BULLETIN DE LA S. M. F.

LEWIS-BAYARD ROBINSON

Complément à une étude sur l'équation fonctionnelle d'Ozumi

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 213-215
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__213_0>

COMPLÉMENT À UNE ÉTUDE SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE D'OZUMI;

PAR M. L. B. ROBINSON (1).

Dans cet article, nous ferons l'étude de l'équation

$$u'(x) = a(x)u\left(x^{\frac{m}{n}}\right), \tag{1}$$

où m et n sont deux nombres entiers et positifs et $m > n$.

De plus $a(x)$ est une fonction entière à coefficients positifs.

Au moyen de la substitution $x = e^x$, l'équation (1) est transformée dans l'équation

$$w'(z) = \mathrm{P}(z)w\left(\frac{m}{n}z\right), \tag{2}$$

où $\mathrm{P}(z)$ est une fonction entière à coefficients positifs.

Nous verrons facilement que la série qui satisfait formellement à l'équation ci- dessus, diverge partout. Pour cela

$$z = 0, \qquad x = 1$$

est un point singulier de l'équation (1).

En suivant le raisonnement d'un travail antérieur (2), on voit que la solution générale de l'équation (1) a le cercle de rayon 1 comme coupure essentielle. On obtient la solution générale par des approximations successives.

$u(x)$ est une fonction lacunaire tant que $m > n$. Mais quand

$$\frac{m}{n} \to 1,$$
$$u(x) \to e^{\int a(x\, bx},$$

c'est-à-dire une *fonction entière*.

---

(1) L'auteur cherche à généraliser un travail d'Ozumi, *voir* JOHOKU, *Mathematical Journal*, 1929, p. 10-18.

(2) Voir *Bulletin de la Société Mathématique* (t. 64, fasc. I-II, 1936, p. 66.)

Procédons au cas plus général

$$u'(x) = a(x)\,u\left(x^{\frac{m}{n}}\right) + b(x) \text{ (}^{1}\text{)}. \tag{3}$$

Par la méthode d'approximations successives nous obtenons une solution

$$u(x) \equiv c_0 v(x) + \varpi(x)$$

qui converge dans le cercle de rayon 1 et *sur la circonférence* du cercle.

L'origine est un point multiple quand $\frac{m}{n} \neq$ nombre entier; $v(x)$ est une fonction LACUNAIRE mais LIMITÉE. $\varpi(x)$ est aussi LIMITÉE.

Parfois des solutions singulières existent.

Nous donnerons un exemple.

Supposons que nous ayons

$$\lambda u'(x) = u(x^2) - x^3, \tag{4}$$

ou

$$x^3 + \lambda u'(x) = u(x^2).$$

Par des approximations successives nous obtenons une solution

$$u_1(x) \equiv x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\lambda x^{\frac{1}{4}} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\lambda^2 x^{\frac{-3}{8}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{-3}{8}\lambda^3 x^{\frac{-11}{16}} + \dots + a_1 a_2 a_3 \dots a_n \lambda^n x^{a_{n+1}} + \dots, \tag{5}$$

où

$$a_{n+1} = \frac{3}{2^{n+1}} - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Évidemment $a_{n+1} \to -1$ quand $n \to \infty$.

Pour cela nous pouvons écrire notre solution

$$u_1(x) \equiv \frac{1}{x}\left\{ x^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{2}\lambda x^{\frac{5}{4}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\lambda^2 x^{\frac{5}{8}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{-3}{8}\lambda^3 x^{\frac{5}{16}} + \dots + a_1 a_2 a_3 \dots a_n \lambda^n x^{\frac{5}{2^{n+1}}} + \dots \right\}.$$

Notre série converge si $|\lambda| < 1$, $x \neq 0$.

Mais $u_1(x)$ a un point multiple à l'origine.

L'équation (4) est une équation fonctionnelle d'Ozumi et pour

---

(1) Si $m < n$, cette équation devient une équation d'Ozumi après la transformation

$$x = e^z.$$

cela a une solution

$$u_2(x) \equiv c_0 v(x) + \varpi(x),$$

où $v(x)$ et $\varpi(x)$ sont holomorphes dans le voisinage du point $x = 0$. Dans le cas ci-dessus, $v(x)$ est une fonction lacunaire.

L'identité

$$u_1(x) \equiv c_0 v(x) + \varpi(x)$$

pour un choix convenable de la constante c_0 N'EXISTE POINT.

Car $u_1(x)$ n'est pas uniforme.

Par conséquent, $u_1(x)$ est une solution singulière.

L'auteur, après avoir cherché à démontrer que M. Ozumi a obtenu toutes les solutions analytiques, a réussi à obtenir plusieurs solutions singulières. Il a donné l'exemple le plus simple.

Dans le domaine de la physique théorique l'importance des solutions singulières augmente [1]. Les solutions singulières des équations différentielles sont relativement rares. Mais lorsqu'on entre dans le domaine des équations fonctionnelles le nombre des solutions singulières devient énorme.

Considérons

$$(6) \qquad \lambda u'(x) = u(x^2) - x^2.$$

Une solution est

$$u(x) \equiv \lambda + x.$$

Dans ce cas la solution générale peut s'écrire

$$u(x) \equiv c_0 v(x) + (\lambda + x).$$

APPENDICE.

Revenons à l'équation

$$(2) \qquad w'(z) = \mathrm{P}(z) w\left(\frac{m}{n} z\right).$$

Si $\mathrm{P}(z)$ n'est pas une fonction à coefficients positifs la solution en général diverge. Mais des cas exceptionnels existent.

Si la solution diverge partout, la solution de l'équation (1) est lacunaire avec le cercle de rayon 1 comme coupure.

---

(1) *Voir* BOUSSINESQ, *Cours de Physique mathématique de la Faculté des Sciences.* Compléments au tome III. *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale.*