BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Sur les singularités des courbes gauches algébriques

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 10-43
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__10_1>

Sur les singularités des courbes gauches algébriques;
par M. HALPHEN.

(Séance du 7 novembre 1877.)

Dans plusieurs Mémoires antérieurs ([1]), j'ai traité un grand nombre de questions relatives au dénombrement des singularités des courbes planes algébriques. Pour la solution de ces questions, j'ai fait usage d'une méthode uniforme que j'ai exposée, réduite à sa plus simple expression, dans mon *Mémoire sur le contact des*

([1]) *Recueil des Savants étrangers*, t. XXVI; *Journal de Mathématiques*, 3e série, t. II; *Bulletin de la Société mathématique*, *passim*.

courbes planes avec les coniques (¹). La même méthode peut être appliquée à la solution des questions analogues concernant les êtres géométriques définis par plusieurs fonctions simultanées d'une seule variable. C'est ainsi que j'ai pu traiter la théorie des caractéristiques des systèmes de coniques (²). Dans le Mémoire actuel, je m'occuperai, en suivant la même voie, des singularités des courbes gauches et des surfaces développables. Dans une autre occasion, j'étudierai les singularités des surfaces gauches.

Parmi les travaux antérieurs relatifs aux singularités des courbes gauches, je citerai un Mémoire de M. Cayley (*Journal de Mathématiques,* 2ᵉ série, t. X) et un Mémoire de M. Zeuthen (*Annali di Mathem.,* 2ᵉ série, t. III).

§ I. — Points singuliers des courbes gauches.

1. Quelques mots d'abord pour rappeler la représentation analytique des points singuliers des courbes planes.

Théorème I. — *Aux environs d'un point* O *situé sur une courbe algébrique plane, et pris pour origine des coordonnées rectilignes, toutes les positions d'un point mobile sur cette courbe sont définies par un ou plusieurs systèmes d'équations, tels que*

$$x = t^n, \quad y = f(t), \tag{1}$$

dans lequel n est un entier positif et $f(t)$ un développement procédant suivant les puissances entières, positives et ascendantes de t. Ces équations sont valables dans les limites de convergence de $f(t)$.

Ce théorème, que je me contente de rappeler sans démonstration, peut être attribué à Newton. Il est, en effet, une conséquence immédiate du *parallélogramme.*

La portion de courbe représentée par les équations (1) a été désignée par M. Cayley sous le nom de *branche superlinéaire.* Des considérations algébriques, empruntées à M. Puiseux, m'ont

(¹) *Bulletin de la Société mathématique,* t. IV, p. 59.

(²) Ce Mémoire n'est pas encore publié. Il paraîtra dans le prochain Cahier du *Journal de l'École Polytechnique.*

précédemment conduit à employer, pour le même objet, le nom de *système circulaire*. Pour plus de brièveté, j'emploierai ici le nom de *cycle*.

A chaque valeur de x répondent dans (1) n valeurs de t, et aussi, par suite, n valeurs de y, à moins que f ne contienne que des puissances entières de t^k, k étant un diviseur de n. S'il en est ainsi, en prenant t^k pour nouvelle variable au lieu de t, on fera disparaître cette restriction. Ainsi l'on peut supposer que, dans (1), à chaque valeur de x répondent n valeurs de y.

Quand t décroît jusqu'à zéro, le rapport de y à x tend vers une limite unique; donc le cycle (1) admet en son *origine* O une seule tangente. Si cette tangente n'est pas l'axe des y, ce que l'on peut supposer, $f(t)$ commence par un terme de degré au moins égal à n. Si cette tangente est choisie pour axe des x, $f(t)$ commence par un terme de degré supérieur à n. Soit $n+\nu$ le degré de ce terme. Les deux nombres entiers positifs n, ν jouent un grand rôle dans la théorie des points singuliers des courbes planes. J'appelle n l'*ordre* et ν la *classe* du cycle. Je désignerai à l'occasion le cycle d'ordre n et de classe ν par ces mots : *le cycle* (n, ν).

2. L'ordre n du cycle est le nombre des valeurs de y qui répondent à une valeur de x. Comme l'axe des x a une direction quelconque, ce nombre est celui des points voisins de O en lesquels le cycle est rencontré par une sécante de direction arbitraire et passant dans les environs de O. On voit donc que si, en un point O, une courbe se décompose en plusieurs cycles, la somme des ordres de ces cycles est ce qu'on appelle communément l'*ordre de multiplicité du point* O.

La tangente du cycle étant prise pour axe des x, les équations (1) sont de la forme

$$x = t^n, \quad y = \mathrm{A}\, t^{n+\nu} + \ldots. \tag{2}$$

En un point a, répondant à une valeur quelconque de t, le coefficient angulaire de la tangente est $\frac{n+\nu}{n}\mathrm{A}\,t^{\nu} + \ldots$. Si l'on suppose t infiniment petit du premier ordre, on a ce résultat :

THÉORÈME II. — *Soit sur un cycle (n, ν) un point a dont la distance à l'origine* O *du cycle soit infiniment petite d'ordre n.*

La tangente en a fait avec la tangente en O un angle infiniment petit d'ordre ν.

3. Je rappelle maintenant la proposition suivante :

Théorème III. — *Soient C, C′ deux courbes planes algébriques se correspondant point par point : aux points qui, sur l'une, appartiennent à un seul et même cycle correspondent, sur l'autre, des points appartenant aussi à un seul et même cycle.*

Soient n, n' les ordres de deux tels cycles (C), (C′) : à un point placé sur (C), à une distance infiniment petite d'ordre n de l'origine de (C), correspond un point placé sur (C′) à distance infiniment petite d'ordre n' de l'origine de (C′) (¹).

Considérons, comme au n° 2, un cycle (n, ν) d'une courbe C et le point a sur ce cycle. Considérons, en même temps, une courbe C′ corrélative de C. Sur C′ existe un cycle correspondant au cycle (n, ν) de C. L'origine de ce cycle et le point qui y correspond à a sont les transformées des tangentes du premier cycle à l'origine et au point a. Ces tangentes font entre elles un angle infiniment petit d'ordre ν : donc les points, qui en sont les transformés, sont entre eux à une distance d'ordre ν ; donc, par application du théorème III, l'ordre du cycle de C′ est ν. D'où, par réciprocité, ce résultat :

Théorème IV. — *A un cycle (n, ν) d'une courbe plane correspond, dans une courbe corrélative, un cycle (ν, n).*

4. J'arrive maintenant aux courbes gauches.

Une courbe gauche G est, par définition, le lieu d'un point dont les coordonnées rectilignes dans l'espace sont des fonctions d'une seule variable. Si ces fonctions sont algébriques, la courbe est dite *algébrique*. De cette définition il résulte que toutes les projections ou perspectives d'une courbe gauche algébrique sur un plan sont des courbes planes algébriques. On reconnaît sans peine que, parallèlement à une direction arbitraire, il n'y a qu'un nombre fini de droites rencontrant G en plus d'un point. Si donc on projette G sur deux plans suivant deux directions arbitraires, les projections

(¹) *Bulletin de la Société mathématique*, t. IV, p. 32.

G', G'' correspondent *point par point* à G, et, par suite, se correspondent aussi entre elles *point par point.*

Soient O, a deux points infiniment voisins pris sur G. Les projections $O'a'$, $O''a''$ de Oa sont des infiniment petits d'un même ordre; donc (théorème III) les cycles correspondants qui sur G' et G'' ont respectivement O' et O'' pour origine sont d'un même ordre. Supposons O pris pour origine des coordonnées, et les directions des projetantes prises pour celles des axes des z et des y. Les deux cycles de G' et G'' sont alors, n étant leur ordre, représentés simultanément par

$$(3) \qquad x = t^n, \quad y = f(t), \quad z = \varphi(t),$$

f et φ étant des développements commençant chacun par un terme de degré n.

J'appelle *cycle* la portion de la courbe gauche G définie par (3). On a ainsi ce premier résultat : *Aux environs d'un point quelconque, une courbe gauche algébrique se décompose en un ou plusieurs cycles.*

Changeons les plans $y = 0$ et $z = 0$, de manière à faire disparaître les termes de degré n dans f et dans φ. Il est visible qu'on astreint ainsi ces plans à passer par une certaine droite. Cette droite est, comme on s'en assure aisément, la limite d'une corde passant par O, c'est-à-dire la *tangente* du cycle. On peut, en outre, achever de déterminer le plan $z = 0$, de manière à élever encore le degré du premier terme dans φ. Le plan ainsi obtenu est la limite d'un plan passant par la tangente et un point du cycle infiniment voisin de O. C'est le plan *osculateur* du cycle. Les coordonnées ainsi choisies, les équations (3) prennent la forme

$$(4) \qquad x = t^n, \quad y = \mathrm{A}\,t^{n+i} + \ldots, \quad z = \mathrm{B}\,t^{n+i+\nu} + \ldots.$$

Les *entiers positifs* n, i, ν seront dits l'*ordre*, le *rang*, la *classe* du cycle (n, i, ν). La raison de ces dénominations va tout à l'heure apparaître.

5. Au moyen des équations (4) et par un raisonnement analogue à celui du n° 2, on parvient immédiatement au résultat suivant :

Théorème V. — *Si, sur un cycle* (n, i, ν), *on passe de l'origine* *à un point dont la distance à cette origine soit infiniment petite d'ordre n; la tangente tourne d'un angle infiniment petit d'ordre i; le plan osculateur d'un angle infiniment petit d'ordre ν.*

A quoi l'on peut ajouter, O étant l'origine du cycle et a le point variable :

La distance de O *à la tangente en a est de l'ordre $n+i$; l'angle de cette tangente avec le plan osculateur en* O *est de l'ordre $\nu+i$; la distance de la tangente en* O *et de la tangente en a est de l'ordre $n+i+\nu$.*

6. Du théorème II je suis passé au théorème IV par l'emploi du théorème III. Semblablement le théorème V va donner lieu à une conséquence.

Une courbe gauche G fait partie d'une figure composée de points a, dont la suite constitue G; de droites D, tangentes de G et génératrices d'une développable S; de plans p, tangents à S et osculateurs à G.

Une figure corrélative se compose de plans π, tangents à une développable Σ, corrélative de G, et osculateurs à une courbe Γ, corrélative de S; de droites Δ, corrélatives de D, génératrices de Σ et tangentes de Γ; de points α dont la suite constitue Γ.

Les courbes G et Γ se correspondent point par point. A un cycle de G correspond un cycle de Γ. Soient O, Ω les origines de ces cycles. Quand Oa est infiniment petit d'ordre n, $\Omega\alpha$ est infiniment petit d'ordre ν d'après la seconde partie du théorème V; donc, d'après le théorème III, ν est l'ordre du cycle de Γ. En même temps, les droites D et Δ tournent d'un angle infiniment petit d'ordre i; donc :

Théorème VI. — *A un cycle (n, i, ν) correspond, dans une figure corrélative, un cycle (ν, i, n).*

7. Au lieu de coordonnées parallèles, on peut faire usage de coordonnées tétraédrales. Soient alors x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées d'un point. Les équations

$$(5)\qquad \frac{x_1}{x_4}=t^n,\quad \frac{x_2}{x_4}=\mathrm{A}\,t^{n+i}+\ldots,\quad \frac{x_3}{x_4}=\mathrm{B}\,t^{n+i+\nu}+\ldots$$

définissent, comme (4), un cycle (n, i, ν). Abréviativement désignons par plan x_i le plan coordonné $x_i = 0$ et par s_i le sommet opposé du tétraèdre de référence. On voit que le cycle (5) a s_4 pour sommet, x_3 pour plan osculateur, et pour tangente la droite $x_2 x_3$ ou $s_1 s_4$.

Les deux premières équations (5) définissent une perspective de la courbe, le point de vue étant en s_3, c'est-à-dire en un point arbitraire ; donc :

1° *La perspective d'un cycle* (n, i, ν) *faite d'un point quelconque, pris pour point de vue, est un cycle* (n, i).

De même, la première et la troisième équation (5) donnent ce résultat :

2° *Faite d'un point quelconque du plan osculateur, la perspective est un cycle* $(n, i + \nu)$.

La deuxième et la troisième équation donnent cet autre résultat :

3° *Faite d'un point quelconque de la tangente, la perspective est un cycle* $(n + i, \nu)$.

Enfin des équations (5) on déduit

$$\frac{x_2}{x_1} = \mathrm{A}\,t^i + \ldots, \qquad \frac{x_3}{x_1} = \mathrm{B}\,t^{i+\nu} + \ldots.$$

On en conclut, en vertu du théorème III, que :

4° *Faite de l'origine du cycle* (n, i, ν), *la perspective est un cycle* (i, ν).

Cette analyse suppose expressément que chaque perspective correspond point par point à G. Si le point de vue est le sommet d'un cône dont chaque génératrice rencontre G en plusieurs points, les résultats précédents se modifient. Je n'insisterai pas sur ce sujet.

8. Les perspectives de G sont des courbes planes corrélatives des sections planes de la développable Σ. On peut donc, des résultats du n° 7, conclure, au moyen du théorème IV, les ordres et les classes des cycles des sections de Σ. Si ensuite on y change les nombres n, ν entre eux, on a, en vertu du théorème VI, ce qui est relatif aux sections de S. En conséquence :

Au cycle (n, i, ν) *de la courbe gauche,* G *correspond dans une section de* S :

1° *Par un plan quelconque, le cycle* (i, ν) ;
2° *Par un plan passant à l'origine, le cycle* $(i+n, \nu)$;
3° *Par un plan tangent, le cycle* $(n, \nu+i)$;
4° *Par le plan osculateur, le cycle* (n, i).

9. Entre le degré m', la classe μ' et les ordres et les classes n', ν' des cycles d'une courbe plane existe, comme on sait, la relation

$$\Sigma(\nu'-n') = 3(\mu'-m') \quad (6)$$ (¹).

En appliquant cette relation à une section de S et à une section de Σ, on obtient deux relations analogues pour la courbe gauche G.

Le *degré* m de G est le nombre des points où G rencontre un plan; sa *classe* μ est le degré de Γ ou le nombre des plans osculateurs que l'on peut mener à G par un point; le *rang* r commun à G et à Γ est le nombre des droites D ou Δ qui rencontrent une droite arbitrairement choisie.

Une section arbitraire de S a pour degré μ et pour classe r. A chaque cycle (n, i, ν), dont l'origine n'est pas dans son plan, correspond, pour cette section (n° 8), un cycle (i, ν). En outre, son plan rencontre G en m points, dont chacun est l'origine d'un cycle $(1, 1, 1)$. A ce cycle répond (n° 8), dans la section, un cycle $(2, 1)$, pour lequel l'élément $(\nu'-n')$ de l'équation (6) est égal à -1. On a donc

$$\Sigma(\nu-i) - m = 3(\mu - r). \quad (7)$$

Semblablement, pour une section de Σ, on a

$$\Sigma(n-i) - \mu = 3(m - r). \quad (8)$$

Telles sont les deux relations annoncées. On peut les combiner par soustraction, de manière à obtenir une autre relation symétrique par rapport aux éléments de G et de Γ, savoir :

$$\Sigma(\nu-n) = 2(\mu - m). \quad (9)$$

(¹) *Voir*, par exemple, t. IV de ce *Bulletin*, p. 66.

Si l'on connaît, pour une courbe, les ordres et les classes de tous les cycles dont les ordres n diffèrent de l'unité, la relation (9) fournit le nombre des plans osculateurs *stationnaires* de cette courbe.

§ II. — Sur les covariants différentiels.

10. A la fin du paragraphe précédent, j'ai déduit de la théorie des courbes planes deux relations (7), (8) entre le degré, le rang, la classe d'une courbe gauche et les ordres, les rangs, les classes de ses cycles. On obtiendrait directement ces relations en cherchant : 1° le nombre des plans osculateurs menés par un point, c'est-à-dire la classe exprimée au moyen du degré, du rang et des éléments caractéristiques des cycles ; 2° le nombre des plans osculateurs stationnaires. L'un ou l'autre de ces problèmes conduira à chercher, sur la courbe, le nombre des points en chacun desquels cette courbe satisfait à une certaine équation différentielle, exprimant soit que le plan osculateur passe par un point donné, soit qu'il est stationnaire.

Plus généralement, je pose la question suivante : *Étant donnée une équation algébrique entre x, y, z et les dérivées successives de y, z par rapport à x, trouver le nombre des points d'une courbe gauche algébrique* G, *en chacun desquels cette équation est satisfaite.*

C'est, comme on voit, la question dont j'ai précédemment donné la solution pour les courbes planes ([1]).

Il est avantageux, dans la solution d'un tel problème, de ne pas se priver des ressources qu'offre la Géométrie projective et, par conséquent, d'envisager les équations différentielles sous forme projective. Elles s'offrent d'elles-mêmes, sous cette forme, dans les applications géométriques. Pour être en mesure de traiter, à ce point de vue, la question annoncée, il m'est nécessaire de présenter quelques considérations générales sur ce qu'on peut appeler les *covariants différentiels*.

11. Pour la commodité des notations, je désignerai par ξ, η, ζ, au lieu de x, y, z, les coordonnées linéaires d'un point. Je consi-

---

([1]) *Journal de Mathématiques*, 2e série, t. II.

dère une équation algébrique, sous forme entière, entre ξ, η, ζ et les dérivées successives de η, ζ prises par rapport à la variable ξ. Je transforme cette équation en y faisant deux changements : 1° je prends une variable indéterminée t; 2° je remplace les variables ξ, η, ζ par x_1, x_2, x_3, x_4 en posant

$$(10) \qquad x_4\xi = x_1, \quad x_4\eta = x_2, \quad x_4\zeta = x_3.$$

Je désigne abréviativement le premier membre de l'équation transformée et mise sous forme rationnelle et entière par $f_t(x)$. La lettre x rappelle que les variables sont $x_1, \ldots$, et l'indice t rappelle que la variable indépendante est t.

12. La fonction $f_t(x)$ jouit de deux propriétés dues à sa provenance. Soit u une fonction quelconque de t; posons

$$(11) \qquad x_1 = uy_1, \quad x_2 = uy_2, \quad x_3 = uy_3, \quad x_4 = uy_4,$$

et substituons ces expressions dans f. A cet effet, il faut exprimer les dérivées de x en fonction de celles des y et de u, en appliquant la règle connue pour les dérivées d'un produit. Dans la dérivée $p^{\text{ième}}$ de x, la dérivée de y d'ordre le plus élevé, qui y figure, est $y^{(p)}$ et son coefficient est u. Il est d'ailleurs manifeste que f est homogène par rapport aux lettres x, abstraction faite des indices de dérivation. Soit δ le degré de f ainsi envisagée. On obtient ce résultat :

$$(12) \qquad f_t(x) = u^\delta f_t(y) + \varphi,$$

φ ne contenant que les dérivées des y d'ordre inférieur à l'ordre le plus élevé des dérivées de x dans $f_t(x)$.

Mais, en vertu de (11), les équations (10) se changent en d'autres équations qui ne diffèrent de (10) que par le changement des lettres x en y; donc l'équation proposée entre les lettres ξ, η, ζ doit conduire à une transformée en y qui ne diffère de la transformée en x que par le changement des lettres x en les lettres y; donc la transformée de $f_t(x) = 0$ est nécessairement $f_t(y) = 0$. Donc, en vertu de (12) et puisque φ ne contient pas les dérivées de l'ordre le plus élevé, cette fonction φ se réduit identiquement à zéro. Ainsi

$$(13) \qquad f_t(x) = u^\delta f_t(y).$$

L'équation (13) exprime la première propriété de la fonction f: *Si l'on fait dans cette fonction la substitution* (11), *elle se multiplie par une puissance de u.*

13. La seconde propriété est relative au changement de la variable indépendante. Par un raisonnement tout à fait analogue au précédent, on démontrera sans peine l'identité suivante, où s désigne la nouvelle variable :

$$f_t(x) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^\omega f_s(x). \tag{14}$$

Dans cette équation ω est un entier positif : *Si l'on change la variable indépendante, la fonction se multiplie par une puissance de la dérivée de l'une des variables par rapport à l'autre.*

14. Il s'agit maintenant de mettre l'équation $f = 0$ sous une forme indépendante du tétraèdre de référence. Pour abréger, j'emploie la notation

$$(xyzu) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix}.$$

Je fais la substitution suivante :

$$x_1 = (z a^2 a^3 a^4),\quad x_2 = (z a^3 a^4 a^1),\quad x_3 = (z a^4 a^1 a^2),\quad x^4 = (z a^1 a^2 a^3), \tag{15}$$

dans laquelle les lettres a sont affectées d'indices supérieurs et non pas d'exposants. Les a désignent des constantes et les z les nouvelles variables. Exécuter la substitution (15), c'est, comme on voit, prendre un nouveau tétraèdre de référence par rapport auquel les sommets du premier tétraèdre de référence sont les points a^1, a^2, a^3, a^4. La substitution faite, f devient une fonction des z et des a, rationnelle et entière. Elle peut contenir un facteur indépendant des z. Soit $U(a)$ ce facteur. On a identiquement

$$f_t(x) = U(a)\, F_t(z, a). \tag{16}$$

J'exécute maintenant à la fois sur z et sur les a une substitution linéaire, en posant

$$\left.\begin{array}{l} z_i = \lambda_i Z_1 + \mu_i Z_2 + \nu_i Z_3 + \rho_i Z_4 \\ a_i^j = \lambda_i A_1^j + \mu_i A_2^j + \nu_i A_3^j + \rho_i A_4^j \end{array}\right\} \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, 4; \\ j = 1, 2, 3, 4. \end{array}$$

Si je fais d'abord cette substitution dans (15) et que je désigne par D le déterminant $(\lambda\mu\nu\rho)$, les nouvelles expressions des x ne diffèrent de celles fournies par (15) qu'en ceci : elles sont multipliées par D et les lettres z, a y sont remplacées par les lettres Z, A. Je puis donc, sans changer le résultat, remplacer d'abord x par Dy, puis y_1 par $(Z, A^2 A^3 A^4)$.... J'ai donc, en vertu de (13) et de (16),

$$f_t(x) = D^\delta f_t(y) = D^\delta U(A) F_t(Z, A).$$

Comparant à (16), j'en déduis

$$(17) \qquad U(a) F_t(z, a) = D^\delta U(A) F_t(Z, A).$$

Si je donne aux z et à leurs dérivées des valeurs fixes arbitraires, l'équation (17) montre que la fonction $U(a)$ est un invariant du tétraèdre formé par les points a. C'est d'ailleurs une fonction entière et rationnelle. C'est donc une puissance entière et positive du déterminant $(a^1 a^2 a^3 a^4)$. Soit q l'exposant de cette puissance; remplaçons $\delta - q$ par une seule lettre π, et concluons de (17)

$$(18) \qquad F_t(z, a) = D^\pi F_t(Z, A).$$

L'effet d'une substitution homographique appliquée à la fois aux points z, a^1, a^2, a^3, a^4 est simplement de multiplier la fonction F *par une puissance du déterminant de la substitution.*

15. Voilà donc, mise sous forme projective, par l'introduction de quatre points, une équation différentielle quelconque. Si une équation a pour origine un problème de Géométrie projective, la transformation est inutile. Le premier membre de l'équation se présente comme une fonction des z et des données d'une certaine figure; mais une figure quelconque est déterminée par des nombres et un tétraèdre de référence, de telle sorte que, pour transformer homographiquement la figure, il suffit de transformer le tétraèdre sans altérer les nombres. En conséquence, une relation projective quelconque entre les éléments différentiels d'une courbe en un de ses points z et une autre figure peut toujours être censée réduite à une équation dont le premier membre est une fonction telle que F; donc aussi tout covariant différentiel partage avec les covariants ordinaires cette propriété que *l'effet d'une substitution homographique est de multiplier la fonction par une puissance du déterminant de la substitution.*

16. A peine est-il besoin de faire observer qu'il existe des fonctions f telles, qu'après la substitution (15) les a disparaissent de la transformée F. L'équation (18) subsiste toujours, mais ne contient pas les a. L'équation $F = 0$ exprime alors une propriété projective de la courbe, lieu du point z, seule. La fonction F est alors un *invariant différentiel.* Tel est, par exemple, en dénotant les dérivées par des accents, la fonction (z, z', z'', z''') qui, égalée à zéro, exprime la propriété des points où le plan osculateur est stationnaire.

17. Voici une autre remarque à ce sujet : De même que f par rapport aux x, F est par rapport aux z homogène et de degré δ, abstraction faite des indices de dérivation; par suite, F est, par rapport à l'ensemble des lettres a, homogène et de degré $3\delta - 4q$. Si F est maintenant un invariant différentiel, ce nombre $3\delta - 4q$ est nul. Alors δ est égal à 4π.

Ainsi, dans le cas d'un covariant, on aura à envisager les trois nombres ω, δ, π, tandis que, dans le cas d'un invariant, le second de ces nombres est quadruple du troisième.

18. Dans la plupart des applications, il serait extrêmement gênant de conserver les quatre coordonnées homogènes d'une part, et la variable indépendante indéterminée d'autre part. Il nous est maintenant facile de revenir aux variables habituelles, sans perdre le bénéfice de la projectivité.

Soit le covariant $F_t(z)$ (je m'abstiens maintenant d'écrire la lettre a). Pour faire disparaître la quatrième coordonnée, je pose, comme aux équations (10),

$$z_4\xi = z_1, \quad z_4\eta = z_2, \quad z_4\zeta = z_3.$$

La fonction F jouit de la propriété démontrée au n° 12 pour la fonction f. J'ai donc

$$F_t(z) = z_4^\delta F_t(\xi).$$

Les coordonnées sont maintenant ξ, η, ζ et l'unité. Je veux, à présent, prendre ξ pour variable indépendante. Appliquant à F le résultat du n° 13, j'ai

$$(19) \qquad F_t(z) = z_4^{\delta}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^{\omega} F_{\xi}(\xi).$$

Je fais maintenant une substitution homographique, comme au n° 14, et j'obtiens

$$F_t(z) = D^{\pi} F_t(Z).$$

Prenant pour coordonnées

$$\mathfrak{X} = \frac{Z_1}{Z_4}, \quad \mathfrak{Y} = \frac{Z_2}{Z_4}, \quad \mathfrak{Z} = \frac{Z_3}{Z_4},$$

j'ai une équation analogue à (19)

$$F_t(Z) = Z_4^{\delta}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dt}\right)^{\omega} F_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}),$$

et il en résulte enfin

$$(20) \quad \begin{cases} F_{\xi}(\xi) = \left(\dfrac{Z_4}{z_4}\right)^{\delta}\left(\dfrac{d\mathfrak{X}}{d\xi}\right)^{\omega} D^{\pi} F_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}) \\ \qquad = \dfrac{1}{(\lambda_4 \mathfrak{X} + \mu_4 \mathfrak{Y} + \nu_4 \mathfrak{Z} + \rho_4)^{\delta}}\left(\dfrac{d\mathfrak{X}}{d\xi}\right)^{\omega} D^{\pi} F_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

Telle est la formule propre à fournir le résultat d'une substitution homographique quelconque, et par conséquent aussi d'un changement des coordonnées linéaires dans un covariant différentiel. Pour plus de clarté, je transcris ici, sous leur forme définitive, les relations qui lient les deux systèmes de variables, savoir :

$$(20) \quad \begin{cases} \dfrac{\xi}{\lambda_1 \mathfrak{X} + \mu_1 \mathfrak{Y} + \nu_1 \mathfrak{Z} + \rho_1} = \dfrac{\eta}{\lambda_2 \mathfrak{X} + \mu_2 \mathfrak{Y} + \nu_2 \mathfrak{Z} + \rho_2} \\ = \dfrac{\zeta}{\lambda_3 \mathfrak{X} + \mu_3 \mathfrak{Y} + \nu_3 \mathfrak{Z} + \rho_3} = \dfrac{1}{\lambda_4 \mathfrak{X} + \mu_4 \mathfrak{Y} + \nu_4 \mathfrak{Z} + \rho_4}. \end{cases}$$

Les variables indépendantes sont, d'une part, ξ et, de l'autre, $\mathfrak{X}$.

§ III. — *Recherche du nombre des points d'une courbe gauche algébrique, en chacun desquels s'évanouit un covariant différentiel donné.*

19. Le titre de ce paragraphe reproduit l'énoncé de la question posée au nº 10, traduite sous forme projective. Pour résoudre cette question relativement à un covariant donné $F_\xi(\xi)$ et à une courbe gauche G, lieu du point (ξ, η, ζ), on considérera la fonction F le long de la courbe G. On aura ainsi une fonction algébrique d'une seule variable, et l'on en étudiera les zéros et les infinis avec les ordres de multiplicité de chacun d'eux. Le théorème sur l'égalité du nombre des zéros et du nombre des infinis fournira alors la solution de la question proposée. C'est exactement la marche que j'ai suivie dans mon Mémoire *Sur le contact des courbes planes avec les coniques,* cité plus haut.

20. J'examine d'abord ce qui concerne le passage de la variable indépendante ξ par l'infini ; à cet effet, j'envisage les points de rencontre de la courbe G avec le plan $z_4 = 0$. La fonction considérée étant un covariant, le tétraèdre de référence est arbitraire. Le plan z_4 est ainsi un plan arbitrairement choisi relativement à G. Chacune de ses rencontres avec G a donc lieu en un point simple de cette courbe. En outre, si l'on fait une substitution arbitraire telle que (21), la fonction transformée $F_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X})$ a, en ce point z, une valeur finie : j'écarte, bien entendu, le cas où G satisfait à l'équation différentielle proposée, cas dans lequel le problème n'aurait plus aucune signification. Le déterminant D de la formule (20) est une constante. On peut donc, d'après cette formule, substituer aux environs du point z à $F_\xi(\xi)$ la fonction

$$\left(\frac{Z_4}{z_4}\right)^\delta \left(\frac{d\mathfrak{X}}{d\xi}\right)^\omega = \left(\frac{Z_4}{z_4}\right)^{\delta-2\omega} \left(\frac{Z_4\, dZ_1 - Z_1\, dZ_4}{z_4\, dz_1 - z_1\, dz_4}\right)^\omega.$$

Aux environs du point z, cette fonction est elle-même du même ordre infinitésimal que $z_4^{2\omega-\delta}$; donc, si $2\omega - \delta$ est positif, le point z donne lieu à un zéro de $F_\xi(\xi)$, dont l'ordre de multiplicité est $2\omega - \delta$. Si $2\omega - \delta$ est négatif, on a, au contraire, un infini. Que l'on convienne, dans l'équation qui exprime l'égalité du nombre des zéros à celui des infinis, de mettre tous les termes dans le premier membre. Alors on peut dire qu'*à chaque rencontre de* G *avec le plan* $z_4 = 0$ *répondent* $(2\omega - \delta)$ *zéros de* F.

Le nombre des rencontres analogues est égal au degré m de G; donc *les rencontres de* G *avec le plan* $z_4 = 0$ *donnent lieu à* $(2\omega - \delta)m$ *zéros de* F.

21. Si l'on remplace η, ζ par deux développements procédant suivant les puissances entières et descendantes de ξ, et commençant tous deux par des termes du premier degré, le second membre de (20), après cette substitution, ordonné de même, commence par un terme de degré $(\delta - 2\omega)$. De là un moyen de calculer directement ce nombre sans aucune transformation.

22. J'examine maintenant ce que devient $F_\xi(\xi)$ quand les dérivées prises par rapport à ξ sont infinies, c'est-à-dire quand la tangente de G rencontre la droite $z_1 = z_4 = 0$. Soit z un point en lequel cette circonstance ait lieu. Aux environs de ce point, le développement de ξ suivant les puissances ascendantes de $\mathfrak{X}$ manque du terme du premier degré. La quantité $\frac{d\mathfrak{X}}{d\xi}$, développée de la même manière, commence donc par un terme de degré -1. Les autres facteurs du second membre de (20) ont des limites finies; donc au point z correspond pour F un infini d'ordre ω.

Le nombre des points z analogues est le rang r de G; donc *les rencontres de la droite* $z_1 = z_4 = 0$ *avec la développable dont* G *est l'arête de rebroussement donnent lieu à* ωr *infinis de* F.

23. Si l'on remplace η, ζ par deux développements procédant suivant les puissances entières et ascendantes de $\xi^{\frac{1}{2}}$, et commençant tous deux par des constantes, le second membre de (20), ordonné de la même manière, commence par un terme de degré $-\omega$. De là un procédé pour calculer ce nombre ω directement sur l'équation différentielle proposée.

24. J'ai examiné successivement les circonstances que présente le covariant $F_\xi(\xi)$ aux points de G pour lesquels les deux premiers coefficients du second membre de (20) n'ont pas des valeurs finies. En tout autre point, ces coefficients ont des valeurs finies, et je puis en faire abstraction. Je peux donc maintenant, pour chaque point, substituer à $F_\xi(\xi)$ l'expression $F_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X})$, les coordonnées $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ étant, chaque fois, choisies à volonté. Je supposerai alors que le point envisagé est l'origine de ces coordonnées, que le plan $\mathfrak{Z} = 0$ est le plan osculateur et que la droite $\mathfrak{Y} = 0, \mathfrak{Z} = 0$ est la tangente de G en ce point.

En d'autres termes, si un point O de G est l'origine d'un cycle (n, i, ν), et qu'on veuille étudier le covariant F aux environs de O, le point z se déplaçant sur ce cycle, on pourra représenter le cycle par les équations du n° 4

$$(22)\qquad \xi = t^n, \quad \eta = At^{n+i} + \ldots, \quad \zeta = Bt^{n+i+\nu} + \ldots.$$

Je substitue ces expressions et celles qu'on en déduit pour les dérivées dans $F_\xi(\xi)$, j'ordonne par rapport aux puissances croissantes de t. Soit alors l le degré du premier terme. La fonction F a un zéro multiple d'ordre l. Soit L la somme des nombres analogues à l pour tous les cycles de G, qui ne donnent pas pour résultat zéro. J'ai

$$(23)\qquad L = \omega r + (\delta - 2\omega)\, m.$$

Cette dernière formule fournit la solution de la question proposée. En effet, si $\mathfrak{L}$ est la partie de la somme L afférente aux points singuliers, et si, d'autre part, N est le nombre cherché, on aura finalement

$$(24)\qquad N = \omega r + (\delta - 2\omega)\, m - \mathfrak{L}.$$

25. Tel est le procédé vraiment simple au moyen duquel on peut résoudre sans difficulté les cas particuliers de la question générale énoncée plus haut. J'en ferai maintenant des applications : je commence par les questions indiquées au n° 10.

Soit à trouver le nombre de plans osculateurs qu'on peut mener d'un point x à une courbe algébrique G, *lieu du point z.*

Dénotant par des accents les dérivées prises par rapport à une variable quelconque, j'ai pour l'équation de condition

$$F_t(z) = (xzz'z'') = 0.$$

Le premier membre de l'équation se présente de lui-même sous forme d'un covariant différentiel, contenant les coordonnées d'un point x.

Le degré δ par rapport à la lettre z est égal à 3.

Le nombre ω, somme des indices de dérivation dans chaque terme, est égal aussi à 3 ; donc $\delta - 2\omega = -3$. La formule (23) donne ainsi

$$L = 3(r - m).$$

Il reste à calculer le nombre $\mathfrak{L}$. Les coordonnées ξ, η, ζ au moyen desquelles un cycle de G est représenté par les équations (22) sont assujetties simplement à ce que le point s_4 ($\xi = \eta = \zeta = 0$) soit l'origine du cycle, que la droite $\eta = \zeta = 0$ en soit la tangente et que le plan $\zeta = 0$ en soit le plan osculateur. On peut encore prendre à volonté le sommet s_3 du tétraèdre de référence, le plan $z_4 = 0$ passant en s_3 et le plan $z_1 = 0$ passant en s_3 et s_4. Je profite de cette indétermination pour placer le sommet s_3, qui est entièrement arbitraire, au point donné x.

Alors $F_\xi(\xi)$ se réduit à $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$. D'après (22), j'ai

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{i}{n}\left(1 + \frac{i}{n}\right) A\, t^{n-i} + \ldots;$$

donc (n° 24) l'élément l relatif au cycle (22) est égal à $i - n$; donc enfin, d'après (24), j'ai pour le nombre cherché, c'est-à-dire pour la classe de G,

$$\mu = 3(r - m) + \Sigma(n - i). \tag{25}$$

C'est la formule (7) du n° 9.

On peut vérifier *a posteriori* que chaque point de G, en lequel ce plan osculateur passe par x, donne lieu à un zéro simple du covariant $(x z z' z'')$. Je suppose, à cet effet, que O soit un tel point et que O soit en même temps l'origine d'un cycle (n, i, ν). Je ne peux plus supposer le sommet s_3 du tétraèdre coïncidant avec x, puisque, par hypothèse, x est dans le plan osculateur du cycle. Je fais alors coïncider avec x le sommet s_2, qui est arbitraire dans le plan osculateur. $F_\xi(\xi)$ se réduit maintenant à $\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}$, et j'ai pour l

le nombre $(i+\nu-n)$. Si x est arbitrairement choisi, O est un point quelconque de G, c'est-à-dire l'origine d'un cycle $(1, 1, 1)$; donc $i+\nu-n$ se réduit à l'unité. La vérification se trouve ainsi faite; mais le procédé employé permet, comme on voit, l'examen des circonstances relatives aux positions particulières du point x. On peut pousser plus loin cet examen, en supposant un cycle (n, i, ν) sur la tangente duquel se trouve le point x. Le nombre l est alors égal à $(2i+\nu-n)$. Enfin, si le point x est l'origine du cycle (n, i, ν), le nombre l est égal à $(2i+\nu)$. On peut résumer ainsi cette discussion :

Soit G *une courbe algébrique de rang* r *et de degré* m, *et soit* x *un point.*

Désignons par

$\mathfrak{M}$ *la somme des classes des cycles de* G, *dont les plans osculateurs passent en* x;

J *la somme des rangs des cycles de* G *dont les tangentes passent en* x;

N *la somme des ordres des cycles de* G *ayant leur origine en* x;

n, i *l'ordre et le rang d'un cycle quelconque de* G.

On a la relation

$$\mathfrak{M} + \mathrm{J} + \mathrm{N} = 3(r-m) + \Sigma(n-i).$$

Cette formule peut aisément se conclure de la théorie des courbes planes au moyen des résultats énoncés au n° 8. Je l'ai démontrée ici en détail pour faire mieux comprendre la méthode de calcul que je viens d'exposer.

26. *Soit,* en second lieu, *à trouver le nombre des plans osculateurs stationnaires de* G. L'invariant à considérer est ici

$$\mathrm{F}_t(z) = (zz'z''z'''), \quad \delta = 4, \quad \omega = 6.$$

Pour le cycle (22), on a (n° 13)

$$\mathrm{F}_\xi(\xi) = \left(\frac{dt}{d\xi}\right)^6 \mathrm{F}_t(\xi) = \frac{1}{(nt^{n-1})^6}(\xi'\eta''\zeta''').$$

La partie principale du déterminant $(\xi'\eta''\zeta''')$ est du degré $3n+2i+\nu-6$; celle de F est alors du degré $2i+\nu-3n$;

donc (n° **24**)

$$L = \Sigma(2i + \nu - 3n) = 6r - 8m.$$

Cette relation, jointe à (25), conduit, par l'élimination de ν ou par l'élimination de i, à l'une ou à l'autre des relations (8) et (9).

27. J'envisage maintenant pour F un covariant différentiel quelconque *du premier ordre*. Ce ne peut être un invariant. On peut, en effet, par une substitution homographique, changer un point et une droite menée en ce point en un point arbitraire et une droite arbitraire menée en ce dernier point. Il ne saurait donc exister une propriété invariante de la figure formée d'un point d'une courbe et de la tangente en ce point. Il n'existe donc pas d'invariant différentiel du premier ordre ; donc F contient des données, qui peuvent être réduites, d'après le paragraphe précédent, à des points a dont le nombre ne surpasse pas quatre.

Pour étudier la composition du nombre L, j'examine d'abord s'il existe sur G des cycles qui fournissent pour l des résultats différents de zéro, *quels que soient les points a*. Il n'en saurait exister : en effet, il en résulterait que le nombre l serait différent de zéro, quels que fussent et l'origine et la tangente de ce cycle, ainsi que les points a ; donc aucun élément du nombre L ne répond à un point de G indépendant des données de F.

Supposons que ces données restent indéterminées, c'est-à-dire que, G étant une courbe entièrement donnée, les points a soient représentés par des coordonnées qui restent des *quantités littérales*. D'après ce qui vient d'être dit, chaque point de G pour lequel le nombre l diffère de zéro dépend des données a, et est, par suite, un point simple de G. Je dis, en outre, que, *pour ce point*, l *est égal à l'unité*.

Suivant l'hypothèse inverse, z étant un point quelconque de G et $a^1, a^2, \ldots$ des points tels que F s'évanouisse pour z, la dérivée de F, prise le long de G, s'évanouirait aussi en z. Admettons cela pour un instant, et montrons l'impossibilité de cette supposition. Fixons à volonté les points a, sauf a^1, et astreignons ce dernier à parcourir une ligne arbitrairement choisie. Il n'y a plus alors dans F que deux variables : les points z et a^1. Lions ces points par la condition $F = 0$. Suivant l'hypothèse, la dérivée partielle de F prise en faisant varier seulement z est nulle ; donc la dérivée partielle de F par rapport à la variable unique dont dépend a^1 est aussi nulle; donc, ou bien F est divisible par le carré d'une fonction entière de cette variable, ou bien F ne contient pas cette variable. La première supposition doit être écartée, car on ne considère que des équations indécomposables. La seconde s'écarte également; car, si F ne contient pas a^1, elle contient nécessairement au moins un des autres points, à l'égard duquel on peut faire le même raisonnement.

De cette discussion je conclus que, *dans l'hypothèse où les données de* F *sont des quantités littérales, le nombre des points de* G *en chacun desquels s'évanouit le covariant* F *est précisément fourni par la formule* (23). C'est ce qu'on peut encore exprimer ainsi :

Théorème VII. — *Le nombre des points d'une courbe gauche* G *de degré m et de rang r, en chacun desquels est satisfaite une équation différentielle algébrique de premier ordre, mise sous forme projective et dont les données sont indépendantes de* G, *est égal à $\omega r + \theta m$, ω et θ étant deux nombres qui ne dépendent que de l'équation différentielle* ($\theta = \delta - 2\omega$).

28. Le théorème VII est susceptible de diverses formes géométriques. Considérons une surface algébrique dont l'équation contienne algébriquement un paramètre. En exprimant que cette surface touche G, et éliminant le paramètre entre cette nouvelle équation et celle de la surface, j'obtiens une équation différentielle algébrique du premier ordre; donc :

Soit un système algébrique de surfaces, tel que ω soit le nombre des surfaces de ce système qui passent en un point, et θ le nombre de celles qui touchent une droite.

Le nombre des surfaces du même système qui touchent une courbe de degré m et de rang r est $\omega r + \theta m$, pourvu qu'il y ait indépendance entre la courbe et les données du système.

C'est un théorème connu.

Considérons une courbe G′ également algébrique et dont les données contiennent trois paramètres. En exprimant qu'elle touche G et éliminant les paramètres, on obtient encore une équation différentielle du premier ordre. Donc :

Soit une série triplement infinie et algébrique, de courbes algébriques G′, *de telle sorte que* ω *courbes* G′ *touchent un plan en un point et que* θ *courbes* G′ *touchent une droite.*

Le nombre de courbes G′ *qui touchent une courbe* G *de degré* m *et de rang* r *est* $\omega r + \theta m$, *pourvu qu'il y ait indépendance entre* G *et les données de la série* (G′).

29. Il est naturellement impossible d'obtenir, en place du théorème VII, un théorème général pour le cas où l'on suppose au contraire une dépendance entre la courbe et l'équation différentielle. On a déjà vu plus haut (n° 25) un exemple de cette supposition, à l'égard d'une équation du second ordre. En voici un nouvel exemple où le covariant est du premier ordre.

Soient a le premier membre de l'équation d'un plan et b le premier membre de l'équation d'une surface du second ordre. Considérons la fonction

$$(26)\qquad \mathrm{F}_t(z) = a^3 \frac{d(ba^{-2})}{dt},$$

t étant une variable dont dépend le déplacement du point z sur une courbe G. Il est visible que F est un covariant différentiel du premier ordre. En appliquant la méthode ci-dessus à ce covariant, je trouverai, non-seulement le nombre des points de G où il s'évanouit, mais encore son interprétation géométrique.

On a ici $\delta = 3$, $\omega = 1$; donc, *le plan* a *et la surface* b *étant quelconques relativement à* G, *le nombre des points de* G *satisfaisant à* $\mathrm{F} = 0$ *est* $r + m$.

Soit O un point de G où F s'évanouisse. Je puis supposer en O, suivant l'analyse du n° 24,

$$(27)\qquad z_1 = z_2 = z_3 = 0, \qquad \frac{dz_2}{dt} = \frac{dz_3}{dt} = 0.$$

Je peux supposer aussi que le plan $z_4 = 0$ coïncide avec a. Prenant les variables ξ, η, ζ, je réduis ainsi $\mathrm{F}_\xi(\xi)$ à $\dfrac{db}{d\xi}$.

Soit maintenant

$$b = \Sigma\, b_{ij} z_i z_j.$$

En vertu de (27), $\dfrac{db}{d\xi}$ se réduit en O à b_{14}; donc le plan polaire de O par rapport à b passe au sommet s_1 du tétraèdre de référence, c'est-à-dire à l'intersection de la tangente de G en O avec le plan a. Ainsi :

Si, par rapport à une surface du second ordre b, on prend le plan polaire d'un point z d'une courbe G et l'intersection x de ce plan avec la tangente de G en z, l'évanouissement du covariant (26) *exprime que le point x est dans le plan a.*

Donc *le degré du lieu du point x est $r + m$.*

D'après cette interprétation, on peut maintenant se demander si le degré de la courbe (x), lieu du point x, subit des modifications quand la surface b prend certaines positions particulières relativement à G. Or l'évanouissement de b_{14} conserve toujours la signification ci-dessus, sauf le cas où b passe en O. Admettons qu'il en soit ainsi et que, pour un cycle d'origine $O(n, i, \nu)$, b soit d'ordre $n + k$. Alors $\frac{db}{d\xi}$ est d'ordre k; donc, avec une entière généralité, on peut dire que :

Le degré du lieu du point x est la somme du degré et du rang de G, *diminuée de la somme des ordres des contacts de* G *avec la surface b.*

L'expression $r + m - \Sigma k$ peut être transformée. On a, en effet, en comptant les intersections de G et de b,

$$\Sigma(n + k) = 2m.$$

Le degré de (x) peut donc s'écrire $r - m + \Sigma n$: *le degré du lieu du point x est égal à l'excès du rang de* G *sur son degré, augmenté de la somme des ordres des cycles de* G *dont les origines sont sur b.* Ce dernier énoncé s'applique, sans aucune ambiguïté, au cas où b se réduit à un cône. Prenons ce cas, et faisons une transformation corrélative qui change b en un cercle situé à l'infini. La courbe x se change alors en la surface rectifiante de Γ; donc :

Le nombre des plans rectifiants que l'on peut mener par un point arbitraire à une courbe algébrique est égal à l'excès du rang de la courbe sur sa classe, augmenté de la somme des classes des cycles de cette courbe, pour chacun desquels le plan osculateur est, soit isotrope, soit à l'infini.

30. Voici encore un exemple où le covariant est du premier ordre :

On donne une conique C *et une courbe* G. *Soient* z *un point de* G *et* Δ *la polaire, par rapport à* C, *du point d'intersection du plan de* C *avec la tangente de* G *en* z. *On mène le plan* N *par* z *et* Δ. *Trouver le nombre des plans* N *qui passent par un point donné arbitrairement.*

Si C est le cercle commun à toutes les sphères, N devient le plan normal de G en z. Soient

$$a = a_z = a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + a_4 z_4 = 0,$$
$$q = q_z^{(2)} = (q_1 z_1 + q_2 z_2 + q_3 z_3 + q_4 z_4)^{(2)} = 0$$

les équations du plan C et d'une surface du second degré passant par C. Je pose encore

$$p = 2 q_z q_y.$$

On trouve aisément pour le covariant qui répond à la question (y étant le point donné)

$$\mathrm{F}(z) = a^3 \frac{d}{dt}[a^{-2}(a_y q - ap)].$$

Les nombres δ et ω sont respectivement égaux à 3, 1 ; donc *le nombre cherché est la somme du rang et du degré de* G, *s'il y a indépendance entre* G *et la conique* C.

Je veux maintenant chercher les modifications qui peuvent être dues à des relations entre G et C. A cet effet, je dois chercher pour quels cycles de G, F peut devenir nul ou infini, quel que soit y.

En premier lieu, je suppose que l'origine O de ce cycle ne soit pas dans le plan a. La surface q n'est astreinte qu'à passer par C. Je puis supposer qu'elle passe en O, sans y toucher G. Le plan p, polaire de y par rapport à q, ne passe pas en O, puisque y est arbitraire ; donc la fonction $a^{-2}(a_y q - ap)$ ne s'évanouit pas en O. En outre, son développement suivant les puissances ascendantes de ξ contient un terme du premier ordre qui ne disparaît que pour certaines positions de y ; donc la dérivée de cette fonction a une valeur finie quand y reste arbitraire. Ainsi le cycle envisagé ne peut en aucune façon altérer le résultat précédent.

En second lieu, je suppose que O soit dans le plan a. Ici a s'évanouit en O. Si O n'est pas sur C, q et p ont, en O, des valeurs finies. Soit n l'ordre du cycle et $1+\frac{\omega}{n}$ l'ordre infinitésimal de a, quand ξ est du premier ordre. La fonction ci-dessus a sa partie principale de l'ordre $-2\left(1+\frac{\omega}{n}\right)$. Sa dérivée, multipliée par a^3, a donc une partie principale de l'ordre $\frac{\omega}{n}$; donc l'ordre de F, pour le cycle envisagé, est ω, c'est-à-dire l'ordre total des contacts de a avec les branches de ce cycle.

Si O est sur C, q est lui-même évanouissant en O. Son ordre infinitésimal est au plus égal à celui de a; soit $1+\frac{\omega'}{n}$ cet ordre. La fonction $a^{-2}(a_y q - ap)$ est de l'ordre $-2\left(1+\frac{\omega}{n}\right)+1+\frac{\omega'}{n}$. Sa dérivée, multipliée par a^3, est alors de l'ordre $1+\frac{\omega+\omega'}{n}$. L'ordre de F, pour le cycle envisagé, est ainsi $\omega+n+\omega'$, c'est-à-dire l'ordre total des contacts de a avec le cycle, plus le nombre des intersections de ce cycle avec q; donc, en résumé :

Le nombre des plans normaux que l'on peut mener par un point à une courbe est égal à la somme du rang et du degré de cette courbe, diminuée de la somme totale des ordres de ses contacts avec le plan de l'infini et du nombre des intersections qu'elle a à l'infini avec une sphère quelconque.

Si la courbe est tracée sur une sphère, la somme des nombres $(n+\omega')$ est égale à son degré; donc, *sur une sphère, le nombre des arcs de grand cercle que l'on peut mener par un point normalement à une courbe algébrique est égal au rang de cette courbe diminué de la somme des ordres de ses contacts avec le plan de l'infini.*

31. Dans les quatre derniers numéros, je me suis occupé des covariants différentiels du premier ordre. Prenons maintenant des covariants du second ordre. Il n'existe pas d'invariant différentiel du second ordre; il en résulterait, en effet, l'existence d'un invariant de trois points dans l'espace, ce qui est impossible. En raisonnant comme au n° 27, je sépare le nombre L en deux parties, dont l'une répond aux cycles de G qui rendent le covariant nul ou infini, quelles que soient les arbitraires du covariant, et dont l'autre répond aux zéros de ce covariant qui dépendent de ces arbitraires. Le raisonnement employé au n° 27 prouve, dans ce cas aussi, que chacun de ces derniers zéros est simple, pourvu qu'on suppose encore que les arbitraires du covariant restent des quantités littérales. La question nouvelle à résoudre se réduit donc uniquement à trouver les nombres l indépendants des arbitraires du covariant.

Je considère le covariant sous la forme $F_\xi(\xi)$ et je laisse les coordonnées quelconques relativement au cycle envisagé. Soient ξ_0, η_0, ζ_0 les coordonnées de l'origine de ce cycle (n, i, ν); il est représenté par les équations

$$\xi - \xi_0 = t^n, \quad \eta - \eta_0 = A\,t^n + B\,t^{n+i} + C\,t^{n+i+\nu},$$
$$\zeta - \zeta_0 = A'\,t^n + B'\,t^{n+i} + C'\,t^{n+i+\nu} + \ldots.$$

Les parties principales de $\xi, \eta, \zeta, \eta', \zeta', \eta'', \zeta''$, aux environs de l'origine du cycle, sont respectivement

$$\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0\ A,\ A' \quad \text{et} \quad \frac{i}{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)B\,t^{i-n}, \quad \frac{i}{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)B'\,t^{i-n}.$$

Soit, dans F, une suite de termes homogènes et de degré α par rapport à η'' et ζ''. La partie principale de cet ensemble de termes est de la forme

$$\left[\frac{i}{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)t^{i-n}\right]^\alpha \varphi(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, A, A', B, B'),$$

la fonction φ étant indépendante des nombres i, n. Par une substitution homographique, on peut, comme il est aisé de le voir, attribuer aux lettres qui figurent dans la parenthèse de φ des valeurs entièrement arbitraires. Cette substitution altérera les arbitraires de F. Mais ces dernières étant des données littérales, suivant notre hypothèse, on voit que toutes les quantités dont dépend φ sont arbitraires; donc φ n'est pas nul; donc l'ensemble des termes considérés a sa partie principale de l'ordre $\alpha(i-n)$.

La quantité α a, suivant les termes que l'on considère dans F, diverses valeurs. Soient β sa plus petite, et γ sa plus grande valeur. Si $i-n$ est positif, la plus petite valeur de $\alpha(i-n)$ est $\beta(i-n)$. Si, au contraire, $i-n$ est négatif, la plus petite valeur est $\gamma(i-n)$.

Je désigne par J la somme des quantités positives $i-n$, et par K la somme des quantités positives $n-i$ pour les cycles de G. La partie du nombre L qui ne dépend pas des arbitraires du covariant se trouve ainsi être égale à $\beta J-\gamma K$; donc le nombre des points de G, en chacun desquels ce covariant s'évanouit, et variables avec les arbitraires du covariant, est

$$N=\omega r+\theta m-\beta J+\gamma K. \tag{28}$$

L'exemple du n° 25 est un cas particulier de celui-ci. Pour cet exemple, les nombres β et γ sont égaux tous deux à l'unité; aussi a-t-on trouvé, conformément à (28),

$$\mu=3(r-m)+(K-J)=3(r-m)+\Sigma(n-i). \tag{29}$$

Entre (28) et (29), j'élimine J, et j'obtiens

$$N=(\omega-3\beta)r+(\theta+3\beta)m+\beta\mu+(\delta-\beta)K. \tag{30}$$

Théorème VIII. — *Le nombre des points d'une courbe gauche algébrique, en chacun desquels est satisfaite une équation différentielle algébrique du second ordre, mise sous forme projective, et dont les données sont indépendantes de la courbe, est la somme de quatre nombres dont chacun est le produit d'un facteur dépendant de la courbe seule et d'un facteur dépendant de l'équation seule.*

32. Il est clair que tous ces résultats s'appliquent aux courbes planes : le théorème VII sans modification. Le théorème VIII y subit une simplification, attendu que, dans ce cas, le nombre β est nul. S'il s'agit, en effet, d'un covariant ne contenant que les variables ξ, η, et que β ne soit pas nul, ce covariant contient le facteur η'' et n'est pas indécomposable. J'ai démontré antérieurement, de deux manières différentes, ce cas particulier du théorème VIII.

On peut donner au théorème VIII diverses formes géométriques, parmi lesquelles je cite la suivante :

Dans une série doublement infinie de surfaces algébriques, le nombre des surfaces qui ont avec une courbe gauche algébrique un contact du second ordre est la somme de quatre nombres dont chacun est le produit d'un facteur dépendant de la courbe seule et d'un facteur dépendant de la série de surfaces seule.

33. Il n'est pas sans intérêt de savoir s'il existe des covariants différentiels du second ordre pour lesquels les quatre coefficients du second membre de (30) soient égaux à des nombres arbitrairement choisis.

Je désigne par $z_1, \ldots, z_4$ les coordonnées homogènes d'un point et je dénote par des accents leurs dérivées prises par rapport à un paramètre quelconque.

Appelons, pour un instant, $u_1, \ldots, u_6$ les six déterminants binaires $(z_i z'_j)$, et $v_1, \ldots, v_4$ les quatre déterminants ternaires $(z_i z'_j z''_k)$. Soit maintenant $[p, p', p'']$ une fonction rationnelle et entière des z, des u et des v, homogène et de degré p en z, homogène et de degré p' en u, homogène et de degré p'' en v. Je pose

$$F_t(z) = \Sigma[p, p', p''], \tag{31}$$

composant ainsi une fonction F par la somme de plusieurs fonctions analogues, sous la restriction que l'on ait toujours, δ et ω désignant des constantes,

$$\left\{ \begin{aligned} p + 2p' + 3p'' &= \delta, \\ p' + 3p'' &= \omega. \end{aligned} \right. \tag{32}$$

1° Si l'on opère sur les z une substitution linéaire et homogène, la même substitution s'étendant aussi aux z' et aux z'', il est visible que la forme de la fonction F n'est pas altérée ; ses coefficients seuls sont modifiés : ils subissent aussi une substitution linéaire. On peut donc considérer F comme inaltérée par une substitution homographique s'étendant aussi à ses coefficients.

2° Si l'on multiplie les z par une fonction quelconque y de t, chaque fonction partielle $[p, p', p'']$ se multiplie par la puissance $(p + 2p' + 3p'')$ de y. A cause de la première équation (32), l'exposant de cette puissance est le même pour toutes les fonctions partielles ; donc F se multiplie par y^δ.

3° Si, de même, on change la variable indépendante, à cause de la deuxième équation (32), F se multiplie par la puissance ω de la dérivée de la nouvelle variable.

A cause de ces trois propriétés, F est un covariant différentiel du second ordre. Il est aisé de voir, et je ne m'y arrête pas, que F est le type le plus général d'un tel covariant. Je vais chercher s'il est possible de déterminer F de manière que les coefficients du second membre de (30) soient égaux à des nombres arbitrairement choisis. Je me donne ainsi β, puis

$$\omega - 3\beta = g, \quad \theta + 3\beta = h, \quad \gamma - \beta = k.$$

D'après le n° 29, β est le minimum de p'' et γ son maximum ; donc d'abord β et h doivent être positifs. Se rappelant que θ n'est autre que $\delta - 2\omega$, on trouve aisément que, relativement au nombre p'', les deux fonctions partielles extrêmes sont

$$[k + 3k,\ g - 3k,\ \beta + k], \quad [h,\ g,\ \beta].$$

On peut donc déterminer ces fonctions si l'on a

$$\beta \geqq 0, \quad k \geqq 0, \quad h \geq 0, \quad g \geqq 3k.$$

Ainsi l'*on peut répondre à la question proposée toutes les fois que les quatre nombres donnés sont positifs et que le premier est au moins égal au triple du quatrième.*

On ne manquera pas de remarquer que, si les deux nombres β et k sont nuls, le covariant se réduit au premier ordre, en sorte que le théorème VII s'offre comme un cas particulier du théorème VIII.

34. Pour les covariants d'ordre supérieur au second, il n'existe pas de formule analogue à (30), composée d'un nombre fini de termes et applicable à tous les cas : c'est ce que j'ai déjà eu l'occasion de montrer quand il s'agissait des courbes planes. Mais si, au lieu d'envisager une courbe quelconque, on se borne à une courbe ne contenant que des singularités appartenant à un nombre fini de familles données, on obtient pour ces cas restreints, et quel que soit l'ordre du covariant, des formules analogues à (30).

J'envisage, par exemple, des courbes G ne contenant pas d'autre cycle singulier, au point de vue ponctuel, que des rebroussements ordinaires (2, 1, 1). Soit λ l'ordre d'un covariant F, quand on y met pour les coordonnées les expressions

$$\xi = t^2, \quad \eta = A t^3 + \ldots, \quad \zeta = B t^4 + \ldots,$$

qui caractérisent le cycle (2, 1, 1) et où les coefficients sont laissés indéterminés.

Si G contient K pareils cycles, la partie correspondante du nombre L est λK; donc

$$N = \omega r + \theta m - \lambda K.$$

D'ailleurs l'équation (29) se réduit ici à

$$\mu = 3(r - m) + K;$$

donc enfin

$$N = (\omega + 3\lambda) r + (\theta - 3\lambda) m - \lambda\mu. \tag{33}$$

Telle est la formule générale pour une équation différentielle d'ordre quelconque et pour une courbe ne possédant que des singularités ordinaires, pourvu qu'il y ait indépendance entre la courbe et les données de l'équation mise sous forme projective.

35. En dernier lieu, si l'on suppose une courbe gauche G sans singularité, on a simplement

$$N = \omega r + \theta m. \tag{34}$$

Dans une Note insérée au tome II de ce *Bulletin*, p. 70, je disais : « Il serait d'un très-grand intérêt de connaître le caractère général des propriétés des courbes qui ne dépendent que du degré et du nombre des points doubles apparents. » Ce caractère général n'est pas encore trouvé; mais on a ici la définition d'une catégorie importante de telles propriétés. On peut dire, en effet, que :

Sur une courbe sans singularité ponctuelle, le nombre des points en chacun desquels est satisfaite une équation différentielle algébrique ne dépend, quant à la courbe [suivant la formule (34)], *que du degré et du nombre des points doubles apparents.*

36. Voici une application bien propre à faire juger de la facilité de la méthode actuelle.

Une surface de degré p est assujettie à passer par

$$\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6}-k$$

points donnés et à avoir, avec une courbe gauche G, *un contact d'ordre $k-1$. On demande le nombre des solutions quand* G *ne possède que des singularités ordinaires.*

Je compose un déterminant Δ, en écrivant successivement tous les termes d'une forme quaternaire de degré p, comme il suit : les premières lignes s'obtiennent en mettant successivement, à la place des variables $z_1, \ldots, z_4$, $\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6}-k$ systèmes de constantes. Les autres lignes s'obtiennent en y mettant successivement les z, puis les z', ..., enfin les $z^{(k-1)}$. Ce déterminant est le covariant dont l'évanouissement répond à la question.

Le degré de Δ par rapport aux z, abstraction faite des indices de dérivation, est pk. La somme des indices de dérivation à chaque terme est

$$1+2+\ldots+(k-1)=\frac{k(k-1)}{2};$$

donc

$$\delta=pk,\quad \omega=\frac{k(k-1)}{2},\quad \theta=\delta-2\omega=k(p-k+1).$$

Donc :

1° *Si la courbe* G, *de rang r et de degré m, n'a pas de singularité ponctuelle, le nombre cherché est égal à*

$$\frac{k(k-1)}{2}r+k(p-k+1)m.$$

Ce résultat ne diffère pas de celui que l'on obtient dans la question analogue pour les courbes planes, suivant une formule due à M. de Jonquières (¹).

Si l'on suppose que G contienne des rebroussements, on trouve

---

(¹) *Voir* le tome IV de ce *Bulletin*, p. 41.

aisément, pour le nombre λ (n° 33),

$$\lambda = -\frac{(k-1)(k-2)}{2}.$$

Donc :

2° *Si la courbe* G *contient* K *rebroussements ordinaires, le nombre cherché est*

$$\frac{k(k-1)}{2}r + k(p-k+1)m + \frac{(k-1)(k+2)}{2}\mathrm{K}.$$

Soit, par exemple, $p=2$, $k=10$. Alors :

Sur une courbe gauche, de degré m et de rang r, ayant K *rebroussements ordinaires, sans autre singularité ponctuelle, le nombre des points en chacun desquels cette courbe a un contact du neuvième ordre avec une surface du second degré est égal à*

$$45r - 70m + 36\mathrm{K}.$$

37. J'ai à ajouter une remarque relative au théorème VIII. Je considère, comme au n° 32, une fonction telle que $[p, p', p'']$, et j'y remplace les coordonnées z par leurs expressions en fonction des coordonnées du point correspondant x sur la courbe Γ. Je rappelle que Γ est, comme au n° 6, la courbe correspondant à G dans une figure corrélative. Avec les coordonnées x, la fonction prend, on le voit aisément, la forme

$$[p'', p', p](xx'x''x''')^{p'+2p''}.$$

Pour qu'un covariant F, formé par une suite de fonctions partielles $[p, p', p'']$, se transforme ainsi en un covariant dont l'ordre ne dépasse pas le second, il faut et il suffit que $(xx'x''x''')$ soit en facteur commun, avec le même exposant, à tous les termes de F. A cause des équations (32), il en résulte que F se réduit à un seul terme. Ainsi :

Pour qu'un covariant du second ordre se transforme en un covariant du même ordre quand on l'applique à une figure corrélative, il faut et il suffit qu'il soit homogène par rapport aux dérivées secondes.

S'il en est ainsi, le covariant est de la forme $[h, g, \beta]$, et la formule (30) se réduit à

$$N = gr + hm + \beta\mu. \tag{35}$$

Dans ce cas, la relation obtenue en égalant à zéro le covariant a lieu entre le point, la tangente et le plan osculateur seulement. Il n'y entre pas d'autre élément du second ordre. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème IX. — *Soit la figure composée d'un point a, d'une droite* D *passant en a et d'un plan p passant par* D. *Soit* $F = 0$ *une relation à laquelle doit satisfaire cette figure, et où les coordonnées de a,* D, *p entrent respectivement aux degrés h, g, β. Soit, d'autre part, une courbe* G *de degré m, de rang r, de classe μ, et à singularités quelconques. Le nombre des points a de* G, *en chacun desquels le point a, la tangente* D *et le plan osculateur p satisfont à la relation* $F = 0$, *est donné par la formule* (35).

Exemple. — *Les trois droites joignant a aux intersections de p, avec trois droites données, doivent faire avec* D *un rapport anharmonique donné.*

Alors $N = r + m + \mu$.

38. Dans les divers exemples que j'ai traités ici, j'ai pris les covariants différentiels sous la forme $F_t(z)$, c'est-à-dire que les coordonnées y étaient homogènes et la variable indéterminée. Le nombre δ y était alors en évidence. Si l'on a à envisager une équation différentielle sous la forme ordinaire, avec les coordonnées linéaires et la variable indépendante ξ, on peut calculer δ sans revenir à la forme $F_t(z)$, dont le calcul serait souvent pénible : il suffit, à cet effet, d'appliquer la remarque du n° 20. Soit, par exemple, à trouver le nombre des plans normaux de G, menés par un point (ξ, η, ζ). On a alors, en coordonnées rectangulaires, l'équation

$$\xi_1 - \xi + (\eta_1 - \eta)\frac{d\eta}{d\xi} + (\zeta_1 - \zeta)\frac{d\zeta}{d\xi} = 0.$$

Si l'on fait

$$\eta = A\xi + B + \frac{C}{\xi} + \ldots, \quad \zeta = A'\xi + B' + \frac{C'}{\xi} + \ldots,$$

le premier terme du premier membre de l'équation, ordonné suivant les puissances descendantes de ξ, est du degré 1; donc (nº 20) $\partial - 2\omega = 1$, ce qui est conforme au résultat du nº 29.