Bulletin de la S. M. F.

F. Vycichlo

Sur une interprétation géométrique de la courbure projective des courbes planes

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 87-98
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__87_0>

SUR UNE INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA COURBURE PROJECTIVE DES COURBES PLANES;

PAR M. F. VYČICHLO
(Praha).

On a obtenu la signification géométrique de la normale projective en un point général d'une courbe plane K à l'aide d'une courbe du troisième ordre avec le point double au point pris en considération et qui a en ce point un contact d'ordre sept avec la courbe K. Les tangentes en point double de cette cubique unicursale sont : la tangente de la courbe considérée et sa normale projective (¹).

On peut se demander, si les propriétés projectives de cette cubique interprètent géométriquement aussi la courbure projective de la courbé K.

Ce Mémoire répond à cette question (²).

1. Considérons une courbe plane K, dont les équations (en coordonnées projectives) sont

$$x_i = x_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1,1}$$

où les fonctions x_i satisfont aux conditions suivantes :

(¹) E. J. WILCZYNSKI, *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces,* Leipzig, 1906; G. SANNIA, *Nuova trattazione della geometria proiettivo-differenziale delle curve piane*, *Rend. Lincei*, 1922 (4 Notes), p. 432-434; E. BOMPIANI, *Invarianti proiettivi di contatto fra curve piane*, *Rend. Lincei,* 1926, p. 118-123; E. ČECH, *Projektivní diferenciálni geometrie*, Praha, 1926; A. TERRACINI, *Sul significato geometrico della normale proiettiva*, *Rend. Lincei*, 1926, p. 584-591.

(²) M. V. HLAVATÝ a démontré dans le Mémoire : *Connexion projective et déplacement projectif* (*Annali di Matematica*, 4ᵉ série, t. XII, 1933-1934, p. 267-272), que la courbure projective de la courbe plane ou gauche peut s'exprimer par un birapport anharmonique, mais il n'a pas étudié la signification géométrique de ce birapport, qui n'est pas d'ailleurs identique avec le birapport mentionné dans la suite.

(1,I). Les fonctions x_i sont régulières pour n'importe quelle valeur de t d'un intervalle $< a, b >$.

(1,II). Si $t_1 \neq t_2$ sont deux valeurs de $< a, b >$, les droites déterminées par les équations

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{t_1} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} x_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{t_2} = 0,$$

sont linéairement indépendantes.

(1,III). On aura

$$\Delta_t = \left| x_1 \frac{dx_1}{dt} \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right|_t \neq 0 \quad (^1),$$

pour chaque t de $< a, b >$.

Introduisons les abréviations

(1,2) $$D\varphi = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta_t}} \frac{d\varphi}{dt} \quad (^2),$$

où φ est une fonction d'un paramètre t qui a au moins une dérivée première.

Soient en outre

(1,3) $$\xi_1(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta_t}} \left(x_2 \frac{dx_3}{dt} - x_3 \frac{dx_2}{dt} \right), \qquad \ldots,$$

(1,4) $$X_1(t) = D\xi_2 \, D^2\xi_3 - D\xi_3 \, D^2\xi_2, \qquad \ldots,$$

où

$$D^2\xi_i = D(D\xi_i);$$

(1,5) $$\Xi_1(t) = Dx_2 \, D^2 x_3 - Dx_3 \, D^2 x_2, \qquad \ldots.$$

Ceci nous permet d'introduire les notions

(1,6) $$k(t) = -\frac{1}{2}(X_1 \Xi_1 + X_2 \Xi_2 + X_3 \Xi_3),$$

(1,7) $$n(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} (\Xi_i DX_i - X_i D\Xi_i).$$

---

(1) On peut voir facilement que les équations (1,1) avec les conditions (1,I), (1, II) et (1, III) définissent les courbes planes qui n'ont pas, aux points pris en considération, de points d'inflexion ou d'autres points singuliers.

(2) Nous prendrons ici (et aussi dans la suite) la valeur principale pour la troisième racine.

et nous dirons d'après M. E. Čech que $k(t)$ et $n(t)$ sont respectivement *le premier et le second unimodulaire invariant de la courbe* K [1].

Nous supposerons encore que pour la courbe en jeu K, en chaque point de l'intervalle $< a, b >$, on a

$$(\mathrm{I.IV}) \qquad n(t) \neq 0 \quad (^2).$$

Supposons donnés deux points

$$(1,8) \quad \begin{cases} {}^1x_i = \sqrt[3]{n}\, x_i, \\ {}^2x_i = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \left\{ D^2 x_i + \dfrac{1}{3} \dfrac{Dn}{n} D x_i + \left[\dfrac{1}{18} \left(\dfrac{Dn}{n} \right)^2 - k \right] x_i \right\} \\ \qquad (i = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Nous dirons que l'équation

$$(1,9) \quad ({}^1x_2\,{}^2x_3 - {}^1x_3\,{}^2x_2) x_1 + ({}^1x_3\,{}^2x_1 - {}^1x_1\,{}^2x_3) x_2 + ({}^1x_1\,{}^2x_2 - {}^2x_1\,{}^1x_2) x_3 = 0$$

définit *la normale projective* de la courbe K au point t [3].

Soit enfin

$$(1,10) \qquad \varkappa(t) = | n |^{-\frac{2}{3}} \left[k + \frac{1}{3} \frac{D^2 n}{n} - \frac{7}{18} \cdot \left(\frac{Dn}{n} \right)^2 \right].$$

L'expression $\varkappa(t)$ est complètement définie par la courbe K et par le point t et ne change pas pendant la transformation projective.

Cette expression est *la courbure projective* en point t de la courbe K [4].

Le présent Mémoire est consacré à la recherche de la signification géométrique de la notion de courbure projective que nous venons de définir.

2. Soient

$$x_i = x_i(t), \qquad y_i = y_i(u), \qquad (a < t < b), \qquad (a_1 < u < b_1)$$

---

(1) E. Čech, *Projektivní diferenciální geometrie*, Praha, 1926, p. 220. Dans la suite nous désignerons ce livre par E. Čech, *P. D. G.*

(2) Une courbe qui satisfait à la condition (1,IV) n'a pas dans $< a, b >$ de point sextactique. *Voir*, E. Čech, *P. D. G.*, p. 225.

(3) E. Čech, *P. D. G.*, p. 229.

(4) E. Čech, *P. D. G.*, p. 233.

les équations des courbes $K_x(t)$, $K_y(u)$ qui satisfont aux conditions (1,I)-(1,IV) et qui possèdent le point $t_0(u_0)$ en commun.

Supposons que les équations suivantes soient vérifiées :

$$(2,1)\quad \begin{cases} x_i(t_0) = y_i(u_0) & (a < t_0 < b;\ a_1 < u_0 < b_1), \\ \left(\dfrac{d^\alpha x_i}{dt^\alpha}\right)_{t=t_0} = \left(\dfrac{d^\alpha y_i}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} & (\alpha = 1, \ldots, 7;\ i = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Nous dirons que *les courbes K_x, K_y ont au point commun un contact au moins d'ordre sept* (ou un contact huit-ponctuel) ([1]). On a ce théorème :

Les courbures projectives des courbes K_x, K_y au point commun $t_0(u_0)$ sont identiques.

La démonstration est trop simple.

3. Soit $K(t)$ une courbe plane qui satisfait en point $t = t_0$ aux conditions (1,I)-(1,IV). Soit $K_1(u)$ une cubique qui possède le point $t = t_0$ $[u = u_0]$, en commun avec la courbe $K(t)$ et qui satisfait en $t = t_0$ aux équations (1,I)-(1,IV) et (2,1). On peut démontrer cette proposition :

La courbe K_1 appartient au faisceau des cubiques qui, excepté les cubiques unicursales avec le point double en $t = t_0$, satisfont aux conditions (1,I)-(1,IV) *et aux équations* (2,1). Alors, les cubiques du faisceau mentionné qui n'ont pas le point double au point considéré et la courbe $K(t)$ ont au point commun $t = t_0$ un contact au moins d'ordre sept (huit-ponctuel).

Démonstration. — Nous chercherons la cubique $K_1(u)$.

Supposons la courbe $K(t)$ donnée par les équations

$$(3,1)\qquad x_i = x_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

et supposons qu'on ait

$$(3,2)\quad \begin{cases} x_1(t_0) = 0, & x_2(t_0) = 0, & x_3(t_0) = 1, \\ \left(\dfrac{dx_1}{dt}\right)_{t_0} = 1, & \left(\dfrac{dx_2}{dt}\right)_{t_0} = 0, & \left(\dfrac{dx_3}{dt}\right)_{t_0} = 0, \\ \left(\dfrac{d^2 x_1}{dt^2}\right)_{t_0} = 0, & \left(\dfrac{d^2 x_2}{dt^2}\right)_{t_0} = 1, & \left(\dfrac{d^2 x_3}{dt^2}\right)_{t_0} = 0. \end{cases}$$

([1]) E. Čech, *P. D. G.*, p. 114.

Soient ensuite

$$(3,3)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{d^\alpha x_i}{dt^\alpha}\right)_{t_0} = a_i^{(\alpha)} & (i = 1, 2, 3;\ \alpha = 3, \dots 7), \\ y_i = y_i(u) & (i = 1, 2, 3), \end{cases}$$

les équations paramétriques de la cubique $K_1(u)$, où $y_i(u)$ satisfont identiquement à l'équation

$$(3,4)\qquad \begin{aligned} F(y_1, y_2, y_3) \equiv A y_1^3 + y_1^2(B y_2 + C y_3) + y_1(D y_2^2 + E y_2 y_3 + F y_3^2) \\ + G y_2^3 + H y_2^2 y_3 + I y_2 y_3^2 + K y_3^3 = 0, \end{aligned}$$

pour n'importe quelle valeur d'un paramètre u.

Si nous substituons les valeurs (3,2) pour $\left(\dfrac{d^\beta y_i}{du^\beta}\right)_{u_0}$,

$$\left(\beta = 0, 1, \dots 7;\ \frac{d^0 y_i}{du^0} = y_i\right)$$

dans les équations

$$(3,5)\qquad \left(\frac{d^k F}{du^k}\right)_{u=u_0} = 0, \qquad (k = 1, 2, \dots 7),$$

nous obtiendrons les relations suivantes :

$$(3,6)\qquad \begin{cases} K = 0, \qquad F = 0, \qquad 2C + I = 0; \\ 6A + 3E + a_2^{(3)} I = 0, \qquad 12B + 8a_1^{(3)} C + 4a_2^{(3)} E + 6H + a_2^{(4)} I = 0 \\ 60a_1^{(3)} A + 20a_2^{(3)} B + 10a_1^{(4)} C + 20a_3^{(3)} C + 30D + 10a_1^{(3)} E \\ \qquad + 5a_2^{(4)} E + 20a_2^{(3)} H + a_2^{(5)} I + 20a_3^{(3)} I = 0, \\ 90a_1^{(4)} A + 120a_1^{(3)} B + 30a_2^{(4)} B + 20[a_1^{(3)}]^2 C + 12a_1^{(5)} C \\ \qquad + 30a_3^{(4)} C + 120a_2^{(3)} D + 15a_1^{(4)} E + 20a_1^{(3)} a_2^{(3)} E + a_2^{(6)} I \\ \qquad + 40a_2^{(3)} a_3^{(3)} I + 30a_3^{(4)} I = 0; \\ 420[a_1^{(3)}]^2 A + 126a_1^{(5)} A + 210a_1^{(4)} B + 280a_1^{(3)} a_2^{(3)} B + 42a_2^{(5)} B \\ \qquad + 70a_1^{(3)} a_1^{(4)} C + 280a_1^{(3)} a_3^{(3)} C + 42a_3^{(5)} C + 14a_1^{(6)} C + 21a_1^{(5)} E \\ \qquad + 35a_1^{(4)} a_2^{(3)} E + 35a_1^{(3)} a_2^{(4)} E + 140a_2^{(3)} a_3^{(3)} E + 105a_3^{(4)} E \\ \qquad + 7a_2^{(6)} E + 210a_1^{(3)} D + 210a_2^{(4)} D + 140[a_2^{(3)}]^2 D + 630a_2^{(3)} G \\ \qquad + 210a_3^{(3)} H + 42a_2^{(5)} H + 70a_2^{(3)} a_2^{(4)} H + a_2^{(7)} I + 70a_2^{(4)} a_3^{(3)} I \\ \qquad + 70a_2^{(3)} a_3^{(4)} I + 42a_3^{(5)} I = 0. \end{cases}$$

Dans le cas général le système (3,6) a la solution

$$(3,7)\qquad A = A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2, \quad B = B_1\lambda_1 + B_2\lambda_2, \quad \dots, \quad K = K_1\lambda_1 + K_2\lambda_2,$$

où $(A_1, \ldots, K_1)$, $(A_2, \ldots, K_2)$ sont deux solutions linéairement indépendantes du système (3,6).

Alors la cubique $K_1(u)$ appartient au faisceau

$$\lambda_1 {}^1K_1 + \lambda_2 {}^2K_2 = 0, \tag{3,8}$$

où ${}^1K_1$, ${}^2K_2$ sont deux cubiques dont les équations ont les coefficients $(A_1, \ldots, K_1)$ resp. $(A_2, \ldots, K_2)$.

Nous démontrerons maintenant que chaque cubique $K_1(u)$ du faisceau (3,8) qui a le point général au point $t = t_0$ de la courbe $K(t)$, a en $t = t_0$ un contact au moins d'ordre sept avec $K(t)$.

Nous chercherons les points d'intersection des courbes K, K_1 qui sont situés au voisinage du point $t = t_0$.

Si nous substituons aux fonctions y_i dans

$$K_1 \equiv A y_1^3 + \ldots + I y_2 y_3^2 = 0 \tag{3,9}$$

les développements

$$x_i(t) = x_i(t_0) + (t - t_0) x'_i(t_0) + (t - t_0)^2 \frac{x''_i(t_0)}{2!} + \ldots \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{3,10}$$

où nous prenons les valeurs (3,2) pour les dérivées

$$(x'_i)_0 = x'_i(t_0), \qquad \ldots,$$

nous aurons, en raison de (3,6) l'équation suivante :

$$(t - t_0)^8 [\alpha_0 + \alpha_1 (t - t_0) + \ldots] = 0. \tag{3,11}$$

Alors, nous obtenons l'équation

$$\left\{ \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} K_1[x(t)] \right\}_{t=t_0} = 0 \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, 7). \tag{3,12}$$

Or, c'est la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe algébrique $K_1(y)$ et la courbe $K(t)$ aient au point commun $t = t_0$ un contact au moins d'ordre sept (ou huit-ponctuel) (1). Par conséquent, les équations (2,1) et les conditions (1,IV) et (1,III) sont valables.

Puisque K_1 est la cubique qui n'a pas le point double au

---

(1) E. Čech, *P. D. G.*, p. 111, etc.

point $t = t_0$ considéré les conditions (1,II) et (1,I) sont aussi valables au voisinage du point $t = t_0$. Nous parvenons ainsi au théorème énoncé plus haut.

Remarques. — 1° *La courbe* K(t) *et les cubiques du faisceau* (3,8), *qui n'ont pas le point double en* $t = t_0$, *y possèdent la normale projective et la courbure projective en commun.*

On déduit la preuve des paragraphes 2 et 3 et de la définition (1,9) de la normale projective.

2° La remarque précédente fait clairement voir le rôle de la courbure de K_1 pour l'interprétation de la courbure de la courbe K. Alors, pour chercher l'interprétation géométrique de la courbure de K nous pouvons substituer à la courbe K n'importe quelle cubique elliptique du faisceau (3,8).

Nous allons le faire dans le paragraphe suivant.

4. Soit K_1 une cubique elliptique réelle et soit o_3 un point arbitraire de cette cubique qui n'est ni point d'inflexion ni point sextactique.

La tangente de la cubique en o_3, coupe cette courbe au point o_2 et la tangente en o_2 détermine sur cette courbe le point o_1 comme le point d'intersection.

Soit $o_1 o_2 o_3$ le triangle fondamental du système des coordonnées projectives $y_1 : y_2 : y_3$.

Ceci étant, nous pouvons écrire l'équation de la cubique

$$K_1 \equiv y_1^2(By_2 + Cy_3) + y_1(Ey_2y_3 + Fy_3^2) + Hy_2^2y_3 = 0, \tag{4,1}$$

où tous les coefficients sont réels et $B \neq 0$, $F \neq 0$, $H \neq 0$ [1]. Ensuite nous pouvons démontrer que :

La normale projective de la cubique (4,1) *en* o_3 *est*

$$Ey_1 + Hy_2 = 0 \tag{4,2}$$

et la courbure projective en ce point est

$$\varkappa_0 = -14 \frac{CH}{F^2}\left(\frac{F^2}{10BH}\right)^{\frac{2}{3}} \quad [1]. \tag{4,3}$$

---

[1] Les conditions $B \neq 0$, $H \neq 0$ sont nécessaires pour que la cubique K_1 ne soit pas dégénérée et la relation $F \neq 0$ exprime que o_3 n'est pas le point double.

Démonstration. — Au voisinage du point o_3 les équations paramétriques de la cubique sont

$$(4,4)\qquad y_1 = \frac{-2Eu - F + \Delta}{2(Eu + C)}, \qquad y_2 = u, \quad y_3 = 1,$$

où

$$\Delta = +\sqrt{(Eu + F)^2 - 4Hu^2(Bu + C)}.$$

Nous obtiendrons au point considéré les dérivées suivantes :

$$(4,5)\quad \begin{cases} y_1 = 0, \quad \left(\dfrac{dy_1}{du}\right)_0 = 0, \quad \left(\dfrac{d^2y_1}{du^2}\right)_0 = -\dfrac{2H}{F}, \quad \left(\dfrac{d^3y_1}{du^3}\right)_0 = \dfrac{6EH}{F^2}, \\ \left(\dfrac{d^4y_1}{du^4}\right)_0 = -\dfrac{24H}{F^3}(E^2 + CH), \\ \left(\dfrac{d^5y_1}{du^5}\right)_0 = -\dfrac{120H}{F^4}(BFH - E^3 - 3CEH), \\ \left(\dfrac{d^6y_1}{du^6}\right)_0 = \dfrac{720H}{F^5}(3BEFH - BCE^2H - 2C^2H^2 - E^4), \\ \left(\dfrac{d^7y_1}{du^7}\right)_0 = \dfrac{5040H}{F^6}(-4BCFH^2 - 6BE^2FH + 10C^2EH^2 + 10CE^3H + E^5), \\ y_2 = 0, \quad \left(\dfrac{dy_2}{du}\right)_0 = 1, \quad \left(\dfrac{d^ky_2}{du^k}\right)_0 = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots), \\ y_3 = 1, \quad \left(\dfrac{d^ly_3}{du^l}\right)_0 = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Les invariants unimodulaires k, n de la courbe K_1 au point o_3 sont, à cause de (4,5),

$$(4,6)\qquad k_0 = \left(\frac{F}{2H}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{E^2 - 4CH}{2F^2}, \qquad n_0 = \frac{5B}{F} \quad (^1),$$

et leurs dérivées en ce point sont

$$(4,7)\quad (Dn)_0 = 15\left(\frac{F}{2H}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{BE}{F^2}, \qquad (D^2n)_0 = 45\left(\frac{F}{2H}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{B(E^2 - 4CH)}{F^3} \quad (^2).$$

Ensuite les équations (1,8), (1,2), (4,5), (4,6) et (4,7) donnent

$$(4,8)\quad ({}^1x_1 : {}^1x_2 : {}^1x_3)_0 = 0 : 0 : 1, \qquad ({}^2x_1 : {}^2x_2 : {}^2x_3)_0 = -FH : EF : CE.$$

---

(1) Ici (et aussi dans la suite) on doit prendre la valeur principale pour la troisième racine.

(2) Dans ce cas les notions considérées au point o_3 sont désignées par l'indice o.

Il s'ensuit l'équation (4.2) de la normale projective de la cubique K_1 en o_3.

L'équation (1,9) en raison de (4,6) et (4,7) donne la courbure projective cherchée de la courbe K_1 au point o_3, à savoir

$$\varkappa_0 = -14\frac{CH}{F^2}\left(\frac{F^2}{10BH}\right)^{\frac{2}{3}}. \qquad \text{C. Q. E. D.}$$

5. Considérons encore la courbe K_1 donnée par (4,1) et soient

$$(5,1) \qquad \begin{cases} y_1 = F\rho^2(E\rho + H), \\ y_2 = F\rho(E\rho + H), \\ y_3 = -[(CE - BF)\rho^3 + (CH + E^2)\rho^2 + 2EH\rho - H] \end{cases}$$

les équations paramétriques de la courbe K_2.

On peut démontrer ceci :

1° *La courbe* K_2 *est la cubique unicursale qui a en* o_3 *le point double.*

2° *Les tangentes de la courbe* K_2 *au point double* o_3 *sont :* T_1 *qui est la tangente de la courbe* K_1 *en* o_3 *et* N_1 *qui est la normale projective de* K_1 *en* o_3.

3° *Les courbes* K_1 *et* K_2 *possèdent en* o_3 *huit points (sur neuf points d'intersection) en commun. La branche de la courbe* K_2, *qui touche* K_1 *dans le point* o_3, *a un contact au moins d'ordre six (ou sept-ponctuel) avec la courbe* K_1.

4° *Le neuvième point d'intersection* h *des cubiques* K_1 *et* K_2 *est le troisième point tangent du point* o_3 *sur la courbe* K_1 (1).

5° *Soient* i_1, i_2, i_3 *les points d'inflexion de la cubique* K_2 *et soient* $(T_1 N_1 H J_k)$, $(k = 1, 2, 3)$, *les birapports des droites* T_1, N_1, $H \equiv o_3 h$, $J_k \equiv o_3 i_k$ $(k = 1, 2, 3)$ *du faisceau* o_3, *et soit, enfin,* $\varkappa_0$ *la courbure projective de la courbe* K_1 *en* o_3. *Nous avons l'équation très intéressante*

$$(5,2) \qquad \varkappa_0^3 = -\frac{14^3}{10^2}\cdot(T_1 N_1 H I_1)(T_1 N_1 H I_2)(T_1 N_1 H I_3),$$

(1) Le premier *point tangent* du point général de la cubique est le point d'intersection de la cubique avec sa tangente construite au point pris en considération. Le $r^{\text{ième}}$ $(r \geq 2)$ point tangent du point généra lde la cubique est le point d'intersection de la cubique avec sa tangente construite au $(r-1)^{\text{ième}}$ point tangent du point mentionné.

c'est-à-dire : *la troisième puissance de la courbure projective de la cubique* K_1 *au point général égale, au facteur numérique* $\left(-\frac{14^3}{100}\right)$ *près, le produit des birapports* $(T_1 N_1 H I_k)$ $(k = 1, 2, 3)$.

Démonstration. — *a.* Les équations paramétriques (5,1) nous montrent que la courbe K_2 est la cubique unicursale avec le point double o_3. Les paramètres de ce point sont

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = -\frac{H}{E}.$$

Les tangentes en o_3 ont les équations

$$y_1 = 0, \qquad E y_1 + H y_2 = 0. \tag{5,3}$$

Ces équations avec (4,1) et (4,2) démontrent le premier et le second théorème énoncé plus haut.

b. Les points communs des cubiques données par (5,1) et (4,1) ont leurs paramètres déterminés par l'équation

$$v^7(Ev + H)[(BF - CE)v - CH) = 0. \tag{5,4}$$

Il s'ensuit

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_7 = 0, \qquad v_8 = -\frac{H}{E}, \qquad v_9 = \frac{CH}{BF - CE} \tag{5,5}$$

$$(BF - CE \neq 0) \quad (^1).$$

Alors les valeurs v_1 jusqu'à v_8 appartiennent au point o_3. L'équation (5,4) peut être écrite de la manière suivante :

$$\left\{\frac{d^\alpha}{dv^\alpha}\left[K_1[y(v)]\right]\right\}_{v=0} \qquad (\alpha = 1, \ldots, 6).$$

Or, c'est la condition nécessaire et suffisante pour que les cubiques K_1 et K_2 aient au point o_3, qui est le point double de K_2, un contact au moins d'ordre sept (ou huit-ponctuel) (²).

(¹) *Voir* (4,1).

(²) Il est évident que la branche (mentionnée plus haut) de la courbe K_2 a en o_3 un contact au moins d'ordre six avec la courbe K_1. (La définition de ce contact se trouve au paragraphe 2.) Alors les courbes K_1, K_2 ont en o_3 un contact au moins d'ordre sept (huit-ponctuel). Le cas échéant on doit appliquer la définition la plus générale du contact, à savoir la définition du contact des courbes algébriques au point double. (*Voir* E. Čech, *P. D. G.*, p. 224.)

C'est le troisième théorème.

Le neuvième point d'intersection h a le paramètre $v_9 = \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{BF}-\mathrm{CE}}$ et ses coordonnées sont

(5,6) $$(y_1 : y_2 : y_3)_h = \mathrm{C^2H} : (\mathrm{CE}-\mathrm{BF})\mathrm{C} : (\mathrm{CE}-\mathrm{BF})\mathrm{B}.$$

Les coordonnées du point d'intersection de la tangente en o_1 [il y aura $(y_1 : y_2 : y_3)_h$], c'est-à-dire

$$\mathrm{B}y_2 + \mathrm{C}y_3 = 0,$$

à K_1, avec la même courbe (4,1), sont déterminées par

$$y_1 : y_2 : y_3 = \mathrm{C^2H} : (\mathrm{CE}-\mathrm{BF})\mathrm{C} : (\mathrm{CE}-\mathrm{BF})\mathrm{B};$$

c'est précisément l'équation (5,6).

Alors le point h est le premier point tangent du point o_1 de K_1. Car dans le triangle choisi $o_1 o_2 o_3$ le point o_1 est le premier point tangent du point o_2 et le point o_2 est le premier point tangent du point o_3, le point h est le troisième point tangent du point o_3.

C'est le théorème IV.

c. Étant donnée la courbe (5,1) nous désignerons par v le paramètre du point d'inflexion de cette courbe. Soient ensuite T_1 la tangente $y_1 = 0$ et N_1 la tangente $\mathrm{E}y_1 + \mathrm{H}y_2 = 0$ de la cubique K_2 en o_3 et enfin soit $\mathrm{H} \equiv o_3 h$, $\mathrm{I} \equiv o_3 i$.

Cela étant, on peut construire le birapport

(5,7) $$(\mathrm{T}_1 \mathrm{N}_1 \mathrm{HI}) = \frac{\mathrm{C}(\mathrm{H}+\mathrm{E}v)}{\mathrm{BF}v}.$$

On constate facilement à l'aide de l'équation du troisième degré

(5,8) $$(\mathrm{BFH}-\mathrm{E}^3)v^3 - 3\mathrm{E^2H}v^2 - 3\mathrm{EH}^2 v - \mathrm{H}^3 = 0$$

qui donne les paramètres v_i des points d'inflexion i_1, i_2, i_3 de la courbe (5,1), que cette quantité est invariante par la transformation du paramètre sur la courbe K_2.

Ensuite on peut construire le produit

(5,9) $$(\mathrm{T}_1\mathrm{N}_1\mathrm{HI}_1)(\mathrm{T}_1\mathrm{N}_1\mathrm{HI}_2)(\mathrm{T}_1\mathrm{N}_1\mathrm{HI}_3) = \frac{\mathrm{C}^3(\mathrm{H}+\mathrm{E}v_1)(\mathrm{H}+\mathrm{E}v_2)(\mathrm{H}+\mathrm{E}v_3)}{\mathrm{B}^3\mathrm{F}^3 v_1 v_2 v_3},$$

où v_1, v_2, v_3 sont les solutions de l'équation (5,8).

Si nous substituons les valeurs bien connues de (5,8) aux fonctions symétriques des racines dans (5,9), nous obtiendrons immédiatement

$$(5,10) \qquad (T_1N_1HI_1)(T_1N_1HI_2)(T_1N_1HI_3) = \frac{C^3H}{F^2B^2}.$$

Il s'ensuit en raison de (4,3) pour la courbure de la courbe (5,1) en o_3 l'expression

$$(5,11) \qquad \varkappa_0 = -\frac{14}{\sqrt[3]{100}} \sqrt[3]{(T_1N_1HI_1)(T_1N_1HI_2)(T_1N_1HI_3)}$$

que nous voulions obtenir.

Appendice. — Si nous nous reportons aux paragraphes et remarques précédentes, nous pouvons énoncer au sujet de l'interprétation de la courbure d'une courbe générale K le théorème suivant :

Soient

$$x_i = x_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

les équations paramétriques de la courbe K *et soit o un point général* (qui n'est ni point singulier ni point d'inflexion et ni point sextactique) *arbitrairement choisi sur* K *et enfin soient* x_i *les fonctions régulières au voisinage du o.*

Soit K_1 *n'importe quelle cubique elliptique, qui a en o un contact au moins d'ordre sept* (ou huit-ponctuel) *avec* K_1 *et soit* K_2 *la cubique unicursale, qui touche au point double la normale projective de* K_1 *et qui a en o un contact d'ordre sept avec* K_1.

Soit h le neuvième point (le point de Halphen) *commun aux courbes* K_1 *et* K_2, *soient* i_1, i_2, i_3 *les points d'inflexion de la cubique* K_2 *et soient* T_1, N_1 *ses tangentes en o. Le produit des birapports* $(T_1N_1HI_k)$ *des droites* T_1, N_1, oh, oi_k, $(k = 1, 2, 3)$ *égale, au facteur multiplicatif* $\left(-\frac{14^3}{100}\right)$ *près, la troisième puissance de la courbure projective de la courbe* K *en o.*