BULLETIN DE LA S. M. F.

STEFAN KEMPISTY

Sur la méthode triangulaire du calcul de l’aire d’une surface courbe

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 119-132
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__119_0>

SUR LA MÉTHODE TRIANGULAIRE DU CALCUL DE L'AIRE D'UNE SURFACE COURBE;

PAR M. STEFAN KEMPISTY.

Lorsque H. A. Schwarz a prouvé que la suite des aires des polyèdres triangulaires inscrits dans un cylindre droit peut être divergente, on a abandonné ce procédé du calcul de l'aire d'une surface courbe. On a renoncé de se servir des polyèdres inscrits dans la surface, en renonçant en même temps de définir l'aire de la surface au moyen d'une limite unique.

En effet, M. Lebesgue a appelé l'*aire* d'une surface courbe la limite inférieure des aires des polyèdres tendant uniformément vers la surface ([1]). Nous savons maintenant que cette aire peut être déterminée comme une limite unique par le procédé de M. Tonelli ([2]) ou par celui de M. Radò ([3]), mais ces deux procédés sont plus compliqués que le procédé primitif qui avait l'avantage d'être une généralisation immédiate du calcul de la longueur d'une courbe.

Les polyèdres inscrits interviennent dans la thèse de Zoárd de Geöcze ([4]). On y trouve le résultat suivant :

Si $f(x, y)$ satisfait à la condition de Lipschitz et ses nombres dérivés partiels sont intégrables au sens de Riemann, l'aire de la surface $z = f(x, y)$ peut être calculée au moyen de polyèdres inscrits, obtenus en prenant un grillage dans le plan xy et en divisant chaque rectangle de ce grillage par une diagonale en deux triangles rectangles.

([1]) *Intégrale, longueur, aire* (*Annali Math.*, 3e série, 7, 1902, p. 231-350).

([2]) *Sulla quadratura delle superficie* (*Atti Accad. Linc.*, 6e série, 3, 1926, p. 357-363, 445-450, 633-658).

([3]) *Sur le calcul des surfaces courbes* (*Fund. Math.*, 10, 1927, p, 197-210).

([4]) *Quadrature des surfaces courbes* (*Math. nat. Berichte Ung.*, 26, 1910, p. 54).

Pour les fonctions à dérivées partielles continues nous avons un résultat plus général dû à M. W. H. Young : quelle que soit la division en triangles du rectangle R_0 dans le plan xy, l'aire du polyèdre inscrit dans la surface et correspondant à cette division est toujours convergente et tend vers

$$\iint_{R_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

lorsque les angles des triangles de la division sont bornés supérieurement par un nombre ω inférieur à π (¹).

M. Rademacher a établi une proposition analogue pour les fonctions satisfaisant à la condition de Lipschitz. Mais il admet que les angles des triangles dans le plan xy sont bornés inférieurement par un nombre positif ou, ce qui vient au même, que le rapport de la plus petite hauteur et du plus grand côté est borné (²).

Pour sortir de la classe de fonctions vérifiant la condition de Lipschitz, nous allons revenir aux triangles rectangles considérés par Geöcze et nous allons leur imposer la condition suivante : que le rapport des côtés de l'angle droit soit borné.

Cela nous permettra de nous servir des théorèmes généraux de la théorie des fonctions de rectangle.

Les principaux résultats de ce travail étaient publiés dans une note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (³).

1. Notions générales. — Soit R un rectangle

$$a \leqq x \leqq a + h, \qquad b \leqq y \leqq b + k,$$

désignons par $|R|$ son aire hk.

Nous dirons que ce rectangle est *semi-régulier* quand

$$\frac{1}{2} < \frac{h}{k} < 2.$$

(¹) *On the triangulation method of defining the area of a surface* (*Proc. Lond. Math. Soc.*, 2ᵉ série, 19, 1919, p. 150-151).

(²) *Ueber partielle u. totale Differenzierbarkeit II* (*Math. Ann.*, 81, 1920, p. 54-57).

(³) *Sur l'aire de la surface $z = f(x, y)$* (*C. R. Acad. Sc. Paris*, 202, 1936, p. 1138-1140).

Considérons un ensemble fini S des rectangles $R_1, R_2, \ldots, R_n$ sans points intérieurs communs, c'est-à-dire un *système* dit *élémentaire*. Ce système est *semi-régulier* s'il est composé de rectangles semi-réguliers. Il devient une *subdivision semi-régulière* d'un intervalle R_0, lorsque

$$R_0 = R_1 + R_2 + \ldots + R_n.$$

La plus grande des dimensions : h_i, k_i de ces rectangles est la *norme* de la division S.

Soit F(R) une fonction de rectangle définie dans un rectangle R_0. Posons

$$F(S) = F(R_1) + F(R_2) + \ldots + F(R_n).$$

Supposons ensuite que S est une division semi-régulière dont la norme tend vers zéro. Les limites extrêmes de F(S) sont

$$\underline{\int}_{R_0} F, \quad \overline{\int}_{R_0} F.$$

l'*intégrale semi-régulière inférieure* et l'*intégrale semi-régulière supérieure* de F dans R_0.

Leur valeur commune est l'*intégrale semi-régulière*

$$\int_{R_0} F.$$

Considérons d'autre part un rectangle semi-régulier R tendant vers un point (x, y) contenu dans R. Les limites extrêmes du rapport

$$\frac{F(R)}{|R|}$$

seront appelées respectivement la *dérivée semi-régulière inférieure* $\underline{D}_{xy}F$, et la *dérivée semi-régulière supérieure* $\overline{D}_{xy}F$, de F au point (x, y). Lorsqu'elles sont égales, leur valeur commune est la *dérivée semi-régulière* $D_{xy}F$. Ces dérivées sont des fonctions de la deuxième classe de Baire, au plus.

En étendant aux intégrales semi-régulières et aux dérivées semi-régulières un théorème de M. Saks, on obtient les égalités

$$\underline{D}_{xy} F = \underline{D}_{xy} \int_R F, \qquad \overline{D}_{xy} F = \overline{D}_{xy} \int_R F,$$

qui ont lieu presque partout dans R_0 (¹).

Lorsque l'intégrale de F est presque partout semi-régulièrement dérivable, il en est de même de F.

Nous dirons qu'une fonction F(R) est *à variation semi-régulière bornée* dans R_0, lorsque

$$\overline{\int_{R_0}} |F| < \infty.$$

Dans le cas où F est additive cette condition équivaut à la condition

$$|F(S)| < M.$$

S étant un système élémentaire. Donc une fonction additive et à variation semi-régulière bornée est à variation bornée.

Si F est en même temps à variation semi-régulière bornée et semi-régulièrement intégrable dans R_0, elle y est presque partout semi-régulièrement dérivable puisque l'intégrale de F qui est additive et à variation bornée est semi-régulièrement dérivable et l'on a

$$\int\int_{R_0} |D_{xy} F| \, dx \, dy \leqq \overline{\int_{R_0}} |F|.$$

Cela résulte du théorème de M^lle^ Young (²), établi pour les intégrales et les dérivées de Burkill et de l'inégalité

$$\overline{\int_{R_0}} \left| \int_R F \right| \leqq \overline{\int_{R_0}} |F| < \infty,$$

d'après laquelle l'intégrale de F est à variation bornée.

Disons que F(R) est ***absolument et semi-régulièrement continue*** dans R_0, lorsque F(S) tend vers zéro en même temps que

$$|S| = |R_1| + |R_2| + \ldots + |R_n|,$$

S étant un système élémentaire semi-régulier.

(¹) *Théorie de l'intégrale*, Varsovie, 1933, p. 106. th. VI.
(²) *Functions of Σ*, (*Math. Ann.*, 29, 1926, p. 187, th. I).

Une fonction additive est absolument et semi-régulièrement continue dès qu'elle est absolument continue. L'intégrale semi-régulière d'une fonction absolument et semi-régulièrement continue est absolument continue et réciproquement.

En généralisant un autre théorème de M. Burkill [1] on établit les égalités

$$\underline{\int_{R_0}} F = \int\int_{R_0} \underline{D}_{xy} F \, dx \, dy, \qquad \overline{\int_{R_0}} F = \int\int_{R_0} \overline{D}_{xy} F \, dx \, dy,$$

pour toute fonction F absolument et semi-régulièrement continue. On en déduit qu'une fonction presque partout semi-régulièrement dérivable est semi-régulièrement intégrable et qu'on a dans ce cas

$$\int_{R_0} F = \int\int_{R_0} D_{xy} F \, dx \, dy \text{ [2]}.$$

2. **Les polyèdres inscrits dans la surface.** — Soit $f(x, y)$ une surface continue définie dans un rectangle R_0

$$0 \leqq x \leqq 1, \qquad 0 \leqq y \leqq 1.$$

Désignons par A, B, C, D les sommets du rectangle R contenu dans R_0. Soient donc en particulier

$$A = (a, b), \qquad B = (a, b+k), \qquad C = (a+h, b+k), \qquad D = (a+h, b).$$

Divisons le rectangle R par la diagonale BD en deux triangles rectangles ABD et BDC. Soient maintenant A_1, B_1, C_1, D_1 les points se trouvant sur la surface $z = f(x, y)$ et ayant respectivement comme projections sur le plan xy les sommets A, B, C, D du rectangle R.

Posons

$$F_1(R) = [f(a+h, b) - f(a, b)]k, \qquad F_2(R) = [f(a, b+k) - f(a, b)]h.$$

Les aires des projections du triangle $A_1B_1D_1$ sur les plans yx et zx sont respectivement égaux à $|F_1(R)|$ et $|F_2(R)|$. L'aire du

---

[1] *Functions of intervals* (*Proc. Lond. Math. Soc.*, 2e série, 22, 1924, p. 309, th. VI, VII).

[2] S. Kempisty, *Sur les fonctions absolument continues d'intervalles* (*Fund Math.*, 27, 1936, p. 11-37).

triangle $A_1B_1D_1$ est donc égale à

$$\frac{1}{2}\sqrt{|R|^2+[F_1(R)]^2+[F_2(R)]^2}.$$

Posons ensuite

$$F_3(R)=[f(a+h,b+k)-f(a,b+k)]k,$$
$$F_4(R)=[f(a+h,b+k)-f(a+h,b)]h.$$

Les projections du triangle $B_1D_1C_1$ sont égales à $|F_3(R)|$ et $|F_4(R)|$ et l'aire du triangle $B_1D_1C_1$ est égale à

$$\frac{1}{2}\sqrt{|R|^2+[F_3(R)]^2+[F_4(R)]^2}.$$

Enfin soit $F(R)$ la somme des aires des triangles $A_1B_1D_1$ et $B_1D_1C_1$, c'est-à-dire soit

$$F(R)=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{|R|^2+F_1^2+F_2^2}+\sqrt{|R|^2+F_3^2+F_4^2}\right\}.$$

Si S est une division semi-régulière de R_0, $F(S)$ est l'aire du polyèdre inscrit dans la surface.

L'intégrale semi-régulière de F est donc la limite des aires des polyèdres inscrits de la manière ici définie.

Par exemple quand la surface considérée est une surface cylindrique $z=f(x)$, nous avons

$$F_1(R)=F_3(R)=[f(a+h)-f(a)]k, \qquad F_2(R)=F_4(R)=0,$$
$$F(R)=k\sqrt{h^2+[f(a+h)-f(a)]^2}.$$

Comme F est additive pour une subdivision de R en deux rectangles R_1 et R_2 au moyen d'une parallèle à l'axe de x, nous voyons que la subdivision S peut être transformée en une subdivision qui peut être partagée en bandes parallèles à cet axe. Par suite F est semi-régulièrement intégrable lorsque la courbe $z=f(x)$ est rectifiable. Nous avons donc

$$\int_{R_0} F = s(f),$$

$s(f)$ étant la longueur de la courbe $z=f(x)$ dans l'intervalle $(0, 1)$.

Il est à remarquer que dans ce cas

$$\int_{R_0} |F_1| = \int_{R_0} |F_3| = V(f),$$

$V(f)$ étant la variation totale de $f(x)$ dans cet intervalle.

3. **Surface semi-régulièrement quarrable.** — Nous dirons que la surface $z = f(x, y)$ est *semi-régulièrement quarrable* lorsque F est à variation semi-régulière bornée.

Théorème I. — *Pour que la surface $z = f(x, y)$ soit semi-régulièrement quarrable il faut et il suffit que les quatre fonctions* F_1, F_2, F_3, F_4 *soient à variation semi-régulière bornée.*

En effet nous avons

$$|F_i(R)| < 2F(R) \leqq 2|R| + \sum_{i=1}^{4} |F_i(R)| \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

donc

$$\overline{\int_{R_0}} |F_i| \leqq 2 \overline{\int_{R_0}} F \leqq 2|R_0| + \sum_{i=1}^{4} \overline{\int_{R_0}} |F_i| \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Il s'ensuit que l'intégrale semi-régulière supérieure de $|F|$ n'est finie qu'en même temps que les quatre intégrales supérieures de $|F_i|$.

Pour établir l'existence de la dérivée semi-régulière de F, nous allons établir les deux lemmes suivants :

Lemme I. — *Si les dérivées régulières extrêmes des fonctions* F_1 *et* F_4 *sont finies en un point* (a, b), *nous avons*

$$\limsup_{h, k \to \infty} \frac{|f(a+h, b+k) - f(a, b)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} < \infty,$$

h et k étant des nombres positifs dont le rapport est contenu entre $\frac{1}{2}$ et 2.

En effet, nous avons

$$f(a+h, b+k)-f(a+h, b) < \frac{F_4(R)}{|R|} = h(\overline{D}_{ab}F_4 + \alpha),$$

$$f(a+h, b)-f(a, b) < \frac{F_1(R)}{|R|} = k(\overline{D}_{ab}F_1 + \beta),$$

où α et β désignent des fonctions infiniment petites de h et k.

Par conséquent

$$\frac{|f(a+h, b+k)-f(a, b)|}{\sqrt{h^2+k^2}} < \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}|\overline{D}_{ab}F_4| + \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}|\overline{D}_{ab}F_1| + \frac{\alpha h+\beta k}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Comme

$$\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} < \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} < \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \frac{|\alpha h+\beta k|}{\sqrt{h^2+k^2}} < |\alpha| + |\beta|,$$

on voit bien que la limite supérieure de la partie gauche est finie.

Lemme II. — *Si la fonction $f(x, y)$ est totalement différentiable au point (x, y), les fonctions F_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sont semi-régulièrement dérivables en ce point et l'on a*

$$D_{xy}F_1 = D_{xy}F_3 = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad D_{xy}F_2 = D_{xy}F_4 = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Pour le voir, écrivons la condition de Stolz de différentiabilité totale de $f(x,y)$ au point (x,y) des deux manières suivantes :

$$f(a+h, b)-f(x,y) = (a+h-x)\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\alpha\right) + (b-y)\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\beta\right),$$

$$f(a, b)-f(x,y) = (a-x)\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\gamma\right) + (b-y)\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\delta\right),$$

où α et β sont les fonctions infiniment petites de $a+h-x$ et $b-y$, tandis que γ et δ sont les fonctions infiniment petites de $a-x$ et $b-y$.

Par définition de F_1, nous avons donc

$$\frac{F_1(R)}{|R|} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{a-x}{k}(\alpha-\gamma) + \frac{h}{k}\alpha + \frac{b-y}{k}(\beta-\delta).$$

Faisons décroître h et k vers zéro. Quand

$$a \leqq x \leqq a + h, \qquad b \leqq y \leqq b + k, \qquad \frac{1}{2} < \frac{h}{k} < 2,$$

nous avons toujours

$$0 < \frac{x - a}{k} < \frac{h}{k} < 2, \qquad 0 < \frac{y - b}{k} < 1$$

et d'autre part α, β, γ et δ tendent vers zéro. On obtient donc à la limite

$$D_{xy} F_1 = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

On établit de la même manière les autres égalités de notre énoncé.

Théorème II. — *Lorsque la surface* $z = f(x, y)$ *est semi-régulièrement quarrable elle possède presque partout le plan tangent, la fonction correspondante* F(R) *est presque partout semi-régulièrement dérivable et l'on a*

$$\overline{\int_{R_0}} F \geqq \int\int_{R_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Il résulte du théorème de M^lle^ Young, cité dans le paragraphe 1, que les dérivées semi-régulières extrêmes de F_i sont presque partout finies.

Donc $f(x, y)$ est presque partout totalement différentiable, en vertu d'un théorème de M. Haslam-Jones [1], car nous avons d'après le lemme I, en presque tous points (a, b) de R_0,

$$\limsup_{h, k \to 0} \frac{|f(a + h, b + k) - f(a, b)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} < \infty,$$

pour

$$h > 0, \qquad k > 0, \qquad \frac{1}{2} < \frac{h}{k} < 2,$$

c'est-à-dire dans un angle compris entre arc tg $\frac{1}{2}$ et arc tg 2.

Il existe donc presque partout un plan tangent à la surface.

D'après le lemme II, les fonctions F_i sont donc presque partout

---

[1] *Derivate planes and tangent planes of a measurable function* (*Quart. Jour. Math. Oxford ser.*, 3, 1932, p. 217-252).

semi-régulièrement dérivables et nous avons presque partout les égalités

$$D_{xy}F_1 = D_{xy}F_3 = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad D_{xy}F_2 = D_{xy}F_4 = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Par suite F est presque partout semi-régulièrement dérivable et

$$D_{xy}F = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+(D_{xy}F_1)^2+(D_{xy}F_2)^2}+\sqrt{1+(D_{xy}F_3)^2+(D_{xy}F_4)^2}\right\}$$
$$=\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

Comme F est à variation semi-régulièrement bornée, nous pouvons appliquer le théorème cité de M[lle] Young, ce qui donne

$$\overline{\int_{R_0}} F \geqq \int\int_{R_0} D_{xy}F\,dx\,dy = \int\int_{R_0}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

3. **Les fonctions F absolument et semi-régulièrement continues.** — Supposons que F est absolument et semi-régulièrement continue dans R_0.

Comme

$$|F_i|(S) \leqq 2F(S) \leqq 2|S| + \sum_{i=1}^{4}|F_i|(S),$$

nous avons la proposition suivante :

Théorème I. — *Pour que* F *soit absolument et semi-régulièrement continue, il faut et il suffit que le soient toutes les quatre fonctions* F_i.

En particulier, quand $f(x, y)$ satisfait à la condition de Lipschitz,

$$|f(x', y') - f(x, y)| < M\{|x'-x| + |y'-y|\},$$

nous avons

$$|F_i(R)| < Mhk \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

donc F est absolument continue.

L'application des théorèmes généraux sur les fonctions de rectangles nous donne le théorème suivant :

Théorème II. — *Si* F *est absolument et semi-régulièrement continue, elle est semi-régulièrement intégrable et nous avons*

$$\int_{R_0} F = \int\int_{R_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

En effet F, étant absolument et semi-régulièrement continue, est à variation semi-régulière bornée donc presque partout semi-régulièrement dérivable. Mais une fonction absolument et semi-régulièrement continue qui est presque partout semi-régulièrement dérivable est toujours semi-régulièrement intégrable et nous avons, en vertu du second théorème de M. Burkill (§ 1), l'égalité

$$\int_{R_0} F = \int\int_{R_0} D_{xy} F\, dx\, dy.$$

Or nous avons aussi

$$D_{xy} F = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

presque partout dans R_0, donc

$$\int_{R_0} F = \int\int_{R_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Théorème III. — *Si* F *est absolument et semi-régulièrement continue nous avons presque partout*

$$D_{xy} \int_R F = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

En effet, d'après le théorème de M. Saks (§ 1), nous avons presque partout

$$D_{xy} \int_R F = D_{xy} F.$$

4. L'aire d'une surface courbe $z = f(x, y)$.

Théorème I. — *Une surface semi-régulièrement quarrable possède une aire finie au sens de Lebesgue.*

En effet, $f(x, y)$ étant continue, les aires F(S) des polyèdres inscrits dans la surface $z = f(x, y)$ tendent uniformément vers cette surface, lorsque la norme de la division S tend vers zéro.

L'aire $A(f, R_0)$ de la surface, définie au sens de Lebesgue, étant la limite inférieure des aires de tous les polyèdres qui tendent uniformément vers cette surface, nous avons évidemment

$$A(f, R_0) \leqq \overline{\int_{R_0}} F < \infty.$$

Mais, *il existe des surfaces non semi-régulièrement quarrables dont l'aire est finie.* En effet M. Caciopolli a trouvé un exemple d'une surface de l'aire finie qui n'a pas de plan tangent en un ensemble de mesure positive [1]. Or, nous l'avons vu, toute surface semi-régulièrement quarrable possède presque partout un plan tangent, étant presque partout totalement différentiable.

Théorème II. — *Lorsque la fonction* $F(R)$ *est absolument et semi-régulièrement continue, on a, pour l'aire* $A(f, R_0)$ *de la surface* $z = f(x, y)$, *l'égalité*

$$\overline{\int_{R_0}} F = A(f, R_0).$$

En effet considérons les expressions analogues à celles de Geöcze

$$G_1(R) = \int_b^{b+k} [f(a+h, y) - f(a, y)]\, dy,$$

$$G_2(R) = \int_a^{a+h} [f(x, b+k) - f(x, b)]\, dx,$$

$$G(R) = \sqrt{|R|^2 + [G_1(R)]^2 + [G_2(R)]^2}.$$

Comme F est absolument et semi-régulièrement continue, les fonctions $F_i (i = 1, 2, 3, 4)$ sont aussi absolument et semi-régulièrement continues, donc elles sont semi-régulièrement intégrables et nous avons

$$\int_R F_1 = \int_R F_3 = G_1(R), \qquad \int_R F_2 = \int_R F_3 = G_2(R).$$

Alors G_1 et G_2 sont absolument continues et il en est de même de $G(R)$.

(1) *Sur carattere infinitesimale delle superficie quadrabili* (*Rendiconti Accad. Naz. Linc.*, 6e série, 7, 1928, p. 901-905).

D'autre part il résulte des travaux de M. Radò (¹) que

$$\int_R G = A(f, R),$$

donc $A(f, R)$ est une fonction absolument continue de R.

Mais, d'après un théorème de M. Tonelli (²), lorsque l'aire $A(f, R_0)$ est finie, on a presque partout dans R_0

$$D_{xy}A = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2},$$

donc, dans notre cas,

$$(1) \qquad A(f, R_0) = \iint_{R_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Or nous avons montré (§ 3, théorème II) que

$$(2) \qquad \int_{R_0} F = \iint_{R_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

dès que F est absolument et semi-régulièrement continue.

Les égalités (1) et (2) entraînent

$$A(f, R_0) = \int_{R_0} F,$$

c'est-à-dire l'*aire de la surface*

$$z = f(x, y)$$

peut être calculée au moyen des polyèdres triangulaires inscrits dans la surface.

L'égalité (1) n'a lieu, d'après un théorème de M. Tonelli (³), que dans le cas où $f(x, y)$ est absolument continue au sens défini par lui, c'est-à-dire lorsque $f(x, y)$ est absolument continue par rapport à chacune des variables pour presque chaque valeur de l'autre variable et à variation bornée au sens de Tonelli. Nous voyons

(¹) *Sur le calcul des aires des surfaces courbes* (*Fundamenta Math.* 10, 1927, p. 197-210).

(²) *Loc. cit.*

(³) *Loc. cit.* et S. SAKS, *Théorie de l'intégrale*, Varsovie, 1933, p. 121, th. XV.

donc que la continuité absolue et semi-régulière de F(R) entraîne la continuité absolue de $f(x, y)$ au sens de Tonelli. Mais il existe des fonctions $f(x, y)$ absolument continues en ce sens, telles que F n'est pas absolument et semi-régulièrement continue. Cela résulte de l'exemple construit par M. Saks (¹) d'une fonction f absolument continue au sens de Tonelli mais non différentiable totalement au sens de Stolz.

Pour voir que la classe de fonctions f pour lesquelles F est absolument et semi-régulièrement continue est plus étendue que la classe de fonctions vérifiant la condition de Lipschitz il suffit de considérer la surface cylindrique $z = \sqrt{x}$. Nous avons en effet, dans ce cas,

$$F_1(R) = F_3(R) = \left[\sqrt{a+h} - \sqrt{a}\right]k = \int_a^{a+h}\int_b^{b+k} \frac{dx\,dy}{2\sqrt{x}},$$
$$F_2(R) = F_4(R) = 0,$$

donc toutes les fonctions F_i sont absolument continues.

Or la fonction $\sqrt{x}$ ne satisfait pas à la condition de Lipschitz, car sa dérivée est non bornée.

(¹) *On the surfaces without tangent planes* (*Ann. of Math.*, 2ᵉ série, 34, 1933, p. 114-124).