BERTRAND GAMBIER

Coniques (quadriques) harmoniquement circonscrites à une autre. Configurations projectives et anallagmatiques

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 174-196
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__174_0>

CONIQUES (QUADRIQUES) HARMONIQUEMENT CIRCONSCRITES A UNE AUTRE. CONFIGURATIONS PROJECTIVES ET ANALLAGMATIQUES;

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1. Le problème de mathématiques spéciales posé en juin 1936 à l'agrégation fait intervenir les propriétés de deux variétés quadratiques à p dimensions, plongées dans un espace linéaire à $p+1$ dimensions, dont l'une est harmoniquement circonscrite à l'autre.

Je vais, pour cette question classique et bien élémentaire, exposer une méthode élégante et inédite due à mon professeur de Spéciales, Jules Gaches, à la mémoire duquel je dédie cet article; ce sera l'objet du paragraphe 2. Dans le paragraphe 3, je montre comment le raisonnement fait par Gaches pour l'espace à deux dimensions peut s'étendre à un nombre quelconque de dimensions.

Enfin, au paragraphe 4, j'étudierai, toujours dans le même état d'esprit, diverses questions qui formaient l'essentiel du problème d'agrégation et conduisent à des configurations intéressantes, aussi bien dans l'espace projectif que dans l'espace anallagmatique.

2. Soient, dans un plan, deux coniques

$$f \equiv A\, x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' zx + 2 B'' xy = 0,$$
$$g \equiv A_1 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2 B''_1 xy = 0.$$

La conique $f + \rho g = 0$ se décompose en deux droites si ρ vérifie l'équation bien connue

$$\Delta + \lambda(a A_1 + \ldots + 2 b B_1 + \ldots) + \lambda^2 (a_1 A + \ldots) + \lambda^3 \Delta_1 = 0.$$

On a l'habitude d'appeler Θ le coefficient de λ, Θ_1 celui de λ^2; *nous nous proposons d'interpréter la condition* $\Theta_1 = 0$. On peut introduire cette expression Θ_1 en partant directement des équations, ponctuelle de f et tangentielle de g.

Elle est linéaire par rapport aux coefficients de f, de sorte que

$$\Theta_1(f+\lambda f_1, g) \equiv \Theta_1(f, g) + \lambda\, \Theta_1(f_1, g).$$

Donc, dans le faisceau $f+\lambda f_1 = 0$, *il y a une seule conique satisfaisant à* $\Theta_1(f+\lambda f_1, g) = 0$, *à moins que* $\Theta_1(f, g) = 0$, $\Theta_1(f_1, g) = 0$, *auquel cas toutes les coniques du faisceau fournissent cette relation.*

Cela va nous permettre d'interpréter la condition $\Theta_1(f, g) = 0$ *en ramenant le cas où f n'est pas décomposée à celui où f dégénère en deux droites.*

Si f se compose de deux droites, on a

$$f \equiv (ux+vy+wz)(u'x+v'y+w'z),$$
$$\Theta_1(f, g) \equiv a_1 uu' + \ldots + b_1(vw'+wv') + \ldots,$$

et $\Theta_1 = 0$ exprime que les deux droites sont *conjuguées* par rapport à g.

Supposons maintenant f non décomposée et vérifiant

$$\Theta_1(f, g) = 0;$$

sur f, je prends un point *quelconque* A, dont la polaire α, par rapport à g, coupe f aux points B, C. En joignant A à un point arbitraire D de f, nous avons une conique f_1 dégénérée, formée des droites AD, BC, fournissant $\Theta_1(f_1, g) = 0$; mais alors *toutes* les coniques du faisceau ponctuel (f, f_1) donnent aussi $\Theta_1 = 0$; AB, CD est une conique dégénérée de ce faisceau, le pôle de AB est donc sur la droite CD, *quel que soit* D; donc ce pôle est C, et, par suite, le triangle ABC est inscrit dans f, conjugué par rapport à g; *il existe* ∞^1 *tels triangles.*

Réciproquement : si ABC est un triangle conjugué par rapport à g, toute conique f circonscrite à ABC fournit $\Theta_1(f, g) = 0$; si, en effet, ABC est pris comme triangle de référence, on a

$$f \equiv 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'zx + 2\mathrm{B}''xy,$$
$$g \equiv \mathrm{A}_1 x^2 + \mathrm{A}'_1 y^2 + \mathrm{A}''_1 z^2,$$
$$\Theta_1(f, g) \equiv 2\mathrm{B}\,\Theta_1(yz, g) + 2\mathrm{B}'\,\Theta_1(zx, y) + 2\mathrm{B}''\,\Theta_1(xy, g),$$

et les multiplicateurs de B, B', B'' sont nuls, d'après ce que nous avons rappelé pour un couple de droites conjuguées; *donc*, $\Theta_1(f, g) = 0$. On dit que f est *harmoniquement circonscrite* à g, ou g *harmoniquement inscrite* à f.

3. Pour passer de l'espace à deux dimensions à l'espace à $p+1$ dimensions, on considère encore deux variétés quadratiques f, g à p dimensions :

$$f \equiv A x^2 + \ldots = 0, \qquad g \equiv A_1 x^2 + \ldots = 0$$

et la forme adjointe

$$a_1 u^2 + \ldots = 0$$

de g; on pose toujours :

$$\Theta_1 = a_1 A + \ldots.$$

Nous allons modifier très légèrement le point de départ de Gaches pour pouvoir généraliser ce qui précède : comme le raisonnement reste le même quand p augmente, nous nous bornerons à l'espace à trois dimensions.

Si nous considérons un système ∞^q linéaire de quadriques

$$\lambda f + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_q f_q = 0,$$

on a

$$\Theta_1(\lambda f + \ldots + \lambda_q f_q, g) \equiv \lambda\,\Theta_1(f, g) + \ldots + \lambda_q\,\Theta_1(f_q, g)$$

de sorte que deux cas seulement sont possibles :

a. Il existe un système ∞^{q-1}, compris dans le système proposé, satisfaisant à la condition

$$\Theta_1(\lambda f + \ldots + \lambda_q f_q, g) = 0.$$

b. Toutes les quadriques du système vérifient cette équation (et il suffit pour cela que $q+1$ linéairement indépendantes la vérifient).

Revenons donc à $\Theta_1(f, g) = 0$ et interprétons cette condition si f dégénère en *deux plans,* puis en un *cône*. Si f dégénère en deux plans, ils sont conjugués par rapport à g, et réciproquement (c'est la même vérification que plus haut). Si f est un cône, nous pouvons prendre comme équations réduites de f et g :

$$f \equiv A x^2 + A' y^2 + A'' z^2,$$
$$g \equiv A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_1 z^2 + A'''_1 t^2,$$
$$\Theta_1(f, g) \equiv A'''_1 \Theta_1(f, A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_1 z^2).$$

Si nous supposons que g n'est pas réduite à un cône, la relation s'interprète par l'étude faite dans l'espace à deux dimensions : dans le plan polaire par rapport à g du sommet du cône f, la base du cône est harmoniquement circonscrite à la section de g, et *il existe* ∞^1 *tétraèdres, dont trois arêtes sont génératrices du cône, conjugués par rapport à* g.

Supposons maintenant f quadrique sans point double, et $\Theta_1(f, g) = 0$; nous prenons un point A *arbitraire* sur f (deux paramètres) ; le plan polaire α de A par rapport à g coupe f, g suivant les coniques (f, α), (g, α) ; considérons le système linéaire ∞^3 de quadriques contenant A et $(f; \alpha)$; parmi elles, le système linéaire ∞^2, formé du plan α réuni à un plan arbitraire issu de A, fournit $\Theta_1 = 0$; la quadrique f, elle-même, *non incluse dans ce système* ∞^2, fournit, par hypothèse $\Theta_1 = 0$, donc *toutes* les quadriques du système ∞^3 en jeu donnent $\Theta_1 = 0$; soit en particulier le cône de sommet A et base (f, α), il donne $\Theta_1 = 0$, et par suite, il existe ∞^1 tétraèdres ABCD de sommet A, de base BCD inscrite dans (f, α) et conjuguée par rapport à (g, α) ; chacun d'eux est conjugué à g. *En faisant varier* A, *on obtient* ∞^3 *tétraèdres de cette espèce.*

Réciproquement, si l'on considère une quadrique g, un tétraèdre T conjugué à g et une quadrique f circonscrite à T, nous prenons T pour tétraèdre de coordonnées ; chaque arête fournit deux faces de T, constituant une quadrique dégénérée et donnant $\Theta_1 = 0$, puisque les deux faces sont conjuguées par rapport à g ; f appartient au système linéaire déterminé par les six quadriques dégénérées en jeu, donc on a $\Theta(f, g) = 0$. On dit encore que $f(g)$ est *harmoniquement circonscrite à* g (*harmoniquement inscrite dans* f).

Voici une autre application simple ; considérons une quadrique quelconque g (9 paramètres), un tétraèdre T conjugué à g (6 paramètres), une cubique gauche Γ circonscrite à T (4 paramètres) ; le système g, T, Γ fait intervenir un total de 19 paramètres évidemment indépendants. Si nous imaginons le système linéaire ∞^2 de quadriques Q contenant Γ, chacune donne $\Theta_1(Q, g) = 0$; soit un point A *arbitraire* de Γ, le plan polaire α de A vis-à-vis de g, qui coupe Γ en B, C, D et les ∞^2 quadriques Q suivant les ∞^2 coniques passant en B, C, D; d'après ce qui a été dit, chacune de ces coniques q, associée à (g, α) fournit la relation $\Theta_1[q, (g, \alpha)] = 0$; donc chaque couple (CD, DB), (DB, BC), (BC, CD), qui appartient à ce système q, est conjugué vis-à-vis de (g, α), *autrement dit* ABCD *est conjugué par rapport à* g, *et il existe* ∞^1 *tétraèdres de cette espèce*, de sorte que le système (g, Γ, T) dépendant de 19 paramètres, *le système* (g, Γ) *seul dépend de* 18 *paramètres*. Or, le système *général* d'une quadrique g et d'une cubique gauche Γ fait intervenir $9 + 12 = 21$ paramètres : il faut donc un ensemble de *trois conditions* (nécessaires et suffisantes) pour qu'une *cubique gauche* Γ *soit harmoniquement circonscrite à une quadrique* g. Le principe donné par Gaches met clairement ces conditions en évidence : car si une quadrique g est décomposée *tangentiellement* en deux points et si $\Theta_1(f, g) = 0$, ces deux points sont *conjugués par rapport à* f; si g est un point double, ce point appartient à f. Prenons donc sur Γ *sept points arbitraires* A_1, A_2, ..., A_7; désignons par A_i le premier membre de l'équation tangentielle du point de même nom, et considérons l'équation tangentielle

$$g \equiv \lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2 + \ldots + \lambda_7 A_7^2 = 0.$$

Toutes les quadriques f contenant A_1, ..., A_7 contiennent Γ; A_i^2 associée à f donne $\Theta(f, A_i^2) = 0$, donc $\Theta(f, g) = 0$; *le système f forme un système linéaire ponctuel harmoniquement circonscrit aux quadriques g du système linéaire* ∞^6 *tangentiel indiqué;* Γ est commune aux quadriques f, et le raisonnement fait à l'instant prouve que Γ est harmoniquement circonscrite à g; *nous avons ainsi obtenu l'équation générale des quadriques g.*

Rappelons maintenant que deux quadriques f, g peuvent être échangées l'une en l'autre par polarité; si f est harmoniquement circonscrite à g, on voit que la polarité donnera ∞^3 tétraèdres T′ circonscrits à g, conjugués à f, de sorte que nous pouvons dire que g *est harmoniquement inscrite dans* f. (Résultat analogue pour les espaces linéaires à un nombre quelconque de dimensions.)

4. Posons maintenant le problème : *soit g le système linéaire tangentiel des quadriques touchant q plans* $P_1, \ldots, P_q$; *trouver l'ensemble des quadriques f dont chacune est harmoniquement circonscrite à toutes les g?* Il est clair que l'on peut se borner à manipuler l'équation *ponctuelle* de f et l'équation *tangentielle* de g (nous avons déjà traité, à l'instant, un cas particulier de ce problème); la quadrique f peut être mise en correspondance avec le point $(A, A', A'', A''', B, B', B'', C, C', C'')$ d'un certain espace à neuf dimensions, et la quadrique g avec le point $(a, a', a'', a''', b, b', b''; c, c', c'')$ du même espace; quand f et g sont liées par la relation $\Theta_1(f, g) = 0$, que nous avons étudiée, les points figuratifs sont conjugués par rapport à une quadrique de cet espace à neuf dimensions, quadrique d'équation

$$A^2 + A'^2 + A''^2 + A'''^2 + 2B^2 + 2B'^2 + 2B''^2 + 2C^2 + 2C'^2 + 2C''^2 = 0.$$

La relation $Aa + \ldots = 0$ est supposée conséquence des q équations

$$au_1^2 + \ldots = 0, \qquad au_2^2 + \ldots = 0, \qquad \ldots, \qquad au_q^2 + \ldots = 0,$$

de sorte que l'équation ponctuelle de f est évidemment

$$\lambda_1(xu_1 + yv_1 + zw_1 + tr_1)^2 + \ldots + \lambda_q(xu_q + yv_q + zw_q + tr_q)^2 = 0,$$

où $\lambda_1 \ldots \lambda_q$ sont arbitraires; d'ailleurs, cela résulte aussi des considérations déjà données : le plan double

$$(xu_i + yv_i + zw_i + tr_i)^2 = 0$$

est harmoniquement circonscrit aux quadriques g, car il leur est tangent, donc la quadrique

$$\Sigma\lambda_i(xu_i + yv_i + zw_i + tr_i)^2 = 0$$

est harmoniquement circonscrite aux g.

Si $q = 1$, la quadrique f dégénère en le plan double P_1. Si $q = 2$, la quadrique f dégénère en deux plans conjugués par rapport à P_1 et P_2; si $q = 3$, la quadrique f dégénère en un cône dont le sommet est le point (P_1, P_2, P_3) et par rapport auquel les faces de ce trièdre P_1, P_2, P_3 sont deux à deux conjuguées.

Si $q=4$, la quadrique f est conjuguée par rapport au tétraèdre P_1, P_2, P_3, P_4 dont les faces touchent les quadriques g: nous venons, somme toute, de repasser toutes les considérations données jusqu'à présent.

Mais *le cas $q=5$ est le plus intéressant* et ouvre des horizons nouveaux : si sur les cinq plans P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 on en retire un, P_5, par exemple, *les quatre autres forment un tétraèdre* (P_1, P_2, P_3, P_4) *qui est homologique avec son tétraèdre réciproque relativement à f, P_5 étant le plan qui contient les droites d'intersection des faces homologues ou, ce qui revient au même, les points d'intersection des arêtes homologues dans l'homologie; le pôle d'homologie est le pôle de* P_5 *par rapport à f.* On a ainsi obtenu quinze points qui sont les sommets A, B, C, D du tétraèdre (P_1, P_2, P_3, P_4), A étant le sommet obtenu en éliminant P_1 et conservant P_2, P_3, P_4; A′ le sommet homologue, c'est-à-dire le pôle de P_1, ce qui conduit aux quatre sommets A′, B′, C′, D′ pôles de P_1, P_2, P_3, P_4 relativement à f; E est le pôle d'homologie de (ABCD), (A′B′C′D′); enfin, on a les six points (ij) où (12), par exemple, est le point d'intersection des arêtes AB, A′B′; les six points (ij) sont dans le plan polaire de E vis-à-vis de f; AB est la droite (P_3P_4) et A′B′ est la droite conjuguée de CD ou (P_1P_2). *On remarque maintenant que les quinze points forment une configuration symétrique :* le plan polaire de chacun d'eux contient six autres points de la configuration, d'après le tableau

A	B′	C′	D′	(23)	(24)	(34)
B	A′	C′	D′	(13)	(14)	(34)
C	A′	B′	D′	(12)	(14)	(24)
D	A′	B′	C′	(12)	(13)	(23)

A′	B	C	D	(23)	(24)	(34)
B′	A	C	D	(13)	(14)	(34)
C′	A	B	D	(12)	(14)	(24)
D′	A	B	C	(12)	(13)	(23)

E	(12)	(13)	(14)	(23)	(24)	(34)
(12)	C	D	C′	D′	E	(34)
(13)	B	D	B′	D′	E	(24)
(14)	B	C	B′	C′	E	(23)

(34)	A	B	A′	B′	E	(12)
(24)	A	C	A′	C′	E	(13)
(23)	A	D	A′	D′	E	(14)

où en face de chaque point on a marqué les six points qui lui sont conjugués. Les cinq plans ($P_1P_2P_3P_4P_5$) forment une configuration symétrique vis-à-vis de f, puisque l'équation ponctuelle de f est de la forme $\Sigma\lambda_i P_i^2 = 0$, donc les cinq pôles de ces plans par rapport à f, à savoir A'B'C'D'E, forment une configuration symétrique; or, vis-à-vis de f et E, les deux tétraèdres (ABCD) et (A'B'C'D') jouent un rôle symétrique, de sorte que ABCDE forment eux-mêmes une configuration symétrique vis-à-vis de f; de la sorte, on peut indiquer les six systèmes suivants de cinq points jouant tous le même rôle :

ABCDE;	A'B'C'D'E;	AA'(12)(13)(14);
BB'(12)(32)(42);	CC'(13)(23)(43);	DD'(14)(24)(34).

Chacun des quinze points, appartenant à deux groupes, est le centre d'homologie des deux tétraèdres qui lui sont associés dans l'un ou l'autre groupe; si je prends le point (12), par exemple, on a deux tétraèdres AA'(13)(14), BB'(32)(42), et le tableau des quinze points montre que les points alignés avec (12) sont (A, B), (A', B'), [(13), (23)], [(14), (24)], car (12), (13), (23), par exemple, sont communs aux groupes associés à E et D', donc sont situés sur la droite conjuguée de ED'. La structure du tableau montre que la *configuration est de nature dualistique*, car il y a quinze plans contenant chacun six points et chacun des quinze plans est conjugué de six autres, car deux points étant conjugués, leurs plans polaires sont conjugués.

D'autre part, comme l'équation ponctuelle de f est $\Sigma\lambda_i P_i^2 = 0$ où les pôles de P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 sont les A', B', C', D', E, une polarité par rapport à f elle-même montre que l'équation tangentielle de f est $\Sigma\mu_i p_i^2 = 0$ où les p_i sont les premiers membres des équations tangentielles des cinq points d'un même groupe. On n'a aucune peine à vérifier ces résultats en prenant P_1, P_2, P_3, P_4 pour faces du tétraèdre de coordonnées; l'équation ponctuelle de f est alors

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 + (a'x + b'y + c'z + d't)^2 = 0.$$

On peut remplacer x, y, z, t par αx, βy, γz, δt, donner à cette équation la forme

$$f \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 + (ax + by + cz + dt)^2 = 0,$$

de sorte que les coordonnées de A, B, C, D, E soient respectivement

$$(1, 0, 0, 0), \quad (0, 1, 0, 0), \quad (0, 0, 1, 0), \quad (0, 0, 0, 1), \quad (1, 1, 1, 1).$$

On trouve de suite l'équation tangentielle

$$\bar{f} \equiv \frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} + \frac{h^2}{d} - \frac{(u+v+w+r)^2}{a+b+c+d+1},$$

linéaire par rapport aux carrés des équations tangentielles de A, B, C, D, E (tandis que f sur la forme indiquée est linéaire par rapport aux carrés des plans polaires de A′, B′, C′, D′, E). Si l'on pose $P_5 \equiv ax + by + cz + dt$, on voit que f peut s'écrire

$$\rho f \equiv a(x+P_5)^2 + b(y+P_5)^2 + c(z+P_5)^2 + d(t+P_5)^2 \\ -(a+b+c+d+1)P_5^2.$$

forme qui, cette fois, fait intervenir les plans polaires de A, B, C, D, E. Le point A′ a pour coordonnées

$$\left(\frac{a+b+c+d+1}{a} - 1, -1, -1, -1\right);$$

le point (12) a pour coordonnées $(b, -a, 0, 0)$; ces résultats permettent de faire toutes les vérifications analytiques.

Mais il est bien plus intéressant de donner une démonstration géométrique. Pour y arriver, considérons, dans l'espace linéaire à quatre dimensions, une quadrique (à trois dimensions) F et un 5-èdre conjugué dont les faces sont des espaces linéaires à trois dimensions $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5$; *faisons une coupe de cet ensemble par un espace linéaire à trois dimensions* Π_6 (*distinct de* $\Pi_1, \ldots, \Pi_5$), *nous obtenons la quadrique f et le système des cinq plans* $P_1, \ldots, P_5$ *que nous venons de considérer* (si les coordonnées homogènes s'appellent x, y, z, t, u, on peut supposer que Π_6 a pour équation $u = 0$). Ainsi, Π_2, Π_3, Π_4 ont une droite commune, que Π_6 coupe au point A; pour simplifier le langage, appelons *espace* un espace linéaire à trois dimensions (tel que Π_i, par exemple); *plan* l'intersection de *deux espaces; droite* l'intersection de *trois espaces*, *ou d'un plan et d'un espace; par polarité relative à* F, *un espace correspond à un point et inversement*, *un plan à une droite*. La droite (Π_2, Π_3, Π_4) a pour variété polaire le plan (Π_1, Π_5); le point A a pour variété polaire l'espace joignant le plan (Π_1, Π_5) au pôle de Π_6, et la section de cet espace polaire par Π_6 est le plan polaire de A par rapport à f, lequel contient donc la droite (Π_1, Π_5, Π_6) ou encore la droite (P_1, P_5); ce plan polaire, que nous avons appelé B'C'D', coupe donc P_1, c'est-à-dire le plan BCD, suivant une droite située dans P_5; autrement dit, les deux tétraèdres (ABCD), (A'B'C'D') sont tels que leurs faces homologues se coupent dans P_5 : *ces tétraèdres sont homologiques.* Les droites AA', BB', CC', DD' concourent donc en E; les points d'intersection des arêtes homologues (AB, A'B'), ... complètent les quinze points : nous avons retrouvé intuitivement tous les résultats (¹).

Ce raisonnement est valable pour tout espace linéaire à $(p+1)$ dimensions où l'on considérera une variété quadratique à p dimensions, un $(p+2)$-èdre conjugué et où l'on fera ensuite une coupe par une $(p+3)^{\text{ième}}$ variété supplémentaire E à p dimensions : on obtient alors dans cet espace E à p dimensions, une variété quadratique f à $(p-1)$ dimensions dont le premier membre de l'équation ponctuelle est mis sous forme d'une somme de $(p+2)$ carrés de formes linéaires

$$f \equiv \lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \ldots + \lambda_{p+2} P_{p+2}^2 = 0.$$

On considère dans E le $(p+1)$-èdre obtenu en supprimant l'hyperplan P_{p+2}, soit $A_1 A_2 \ldots A_{p+1}$, puis le $(p+1)$-èdre conjugué vis-à-vis de f, soit $A'_1 A'_2 \ldots A'_{p+1}$: ces deux $(p+1)$-èdres sont homologiques, le plan d'homologie étant P_{p+2}, et le pôle d'homologie est un point B commun aux droites

$$(A_1 A'_1), \quad \ldots, \quad (A_{p+1}, A'_{p+1});$$

on a ainsi déjà $2p+3$ points auxquels on ajoute les points

(¹) Nous verrons plus bas la puissance du procédé qui consiste à immerger l'espace étudié dans un espace linéaire ayant un nombre de dimensions plus élevé. Mais ici on pourrait se dispenser de ce procédé, en remarquant que le plan polaire de A est défini par l'équation

$$\lambda_1 P_1 P_1(A) + \lambda_5 P_5 P_5(A) = 0,$$

où $P_1(A)$, $P_5(A)$ sont ce que deviennent P_1, P_5 quand les coordonnées courantes sont remplacées par les coordonnées de A; donc la droite commune à ce plan (B'C'D') et au plan BCD($P_1 = 0$) est définie par $P_1 = 0$, $P_5 = 0$ et ceci montre l'homologie des tétraèdres ABCD, A'B'C'D'.

d'intersection des arêtes homologues $(A_1A_2, A'_1A'_2)$, ... en nombre $\frac{p(p+1)}{2}$; on a ainsi un total de $\frac{(p+2)(p+3)}{2}$ points tels que chacun soit conjugué de $\frac{p(p+1)}{2}$ autres, déterminant (surabondamment) l'hyperplan conjugué : *cette configuration est symétrique et de nature dualistique.*

Si, dans le plan, un triangle et son conjugué par rapport à une conique sont homologiques, le résultat analogue n'est plus vrai en général dans un espace à trois dimensions et plus. En effet, si nous prenons la quadrique

$$f \equiv x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{p+1}^2 = 0$$

et un $(p+1)$-èdre $(a_1, a_2, \ldots, a_{p+1})$, $(b_1, b_2, \ldots)$, $(c_1, c_2, \ldots)$, exprimer que la droite, joignant les deux premiers sommets, rencontre la droite associée du $(p+1)$-èdre réciproque revient à dire qu'un certain point

$$(\lambda a_1 + \mu b_1,\ \lambda a_2 + \mu b_2,\ \ldots,\ \lambda a_{p+1} + \mu b_{p+1})$$

vérifie les équations

$$\begin{aligned} &c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_{p+1} x_{p+1} = 0, \\ &d_1 x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ce qui entraîne les relations telles que

$$\frac{a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_{p+1} c_{p+1}}{b_1 c_1 + b_2 c_2 + \ldots + b_{p+1} c_{p+1}} = \frac{a_1 d_1 + \ldots + a_{p+1} d_{p+1}}{b_1 d_1 + \ldots + b_{p+1} d_{p+1}}.$$

Autrement dit, si l'on pose

$$(ab) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_{p+1} b_{p+1})$$

quels que soient les quatre sommets distincts choisis sur le $(p+1)$-èdre donné, (a, b, c, d), par exemple, on a

$$(ab)(cd) = (ac)(bd) = (ad)(bc)$$

quand les deux $(p+1)$-èdres sont homologiques ; *ces relations qui, au premier abord, paraissent être en nombre* $2C^4_{p-1}$, *se réduisent à* $\frac{(p+1)(p-2)}{2}$ *seulement.*

En effet, le nombre de paramètres total dont dépendent, dans l'espace à p dimensions, la quadrique f et le $(p+1)$-èdre de l'espèce indiqué est le nombre de paramètres intervenant dans l'équation

$$P_1^2 + \ldots + P_{p+2}^2 = 0$$

où les P_i sont des formes linéaires, c'est-à-dire $(p+2)(p+1)-1$; la quadrique f, seule, ferait intervenir $\frac{(p+1)(p+2)}{2} - 1$ paramètres : on a donc simplement $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$ paramètres, pour le $(p+1)$-èdre, quand f est donnée, au lieu de $p(p+1)$ pour le $(p+1)$-èdre général; les sommets du $(p+1)$-èdre, homologique avec son conjugué vis-à-vis de f, sont donc liés par $\frac{(p+1)(p-2)}{2}$ conditions ; ce nombre est nul pour $p=2$.

Ici, on voit aussitôt un passage de l'espace linéaire projectif à l'espace anallagmatique. Le problème : trouver un $(p+1)$-èdre, homologique avec son conjugué vis-à-vis de f, revient à décomposer le premier membre de l'équation ponctuelle (ou tangentielle) de f en une somme de $p+2$ carrés (au lieu de $p+1$); on choisit un carré P_{p+2}^2 arbitraire, et l'on décompose en $(p+1)$ carrés la quadrique $f - P_{p+2}^2$. D'autre part, à partir d'une première décomposition,

$$f \equiv P_1^2 + \ldots + P_{p+2}^2,$$

on obtient évidemment toutes les autres par une substitution orthogonale sur les P_i, *ce qui revient à considérer le groupe des transformations conformes de l'espace anallagmatique à p dimensions.*

Cela nous conduit à une image intéressante des configurations étudiées : *une transformation homographique permet de remplacer la quadrique de l'espace à p dimensions par une hypersphère*, et alors :

Dans l'espace à deux dimensions, nous avons un cercle et dix points dont chacun est conjugué à trois autres; en coupant le cercle par les polaires de ces points, on a, sur le cercle, dix couples de points dont chacun divise harmoniquement trois autres couples; par une inversion dont le pôle est sur le cercle, on a dix segments sur une droite (théorème de l'espace à *une* dimension) dont chacun divise harmoniquement trois autres.

De même pour l'espace à trois dimensions, on aura une quadrique *sphérique* et sur elle quinze cercles (*théorème de l'espace à deux dimensions*), dont chacun est orthogonal à six autres. On peut, si l'on préfère, réduire par une inversion la sphère à un plan; mais cette dernière forme masque la *dualité* de la configuration, car, si l'on a une sphère véritable, on peut remplacer les cercles soit par leur plan, soit par le pôle de leur plan.

De même, pour *l'espace à quatre dimensions*, nous obtenons par le même procédé un théorème concernant *l'espace linéaire à trois dimensions :* nous pourrons construire *vingt et une sphères dont chacune est orthogonale à dix autres de la configuration.*

Ce passage de l'espace projectif à l'espace anallagmatique tient à ce qu'une même sphère Σ (à $p-1$ dimensions de l'espace à p dimensions), étant soumise à une *transformation du groupe conforme* est remplacée par une autre sphère Σ', et qu'en comparant les points homologues de Σ et Σ', on peut trouver une *homographie* produisant la même correspondance entre ces points de Σ et Σ'. D'ailleurs, dans le même ordre d'idées, Laguerre a ramené la notion d'*angle* à une notion *projective.*

5. Nous allons continuer dans le même ordre d'idées, avec le principe si simple de Gaches pour guide. Mais au lieu de considérer un système tangentiel linéaire de quadriques g tangentes à un ensemble donné de plans, pour obtenir ensuite le système ponctuel linéaire des quadriques f qui leur sont harmoniquement circonscrites (système f, qui, en général, n'a pas de points fixes), nous allons considérer, ce qui est équivalent dualistiquement, un système linéaire ponctuel de quadriques f ayant un certain nombre de points fixes communs, pour obtenir ensuite l'ensemble linéaire tangentiel des quadriques g qui leur sont harmoniquement inscrites (système g qui, en général, n'a pas de plans tangents communs à toutes).

Au paragraphe précédent, nous avions les quadriques f passant par cinq points, A, B, C, D, E, et les quadriques g du système tangentiel

$$\lambda_1 A^2 + \lambda_2 B^2 + \lambda_3 C^2 + \lambda_4 D^2 + \lambda_5 E^2 = 0. \tag{1}$$

Toutes les f sont harmoniquement circonscrites à toutes les g;

en particulier, le système des deux plans (ABC, DEF) où F est un point *quelconque*, est conjugué par rapport à g, où g est une quadrique *déterminée* (1) qui précède, de sorte que le pôle D′ du plan ABC par rapport à g, est sur DE et que les cinq points ABCDE jouent par rapport à g le rôle étudié au paragraphe qui précède ([1]). Il y a ∞^2 cubiques gauches Γ passant par ABCDE; chacune est commune à trois quadriques du système f et, comme on l'a vu à la fin du paragraphe 3, *chacune de ces cubiques est harmoniquement circonscrite à toutes les* g.

Il est donc intéressant de résoudre la question réciproque : *nous supposons connues une cubique gauche* Γ *et une quadrique* g *harmoniquement inscrite dans* Γ, *et nous demandons de déterminer tous les systèmes de cinq points* A, B, C, D, E *situés sur* Γ *et tels que l'équation tangentielle de* g *soit réductible à la forme* (1) *qui précède* (nous pourrons dire que g *appartient* à A, B, C, D, E). Prenons au hasard deux points D, E sur Γ et un point D′ sur DE (autre que D ou E); le plan polaire de D′ par rapport à g coupe Γ en trois points A, B, C ; je dis que g *appartient* à A, B, C, D, E. En effet, f, f_1, f_2 étant trois quadriques quelconques contenant Γ, les quadriques

$$\rho f + \rho_1 f_1 + \rho_2 f_2 = 0$$

sont harmoniquement circonscrites à g; d'autre part, p_1, p_2 étant deux plans quelconques contenant DE, et p étant le plan ABC, les quadriques dégénérées

$$(\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2) p = 0$$

sont aussi harmoniquement circonscrites à g; donc les quadriques du système ∞^4 :

$$\rho f + \rho_1 f_1 + \rho_2 f_2 + p(\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2) = 0 \tag{2}$$

sont toutes harmoniquement circonscrites à g; comme on ne peut trouver aucun système de valeurs pour ρ, ρ_1, ρ_2, μ_1, μ_2 rendant identiquement nul le premier membre de (2) ([2]), on a le

([1]) Si, au paragraphe précédent on a employé f au lieu de g, cela tient à ce que la configuration des quinze points et quinze plans à laquelle conduit l'étude du paragraphe précédent est de nature *dualistique*.

([2]) Car aucune des quadriques $\rho f + \rho_1 f_1 + \rho_2 f_2 = 0$ ne dégénère en deux plans.

système ∞^4 des quadriques contenant A, B, C, D, E; par suite, l'équation tangentielle de g est bien réductible à la forme (1) avec les cinq points ainsi obtenus sur Γ (si D′ coïncidait avec D, il est clair que l'on aurait simplement

$$\lambda_1 A^2 + \lambda_2 B^2 + \lambda_3 C^2 + \lambda_4 D^2 = 0,$$

le coefficient λ_5 serait accidentellemeut nul); cet ensemble de cinq points dépend de trois arbitraires.

Nous pouvons continuer dans le même ordre d'idées : soient six points A, B, C, D, E, F (pris au hasard dans l'espace, de façon à déterminer une cubique gauche Γ et une seule). L'équation

$$(3) \qquad g \equiv \lambda_1 A^2 + \lambda_2 B^2 + \lambda_3 C^2 + \lambda_4 D^2 + \lambda_5 E^2 + \lambda_6 F^2 = 0$$

définit, en coordonnées tangentielles, une quadrique g harmoniquement inscrite dans toutes les quadriques f du système ponctuel ∞^3 défini par A, B, C, D, E, F. Il y a dix couples de plans associés (ABC, DEF) contenant l'un trois points, l'autre les trois restants; chaque couple est conjugué par rapport à g (et comme g n'est assujettie tangentiellement qu'à quatre conditions linéaires, il suffit que quatre, convenablement choisis parmi ces dix couples, soient conjugués par rapport à une quadrique, pour que les six autres le soient).

Réciproquement, si une cubique gauche Γ est harmoniquement circonscrite à une quadrique g, *il existe sur* Γ, ∞^3 *groupes* (ABCDEF) *auxquels* g *appartient* (toujours au sens précédent : g est harmoniquement inscrite dans *toutes* les quadriques contenant ABCDEF). En effet, prenons sur Γ trois points quelconques A, B, C, puis le pôle α du plan ABC par rapport à g; un plan arbitraire mené par α coupe Γ aux points D, E, F, et g appartient au groupe (ABCDEF) : c'est toujours le même raisonnement; l'équation

$$(4) \qquad \rho_1 f_1 + \rho_2 f_2 + \rho_3 f_3 + \rho_4 pq = 0,$$

où f_1, f_2, f_3 sont trois quadriques linéairement indépendantes contenant Γ et $pq = 0$ l'ensemble des deux plans ABC, DEF, représente les ∞^3 quadriques passant par A, B, C, D, E, F, et, d'autre part, *toutes* sont harmoniquement circonscrites à g : donc l'équation de g est réductible à la forme (3). Si le pôle α du plan ABC était sur Γ, l'un des points D, E, F, D par exemple, serait en α, et il est clair que dans (3) on aurait $\lambda_5 = \lambda_6 = 0$, le tétraèdre ABCD étant inscrit dans Γ et conjugué à g. Si α, étant non situé sur Γ, on a mené le plan issu de α, de sorte qu'il contienne la sécante double *unique* de Γ issue de α, deux des points D, E, F, par exemple, D et E sont confondus avec les pieds de cette sécante, et nous retrouvons un groupe de cinq points (ABCDE) de Γ auquel g appartient ; λ_6 est nul. *Le cas des groupes de quatre et cinq points de* Γ, *auxquels g appartient, sont donc simplement des dégénérescences des groupes de six points*, et il suffit de savoir déterminer les groupes de six points. Il est clair que, si Γ est représentée au moyen d'un paramètre unicursal propre θ, il existe une relation symétrique et du premier degré par rapport aux six valeurs θ_i, donc de la forme

$$a_0 - a_1 S_1 + a_2 S_2 - a_3 S_3 + a_4 S_4 - a_5 S_5 + a_6 S_6 = 0 \tag{5}$$

où

$$S_1 = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_6, \qquad S_2 = \theta_1\theta_2 + \ldots .$$

On sait former cette relation si l'on sait former l'équation

$$a_0 - 6a_1\theta + 15a_2\theta^2 - 20a_3\theta^3 + 15a_4\theta^4 - 6a_5\theta^5 + a_6\theta^6 = 0 \tag{6}$$

donnant les systèmes particuliers (à rejeter évidemment pour former l'équation tangentielle de g) où tous les θ sont confondus. Si les six points A, B, C, D, E, F se réduisent à un seul A, le plan ABC est osculateur en A à Γ et le plan DEF aussi : ces deux plans sont conjugués par rapport à g et confondus, donc tangents à g. *L'équation* (6) *est donc celle qui fournit les points de* Γ *où le plan osculateur est tangent à g;* on sait former cette équation (6), d'où l'on déduit aussitôt (5), donc les groupes de six points ; on a ensuite les groupes de cinq points en déterminant θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, θ_5 (par leurs fonctions symétriques s_1, s_2, s_3, s_4, s_5), de sorte que θ_6 soit indéterminé, cela donne

$$\left\{\begin{aligned} &a_0 - a_1 s_1 + a_2 s_2 - a_3 s_3 + a_4 s_4 - a_5 s_5 = 0, \\ &a_1 - a_2 s_1 + a_3 s_2 - a_4 s_3 + a_5 s_4 - a_6 s_5 = 0. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

On obtient les groupes de quatre points en s'arrangeant pour que θ_5 lui-même soit indéterminé, ce qui donne en introduisant les fonctions symétriques σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 de θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 :

$$(8)\qquad \begin{cases} a_0 - a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 - a_3\sigma_3 + a_4\sigma_4 = 0, \\ a_1 - a_2\sigma_1 + a_3\sigma_2 - a_4\sigma_3 + a_5\sigma_4 = 0, \\ a_2 - a_3\sigma_1 + a_4\sigma_2 - a_5\sigma_3 + a_6\sigma_4 = 0. \end{cases}$$

On remarquera que ces questions ont leur généralisation immédiate dans tout espace linéaire à un nombre quelconque de dimensions : pour l'espace à deux dimensions, Γ est remplacée par une conique harmoniquement circonscrite à la conique g, et l'on cherche sur Γ tous les systèmes de trois ou quatre points auxquels g appartient : on trouve l'involution déterminée par les points de contact avec Γ des tangentes communes à g et Γ ; dans l'espace à q dimensions, on a une courbe gauche Γ, d'ordre q, unicursale, harmoniquement circonscrite à g, et l'on cherche les groupes de $2q$, $2q-1$, ..., $q+1$ points de Γ auxquels g appartient, et l'on a tous comme dégénérescences des groupes de $2q$ points. On a toujours une involution

$$a_0 - a_1 S_1 + a_2 S_2 + \ldots + a_{2q} S_{2q} = 0.$$

On peut remarquer que l'équation

$$a_0 - C_{2q}^1 a_1 \theta + C_{2q}^2 a_2 \theta^2 + \ldots + a_{2q}\theta^q = 0$$

ne fournit, par l'ensemble de ses racines, un groupe de l'involution que si l'on a

$$a_0 a_{2q} - \frac{1}{2} C_{2q}^1 a_1 a_{2q-1} + \frac{1}{2} C_{2q}^2 a_2 a_{2q-2} - \ldots = 0.$$

Dans le cas de $q = 3$, on a

$$(9)\qquad a_0 a_6 - 6 a_5 a_1 + 15 a_2 a_4 - 10 a_3^2 = 0$$

comme condition pour que cela se présente.

6. Nous avons remarqué déjà au paragraphe 3 que si la quadrique g est harmoniquement inscrite dans une cubique gauche Γ, l'équation tangentielle de g est réductible à la forme

$$(10)\qquad \lambda_1[x_1 u + y_1 v + z_1 w + t_1 r]^2 + \ldots + \lambda_7[x_7 u + y_7 v + z_7 w + t_7 r]^2 = 0,$$

où (x_1, y_1, z_1, t_1), ..., (x_7, y_7, z_7, t_7) sont sept points pris au hasard sur la cubique, de sorte que nous avons épuisé par les cas spéciaux de 4, 5, 6 points les groupes de points intéressants à étudier pour le système (Γ, g).

Tous les résultats qui précèdent ont été obtenus *sans calcul* et toujours par application de l'idée directrice de Gaches.

Il est bon de montrer comment on vérifierait ces résultats analytiquement. D'abord, si l'on avait pris $(7+h)$ points sur Γ, l'équation

$$(11) \qquad \sum_1^{7+h} \lambda_i (x_i u + y_i v + z_i w + t_i r)^2 = 0$$

représenterait bien une quadrique harmoniquement inscrite dans Γ; mais on peut réduire le premier membre de (11) à ne contenir que sept carrés, car pour huit points pris sur Γ, on trouve une identité (par rapport aux variables u, v, w, r) :

$$(12) \qquad \sum_1^{8} \rho_i (u x_i + v y_i + w z_i + r t_i)^2 \equiv 0.$$

Cela se voit en écrivant :

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x_i = A\theta_i^3 + A'\theta_i^2 + A''\theta_i + A''', \\ & y_i = B\theta_i^3 + B'\theta_i^2 + \ldots, \\ & z_i = C\theta_i^3 + \ldots, \\ & t_i = D\theta_i^3 + \ldots; \\ & u x_i + v y_i + w z_i + r t_i \equiv \alpha\theta_i^3 + \beta\theta_i^2 + \gamma\theta_i + \delta; \\ & \alpha = uA + vB + wC + rC, \\ & \beta = uA' + \ldots, \\ & \gamma = uA'' + \ldots, \\ & \delta = uA''' + \ldots; \\ & (u x_i + v y_i + w z_i + r t_i)^2 \\ & \quad \equiv \alpha^2\theta_i^6 + 2\alpha\beta\theta_i^5 + (\beta^2 + 2\alpha\gamma)\theta_i^4 + 2(\alpha\delta + \beta\gamma)\theta_i^3 \\ & \qquad + (\gamma^2 + 2\beta\delta)\theta_i^2 + 2\gamma\delta\theta_i + \delta^2\theta_i^2; \end{aligned} \right.$$

et alors il suffit, pour obtenir l'identité (12), d'avoir les équations *indépendantes de* u, v, w, r :

$$\sum_1^8 \rho_i \theta_i^p = 0 \qquad (p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

dont la solution est

$$\rho_i = \frac{1}{F'(\theta_i)}$$

en prenant $F(\theta) \equiv (\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2)\ldots(\theta - \theta_8)$ comme cela résulte de la décomposition en éléments simples de la portion rationnelle $\frac{\theta^p}{F(\theta)}$ où le numérateur θ^p est de degré inférieur de deux unités ou plus à celui du dénominateur.

Cela posé, le problème posé était de trouver une identité de la forme suivante :

$$(14) \quad \Sigma \mu_j (u X_j + v Y_j + w Z_j + r T_j)^2 \equiv \Sigma \lambda_i (x_i u + y_i v + z_i w + t_i r)^2$$

où le second membre est explicitement connu et contient 4, 5, 6, 7 carrés (suivant le progrès que l'on a fait sur l'étude de Γ), (x_i, y_i, z_i, t_i) étant point connu de Γ; au premier membre, le nombre de carrés est spécifié 4, 5, 6 pour chacun des trois problèmes que nous avons à résoudre; (X_j, Y_j, Z_j, T_j) est un point correspondant au paramètre inconnu Θ_j; μ_j est lui-même inconnu. L'identité (14) est une identité en u, v, w, r et, d'après les calculs préparatoires (13), elle revient à écrire (en supposant d'abord que l'on ait quatre carrés au premier membre) (1) :

$$\begin{aligned}
&\mu_1 \Theta_1^6 + \mu_2 \Theta_2^6 + \mu_3 \Theta_3^6 + \mu_4 \Theta_4^6 = \lambda_1 \theta_1^6 + \ldots + \lambda_7 \theta_7^6 = a_0,\\
&\mu_1 \Theta_1^5 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda_1 \theta_1^5 + \ldots\ldots\ldots = a_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mu_1 \Theta_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda_1 \theta_1 + \ldots\ldots\ldots = a_5,\\
&\mu_1 \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda_1 \quad + \ldots + \lambda_7 \quad = a_6,
\end{aligned}$$

$a_0, a_1, \ldots, a_6$ sont *connus ;* nous avons huit inconnues; on voit que l'on peut éliminer les μ (on suppose les Θ_i distincts).

---

(1) Si les points (x_i, y_i, z_i, t_i) sont en nombre inférieur à sept, on supposera nuls certains λ.

On a

$$
(\mathrm{E}_1)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\begin{vmatrix}
\theta_1^4 & \theta_2^4 & \theta_3^4 & \theta_4^4 & a_0 \\
\theta_1^3 & \theta_2^3 & \theta_3^3 & \theta_4^3 & a_1 \\
\theta_1^2 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & a_2 \\
\theta_1 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & a_3 \\
1 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & a_4
\end{vmatrix} = 0, \\[2ex]
\begin{vmatrix}
\theta_1^4 & \theta_2^4 & \theta_3^4 & \theta_4^4 & a_1 \\
\theta_1^3 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & a_2 \\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & a_3 \\
\theta & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & a_4 \\
1 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & a_5
\end{vmatrix} = 0, \\[2ex]
\begin{vmatrix}
\theta_1^4 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & a_2 \\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\
1 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & a_6
\end{vmatrix} = 0,
\end{array}
\right.
$$

ce que l'on peut remplacer par les équations

$$
(\mathrm{E}_2)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\theta^4 - \sigma_1\theta^3 + \sigma_2\theta^2 - \sigma_3\theta + \sigma_4 = 0, \\
a_0 - \sigma_1 a_1 + \sigma_2 a_2 - \sigma_3 a_3 + \sigma_4 = 0, \\
a_1 - \sigma_2 a_1 + \sigma_3 a_2 - \sigma_3 a_4 + \sigma_5 = 0, \\
a_2 - \sigma_3 a_1 + \sigma_3 a_3 - \sigma_3 a_5 + a_6 = 0,
\end{array}
\right.
$$

et l'un des nombres σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 peut être pris arbitrairement : nous avons vérifié les résultats obtenus géométriquement. Marche analogue pour un groupe de cinq ou six points : pour cinq points, on aura

$$
(\mathrm{E}'_2)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\theta^5 - s_1\theta^4 + s_2\theta^3 - s_3\theta^2 + s_4\theta - s_5 = 0, \\
a_0 - s_1 a_1 + s_2 a_2 - s_3 a_3 + s_4 a_4 - s_5 = 0, \\
a_1 - s_2 a_2 + s_3 a_3 - s_3 a_4 + s_4 a_5 - a_6 = 0,
\end{array}
\right.
$$

pour six points :

$$
(\mathrm{E}''_2)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\theta^6 - s_1\theta^5 + s_2\theta^4 - s_3\theta^3 + s_4\theta^2 - s_5\theta + s_6 = 0, \\
a_0 - s_1 a_1 + s_2 a_2 - s_3 a_3 + s_4 a_4 - s_5 a_5 + a_0 = 0,
\end{array}
\right.
$$

Application. — Supposons

$$g \equiv u^2 + v^2 + w^2 + r^2,$$

$$(\Gamma)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= A(\theta - b)(\theta - c)(\theta - d),\\ y &= B(\theta - a)(\theta - c)(\theta - d),\\ z &= C(\theta - a)(\theta - b)(\theta - d),\\ t &= D(\theta - a)(\theta - b)(\theta - c). \end{aligned}\right.$$

Nous connaissons une réduction initiale de g à la forme

$$\sum_1^4 \lambda_i(x_i u + y_i v + z_i w + t_i r),$$

en prenant

$$\theta_1 = a, \quad \theta_2 = b, \quad \theta_3 = c, \quad \theta_4 = d,$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{A^2(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2}, \quad \lambda_2 = \ldots.$$

Les coefficients appelés $a_0, a_1, \ldots, a_6$ sont donnés par les équations ($p = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) :

$$a_{6-p} = \Sigma \lambda_i \theta_i^p = \sum \frac{a^p}{A^2(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2}.$$

L'équation

$$a_0 - 6a_1\theta + 15a_2\theta^2 - 20a_3\theta^3 + 15a_4\theta^4 - 6a_5\theta^5 + a_6\theta^6 = 0$$

est donc

$$(15)\qquad \frac{(\theta-a)^6}{A^2(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2} + \frac{(\theta-b)^6}{B^2(b-a)^2(b-c)^2(b-d)^2} + \frac{(\theta-c)^6}{C^2(c-a)^2(c-b)^2(c-d)^2} + \frac{(\theta-d)^6}{D^2(d-a)^2(d-b)^2(d-c)^2} = 0.$$

D'autre part, si le plan (u, v, w, r) coupe Γ aux points $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, on a l'équation aux θ des points de rencontre :

$$\begin{aligned} &\Sigma A u(\theta - b)(\theta - c)(\theta - d)\\ &\quad \equiv (Au + Bv + Cw + Dr)(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2)(\theta - \theta_3), \end{aligned}$$

de sorte qu'en faisant $\theta = a$, on obtient

$$\frac{u}{Au + Bv + Cw + Dr} = \frac{(a-\theta_1)(a-\theta_2)(a-\theta_3)}{A(a-b)(a-c)(a-d)}.$$

L'équation du plan $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ est

$$\sum \frac{(a-\theta_1)(a-\theta_2)(a-\theta_3)x}{A(a-b)(a-c)(a-d)} = 0.$$

Le plan osculateur au point θ est

$$\sum \frac{x(\theta-a)^3}{A(a-b)(a-c)(a-d)} = 0.$$

L'équation (15) exprime bien que ce plan osculateur touche g. Nous avons vérifié tous nos résultats.

7. Nous pouvons indiquer encore une autre méthode pour obtenir tout ce qui précède; en même temps, nous verrons comment la géométrie des espaces à $q+p$ dimensions simplifie les résultats à obtenir dans l'espace à q dimensions.

Considérons dans un espace à $(p-1)$ dimensions la quadrique définie tangentiellement par

$$(16) \qquad g \equiv u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_p^2 = 0,$$

et la courbe unicursale Γ gauche, d'ordre $p-1$,

$$\Gamma\left(x_1 = \frac{A_1}{\theta - a_1},\ x_2 = \frac{A_2}{\theta - a_2},\ \ldots,\ x_p = \frac{A_p}{\theta - a_p}\right),$$

Γ est circonscrite à ∞^1 p-èdres conjugués par rapport à g, résultat démontré en formant les identités

$$(17) \qquad u_1^2 + \ldots + u_p^2 \equiv \sum_1^p \left(\frac{A_1\lambda_i u_1}{\theta_i - a_1} + \frac{A_2\lambda_i u_2}{\theta_i - a_2} + \ldots + \frac{A_p\lambda_i u_p}{\theta_i - a_p}\right)^2.$$

Cela revient à dire que le tableau

$$\left|\begin{array}{ccccc}
\frac{A_1\lambda_1}{\theta_1 - a_1} & \frac{A_1\lambda_2}{\theta_2 - a_1} & \frac{A_1\lambda_3}{\theta_3 - a_1} & \ldots & \frac{A_1\lambda_p}{\theta_p - a_1} \\
\frac{A_2\lambda_1}{\theta_1 - a_2} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \frac{A_2\lambda_p}{\theta_p - a_2} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
\frac{A_p\lambda_1}{\theta_1 - a_p} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \frac{A_p\lambda_p}{\theta_p - a_p}
\end{array}\right|$$

est un tableau de substitution orthogonale : au lieu d'opérer par lignes, opérons par colonnes; on aura ainsi

$$\sum_{i=1}^{i=p} \frac{A_i^2}{(\theta_h - a_i)(\theta_k - a_i)} = 0$$

pour toutes les valeurs non égales des entiers h, k; cela revient à

$$\sum_{i=1}^{i=p} \frac{A_i^2}{\theta_h - a_i} = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{A_i^2}{\theta_k - a_i}.$$

Cela prouve que les nombres θ_1, θ_2, ..., θ_p sont racines de l'équation de degré p :

$$F(\theta) \equiv \frac{A_1^2}{\theta - a_1} + \frac{A_2^2}{\theta - a_2} + \ldots + \frac{A_p^2}{\theta - a_p} - \lambda = 0,$$

où λ est une arbitraire.

Cela donne

$$F(\theta) \equiv \frac{-\lambda(\theta - \theta_1)\ldots(\theta - \theta_p)}{(\theta - a_1)(\theta - a_2)\ldots(\theta - a_p)}.$$

Ensuite, on a pour le carré de la colonne i

$$\lambda_i^2 \left[\frac{A_1^2}{(\theta_i - a_1)^2} + \ldots + \frac{A_p^2}{(\theta_i - a_p)^2}\right] = 1$$

ou

$$\lambda_i^2 F'(\theta_i) = -1.$$

Cela donne

$$\lambda_1^2 = \frac{(\theta_1 - a_1)(\theta_1 - a_2)\ldots(\theta_1 - a_p)}{\lambda(\theta_1 - \theta_2)\ldots(\theta_1 - \theta_p)}.$$

Si maintenant, dans l'identité (17), nous supposons :

$$u_{q+1} = u_{q+2} = \ldots = u_p = 0,$$

nous avons (en posant $q + q' = p$)

$$(18) \quad u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_q^2 = \sum_{i=1}^{i=q+q'} \left(\frac{A_1\lambda_i u_1}{\theta_i - a_1} + \frac{A_2\lambda_i u_2}{\theta_i - a_2} + \ldots + \frac{A_q\lambda_i u_q}{\theta_i - a_q}\right)^2,$$

identité qui fait intervenir une quadrique f de l'espace à $(q-1)$ dimensions, une courbe gauche unicursale Γ d'ordre $(q-1)$ circonscrite à un q-èdre conjugué à f, à savoir

$$(\Gamma) \qquad x_1 = \frac{A_1}{\theta - a_1}, \qquad x_2 = \frac{A_2}{\theta - a_2}, \qquad \ldots, \qquad x_q = \frac{A_q}{\theta - a_q}$$

et un ensemble de $q + q'$ points de Γ obtenus pour les valeurs θ_1, θ_2, ..., θ_q, θ_{q+1}, ..., $\theta_{q+q'}$ où q' est un nombre arbitrairement grand, mais on peut se borner aux valeurs 0, 1, ..., $(q-2)$ pour l'entier q'.