier H_0 est composée et qu'elle fixe la valeur $\theta_1 = \theta_1^0$ tout en laissant la valeur de θ_2 indéterminée.

Supposons de plus que les valeurs de θ_1 fixées par les hypothèses contenues dans Ω remplissent un certain intervalle contenant θ_1^0 à son intérieur [1].

Je dirai qu'un ensemble w_0 est un ensemble critique d'aire α bien placé du type B *si :*

a. Son aire est déterminée par l'hypothèse H_0 *et est égale à α, donc si*

$$\beta(\theta_1^0, \theta_2 \mid w_0) = \alpha \tag{8}$$

quelle que soit la valeur de θ_2 admissible ;

b. Si la fonction de puissance $\beta(\theta_1, \theta_2 \mid w_0)$ admet deux premières dérivées par rapport à θ_1 :

---

(1) Il est intéressant que justement, lorsque cette condition est remplie, les ensembles critiques uniformément les plus puissants, n'existent que dans les cas exceptionnels. *Voir* [11].

c. Si

$$\frac{\partial\beta(\theta_1^0, \theta_2 \mid w_0)}{\partial\theta_1} = 0, \tag{9}$$

quelle que soit la valeur de θ_2 admissible, et

d. Si, quel que soit un autre ensemble w_1 satisfaisant a, b, et c, on a

$$\frac{\partial^2\beta(\theta_1^0, \theta_2 \mid w_0)}{\partial\theta_1^2} \geq \frac{\partial^2\beta(\theta_1^0, \theta_2 \mid w_1)}{\partial\theta_1^2}. \tag{10}$$

J'ai pu trouver la solution du problème des ensembles bien placés du type B dans le cas particulier où sont remplies les conditions suivantes :

1° Il existe une fonction $p(E \mid \theta_1 \theta_2)$ définie non négative et intégrable dans tout l'espace empirique W, telle que, pour tout ensemble mesurable w dans W et pour tout système de valeurs de θ_1 et θ_2 correspondant à une hypothèse admissible H', on ait

$$\beta(\theta_1, \theta_2 \mid w) = P\{E \in w \mid H'\} = \int \cdots \int_w p(E \mid \theta_1 \theta_2)\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{11}$$

Je vais appeler la fonction $p(E \mid \theta_1 \theta_2)$ la loi de probabilité élémentaire (¹) des variables (1).

2° Quel que soit l'ensemble mesurable w dans W on peut dériver sous le signe de l'intégrale dans (11) et l'on a

$$\frac{\partial^{i+k}\beta(\theta_1, \theta_2 \mid w)}{\partial\theta_1^i\, \partial\theta_2^k} = \int \cdots \int_w \frac{\partial^{i+k} p(E \mid \theta_1 \theta_2)}{\partial\theta_1^i\, \partial\theta_2^k}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \tag{12}$$

pour $i = 0, 1, 2$, et pour toute valeur entière et non négative de k.

3. Si l'on désigne par

$$\varphi_i = \frac{\partial \log p(E \mid \theta_1 \theta_2)}{\partial\theta_i} \qquad (i = 1, 2) \tag{13}$$

$$\varphi_{ij} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta_j} = \varphi_{ji} \qquad (i, j = 1, 2), \tag{14}$$

(¹) Les termes : loi de probabilité totale et élémentaire ont été introduits dans des sens analogues par M. P. Lévy [20].

alors on a

$$\varphi_{11} = A_0 + A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2, \tag{15}$$

$$\varphi_{12} = B_0 + B_1\varphi_1 + B_2\varphi_2, \tag{16}$$

$$\varphi_{22} = C_0 \qquad + C_2\varphi_2, \tag{17}$$

où les coefficients A, B, C ne dépendent pas des $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

4. Les fonctions φ_1 et φ_2 sont algébriquement indépendantes, c'est-à-dire qu'il existe deux indices l et m, tels que le jacobien

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x_l, x_m)} \tag{18}$$

est différent de zéro dans W, sauf peut-être pour un ensemble de points de mesure nulle.

5. La fonction φ_2 peut être considérée comme une valeur particulière d'une variable aléatoire Φ_2. Désignons par $p(\varphi_2)$ sa loi de probabilité élémentaire, qu'il est aisé de déduire de $p(\mathrm{E}\,|\,\theta_1^0\theta_2)$.

Désignons encore par

$$M_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2^k p(\varphi_2)\, d\varphi_2 \tag{19}$$

le $k^{\text{ième}}$ moment de $p(\varphi_2)$.

Je suppose que les moments M_k existent pour tout k entier non négatif. On sait que, étant donné les moments M_k, on peut construire un système de polynomes orthogonaux π_i d'ordre i en φ_2, tels que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \pi_i\pi_j p(\varphi_2)\, d\varphi_2 = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{si} \quad i = j. \end{cases} \tag{20}$$

Je supposerai que ce système est complet, c'est-à-dire que toute fonction $f(\varphi_2)$ intégrable, qui est orthogonale à tous les polynomes du système, donc telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi_2)\pi_i p(\varphi_2) d\varphi_2 = 0 \qquad (i = 0, 1, 2 \ldots) \tag{21}$$

ou, ce qui revient au même, telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2^k f(\varphi_2) p(\varphi_2) d\varphi_2 = 0 \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots) \tag{22}$$

doit être

$$f(\varphi_2) = 0, \tag{23}$$

sauf peut-être pour un ensemble de valeurs de φ_2 de mesure nulle.

Il est aisé de voir que, lorsque la condition 5 est x remplie, alors : (a) il n'existe qu'une seule loi de probabilité $p(\varphi_2)$ ayant les nombres M_k pour moments et (b) si y et z sont deux variables aléatoires et $p(y\varphi_2)$ et $p(z\varphi_2)$ les lois de probabilité élémentaires de y et φ_2 et de z et φ_2, alors les égalités

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi_2^k p(y\varphi_2)\,dy\,d\varphi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} z\varphi_2^k p(z\varphi_2)\,dz\,d\varphi_2 \tag{24}$$

pour $k = 0, 1, 2, \ldots$ entraînent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} yp(y\varphi_2)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} zp(z\varphi_2)\,dz \tag{25}$$

pour presque toute valeur de φ_2.

La propriété (a) résulte du fait que, s'il y avait une autre loi de probabilité $p_1(\varphi_2)$ ayant les mêmes moments M_k, on pourrait alors écrire

$$p_1(\varphi_2) = p(\varphi_2)[1 + \Delta(\varphi_2)], \tag{26}$$

et l'on aurait

$$\begin{aligned} M_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2^k p_1(\varphi_2)\,d\varphi_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2^k p(\varphi_2)\,d\varphi_2 + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_3^k \Delta(\varphi_2) p(\varphi_2)\,d\varphi_2, \end{aligned} \tag{27}$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2^k \Delta(\varphi_2) p(\varphi_2)\,d\varphi_2 = 0 \tag{28}$$

pour $k = 0, 1, 2, \ldots$ et il s'ensuit que $\Delta(\varphi_2)$ disparaît presque partout.

Pour démontrer la propriété (b), on peut remarquer que les deux côtés de (25) divisés par $p(\varphi_2)$ représentent les ordonnées des lignes de régression de y et de z par rapport à φ_2. Si l'on considère ces ordonnées comme les fonctions de φ_2, soit $\bar{y}(\varphi_2)$ et $\bar{z}(\varphi_2)$, que j'appellerai les fonctions de régression, et si l'on cherche à développer ces fonctions en une série des polynomes π_i, on sait que les coefficients de Fourier de ces séries sont déterminés par les valeurs des intégrales (24). Donc les inégalités (24) entraînent l'identité des deux développements, ce qui prouve que $\bar{y}(\varphi_2) = \bar{z}(\varphi_2)$ presque partout où l'on a $p(\varphi_2) > 0$.

Désignons par $p(\varphi_1 | \varphi_2)$ la loi de probabilité élémentaire de φ_1 calculée en supposant que φ_2 a une valeur fixée.

6. Solution du problème des ensembles critiques bien placés du type B. — Je dis que, *si les conditions* 1, 2, 3, 4 *et* 5 *sont remplies, l'ensemble critique d'aire* α *bien placé du type* B *est défini par les inégalités*

$$(29) \qquad \varphi_1 \leqq k_1(\varphi_2) \qquad \text{et} \qquad k_2(\varphi_2) \leqq \varphi_1,$$

où $k_1(\varphi_2)$ *et* $k_2(\varphi_2)$ *satisfont aux équations suivantes :*

$$(30) \qquad \int_{k_1(\varphi_2)}^{k_2(\varphi_2)} p(\varphi_1 | \varphi_2)\, d\varphi_1 = 1 - \alpha,$$

et

$$(31) \qquad \frac{1}{1-\alpha} \int_{k_1(\varphi_2)}^{k_2(\varphi_2)} \varphi_1 p(\varphi_1 | \varphi_2)\, d\varphi_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1 p(\varphi_1 | \varphi_2)\, d\varphi_1.$$

Commençons par construire un ensemble w le plus général, satisfaisant aux conditions (8) et (9). Supposons donc que w est un tel ensemble mesurable dans W. Alors l'équation (8) devient

$$(32) \qquad \beta(\theta_1^0 \theta_2 | w) = \int \cdots \int_w p(E | \theta_1^0 \theta_2)\, dx_1 \ldots dx_n = \alpha,$$

et l'équation (9)

$$(33) \qquad \frac{\partial \beta(\theta_1^0 \theta_2 | w)}{\partial \theta_1} = \int \cdots \int_w \varphi_1 p(E | \theta_1^0 \theta_2)\, dx_1 \ldots dx_n = 0,$$

où l'on a substitué

$$(34) \qquad \frac{\partial p(E | \theta_1^0 \theta_2)}{\partial \theta_1} = \varphi_1 p(E | \theta_1^0 \theta_2).$$

Admettons que les intégrales dans (32) et (33) ont des valeurs qui ne dépendent pas de θ_2. Donc, si l'on différentie ces expressions par rapport à θ_2, on obtient zéro. En différentiant (32) une fois et en remarquant que

$$\frac{\partial}{\partial\theta_2} p(E \mid \theta_1^0 \theta_2) = \varphi_2 p(E \mid \theta_1^0 \theta_2),$$

on a

$$\int \cdots \int_w \varphi_2 p(E \mid \theta_1^0 \theta_2)\, dx_1 \ldots dx_n = 0; \tag{35}$$

comme cette égalité existe pour tout θ_2, on peut différentier de nouveau, ce qui donne

$$\int \cdots \int_w (\varphi_{22} + \varphi_2^2) p(E \mid \theta_1^0 \theta_2)\, dx_1 \ldots dx_n = 0, \tag{36}$$

ou, eu égard à (17), (32) et (35)

$$\int \cdots \int_w \varphi_2^2 p(E \mid \theta_1^0 \theta_2)\, dx_1 \ldots dx_n = -\alpha C_0 = \alpha \psi_2, \tag{37}$$

où ψ_2 ne dépend pas de l'ensemble w. Comme (37) représente une identité, elle peut être différentiée, ce qui donnerait, après un calcul facile

$$\int \cdots \int_w \varphi_2^3 p(E \mid \theta_1^0 \theta_2)\, dx_1 \ldots dx_n = \alpha \psi_3, \tag{38}$$

En appliquant la méthode de l'induction complète, il est aisé de démontrer que si (32) subsiste pour toute valeur de θ_2, alors on a

$$\int \cdots \int_w \varphi_2^k p(E \mid \theta_1^0 \theta_2)\, dx_1 \ldots dx_n = \alpha \psi_n, \tag{39}$$

où ψ_k est une fonction de θ_2 qui ne dépend pas de l'ensemble w. Comme l'espace empirique W satisfait à (32) avec $\alpha = 1$ et à (33), il doit être

$$M_k = \int \cdots \int_W \varphi_2^k p(E \mid \theta_1^0 \theta_2)\, dx_1 \ldots dx_n = \psi_k, \tag{40}$$

ou M_k est le $k^{\text{ième}}$ moment de $p(\varphi_2)$. On voit que si (32) et (33) subsistent pour toute valeur de θ_2, alors

$$\frac{1}{\alpha} \int \cdots \int_w \varphi_2^k p(E \mid \theta_1^0 \theta_2)\, dx_1 \ldots dx_n = M_k \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots). \tag{41}$$

La partie gauche de cette dernière équation peut être elle aussi interprétée comme un moment que j'appellerai le $k^{\text{ième}}$ moment de φ_2 relatif à w. En effet, la loi de probabilité de φ_2 peut être calculée en supposant que le point empirique E ne peut tomber que dans l'ensemble w. La loi de probabilité élémentaire des variables (1), correspondant à cette hypothèse, sera

$$p(E \mid \theta_1^0\, \theta_2 w) = \frac{1}{\alpha} p(E \mid \theta_1^0\, \theta_2) \tag{42}$$

pour tout $E \in w$ et

$$p(E \mid \theta_1^0\, \theta_2 w) = 0 \tag{43}$$

ailleurs. Maintenant, il est aisé de voir que les parties gauches des égalités (41) représentent les moments de la loi de probabilité élémentaire de φ_2 calculée en supposant que le point empirique E est sûr de tomber dans w. Si l'on désigne cette loi par $p(\varphi_2 \mid w)$ alors eu égard à la condition 5, on peut écrire

$$p(\varphi_2 \mid w) = p(\varphi_2) \tag{44}$$

pour presque toutes les valeurs de φ_2.

C'est la conséquence de l'hypothèse que toutes les dérivées par rapport à θ_2 de (32) sont égales à zéro. Maintenant, considérons (33) qui est aussi une identité. Différentiant (33) par rapport à θ_2 et eu égard à (16), (32), (33) et (35), on a aisément

$$\int \cdots \int_w (\varphi_{12} + \varphi_1 \varphi_2) p(E \mid \theta_1^0\, \theta_2)\, dx_1 \ldots dx_n = 0, \tag{45}$$

ou

$$\int \cdots \int_w \varphi_1 \varphi_2\, p(E \mid \theta_1^0\, \theta_2) dx_1 \ldots dx_n = -\alpha \beta_0 = \alpha \Psi_1 \tag{46}$$

où Ψ_1 ne dépend pas de l'ensemble w. En différentiant (46) de nouveau et en appliquant la méthode de l'induction mathématique on voit aisément que, si (32) et (33) subsistent pour toute valeur de θ_2, alors

$$\int \cdots \int_w \varphi_1 \varphi_2^k\, p(E \mid \theta_1^0\, \theta_2)\, dx_1 \ldots dx_n = \alpha \Psi_k, \tag{47}$$

où Ψ_k est une fonction de θ_2 qui ne dépend pas de l'ensemble w.

En particulier il doit être, soit

$$(48)\quad \lambda_k = \int \cdots \int_{W} \varphi_1 \varphi_2^k p(E \mid \theta_1^0 \theta_2)\, dx_1 \ldots dx_n = \Psi_k \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Donc, quel que soit l'ensemble w tel que (32) et (33) subsistent pour tout θ_2, il doit être

$$(49)\quad \frac{1}{\alpha} \int \cdots \int_{w} \varphi_1 \varphi_2^k p(E \mid \theta_1^0 \theta_2)\, dx_1 \ldots dx_n = \lambda_k \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

où, eu égard à (42) et (43),

$$(50)\quad \int \cdots \int_{w} \varphi_1 \varphi_2^k p(E \mid \theta_1^0, \theta_2 w)\, dx_1 \ldots dx_n = \lambda_k \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Désignons par $p(\varphi_1, \varphi_2)$ et $p(\varphi_1, \varphi_2 \mid w)$ les lois de probabilité élémentaire simultanées de φ_1 et φ_2, la première calculée de $p(E \mid \theta_1^0 \theta_2)$ et la deuxième à partir de $p(E \mid \theta_1^0 \theta_2 w)$. Les égalités (50) sont équivalentes aux suivantes

$$(51)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1 \varphi_2^k p(\varphi_1 \varphi_2 \mid w)\, d\varphi_1\, d\varphi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1 \varphi_2^k p(\varphi_1 \varphi_2)\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

et il suit de la condition 5 que, pour presque toutes les valeurs de φ_2, on doit avoir

$$(52)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1 p(\varphi_1, \varphi_2 \mid w)\, d\varphi_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1 p(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1.$$

Donc, pour que l'ensemble w satisfasse aux conditions (32) et (33) pour toute valeur de θ_2, il faut qu'aient lieu les équations (44) et (52) pour presque toutes les valeurs de φ_2. Inversement, il est aisé de voir que, lorsque les conditions (44) et (52) sont remplies pour presque toutes les valeurs de φ_2, alors toutes les dérivées par rapport à θ_2 des parties gauches de (32) et (33) doivent disparaître, d'où l'on conclut que ces inégalités subsistent pour toutes les valeurs de θ_2. Donc, les égalités (44) et (51) forment les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'ensemble satisfasse aux équations (32) et (33), quelle que soit la valeur de θ_2.

Cela subsiste lorsque la condition 5 est remplie. Si elle ne l'est pas, les égalités (44) et (52) ne présentent que les conditions suffisantes.

Dans tous les cas, si la condition 5 est remplie ou non, les conditions nécessaires et suffisantes pour que w satisfasse (32) et (33), quel que soit θ_2, sont les égalités (41) et (51).

Pour nous servir des conditions (44) et (52), transformons l'espace empirique W point par point en un autre W' en introduisant un nouveau système de variables aléatoires, $\boldsymbol{\Phi}_1$, $\boldsymbol{\Phi}_2$, Y_3, Y_4, ..., Y_n, dont les valeurs spéciales seront désignées par $\varphi_1, \varphi_2, y_3, \ldots, y_n$, où

$$(53) \qquad \varphi_i = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log p(\mathrm{E} \mid \theta_1^0 \theta_2) \qquad (i = 1, 2),$$

et les autres variables peuvent être choisies arbitrairement pourvu que le jacobien

$$(54) \qquad \Delta = \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(\varphi_1, \varphi_2, y_3, \ldots, y_n)}$$

existe, soit différent de zéro presque partout et ne change pas de signe dans W'. Vu la condition 4 cela est possible.

Désignons par E' un point dans l'espace W' et par $p(\mathrm{E}' \mid \theta_1 \theta_2)$ la loi de probabilité élémentaire de nouvelles variables

$$(55) \qquad p(\mathrm{E}' \mid \theta_1 \theta_2) = p(\mathrm{E} \mid \theta_1 \theta_2) \mid \Delta \mid.$$

où la partie droite doit être représentée comme une fonction de $\varphi_1, \varphi_2, y_3, \ldots, y_n$.

Si w est un ensemble quelconque dans W, w' va désigner son image dans W'. En particulier w'_0 va désigner l'image de l'ensemble w_0 satisfaisant à (32) et (33) quelle que soit la valeur de θ_2.

Considérons dans W' le plan déterminé par l'équation $\varphi_2 = \text{const.}$ et désignons par $\mathrm{W}(\varphi_2)$ et $w(\varphi_2)$ les parties de ce plan intérieures à W' et à w'_0 respectivement.

On voit facilement que l'égalité (44) est équivalente à la suivante :

$$(56) \qquad \int \cdots \int_{w(\varphi_2)} p(\mathrm{E}' \mid \theta_1^0 \theta_2) \, d\varphi_1 \, dy_3 \ldots dy_n$$
$$= \alpha \int \cdots \int_{\mathrm{W}(\varphi_2)} p(\mathrm{E}' \mid \theta_1^0 \theta_2) \, d\varphi_1 \, dy_3 \ldots dy_n.$$

De même. la formule (51) peut s'écrire

$$(57)\qquad \int\cdots\int_{w(\varphi_2)} \varphi_1 p(E' \mid \theta_1^0 \theta_2)\, d\varphi_1\, dy_3 \ldots dy_n = \alpha \int\cdots\int_{W(\varphi_2)} \varphi_1 p(E' \mid \theta_1^0 \theta_2)\, d\varphi_1\, dy_3 \ldots dy_n.$$

Écrivons enfin l'intégrale représentant la dérivée $\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}\beta(\theta_1^0\theta_2 \mid w)$ qui doit être maximalisée par w_0

$$(58)\qquad \frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}\beta(\theta_1^0\theta_2 \mid w_0) = \int\cdots\int_{w_0} (\varphi_{11} + \varphi_1^2) p(E \mid \theta_1^0 \theta_2)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Vu les égalités (15), (32), (33) et (35) et en introduisant le nouveau système de variables, on peut écrire

$$(59)\qquad \frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}\beta(\theta_1^0\theta_2 \mid w_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi_2 \int\cdots\int_{w(\varphi_2)} \varphi_1^2 p(E' \mid \theta_1^0 \theta_2)\, d\varphi_1\, dy_3 \ldots dy_n + A_0\alpha$$

Il est évident que le choix de l'ensemble w_0 est équivalent à celui de w_0' et que pour choisir w_0' il est suffisant de choisir $w(\varphi_2)$ pour toute valeur de φ_2. Les équations (56) et (57) représentent les conditions qui doivent être remplies par $w(\varphi_2)$ pour presque toute valeur de φ_2. Si l'on cherche à satisfaire ces conditions et à maximaliser (59), on voit qu'il est suffisant de trouver de tels $w(\varphi_2)$ qui satisfont à (56) et (57) et qui maximalisent

$$(60)\qquad \int\cdots\int_{w(\varphi_2)} \varphi_1^2 p(E' \mid \theta_1^0 \theta_2)\, d\varphi_1\, dy_3 \ldots dy_n$$

pour toute valeur de φ_2. Ce problème peut être résolu en appliquant le résultat général (1) que voici.

Soit

$$(61)\qquad F_0,\ F_1,\ \ldots,\ F_m$$

une suite de $m+1$ fonctions définies et intégrables dans W et soit

$$(62)\qquad \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m,$$

---

(1) *Voir* [10].

m nombres tels qu'il existe dans W au moins un ensemble A tel que

$$\int\cdots\int_{A} F_i\,dx_1\ldots dx_n=\alpha_i \qquad (i=1,2,\ldots,m). \tag{63}$$

Alors l'ensemble A_0 qui satisfait aux conditions (63) et qui maximalise l'intégrale

$$\int\cdots\int_{A} F_0\,dx_1\ldots dx_n \tag{64}$$

est tel qu'à l'intérieur de A_0

$$F_0 \geqq \sum_{i=1}^{m} a_i F_i, \tag{65}$$

tandis qu'à l'extérieur de A_0

$$F_0 \leqq \sum_{i=1}^{m} a_i F_i, \tag{66}$$

où les coefficients a_i sont des constantes qu'on doit choisir pour que l'ensemble A_0 satisfasse aux conditions (63).

En appliquant ce résultat général au problème de trouver le maximum de (60) tout en remplissant les conditions (56) et (57), on trouve immédiatement que presque pour toute valeur de φ_2 où $p(\varphi_2)>0$, à l'intérieur de $w(\varphi_2)$, il doit y avoir

$$\varphi_1^2 \geqq a_0 + a_1\varphi_1, \tag{67}$$

où a_0 et a_1 ne dépendent que de φ_2 et doivent être fixés pour satisfaire à (56) et (57).

Désignons par $k_1(\varphi_2)$ et $k_2(\varphi_2)>k_1(\varphi_2)$ les racines de l'équation

$$a_0 + a_1\varphi_1 - \varphi_1^2 = 0. \tag{68}$$

Alors l'inégalité (67) est équivalente aux deux suivantes :

$$\varphi_1 \leqq k_1(\varphi_2) \qquad \text{et} \qquad k_2(\varphi_2) \leqq \varphi_1, \tag{69}$$

et au lieu de chercher a_0 et a_1 tels qu'ils satisfissent aux (56) et (57), on peut déterminer $k_1(\varphi_2)$ et $k_2(\varphi_2)$. Comme les inégalités (69) qui déterminent $w(\varphi_2)$ ne présentent aucune limitation concernant les variables $y_3, y_4, \ldots, y_n$, on peut effectuer l'intégration dans (56) et (57) pour ces variables dans les limites extrêmes et l'on trouve

$$(70)\qquad \int_{-\infty}^{k_1(\varphi_2)} + \int_{k_2(\varphi_2)}^{+\infty} p(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1 = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} p(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1 = \alpha p(\varphi_2)$$

et

$$(71)\qquad \int_{-\infty}^{k_1(\varphi_2)} + \int_{k_2(\varphi_2)}^{+\infty} \varphi_1 p(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1 = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1 p(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1.$$

les deux équations qui se réduisent immédiatement à (30) et (31) dans l'énoncé du problème qui est par conséquent résolu.

7. Remarques diverses. — Remarquons que l'hypothèse que φ_{11} est de la forme (15) ne sert qu'à simplifier la forme de la solution du problème. Le raisonnement peut être appliqué si cette condition n'est pas remplie. Considérons rapidement les possibilités qui se présentent.

a. φ_{11} est une fonction non linéaire de φ_1 et φ_2 qui ne dépend pas explicitement de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dans ce cas tout le raisonnement peut être répété et l'on trouve que $w(\varphi_2)$ est défini par l'inégalité

$$(72)\qquad \varphi_{11} + \varphi_1^2 \geqq a_0 + a_1 \varphi_1,$$

où a_0 et a_1 doivent être déterminés pour satisfaire à (56) et (57), qui se réduisent à une forme analogue à (70) et (71).

b. Il existe un système de trois indices i, j et k tel que $\dfrac{\partial(\varphi_{11}, \varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x_i, x_j, x_k)}$ ne disparaît pas identiquement. Alors φ_{11} peut être introduit comme une variable du système qui transforme W en W′ par exemple au lieu de y_3. En modifiant légèrement le calcul, on trouve que $w(\varphi_2)$ est déterminé par l'inégalité

$$(73)\qquad \varphi_{11} \geqq a_0 + a_1 \varphi_1 - \varphi_1^2 = q(\varphi_1, \varphi_2),$$

où a_0 et a_1 ne dépendent que de φ_2 et doivent être déterminés pour satisfaire à (56) et (57). Quant à ces deux équations elles prennent la forme

$$(74)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi_1 \int_{q(\varphi_1\varphi_2)}^{+\infty} p(\varphi_{11}, \varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_{11} = \alpha p(\varphi_2)$$

et

$$(75)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1\,d\varphi_1\int_{q(\varphi_1,\varphi_2)}^{+\infty}p(\varphi_{11},\varphi_1,\varphi_2)\,d\varphi_{11}=\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1 p(\varphi_1,\varphi_2)\,d\varphi_1$$

respectivement.

Remarquons enfin que le raisonnement n'exige pas nécessairement l'hypothèse 5 sur le système des polynomes orthogonaux. Ce qui est nécessaire ce sont les conclusions (a) et (b) qui résultent de cette hypothèse. Et même ces conclusions ne doivent être justes que par rapport à la loi de probabilité de φ_2 relative à tout ensemble w et à la fonction de régression de φ_1 par rapport à φ_2. Il se trouve des exemples importants où l'hypothèse 5 n'est pas satisfaite mais où la solution en forme (69) s'applique parce qu'il est possible de démontrer que les équations (41) et (51) entraînent (44) et (52),

Il nous faut faire encore une remarque sur l'indépendance de la solution obtenue de la valeur de θ_2.

Il n'est pas évident que les inégalités (29) où les limites $k_1(\varphi_2)$ et $k_2(\varphi_2)$ sont déterminées par (30) et (31) ne dépendent pas de la valeur de θ_2 qui n'est pas fixée par l'hypothèse à vérifier H_0. S'il se trouvait que $k_1(\varphi_2)$ et $k_2(\varphi_2)$ dépendent de la valeur de θ_2, alors, strictement dit, le problème de l'ensemble critique bien placé du type B n'aurait pas de solution.

Or, il est facile à démontrer que, grâce à la condition (17), la solution donnée par (30) et (31) ne dépend pas de la valeur de θ_2. Considérons $\theta_1=\theta_1^0$ comme une constante. La condition (17) représente une équation différentielle linéaire du premier ordre. En l'intégrant on obtient soit

$$(76)\qquad \varphi_2(\theta_2)=Q(\theta_2)+R(\theta_2)f_1(E),$$

où $Q(\theta_2)$ et $R(\theta_2)$ ne dépendent pas du point empirique E et $f_1(E)$ est indépendante de θ_2. Donc la loi $p(E\,|\,\theta_1\theta_2)$ est de de la forme

$$(77)\qquad p(E\,|\,\theta_1^0,\theta_2)=C(\theta_2)e^{S(\theta_2)f_1(E)+f_2(E)},$$

où $C(\theta_2)$ et $S(\theta_2)$ ne dépendent pas du point empirique E et $f_2(E)$ est indépendant de θ_2 (1).

(1) On voit de (77) que la fonction $f_1(E)$ est une statistique exhaustive. *Voir* [21].

On voit que le lieu de points où $\varphi_2(\theta_2) = \text{const.} = \varphi_2$ est celui où $f_1(\mathrm{E}) = \text{const.} = f_1$. Celui-ci est indépendant de θ_2 dans ce sens que si l'on change la valeur θ'_2 en θ''_2, on peut trouver une valeur convenable de φ'_2, soit φ''_2 telle que le lieu de point $\varphi_2(\theta''_2) = \varphi''$ soit identique avec $\varphi_2(\theta') = \varphi'$. Les conditions (70) et (71) qu'on peut interpréter dans l'espace empirique W s'appliquent aux surfaces où $f_1(\mathrm{E})$ est constant. Considérons une telle surface. On voit aisément que si l'on calcule les intégrales dans (70) et (71) à partir de (77) alors on aura de deux côtés le facteur $\mathrm{C}(\theta_2)\, e^{\mathrm{S}(\theta_2) f_1(\mathrm{E})}$ qui pourrait être supprimé. Donc si toutes les réductions possibles sont faites, alors les inégalités (30) et (31) concernant le lieu de points où $f_1(\mathrm{E})$ a une valeur fixe, ne dépendent pas de la valeur de θ_2, ce qui prouve que l'ensemble w_0 déterminé par (29), (30) et (31) qui satisfait aux conditions (32) et (33), quelle que soit la valeur de θ_2, donne la valeur maximum à la dérivée seconde (58) et cela également quelle que soit la valeur de θ_2.

On pourrait peut-être croire qu'en général la fonction de puissance $\beta(\theta_1 \theta_2 \mid w_0)$ est indépendante de θ_2. Mais comme on peut voir des raisonnements et résultats numériques concernant la probabilité des erreurs de la seconde catégorie publiées ailleurs (¹) cette supposition n'est pas exacte.

Publications citées.

1. T. Bayes. *An essay towards solving a problem in the doctrine of chance* (*Phil. Trans. Roy. Soc.*, Vol. 53, 1763).
2. Karl Pearson. *On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling* (*Phil. Mag.*, 5ᵉ série, Vol. L, 1900).
3. J. Bertrand, *Calcul des probabilités*, Paris, 1889.
4. E. Borel. *Le hasard*, Paris, 1932.
5. J. Neyman and E.-S. Pearson. *On the use and interpretation...* (*Biometrika*, Vol. XX-A, 1928).
6. J. Neyman and E.-S. Pearson. *On the problem of two samples* (*Bull. Ac. Polonaise Sci. Lettres*, série A, 1930).
7. J. Neyman and E.-S. Pearson. *On the problem of K samples* (*Ibid.*, 1931).
8. J. Neyman and E.-S. Pearson. *On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses* (*Phil. Trans. Roy. Soc.*, Vol. 231-A, 1933).

(¹) *Voir* [19], en particulier p. 127-136.

9. J. Neyman and E.-S. Pearson, *The testing of statistical hypotheses in relation to probabilities a priori* (*Cambridge Phil. Soc. Proc.*, Vol. XXIX, 1933).

10. J. Neyman and E.-S. Pearson, *Further contributions to the theory of testing statistical hypotheses* (*Annals of the Department of Applied Statistics, University College, London*, Vol. I, 1936) (sous presse).

11. J. Neyman and E.-S. Pearson, *Sufficient statistics and uniformly most powerful tests of statistical hypotheses* (*Ibidem*) (sous presse).

12. J. Neyman, *Méthodes nouvelles de vérification des hypothèses statistiques* (*C. R. Premier Congrès Math. Pays Slaves*, Varsovie, 1929).

13. E.-S. Pearson, *Some notes on sampling tests with two variables* (*Biometrika*, Vol. XXI, 1929).

14. E.-S. Pearson and S.-S. Wilks, *Méthods of statistical analysis appropriate to K samples of two variables* (*Biometrika*, Vol. XXV, 1933).

15. S. Kolodziejczyk, *La vérification de l'hypothèse sur la constance des probabilités* (*Ann. Soc. Polonaise Math.*, t. IX, 1930).

16. S. Kolodziejczyk, *On an important class of statistical hypotheses* (*Biometrika*, Vol. XXVII, 1935).

17. B.-L. Welch, *Some problems in the analysis of regression among k samples of two variables* (*Biometrika*, Vol. XXVII, 1935).

18. S.-S. Wilks, *On the independence of K sets of normally distributed statistical variables* (*Econometrica*, Vol. 3, 1935).

19. J. Neyman (with cooperation of K. Iwaszkiewicz and S. Kolodziejczyk), *Stastistical problems in agricultural experimentation* (*Supplement to the J. R. S. S.*, Vol. II, 1935).

20. P. Lévy, *Calcul des probabilités*, Paris, 1925.

21. G. Darmois, *Sur les lois de probabilité à estimation exhaustive* (*C. R.*, t. 200, 1935).